

А. О. ИВАНОВ, А. А. ТУЖИЛИН

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ



Москва ♦ Ижевск

2003

Интернет-магазин

MAHES

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №03-01-14142

Иванов А. О., Тужилин А. А.

Теория экстремальных сетей. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 424 стр.

Данная книга представляет собой первое в России систематическое изложение теории разветвленных экстремалей одномерных вариационных функционалов. Этот раздел математики активно исследуется в последнее десятилетие как у нас в стране, так и за рубежом. Книга будет понятна студентам, знакомым с основами теории графов, топологии и дифференциальной геометрии. Кроме того, основные результаты, касающиеся геометрии сетей на плоскости, могут быть освоены даже старшеклассниками.

Книга будет интересна широкому кругу читателей, интересующихся современной математикой.

ISBN 5-93972-292-X

© Институт компьютерных исследований, 2003

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Предисловие

Данная книга представляет собой расширенную и дополненную версию нашей монографии “Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems”, вышедшей в издательстве World Publisher Press в 2001 году. Издание в России стало возможным благодаря финансовой поддержке РФФИ, проект 03–01–14142. Авторы благодарны А. В. Борису за проявленную им настойчивость и инициативу.

Отметим основные отличия от “Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems”. Прежде всего, в книге появилась глава, посвященная отношению Штейнера. Также мы включили в текст несколько новых результатов и, разумеется, исправили часть неточностей и опечаток.

В заключение заметим, что данная книга представляет собой первое в России систематическое изложение теории разветвленных экстремалей одномерных вариационных функционалов. Этот раздел математики активно исследуется в последнее десятилетие как у нас в стране, так и за рубежом. Книга будет понятна студентам, знакомым с основами теории графов, топологии и дифференциальной геометрии. Кроме того, основные результаты, касающиеся геометрии сетей на плоскости, могут быть освоены даже старшеклассниками. Мы надеемся, что книга будет интересна широким кругам читателей, интересующихся современной математикой.

А. О. Иванов
А. А. Тужилин
июль 2003, Москва

Введение

Настоящая монография является введением в *теорию экстремальных сетей* — новый раздел математики, изучающий разветвленные экстремали одномерных вариационных функционалов. Напомним, что классическая задача вариационного исчисления состоит в описании экстремалей вариационных функционалов, заданных на пространствах кривых, соединяющих некоторые две фиксированные точки объемлющего пространства. Теория таких экстремалей хорошо разработана и входит в стандартные университетские курсы оптимального управления, дифференциальной геометрии и теоретической механики. Возникают естественные вопросы: как обобщить эту теорию на случай, когда фиксировано не две, а больше точек объемлющего пространства? Как обобщить понятие экстремальной кривой? Так возникает идея ввести в рассмотрение новый объект — *сеть*, — одномерный континуум, который можно представлять себе как объединение конечного числа кривых.

Экстремальные сети для простейших вариационных функционалов, таких как функционал длины, возникали в том или ином виде в различных теоретических и прикладных разработках, однако систематического исследования проведено не было. И это несмотря на классическую по своей постановке задачу. По-видимому, первые постановки задачи этого типа возникли у французских математиков, среди которых Жерон, Клайперон и Ламе. Такими задачами интересовался также Гаусс, который в своем письме к Шумахеру [50] поднимает вопрос о том, как построить кратчайшую систему дорог, соединяющую четыре немецких города: Гамбург, Бремен, Ганновер и Брауншвейг. Общая задача о поиске связной кратчайшей сети, соединяющей данное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером [95] в 1934 и впоследствии, благодаря вышедшей в 1941 году знаменитой книге Куранта и Роббинса [17], стала широко известна под именем *проблемы Штейнера* (см. исторические обзоры в [11], [67], [78] или [87]). Отметим, что у проблемы Штейнера имеются разновидности, одной из которых является так называемая *прямоугольная проблема Штейнера*, состоящая в описании связных кратчайших сетей на плоскости, ребра которых представляют собой ломаные линии с параллельными осям координат

звеньями. Эта проблема естественно возникает при разводке электронных печатных плат (см. [61] и [67]).

Таким образом, сама идея изучения сетей возникла несколько сотен лет назад. За прошедшее время интерес к проблеме Штейнера не угас. Более того, сейчас систематическое изучение сетей, удовлетворяющих тем или иным условиям, а особенно условиям экстремальности, становится еще более актуальным в связи с бурным развитием сетей разного типа и уровня, таких как транспортные сети, компьютерные сети, сети, заданные химической структурой сложных молекул, скажем молекул ДНК и т.д.

Предлагаемая монография не претендует на всестороннее освещение проблемы. Это объясняется тем, что классический материал, посвященный проблеме Штейнера, уже изложен в монографиях (см., например, [67], а также монографию авторов [78]). *Главная* наша *цель* — дать наиболее широкое естественное обобщение проблемы Штейнера и выделить ключевые направления исследований, которые можно провести в такой общности. Кроме результатов, полученных авторами, мы сформулируем большое количество нерешенных задач, наличие которых еще раз подчеркивает, что излагаемая теория находится лишь в начале своего развития. Многие из этих задач не решены только потому, что у авторов просто не хватило времени их решить. Мы верим, что заинтересованный читатель, активно включившись в исследование, сможет сделать много красивых и неожиданных открытий.

Чем отличается предлагаемая монография от уже имеющихся публикаций?

Во-первых, основные работы других авторов, связанные с экстремальными сетями, посвящены изучению кратчайших сетей, причем в качестве функционалов рассматривается или функционал евклидовой длины в векторном пространстве, в основном, на плоскости, или функционал манхеттенской длины (манхеттенская длина вектора равна сумме длин его проекций на координатные оси), также в основном на плоскости (см. цитируемую литературу). Имеются, конечно, и немногочисленные работы, посвященные другим функционалам (см., например, работы Моргана и его учеников [45], [104], [105], [117], [118], работы Цислика [10], [11], [13], [14] и других авторов). Задача, которую ставят перед собой авторы настоящей монографии, — построить общую теорию сетей, экстремальных по отношению к произвольным функционалам в произвольных объемлющих пространствах, скажем в гладких многообразиях и многообразиях с особенностями, таких как поверхности многогранников или пространства А. Д. Александрова.

Во-вторых, при изучении кратчайших сетей локальная структура сети, т.е. устройство достаточно малых окрестностей точек сети, определяется достаточно жестко. Если же вместо кратчайших сетей рассматривать экстремали, то возникает несколько возможностей. Отметим, что экстремальность — это свойство сети, характеризующее поведение функционала при малых деформациях сети. Для кривых деформации определяются достаточно естественно и, более или менее, однозначно. Для сетей можно рассматривать несколько существенно разных типов деформаций. Мы выделяем ровно два: деформации, сохраняющие структуру сети, и деформации, расщепляющие вершины (см. пример расщепления вершины на рис. 1). Заметим, что сеть Γ , затягивающая вершины квадрата и имеющая ровно одну внутреннюю вершину v , расположенную в центре этого квадрата, является экстремалью функционала длины по отношению к деформациям, сохраняющим структуру сети. Однако деформация, расщепляющая вершину v так, как показано на рис. 1, уменьшает длину сети Γ с ненулевой скоростью, поэтому сеть Γ уже не является экстремальной по отношению к таким деформациям.

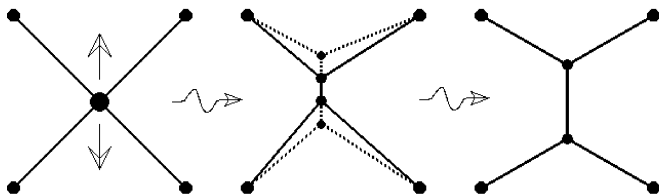


Рис. 1. Расщепление вершины.

Назовем сети, которые при деформациях не меняют своей структуры, *параметрическими*. Сети, для которых расщепления вершин разрешены, т.е. сети, структура которых может меняться при деформациях, назовем *сетями-следами*. В следующем разделе мы приведем формальные определения этих типов сетей.

В-третьих, функционалы типа длины не зависят от параметризации. Как следствие, под сетью можно понимать связные совокупности кривых, не заботясь о том, как эти кривые параметризованы. В этом контексте сеть на плоскости, скажем, можно представлять себе как плоский граф. В общем случае, например, для функционала энергии, параметризация важна. Поэтому при определении сети в рассматриваемой теории приходится различать сети, параметризованные по-разному. Тем

самым мы приходим к понятию *оснащенного графа*, или графа с фиксированной параметризацией ребер.

В-четвертых, сети по самой своей природе обладают как геометрическими, так и комбинаторными характеристиками, имеют как непрерывные, так и дискретные свойства. Поэтому разработка теории экстремальных сетей потребовала создания новых методов, не имеющих аналогов в классической теории. Возник технический аппарат, объединяющий в себе методы дифференциальной геометрии и классического вариационного исчисления, с одной стороны, и методы дискретной геометрии и комбинаторики, с другой стороны. Кроме того, авторы надеются, что непрерывно-дискретная природа сетей может позволить по-новому взглянуть на задачи, связанные с геометрическим квантованием в самом широком смысле этого слова: свойства экстремальных сетей (для подходящего вариационного функционала) содержат информацию как о непрерывных (геометрических), так и о дискретных (квантовых) характеристиках объемлющего пространства.

Приведенные особенности излагаемой теории позволяют взглянуть на известные феномены с более общих позиций, что часто приводит к пониманию реальных основ классических результатов. Кроме того, общность теории дает возможность наблюдать в разнообразных приложениях многочисленные новые эффекты, не характерные для функционала длины.

Структура книги такова. *Первая глава* является вводной. В ней мы определим основные понятия, необходимые в дальнейшем, такие как топологические графы, параметрические сети и сети-следы, а также сформулируем общую одномерную вариационную задачу для сетей.

Во *второй главе* мы изучим локальную структуру сетей, экстремальных по отношению к классическому вариационному функционалу, лагранжиан которого является гладким везде, кроме, быть может, тех точек фазового пространства, в которых скорость равна нулю. Естественным примером такого негладкого функционала является обычная евклидова длина, так как соответствующий лагранжиан $L(x, \xi) = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ не является гладким при $\xi = 0$. Мы приведем критерий экстремальности параметрических сетей и сетей-следов и, в качестве следствия, установим, что нетривиальность проблемы Штейнера, т.е. наличие богатого набора решений разных топологических (комбинаторных) типов, является следствием негладкости функционала длины там, где скорость равна нулю.

Третья глава является, на первый взгляд, отступлением от основной темы данной монографии: она посвящена линейным сетям в \mathbb{R}^N

(сеть называется линейной, если ее ребра — прямолинейные отрезки). Однако, как будет видно из последующих глав, многие нетривиальные результаты, касающиеся экстремалей для функционала длины в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N , вытекают из общих свойств линейных сетей. Отметим, что третья глава имеет и самостоятельный интерес для специалистов по теории графов.

В *четвертой главе* мы исследуем локальные и глобальные свойства параметрических сетей, экстремальных относительно функционала римановой длины и взвешенной римановой длины (в последнем случае значение функционала на сети равно линейной комбинации длин ребер с заданными положительными коэффициентами — весами ребер). Анализируя локальную структуру, мы будем допускать, что некоторые ребра сети могут вырождаться, т.е. являться точечными кривыми. Это допущение нам будет нужно в дальнейшем для изучения экстремальных сетей-следов, так как мы будем моделировать расщепление вершин сети-следа с помощью именно таких параметрических сетей с вырождениями. Отметим, что наличие вырожденных ребер существенно усложняет критерий экстремальности параметрической сети. Результаты о глобальной структуре мы приведем на примере сетей из \mathbb{R}^N . Здесь будет описано семейство всех сетей с данной границей и фиксированной топологической структурой (мы покажем, что конфигурационное пространство таких сетей образует выпуклый многогранник, и опишем характерные параметры этого многогранника); далее мы покажем, как связаны свойства экстремальных сетей со свойствами конечных множеств, которые они затягивают (будут приведены геометрические инварианты конечных подмножеств, через которые можно оценить “сложность” затягивающих их экстремальных сетей). Отметим, что идеи, приведенные в последнем случае, имеют практический выход: используя их, можно существенно уменьшить перебор при построении кратчайших коммуникационных сетей, что важно при компьютерном моделировании таких сетей.

Пятая глава посвящена сетям-следам, экстремальным по отношению к функционалу евклидовой длины. Здесь мы рассмотрим сети-следы не только в евклидовых пространствах, но и на евклидовых многообразиях, таких как плоский тор или плоская бутылка Клейна, а также на поверхностях многогранников и на поверхностях постоянной кривизны. Этот раздел носит обзорный характер, и в нем приведены в основном результаты авторов и их учеников, полученные за последние десять лет. Важность данного раздела состоит в описании оригинальных идей и методов, использованных при исследовании сетей в евкли-

довом случае, которые могли бы быть применены и в общей теории. Кстати сказать, некоторые из таких приложений описываются в следующем разделе.

В *шестой главе* мы расширим класс изучаемых вариационных функционалов. От лагранжианов гладких везде, кроме точек, соответствующих нулевым скоростям, мы перейдем к рассмотрению лагранжианов, имеющих и другие особенности. В качестве первого шага естественно рассмотреть лагранжианы, заданные некоторой нормой. Классическим примером лагранжиана такого типа является манхеттенская норма, имеющая особенности не только в нуле, но и на координатных плоскостях. Наличие дополнительных особенностей у лагранжианов приводит к существенно новым эффектам. Одним из таких эффектов является тот факт, что условия экстремальности сети перестают быть локальными: в отличие от экстремалей функционалов с лагранжианами гладкими везде, кроме нулей скоростей, для которых экстремальность сети равносильна экстремальности каждого достаточно малого фрагмента этой сети, для общих норм из экстремальности малых фрагментов уже не следует экстремальность сети в целом. Мы приведем критерий экстремальности сети в нормированном пространстве и, на примере манхеттенской нормы, покажем, какие глобальные геометрические и топологические ограничения накладывает на сеть условие ее экстремальности.

Заключительная *седьмая глава* посвящена отношению Штейнера. Эта важная характеристика метрического пространства показывает, на сколько длина кратчайшей сети может отличаться от длины минимального остовного дерева. Интерес к вычислению отношения Штейнера обусловлен тем, что минимальные остовные деревья обычно используются в качестве приближенных решений задачи о поиске кратчайшей сети. Мы приведем обзор современных результатов на эту тему, включая недавние результаты авторов об отношении Штейнера римановых многообразий, а также обсудим лакуны в известном доказательстве Ду и Хванга [28], [30] гипотезы Гилберта–Поллака [52] об отношении Штейнера евклидовой плоскости.

В *Дополнении* мы приведем широкий список еще не решенных задач. Отобранные нами задачи можно рассматривать как отражение представлений авторов о возможных направлениях развития излагаемой теории.

Книга рассчитана на самые широкие круги читателей: студентов и аспирантов физико-математических специальностей, интересующихся современными вариационными методами в геометрии и топологии,

а также их приложениями в физике, биологии, экономике и других науках. Книга также будет интересна и специалистам в перечисленных областях. На основе книги может быть прочитан специальный курс для студентов-математиков (авторы несколько лет читают такой курс в Московском государственном университете).

Мы с удовольствием пользуемся случаем выразить свою глубокую и сердечную благодарность нашему учителю академику РАН А. Т. Фоменко, сформировавшему наши математические интересы, за его неустанную поддержку и постоянное внимание к нашей работе. Мы очень признательны всем многоуважаемым коллегам-математикам, с которыми мы многократно и плодотворно обсуждали возникающие задачи. Вот их далеко не полный список: С. В. Алешин (МГУ), А. Артыкбаев (Ташкент), И. К. Бабенко (МГУ), Л. Бербраер (Израиль), В. Берестовский (Омск), А. Бобенко (Берлин), А. В. Болсинов (МГУ), Н. Бокан (Белград), А. А. Борисенко (Харьков), А. Ю. Борисович (Гданьск), Ю. Г. Борисович (Воронеж), В. М. Бухштабер (МГУ), Ю. Г. Бураго (С.-Петербург), В. В. Вершинин (Новосибирск), Э. Б. Винберг (МГУ), Г. А. Гальперин (США), В. Л. Голо (МГУ), М. И. Гринчук (МГУ), Н. П. Долбилин (МИРАН), Р. Живальевич (Белград), В. А. Залгаллер (С.-Петербург), М. И. Зеликин (МГУ), В. А. Зорич (МГУ), О. М. Касим-Заде (МГУ), Б. С. Кругликов (МГТУ), В. Б. Кудрявцев (МГУ), Е. А. Кудрявцева (МГУ), О. А. Ладыженская (С.-Петербург), О. Б. Лупанов (МГУ), Ю. И. Манин (Германия), О. В. Мантуров (МГПУ), С. В. Матвеев (Челябинск), А. В. Михалев (МГУ), А. С. Мищенко (МГУ), О. Р. Мусин (Москва), Н. Ю. Нецветаев (Санкт-Петербург), А. Ю. Ольшанский (МГУ), А. Л. Онищик (МГУ), А. А. Ошемков (МГУ), А. В. Погорелов (Харьков), З. Ракич (Белград), Ю. Г. Решетняк (Новосибирск), И. Х. Сабитов (МГУ), А. Б. Скопенков (Москва), Ю. П. Соловьев (МГУ), А. М. Степин (МГУ), Б. Ю. Стернин (МГУ), В. В. Трофимов (МГУ), Н. Н. Уральцева (С.-Петербург), Е. А. Фоминых (Челябинск), А. В. Чернавский (МГУ), В. В. Шарко (Киев), В. Е. Шаталов (МГУ), И. Ф. Шарыгин (Москва), А. И. Шафаревич (МГУ), Е. В. Шикин (МИРАН), А. Л. Шмелькин (МГУ), М. И. Штогрин (МИРАН), А. С. Asperti (Бразилия), L. Barbosa (Бразилия), M. Bern (США), R. Böhme (Германия), M. do Carmo (Бразилия), D. Cieslik (Германия), M. Deza (Франция), D. Z. Du (США), A. Gray (США), С. Gorodski (Бразилия), D. Gromoll (Германия), P. M. Gruber (Австрия), M. Hasewinkel (Голландия), S. Hildebrandt (Германия), F. Hwang (USA), L. Jorge (Бразилия), J. Jost (Германия), H. Karcher (Германия), T. L. Kunii (Япония), Le Hong Van (Герма-

ния), М. Lustig (Германия), F. Mercuri (Бразилия), F. Morgan (США), R. S. Palis (Бразилия), К. Polthier (Германия), А. Rigas (Бразилия), Rodrigues (Бразилия), А. Ross (Испания), Н. Rubinstein (Австралия), F. Tomi (Германия), Н. Н. Torriani (Бразилия), J. Wood (Великобритания), N. Wormald (Австралия), Н. Zieschang (Германия). Мы хотим также поблагодарить наших учеников, постоянный контакт с которыми очень для нас полезен.

Особую благодарность мы выражаем профессору Френку Моргану, пригласившему одного из авторов выступить на семинаре в Princeton University, США, и рекомендовавшему опубликовать монографию по теме доклада.

При работе над теорией экстремальных сетей мы пользовались частичной поддержкой, предоставленной РФФИ (проекты 95–01–01604, 98–01–00240, 01–01–00583, 03–01–00503); Грантами Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проекты 96–15–96142, 00–15–96059, НШ–1988.2003.1), Грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук (проекты 01–15–99268, МД–263.2003.01, МД–295.2003.01), INTAC (проекты 94–3666, 97–0808), Deutschen Forschungsgemeinschaft (SFB 256); FAPESP, Sao Paulo, Brasil (93/0249–3, 93/0248–7); Национальным центром научных исследований Франции (1993–1994); Международным научным фондом Дж. Сороса (1993–1995); Фондом Макса Планка (1999). Авторы очень признательны всем этим организациям. Мы также хотели бы поблагодарить Организационные комитеты Конференции по геометрической визуализации в Токио (1993), Международного математического конгресса в Цюрихе (1994), Конференции по дифференциальным уравнениям в частных производных и их приложениям в геометрии и физике в Триесте, ICTP (1995), Международной конференции по дифференциальной геометрии в Рио-де-Жанейро (1996), Конференции по трехмерной топологии в Рурском университете (Бохум, Германия, 1996), Семинара по топологии CW -комплексов (университет Айзу, Япония, 1997), Международного математического конгресса в Берлине (1998), Конференции по маломерной топологии (Челябинск, 1999) за предоставленную финансовую поддержку.

Наконец, мы хотим выразить сердечную признательность нашим семьям за постоянную моральную и материальную поддержку.

А. О. Иванов
А. А. Тужилин
июль 2003, Москва

Оглавление

Предисловие	i
Введение	ii
ГЛАВА 1. Предварительные сведения	1
1.1. Графы	1
1.1.1. Топологические и оснащенные графы, их эквива- лентность	2
1.1.2. Операции над графами	4
1.1.3. Граница графа, локальный граф	7
1.1.4. Гладкая структура на топологическом графе	8
1.2. Параметрические сети	8
1.2.1. Основные определения	8
1.2.2. Классы гладкости сетей	10
1.3. Сети-следы	11
1.3.1. Сети-следы и их канонические представители	13
1.4. Постановка вариационной задачи	16
1.4.1. Конструкция реберных функционалов	17
1.4.2. Конструкция реберных функционалов для сетей фиксированной топологии	21
ГЛАВА 2. Критерии экстремальности сетей	24
2.1. Локальная структура экстремальных параметрических сетей	25
2.2. Локальная структура экстремальных сетей-следов	30
2.2.1. Гладкие лагранжианы	30
2.2.2. Квазирегулярные лагранжианы	32
ГЛАВА 3. Линейные сети	42
3.1. Взаимно параллельные линейные сети с данной границей	43
3.2. Геометрия плоских линейных деревьев	48
3.2.1. Число вращения вложенного плоского линейного дерева	49

3.2.2.	Основная теорема	50
3.3.	К доказательству теоремы 3.2	50
3.3.1.	Плоские ломаные I: случай общего положения . . .	51
3.3.2.	Плоские ломаные II: общий случай	58
3.3.3.	Число вращения плоского линейного дерева	65
3.3.4.	Доказательство теоремы 3.2	69
3.3.5.	Случай $p = q$	69
3.3.6.	Случай $p < q$	72
ГЛАВА 4.	Экстремали функционалов типа длины: случай параметрических сетей	75
4.1.	Экстремальные параметрические сети для функционала римановой длины	75
4.2.	Локальная структура взвешенных экстремальных параметрических сетей	81
4.3.	Многогранник взвешенных экстремальных сетей в \mathbb{R}^N с заданными типом и границей	83
4.3.1.	Структура множества взвешенных экстремальных сетей	85
4.3.2.	Погруженные взвешенные экстремальные сети Штейнера на плоскости	90
4.4.	Глобальное устройство плоских взвешенных экстремальных деревьев	92
4.5.	Н. С. Гусев. О выпуклых реализациях плоских линейных деревьев	93
4.6.	Геометрия плоских вложенных экстремальных взвешенных бинарных деревьев	97
4.6.1.	Число вращения плоского вложенного взвешенного бинарного дерева	98
ГЛАВА 5.	Экстремали функционала длины: случай сетей—следов	102
5.1.	Локально минимальные сети на евклидовой плоскости . .	103
5.1.1.	Соответствие между плоскими бинарными деревьями и диагональными триангуляциями	104
5.1.2.	Структурные элементы диагональных триангуляций	106
5.1.3.	Паркетная реализация бинарных деревьев с не превосходящим пяти числом вращения	108
5.1.4.	Паркеты и их свойства	110
5.1.5.	Структурные элементы скелетов из \mathcal{WP}_5	114

5.1.6.	Операции редукции и антиредукции	115
5.1.7.	Боковины и их свойства	118
5.1.8.	Теорема классификации скелетов из \mathcal{WP}_3	119
5.1.9.	Расположение наростов в паркетах, принадлежащих \mathcal{WP}_3 , на их скелетах	122
5.1.10.	Теорема реализации	123
5.1.11.	Локально минимальные бинарные деревья с правильной границей	124
5.1.12.	Наросты и линейные участки локально минимальных сетей с выпуклыми границами	127
5.1.13.	Квазиправильные границы, которые нельзя затянуть ни одним локально минимальным бинарным деревом	148
5.1.14.	Невырожденные локально минимальные сети с выпуклой границей. Циклический случай	149
5.2.	Замкнутые локально минимальные сети на замкнутых поверхностях постоянной кривизны	162
5.2.1.	Локально минимальные сети на поверхностях постоянной положительной кривизны	164
5.2.2.	Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских торах	167
5.2.3.	Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских бутылках Клейна	183
5.2.4.	Замкнутые сети на двумерных поверхностях отрицательной кривизны	191
5.3.	Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях многогранников	196
5.3.1.	Общие свойства локально минимальных сетей на многогранниках	197
5.3.2.	Метрические и топологические ограничения на устройство замкнутых локально минимальных сетей	204
5.3.3.	Классификация замкнутых локально минимальных сетей на правильном тетраэдре	209
5.3.4.	Алгоритм “размножения” замкнутых локально минимальных сетей на многогранниках	215
5.3.5.	Замкнутые геодезические на кубе	220
5.4.	М. В. Пронин. Индексы Морса локально минимальных сетей	221
5.4.1.	Введение	221
5.4.2.	Индексная форма	222

5.4.3.	Локально минимальные сети на многообразиях неположительной кривизны	227
5.4.4.	Локально минимальные сети на сфере	229
5.4.5.	Теорема об индексе	231
5.5.	Г. А. Карпунин. Минимальные сети и комбинаторная те- ория Морса	235
5.5.1.	Введение	235
5.5.2.	Минимальные сети	236
5.5.3.	Комбинаторная теория Морса	244
ГЛАВА 6.	Экстремали функционалов, заданных нормами	261
6.1.	Нормы общего вида	264
6.1.1.	Локально минимальные и экстремальные сети . . .	264
6.1.2.	Формула первой вариации длины отрезка в норми- рованном пространстве	265
6.1.3.	Устройство экстремальных кривых	271
6.1.4.	Локальная структура экстремальных линейных параметрических сетей	272
6.1.5.	Критерий экстремальности линейных сетей–следов	280
6.2.	Устойчивость экстремального бинарного дерева при де- формациях граничного множества	287
6.3.	Плоские нормы со строго выпуклыми гладкими окруж- ностями	290
6.3.1.	Критерий экстремальности сетей–следов	290
6.3.2.	Геометрия экстремальных сетей–следов	294
6.4.	Манхеттенские локально минимальные и экстремальные сети	304
6.4.1.	Общие свойства	305
6.4.2.	Экстремальные сети и линейные сети	306
6.4.3.	Экстремальные манхеттенские сети на плоскости .	307
6.5.	Д. П. Ильютко. N -нормированные плоскости	319
6.5.1.	Локально минимальные сети на n -нормированных плоскостях	319
6.5.2.	Экстремальные сети на n -нормированных плос- костях, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$	324
ГЛАВА 7.	Отношение Штейнера	342
7.1.	Отношения Штейнера общих метрических пространств .	344
7.2.	Отношение Штейнера римановых многообразий	348
7.3.	Отношение Штейнера нормированных пространств	354

7.3.1.	Следствия общей теории	355
7.3.2.	Исследование отношения Штейнера с помощью расстояния Банаха–Мазура	356
7.3.3.	Пространства с ℓ_p -нормой	357
7.3.4.	ℓ -геометрии	363
7.4.	Отношение Штейнера и другие задачи дискретной гео- метрии	364
7.4.1.	Число Юнга	364
7.4.2.	Упаковки и покрытия	366
7.4.3.	Проблема Тамма	369
Приложение. Некоторые нерешенные задачи		371
Список иллюстраций		392
Алфавитный указатель		393

ГЛАВА 1

Предварительные сведения

В данной главе собраны основные определения и предварительные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1. Графы

Для того чтобы обобщить классическую вариационную задачу на случай, когда граничное множество M состоит более чем из двух точек, нам прежде всего понадобится определить аналог кривой, для которого M можно рассматривать как границу. Для этого представляется естественным заменить кривую на конечный набор кривых, склеенных по своим концевым точкам. Так как кривая, по определению, — это непрерывное отображение отрезка, то такой набор кривых может быть определен как непрерывное отображение некоторого топологического пространства, склеенного из отрезков. Последнее есть не что иное, как одномерный клеточный комплекс, который, с комбинаторной точки зрения, можно рассматривать как обычный граф. Чтобы подчеркнуть топологическую природу рассматриваемых одномерных комплексов, мы иногда будем называть их *топологическими графами*.

В случае когда вариационный функционал зависит от параметризации, необходимо, вообще говоря, различать кривые, отличающиеся выбором параметра. Тем самым мы приходим к необходимости рассматривать оснащенные одномерные комплексы, т.е. клеточные комплексы, для которых фиксированы характеристические отображения их клеток. Такие комплексы мы называем *оснащенными графами*.

Ниже мы предполагаем известными стандартные понятия топологии, такие как топологическое пространство, его хаусдорфовость, замыкание $\text{cl } Y$, внутренность $\text{int } Y$ и граница ∂Y подмножества топологического пространства, непрерывное отображение топологических пространств, гомеоморфизм. Читатели, незнакомые с этими понятиями, могут обратиться к [115].

1.1.1. Топологические и оснащенные графы, их эквивалентность

Напомним (см., например [43]), что хаусдорфово топологическое пространство K называется *клеточным комплексом* (или *клеточным пространством*, или *CW-комплексом*), если задано его представление в виде объединения $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_n} e_i^n$ попарно непересекающихся множеств (*клеток*), причем для каждой клетки e_i^n существует непрерывное отображение φ стандартного замкнутого n -мерного диска $D^n \subset \mathbb{R}^n$ в K , называемое *характеристическим отображением клетки* e_i^n , такое, что сужение φ на внутренность $\text{int } D^n$ диска D^n есть гомеоморфизм $\varphi: \text{int } D^n \rightarrow e_i^n$. Кроме того, предполагаются выполненными следующие две независимые аксиомы.

(C) Граница $\partial e_i^n = (\text{cl } e_i^n) \setminus e_i^n$ клетки e_i^n содержится в объединении конечного числа клеток e_i^m размерности $m < n$.

(W) Множество $F \subset K$ замкнуто в K тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^n пересечение $F \cap \text{cl } e_i^n$ замкнуто в K .

Представление пространства K в виде объединения клеток называется *клеточным разбиением*. Ограничение $\varphi|_{S^{n-1}}$ характеристического отображения φ клетки e_i^n на границу S^{n-1} диска D^n называется *приклеивающим отображением*. Число n называется *размерностью клетки* e_i^n , а наименьшая верхняя грань размерностей всех клеток комплекса K — *размерностью K* . Говорят, что комплекс *конечен*, если он состоит из конечного числа клеток.

Подкомплексом называется замкнутое подмножество клеточного комплекса K , являющееся объединением клеток из K . Ясно, что каждый подкомплекс — это клеточный комплекс. Если $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_n} e_i^n$ — клеточный комплекс, то легко видеть, что множество $K^m = \bigcup_{n=0}^m \bigcup_{i \in I_n} e_i^n$ является замкнутым подмножеством в K , т.е. является подкомплексом. Подкомплекс K^m называется *m -мерным остовом* комплекса K .

Далее, непрерывное отображение φ клеточного комплекса X в клеточный комплекс Y называется *клеточным*, если $\varphi(X^m) \subset Y^m$ для любого m . Клеточное отображение называется *клеточной эквивалентностью*, если оно обратимо, причем обратное отображение — также клеточное. Два клеточных пространства называются *клеточно эквивалентными*, если существует клеточная эквивалентность одного из них на другое.

Клеточные комплексы с фиксированными характеристическими отображениями называются *оснащенными*. Клеточная эквивалент-

ность, уважающая оснащения, называется *оснащенной эквивалентностью*.

Определение. *Обобщенным графом* G назовем произвольный одномерный клеточный комплекс. Клетки размерности 0 называются *вершинами* графа G , а клетки размерности 1 — *ребрами*. Замыкания ребер графа G будем называть *замкнутыми ребрами*. Конечный обобщенный граф называется *топологическим графом*.

Замечание. Каждый клеточный комплекс K может быть построен из замкнутых шаров с помощью приклеивающих отображений. В самом деле, пусть уже построен $(n-1)$ -й остов K^{n-1} , и $\varphi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow K$ — характеристическое отображение, соответствующее n -мерной клетке e_α^n комплекса K . Поскольку $\varphi(\partial D_\alpha^n) \subset K^{n-1}$, определено отображение Φ несвязного объединения $S = \Pi_\alpha S_\alpha^{n-1}$, где $S_\alpha^{n-1} = \partial D_\alpha^n$, в K^{n-1} , а именно, $\Phi|_{S_\alpha^{n-1}} = \varphi_\alpha|_{S_\alpha^{n-1}}$. Пусть $\mathcal{D} = \Pi_\alpha D_\alpha^n$. Тогда очевидно, что $K^n = \mathcal{D} \cup_\Phi K^{n-1}$, т.е. n -й остов K^n получается из K^{n-1} приклеиванием всех n -мерных клеток по их приклеивающим отображениям.

В частности, каждый обобщенный граф — это топологическое пространство, склеенное из набора отрезков по некоторой эквивалентности, отождествляющей концевые точки этих отрезков.

Определение. Клеточная эквивалентность, заданная на обобщенных графах, называется *эквивалентностью* графов. Графы G_1 и G_2 называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$.

С точки зрения теории графов, эквивалентные графы устроены одинаково, и их, как правило, не различают.

Поскольку каждый граф наделен как структурой графа, так и структурой топологического пространства, вся топологическая терминология и вся терминология теории графов будет применяться в дальнейшем без комментариев. Соответствующие определения могут быть найдены, например, в [43], [120] и [39].

Если у графа G фиксировано некоторое оснащение, то такой граф будем называть *оснащенным*. Аналогично, если на графе фиксирована какая-нибудь другая дополнительная структура, скажем, ориентация или весовая функция на ребрах графа, то мы будем добавлять соответствующее прилагательное: например, мы будем говорить об *ориентированных* и *взвешенных* графах. Говоря об эквивалентности графов, наделенных дополнительной структурой, мы всегда будем предполагать, что эта эквивалентность сохраняет дополнительную структуру.

Замечание. Каждое оснащение обобщенного графа порождает естественную ориентацию этого графа в силу того, что все параметризующие отрезки ориентированы от начала к концу. В дальнейшем мы будем этим пользоваться, не оговаривая специально.

В дальнейшем мы, как правило, будем работать с топологическими (т.е. с конечными) графами. Поэтому, если не оговорено противное, все рассматриваемые графы предполагаются конечными.

1.1.2. Операции над графами

Сначала мы приведем список операций, корректно определенных как для оснащенных графов, так и для графов без фиксированного оснащения. После этого мы опишем специфические операции, применимые лишь к графам без оснащения.

Пусть G_1 и G_2 — топологические графы (оснащенные или нет). Объединение $G_1 \sqcup G_2$ топологических пространств G_1 и G_2 наделяется естественной структурой графа, а именно, множество вершин (ребер) графа $G_1 \sqcup G_2$ — это объединения множеств вершин (ребер) графов G_i . Граф $G_1 \sqcup G_2$ назовем *объединением* или *суммой* графов G_1 и G_2 .

Пусть G — некоторый топологический граф (оснащенный или нет).

Выберем в G произвольное ребро e и рассмотрим подпространство G' в G , полученное выкидыванием из G этого ребра. Ясно, что G' является подграфом в G . Описанная только что перестройка графа G называется *выкидыванием из G ребра e* и обозначается через $G \setminus e$.

Пусть v — произвольная вершина графа G . Пару (G, v) назовем *отмеченным графом*.

Пусть (G, v) и (G', v') — два отмеченных графа, и $I = [a, b]$ — отрезок. Склеим G , I и G' (как топологические пространства) следующим образом. Точку $a \in I$ отождествим с v , а точку $b \in I$ отождествим с v' . Полученное топологическое пространство \overline{G} наделим структурой графа, выбрав в качестве вершин все вершины из G и G' , а в качестве ребер — все ребра из G и G' , а также внутренность отрезка I (точнее, его образа при склейке). Эта операция называется *склейкой отмеченных графов (G, v) и (G', v')* , а ребро e , полученное из отрезка I , — *ребром склейки*. Граф, полученный в результате такой склейки, будем обозначать через $(G, v) \#_e (G', v')$.

Пусть v — произвольная вершина степени $d > 1$ графа G . Построим новый граф G' , перестав отождествлять те концы отрезков, параметризующих инцидентные v ребра, которые склеиваются в вершину v . Говорят, что граф G' получен из G *разрезанием по вершине v* . Ясно, что G' имеет столько же ребер, сколько и G , а количество вершин у G' больше, чем у G на $d - 1$. Отметим, что у графа G' имеется ровно d вершин, которые возникли при разрезании вершины v (в графе G они все склеиваются в вершину v).

Пусть e — произвольное ребро графа G , и $I = [a, b]$ — отрезок, параметризующий это ребро. Пусть v и v' — вершины графа G , инцидентные ребру e (эти вершины могут совпадать, если e — петля). Для определенности, предположим, что точка $a \in I$ отождествляется с v , а точка $b \in I$ — с v' . Выберем на e (фактически, на (a, b)) некоторую точку A и рассмотрим два отрезка: $I_1 = [a, A]$ и $I_2 = [A, b]$. Выбросим из G ребро e и к полученному графу $G \setminus e$ приклеим отрезки I_1 и I_2 , отождествив вершину v с точкой $a \in I_1$, а вершину v' — с точкой $b \in I_2$. Полученное топологическое пространство наделим структурой графа, объявив вершинами все вершины из $G \setminus e$, а также две разные точки $A_1 = A \in I_1$ и $A_2 = A \in I_2$; в качестве ребер возьмем все ребра из $G \setminus e$, плюс внутренности отрезков I_1 и I_2 . Описанная операция называется *разрезанием графа G по точке A* и обозначается через $G \setminus A$. Если нам безразлично, по какой именно точке A ребра e производится разрезание (обычно это имеет место для неоснащенных графов), мы будем говорить просто о *разрезании графа по ребру e* и обозначать граф $G \setminus A$ через $G \setminus e$. Естественные вложения отрезков I_1 и I_2 в отрезок I порождают (топологическое) погружение графа $G \setminus A$ в граф G ; при этом точки A_1 и A_2 переходят в одну точку $A \in e$. Ребро e будем называть *ребром разреза*, а точку A — *точкой разреза*. Также скажем, что ребро e при разрезании по точке A *распадается на два ребра e_1 и e_2* , параметризованных, соответственно, отрезками I_1 и I_2 , а точка A *распадается на две вершины A_1 и A_2* графа $G \setminus A$.

Пусть (G, v) и (G', v') — два отмеченных графа. Склеим G и G' (как топологические пространства), отождествив точки v и v' . Полученное топологическое пространство \overline{G} наделим структурой графа, выбрав в качестве вершин все вершины из G и G' , отличные от v и v' , а также вершину w , возникшую в результате отождествления v и v' . В качестве ребер возьмем все ребра из G и G' . Эта операция называется *склеивкой (G, v) и (G', v') по отмеченным вершинам*, а вершина w — *вершиной склейки*. Граф, полученный в результате такой склейки, будем обозначать через $(G, v) \# (G', v')$.

Пусть H — произвольный подграф в графе G . Фактор-пространство G/H естественным образом наделяется структурой графа. Граф $K = G/H$ называется *фактор-графом* графа G по подграфу H . Естественную проекцию $\pi: G \rightarrow G/H$ назовем *проекцией графа G на K* .

В частности, пусть граф G' получен из графа G разрезанием по вершине v степени d , и v'_1, \dots, v'_d — вершины графа G' , возникшие при этом разрезании. В качестве подграфа H' в G' выберем граф с вершинами v'_1, \dots, v'_d , не содержащий ребер, т.е. пустой граф на вершинах v'_1, \dots, v'_d .

Очевидно, граф G'/H' эквивалентен исходному графу G . Соответствующую проекцию $G' \rightarrow G = G'/H'$ мы обозначим через ν и назовем *восстанавливающим отображением*. Если граф G' получен из G разрезанием по нескольким вершинам, то восстанавливающее отображение определяется аналогично. А именно, в этом случае граф G' получается последовательным применением операции разрезания по одной вершине, и тогда восстанавливающее отображение естественно определить как композицию соответствующих восстанавливающих отображений.

Наряду со стандартным понятием факторизации, нам понадобится следующее его ослабление. Пусть снова H — произвольный подграф в графе G , и H_1, \dots, H_k — связанные компоненты графа H . Результат последовательной факторизации графа G по подграфам H_i , $i = 1, \dots, k$, назовем *слабым фактор-графом* графа G по подграфу H и обозначим через $G|H$. Отметим, что $G/H = G|H$, если и только если подграф H связан. Естественную проекцию $\pi: G \rightarrow G|H$ назовем *слабой проекцией графа G на $K = G|H$* . Кроме того, будем говорить, что граф G *можно слабо спроектировать на граф K* , если K эквивалентен $G|H$ для некоторого подграфа H в G .

Приведем теперь операции над неоснащенными графами, которые не всегда можно перенести на случай графов с фиксированными оснащениями.

Пусть G — неоснащенный граф.

Предположим, что G содержит вершину v степени 2, и пусть e_1 и e_2 — инцидентные v ребра. Объединим клетки e_1 , v и e_2 в одну одномерную клетку (рассмотрев при этом какое-нибудь характеристическое отображение). Так перестроенное клеточное разбиение пространства G задает новый топологический граф G' , содержащий на одну вершину и на одно ребро меньше, чем исходный граф G . Будем говорить, что G' получен из G *склеивкой ребер e_1 и e_2 в вершине v* или *стиранием вершины v степени 2*.

Модифицируем теперь операции склейки для неоснащенных отмеченных графов (G, v) и (G', v') в случае, когда степени отмеченных вершин v и v' равны 1. Для этого заметим, что в результате склейки этих графов возникают вершины степени 2. Сотрем эти вершины, как было только что описано. Так подправленные операции по-прежнему будем называть *склеивками* и сохраним для них введенные выше обозначения.

Кроме того, если e и e' — ребра графов G и G' , инцидентные их вершинам v и v' степени 1, то операцию склейки графов (G, v) и (G', v') по вершине удобно иногда также называть *склеивкой по ребрам e и e'* и обозначать полученный граф $(G, v) \# (G', v')$ через $(G, e) \# (G, e')$.

1.1.3. Граница графа, локальный граф

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G мы будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины — *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть G — некоторый граф с границей B . Обозначим через \hat{G}_B подграф в G , порожденный всеми подвижными вершинами графа G . Подграф \hat{G}_B называется *подвижным подграфом графа G по отношению к границе B* . Отметим, что подвижный подграф состоит в точности из всех внутренних ребер графа G .

Выше мы определили (оснащенную) эквивалентность графов. В дальнейшем, рассматривая графы с границей, мы всегда будем предполагать, что эквивалентность графов с границей взаимно однозначно отображает границу одного графа на границу другого.

Пусть G — произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой), и $P \in G$ — некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ точки P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G , отличных от P , если P — вершина, и не содержащее петель из G . Наделим окрестность U структурой графа (оснащенного или топологического, в зависимости от того, каким является исходный граф G), объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами — внутренности отрезков в U , соединяющих эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке P* . Определим *каноническую границу* ∂G_U *локального графа G_U* , включив в нее все вершины из ∂U , а также вершину P , если P — граничная вершина графа G . Другими словами, $\partial G_U = (\partial G \cap U) \cup (G \cap \partial U)$.

Отметим, что количество ребер произвольного локального графа G_U с центром в вершине v графа G равно степени этой вершины в графе G .

Пусть G — некоторый граф с границей ∂G . Разрежем граф G по всем граничным вершинам степени, больше 1, и обозначим через G_i полученные связные компоненты. Пусть, как и выше, ν — это восстанавливающее отображение графа $\sqcup G_i$ на G . Для каждой компоненты G_i определим границу ∂G_i как множество всех тех вершин из G_i степени 1, которые лежат в прообразе $\nu^{-1}(\partial G)$ границы ∂G при восстанавливающем отображении ν . Каждая компонента G_i с границей ∂G_i называется

ся невырожденной компонентой графа G . Граф, совпадающий со своей единственной невырожденной компонентой, назовем *невырожденным*.

1.1.4. Гладкая структура на топологическом графе

Пусть G — некоторый топологический граф. Пусть на G задано два оснащения. Тогда для каждого ребра e из G имеется два характеристических отображения, которые порождают гомеоморфизм внутренности одного параметризующего ребро e отрезка на другой, причем этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма отрезков в целом. Построенный гомеоморфизм параметризующих отрезков назовем *заменой оснащения* ребра e . Максимальный по включению класс оснащений топологического графа G такой, что для любых двух оснащений из этого класса замены оснащений всех ребер графа G являются диффеоморфизмами соответствующих отрезков, назовем *гладкой структурой на графе G* . Граф G с заданной на нем гладкой структурой называется *гладким*.

Если $\nu: G_1 \rightarrow G_2$ — эквивалентность топологических графов, и на графе G_1 задана гладкая структура, то отображение ν *индуцирует* гладкую структуру на графе G_2 . Отображение ν в этом случае называется *эквивалентностью гладких графов G_1 и G_2* . Легко видеть, что любые две гладкие структуры на графе G могут быть получены друг из друга с помощью этой конструкции.

Эквивалентность гладких графов называется также *диффеоморфизмом* графов.

1.2. Параметрические сети

В данном разделе мы определим фундаментальное понятие параметрической сети на топологическом пространстве, являющееся непосредственным обобщением непрерывной кривой.

1.2.1. Основные определения

Определение. Пусть G — произвольный граф. *Параметрической сетью топологии G* на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение Γ из G в X . Топологический граф G в этом случае называется *параметризующим графом параметрической сети Γ* или ее *топологией*.

Вся терминология теории графов, топологических пространств и их отображений непосредственно переносится на параметрические сети. Например, ограничение отображения Γ на вершины, ребра, замкнутые ребра, границу, подграф параметризующего графа, и т.д. называются *вершинами, ребрами, замкнутыми ребрами, границей, подсетью* и т.д. параметрической сети Γ . Кроме того, если граф G оснащенный, ориентированный, взвешенный, невырожденный, разбит на невырожденные компоненты и т.д., то соответствующая параметрическая сеть называется *оснащенной, ориентированной, взвешенной, невырожденной, разбитой на невырожденные компоненты* и т.д.

В дальнейшем, там, где это не вызовет недоразумений, мы иногда будем отождествлять вершины, ребра, замкнутые ребра, границу сети с их образами. Например, мы будем говорить, что граница сети представляет собой правильный многоугольник, подразумевая при этом, что образ соответствующего отображения — множество вершин правильного многоугольника.

Ребро сети называется *вырожденным*, если оно является отображением в точку. Неточечное ребро сети называется *невырожденным*.

Далее, если $M \subset X$ — образ граничного отображения $\partial\Gamma$, то говорят, что *параметрическая сеть Γ затягивает множество M* (по отображению $\partial\Gamma$).

Замечание. Выше мы представили каждый граф как набор отрезков, факторизованный по некоторой эквивалентности, отождествляющей концевые точки этих отрезков. Точно так же, параметрическую сеть можно представить как набор непрерывных кривых в топологическом пространстве, некоторые концевые точки которых отождествлены.

Две параметрических сети $\Gamma_i: G_i \rightarrow X$ назовем *эквивалентными*, если существует эквивалентность $\nu: G_1 \rightarrow G_2$ такая, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$. В этом случае мы также будем говорить, что одна из параметрических сетей получена из другой *заменой параметризации*. Кроме того, если сети Γ_i наделены дополнительной структурой, такой как оснащение, ориентация, весовая функция и т.д., то мы будем предполагать, что эквивалентность ν сохраняет эту структуру.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow X$ — произвольная сеть, и T — некоторая замкнутая область в \mathbb{R}^k с отмеченной точкой $t_0 \in T$.

Определение. Непрерывное отображение $\Psi: G \times T \rightarrow X$ такое, что $\Psi(g, t_0) = \Gamma(g)$ для всех $g \in G$, называется (*k-параметрической*) *деформацией сети Γ* .

1.2.2. Классы гладкости сетей

Пусть теперь $X = W$ — гладкое многообразие, и G — оснащенный граф. Оснащенная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ называется *гладкой* (*регулярной*, *кусочно-гладкой*, *кусочно-регулярной*), если ограничение отображения Γ на каждое замкнутое ребро оснащенного графа G является таковым. Далее, пусть теперь G — гладкий граф. Параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ называется *гладкой* (*регулярной*, *кусочно-гладкой*, *кусочно-регулярной*), если для некоторого (а значит, и для любого) оснащения из гладкой структуры соответствующая оснащенная сеть является таковой.

Отметим, что понятие гладкой параметрической сети естественным образом обобщает понятие гладкой кривой. Кусочно-регулярные сети, для краткости, часто будем называть *погруженными*. Погруженную сеть назовем *вложенной*, если отображение Γ взаимно однозначно с образом. Отметим, что так как граф G компактен, то любая вложенная сеть осуществляет гомеоморфизм с образом. Таким образом, вложенная сеть — это топологическое вложение графа в многообразие, ограничение которого на каждое замкнутое ребро — кусочно-регулярная кривая.

Погруженную сеть Γ назовем *локально вложенной*, если для каждой точки параметризующего графа имеется окрестность U такая, что ограничение отображения Γ на U взаимно однозначно с образом (отметим, что замена требования взаимной однозначности на гомеоморфность приводит к эквивалентному определению).

Погруженную сеть Γ назовем *реберно вложенной*, если все ее ребра являются вложенными кривыми, причем каждое ее ребро γ не пересекает сеть $\Gamma \setminus \gamma$ (напомним, что ребра сети считаются открытыми, т.е. они параметризованы интервалами, а не отрезками). Примером реберно вложенной сети может служить объединение невырожденных компонент вложенной сети.

Особое внимание мы будем уделять сетям на плоскости или *плоским сетям*. Как правило, мы будем иметь дело с реберно вложенными плоскими сетями, поэтому, если не оговорено противное, мы, для краткости, под *плоской сетью* или *плоским графом* будем понимать именно реберно вложенную сеть на плоскости. Отметим, что это естественное расширение традиционного понятия плоского графа (вложенной плоской сети) оставляет справедливыми все необходимые нам утверждения теории плоских графов и позволяет получить те же результаты, опираясь на более простые построения.

Приведем диаграмму типов сетей (некоторые из этих типов будут определены в следующих разделах), см. рис. 1.1.

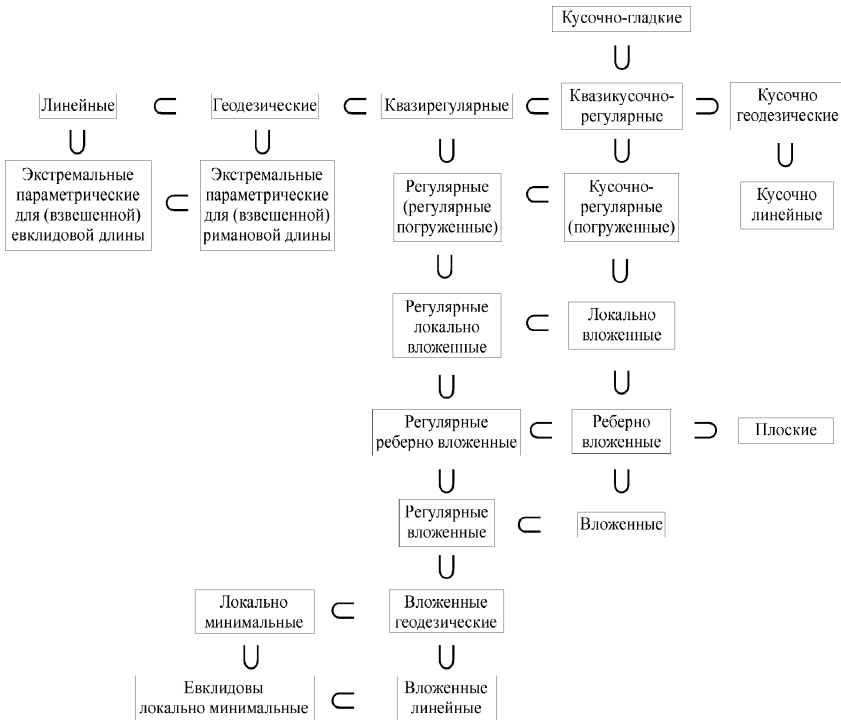


Рис. 1.1. Диаграмма типов сетей.

Говоря об эквивалентности на классах гладких, регулярных, кусочно-гладких, погруженных, вложенных и реберно вложенных параметрических сетей, мы будем дополнительно требовать, чтобы соответствующая эквивалентность параметризующих графов была бы диффеоморфизмом.

1.3. Сети-следы

В отличие от случая кривых, для сетей можно определить деформации более общего вида, приводящие к изменению топологии сети без потери связности. Такие деформации хорошо известны и называются *расщеплением вершин*. Замечательным является тот факт, что для функционала длины такие деформации можно наблюдать в физическом экс-

перименте, если моделировать минимальные сети мыльными пленками (см. [21], [149]). Для систематического изучения явлений, возникающих в результате расщеплений вершин, оказывается удобным ввести новое представление сети, позволяющее естественно описывать такие расщепления. Общая идея состоит в том, что одно и то же подмножество многообразия, являющееся образом некоторой параметрической сети, мы будем параметризовать различными способами. Иными словами, некоторые параметрические сети, обладающие одним и тем же образом, мы будем отождествлять.

Отметим, что непосредственная реализация такой программы, т.е. отождествление всех параметрических сетей, обладающих данным образом, приводит к нежелательным последствиям. Например, образ кривой γ можно параметризовать графом с двумя вершинами и любым числом кратных ребер так, что каждое ребро γ_i построенной сети Γ совпадает с γ , см. рис. 1.2. Легко построить такую деформацию сети Γ , что при всех значениях параметра этой деформации, кроме начального, образы продеформированных кривых γ_i будут пересекаться лишь по конечным вершинам. Это приводит к разрывности классического вариационного функционала на таких семействах. С другой стороны, если вариационный функционал зависит от параметризации, то, выбирая для класса параметрических сетей с одним и тем же образом какое-нибудь одно значение функционала, например точную нижнюю грань его значений на всех сетях этого класса, мы теряем много информации о свойствах рассматриваемого функционала.

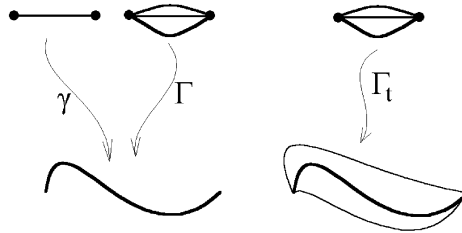


Рис. 1.2. Разрывность функционала при вульгарном определении сетей-следов.

Ниже мы предложим одно из возможных решений описанных трудностей. Напомним, что выше были определены *слабые проекции* одного графа на другой. Так вот, мы будем отождествлять лишь те сети с одним и тем же образом, параметризующие графы которых получаются

один из другого некоторой слабой проекцией. Отметим, что описанное отношение на параметрических сетях не является отношением эквивалентности (оно не транзитивно), тем не менее, его можно естественно продолжить до отношения эквивалентности, что в результате приведет к понятию сети-следа. Перейдем к подробностям.

1.3.1. Сети-следы и их канонические представители

Пусть X — топологическое пространство. Введем на классе всех параметрических сетей на X отношение эквивалентности ρ так. Будем говорить, что параметрическая сеть $\Gamma_1: G_1 \rightarrow X$ может быть (*слабо*) *спроектирована* на параметрическую сеть $\Gamma_2: G_2 \rightarrow X$, если существует слабая проекция $\pi: G_1 \rightarrow G_2$ такая, что $\Gamma_2 \circ \pi = \Gamma_1$. Слабая проекция π индуцирует отображение $\pi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ одной сети в другую, которое мы также будем называть *слабой проекцией*¹. Две параметрические сети $\Gamma_i: G_i \rightarrow X$ назовем ρ -*смежными*, если одна из них может быть спроектирована на другую. Отметим, что отношение ρ -смежности рефлексивно и симметрично, но не транзитивно. Расширим его до отношения эквивалентности так. Две параметрические сети Γ и Γ' назовем ρ -*эквивалентными*, если существует конечная последовательность $\{\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n = \Gamma'\}$ параметрических сетей, такая, что каждые две соседних сети Γ_i и Γ_{i+1} в этой последовательности ρ -смежны. Классы ρ -эквивалентности называются *сетями-следами*. Если параметрическая сеть Γ содержится в сети-следе Υ , то будем писать $\Upsilon = [\Gamma]$.

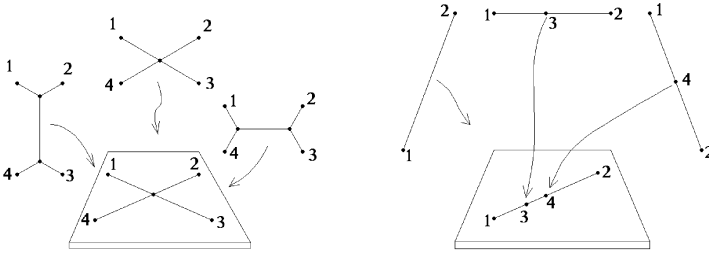
Приведем примеры, иллюстрирующие введенные понятия.

Пример. На рис. 1.3 слева приведены примеры ρ -эквивалентных сетей. Сети, приведенные на рис. 1.3 справа, не являются ρ -эквивалентными.

Приведем некоторые полезные свойства сетей-следов. Пусть \mathcal{G} — множество всех сетей. Построим по \mathcal{G} ориентированный обобщенный граф K , вершины которого — это элементы из \mathcal{G} , а ребра — проекции сетей из \mathcal{G} . Иными словами, две вершины Γ и Γ' из K соединены ребром, ориентированным от Γ к Γ' , если существует слабая проекция π сети Γ на сеть Γ' .

Пусть $F \subset \mathcal{G}$ — произвольное семейство сетей. Рассмотрим подграф K_F в K , множество вершин которого совпадает с F , а множество

¹Говоря про отображение одной сети в другую, мы имеем в виду отображение графиков, соответствующих этим сетям. Напомним, что сети — это, по определению, отображения, а графики — это множества, состоящие из пар.

Рис. 1.3. Примеры ρ -эквивалентности.

ребер — со всеми ребрами из K , соединяющими вершины из F . Будем говорить, что семейство F *связно*, если топологическое пространство K_F связно. Сеть из F назовем *стоком* этого семейства, если в K_F из нее не выходит ни одного ребра. Легко видеть, что для любого семейства F существует хотя бы один сток. Сток для семейства F называется *универсальным*, если каждый элемент из F соединен с ним ребром из K_F .

Вообще говоря, даже связное семейство может иметь несколько стоков. Тем не менее если F — семейство всех сетей, ρ -эквивалентных данной сети Γ , то это уже не так.

Утверждение 1.1. Пусть $\Gamma: G \rightarrow X$ — произвольная сеть и пусть $F = \{\Gamma_\alpha: G_\alpha \rightarrow X\}$ — семейство всех сетей, ρ -эквивалентных Γ . Тогда семейство F связно и для F существует единственный сток (с точностью до эквивалентности сетей). Более того, этот сток — универсальный.

Доказательство. Связность семейства F немедленно вытекает из определения ρ -эквивалентности.

Пусть $\Gamma_0: G_0 \rightarrow X$ — сток. Покажем, что сток Γ_0 универсален (отсюда сразу вытекает его единственность). Для этого сначала опишем свойства стока Γ_0 .

Лемма 1.1. Сток Γ_0 не содержит вырожденных ребер.

Доказательство. Действительно, если утверждение леммы нарушено, то существует слабая проекция из графа G_0 в некоторый граф G' такой, что отображение Γ_0 порождает сеть $\Gamma': G' \rightarrow X$, ρ -смежную с Γ_0 (здесь мы пользуемся тем, что факторизация по ребру является слабой проекцией). Получили противоречие с тем, что Γ_0 — сток. Лемма доказана. ■

Пусть Γ' — произвольная сеть из F . Покажем, что в обобщенном графе K_F существует ориентированное ребро из Γ' в Γ_0 . Для этого рассмотрим кратчайший (неориентированный) путь γ в K_F , соединяющий Γ' с Γ_0 (здесь путь называется кратчайшим, если он состоит из наименьшего возможного числа ребер). Так как путь γ — кратчайший, то он не содержит двух последовательных ребер, направленных в одну и ту же сторону. Иными словами, ребра, инцидентные произвольной внутренней вершине пути γ , или одновременно выходят из этой вершины, или входят в нее.

Пусть γ состоит более чем из одного ребра. Рассмотрим сети $\Gamma_1: G_1 \rightarrow X$ и $\Gamma_2: G_2 \rightarrow X$ из пути γ , такие, что Γ_1 ρ -смежна одновременно с Γ_0 и Γ_2 , $\Gamma_2 \neq \Gamma_0$. Из сказанного выше вытекает, что существуют слабые проекции $\pi_0: G_1 \rightarrow G_0$ и $\pi_2: G_1 \rightarrow G_2$, такие, что $\Gamma_1 = \Gamma_0 \circ \pi_0 = \Gamma_2 \circ \pi_2$.

Рассмотрим произвольное ребро e_0 из G_0 , и пусть $e_1 = \pi_0^{-1}(e_0)$. По определению слабой проекции, e_1 — ребро графа G_1 . Пусть $e_2 = \pi_2(e_1)$. Так как ребро $\Gamma_0: e_0 \rightarrow X$ невырождено, то невырождено и ребро $\Gamma_1: e_1 \rightarrow X$. Поэтому e_2 не может быть вершиной графа G_2 , иначе $\Gamma_1(e_1) = \Gamma_2(e_2)$ было бы точкой, что невозможно.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1.2. *В сделанных выше обозначениях слабая проекция π_2 вырождает лишь те ребра, которые вырождает слабая проекция π_0 .*

Из леммы 1.2 вытекает, что если слабо профакторизовать граф G_2 по π_2 -образам тех ребер из G_1 , которые вырождаются при слабой проекции π_0 , то в результате получим отображение $\pi_{20}: G_2 \rightarrow G_0$, удовлетворяющее всем условиям из определения слабой проекции, кроме, быть может, свойства сохранять границы. Более того, $\pi_{20} \circ \pi_2 = \pi_0$, поэтому π_{20} также сохраняет границу и, значит, является проекцией. Наконец, $\Gamma_2 = \Gamma_0 \circ \pi_{20}$, поэтому, заменяя ребра пути γ , соответствующие проекциям π_2 и π_0 , на ребро, соответствующее π_{20} , мы укоротим путь γ , что противоречит выбору пути γ . Из полученного противоречия вытекает, что γ состоит не более чем из одного ребра, поэтому Γ_0 — универсальный сток. Утверждение доказано. ■

Определение. *Каноническим представителем сети-следа Υ называется такая параметрическая сеть $\Gamma \in \Upsilon$, что каждая параметрическая сеть Γ' из Υ может быть спроектирована на Γ .*

Из утверждения 1.1 вытекает следующий результат.

Следствие 1.1. *У каждой сети-следа существует единственный, с точностью до эквивалентности сетей, канонический представитель. Более того, представитель сети-следа является каноническим, если и только если он не содержит вырожденных ребер.*

В дальнейшем, говоря о свойствах сети-следа, мы будем иметь в виду свойства канонического представителя этой сети-следа.

(Локальной) *деформацией сети-следа* Υ назовем однопараметрическое семейство сетей-следов $\Upsilon_t = [\Gamma_t]$, $t \in [t_1, t_2]$, где Γ_t — деформация некоторой параметрической сети $\Gamma = \Gamma_{t_1}$ из Υ , такая, что все параметрические сети Γ_t при $t > t_1$ являются каноническими представителями сетей-следов Υ_t .

Сети-следы назовем *деформационно-эквивалентными*, если их канонические представители могут быть продеформированы друг в друга в классе погруженных сетей. Если исходные сети-следы являются реберно вложенными (в частности, вложенными), то будем дополнительно предполагать, что указанная деформация канонических представителей происходит в классе реберно вложенных сетей. Деформационно-эквивалентные реберно вложенные сети-следы на плоскости назовем *планарно эквивалентными*.

Замечание. Пусть Γ_1 и Γ_2 — вложенные деформационно эквивалентные сети-следы. Тогда, как несложно проверить, существует деформация одной из них на другую в классе вложенных сетей. Поэтому в частном случае вложенных плоских графов определенная только что планарная эквивалентность совпадает с классической.

1.4. Постановка вариационной задачи

Выше мы определили два основных типа сетей: параметрические сети и сети-следы. В настоящем разделе мы будем рассматривать функции, действующие на сетях, называемые обычно функционалами. Деформации сетей позволяют определить понятие производной по направлению от функционала и, тем самым, понятие экстремали (экстремальной сети). Именно изучению таких экстремалей и посвящена настоящая монография.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, \mathcal{N} — произвольное семейство сетей (параметрических сетей или сетей-следов) на нем. Пусть $\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторое отображение. Такие отображения Φ будем называть *функционалами*.

Будем говорить, что деформация Γ_s сети $\Gamma \in \mathcal{N}$ *происходит в классе сетей* \mathcal{N} , если все сети Γ_s принадлежат \mathcal{N} . Если Γ_s , $s \in [0, 1]$, —

деформация сети $\Gamma = \Gamma_0 \in \mathcal{N}$, происходящая в классе \mathcal{N} , то определена функция $\varphi(s) = \Phi(\Gamma_s)$. Деформацию Γ_s назовем *допустимой для функционала* Φ , если соответствующая функция $\varphi(s)$ дифференцируема при $s = 0$. Подчеркнем, что рассматриваемая здесь производная является *односторонней*, поскольку $s \in [0, 1]$. Обозначим через \mathcal{D}_Φ множество всех деформаций, допустимых по отношению к функционалу Φ .

Будем говорить, что сеть $\Gamma \in \mathcal{N}$ с границей $\partial\Gamma$ является *экстремальной функционала* Φ или *экстремальной сетью*, если для любой допустимой деформации $\Gamma_s \in \mathcal{D}_\Phi$ сети Γ , неподвижной на границе $\partial\Gamma$, производная функции $\varphi(s)$ в начальный момент времени $s = 0$ или всегда неотрицательна, или всегда неположительна. Так как при замене функционала Φ на $-\Phi$ условия неположительности и неотрицательности производной функции $\varphi(s)$ меняются местами, мы всюду, где не оговорено противное, не ограничивая общности, будем понимать экстремальность в смысле *неотрицательности* производной функции $\varphi(s)$.

Наша Основная Задача — описание таких экстремалей.

В качестве основного примера рассмотрим функционалы, порожденные функционалами, заданными на семействах кривых в топологическом пространстве X . Такие функционалы естественно назвать *реберными*.

1.4.1. Конструкция реберных функционалов

Пусть Ω — некоторое семейство непрерывных кривых на топологическом пространстве X и пусть \mathcal{N} — множество всех сетей на X , ребра которых лежат в Ω . Для любых двух точек A и B из X обозначим через $\Omega(A, B)$ подмножество в Ω , состоящее из всех кривых, соединяющих эти точки.

Пусть $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторый функционал, заданный на кривых из Ω , причем для любой точечной кривой $\gamma \in \Omega$ выполняется $\psi(\gamma) = c$, где c — некоторая вещественная постоянная.

Пусть $\{F_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}\}_{k=1}^\infty$ — семейство гладких функций, инвариантных относительно любых перестановок переменных и таких, что для любых $0 < p < q$ выполняется

$$F_q(x^1, \dots, x^p, c, \dots, c) = F_p(x^1, \dots, x^p).$$

Зададим теперь на множестве сетей \mathcal{N} функционал Ψ так. Если Γ — произвольная сеть из \mathcal{N} , имеющая n ребер γ_k , то положим

$$\Psi(\Gamma) = F_n(\psi(\gamma_1), \dots, \psi(\gamma_n)).$$

Ясно, что значение функционала Ψ не зависит от выбора нумерации ребер сети Γ . Более того, если Γ — сеть-след, то функционал Ψ на любом представителе из Γ принимает одно и то же значение, равное $\Psi(\Gamma)$, т.е. равное значению функционала Ψ на каноническом представителе сети-следа Γ . Тем самым, функционал Ψ определен корректно не только на параметрических сетях, но и на сетях-следах.

Примерами функций F_k могут служить сумма ($c = 0$) и произведение ($c = 1$).

Имеет место следующий простой результат.

Предложение 1.1. Пусть Γ — экстремаль функционала Φ , определенного выше, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — ребра сети Γ и $x_0 = (\psi(\gamma_1), \dots, \psi(\gamma_n))$. Тогда если $\frac{\partial F_k}{\partial x^k}(x_0) \neq 0$ при некотором k , $1 \leq k \leq n$, то ребро γ_k — экстремаль функционала ψ , ограниченного на пространство $\Omega(A, B) \subset \Omega$, где A и B — концевые точки ребра γ_k .

Приведем серию примеров, являющихся частными случаями описанной только что общей конструкции.

1.4.1.1. Классический вариационный функционал

Пусть $X = W$ — гладкое многообразие, TW — касательное расслоение и $L : TW \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, называемое обычно *лагранжианом*. Пусть Ω — пространство всех кусочно-гладких кривых на W , а $\psi_L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — классический вариационный функционал, соответствующий лагранжиану L , т.е. для каждой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow W$ из Ω величина $\psi_L(\gamma)$ определяется так:

$$\psi_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt.$$

Обозначим через W_0 нулевое сечение касательного расслоения TW и предположим, что ограничение лагранжиана L на $W_0 \times \mathbb{R}$ равно нулю. Тогда для каждой точечной кривой γ выполняется $\psi_L(\gamma) = 0$.

В качестве семейства функций F_k возьмем суммы координат $\sum_{i=1}^k x^i$. Тогда функционал ψ_L и семейство $\{F_k\}$ удовлетворяют всем требованиям предыдущего пункта, поэтому определен функционал $\Psi_L : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве всех сетей с кусочно-гладкими ребрами. Этот функционал назовем *классическим вариационным функционалом, соответствующим лагранжиану L* .

Из предложения 1.1 немедленно получается следующий результат.

Следствие 1.2. Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}$ — экстремаль классического вариационного функционала Ψ_L . Тогда каждое ребро γ сети Γ — экстремаль функционала ψ_L , ограниченного на пространство $\Omega(A, B) \subset \Omega$, где A и B — концевые точки ребра γ .

Замечание. Для кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ определим ее *поднятие* $\bar{\gamma}$ в $TW \times \mathbb{R}$, положив $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$. Тогда если лагранжиан L является гладкой функцией в окрестности кривой $\bar{\gamma}$, то экстремальность γ равносильна тому, что вдоль γ выполняются уравнения Эйлера–Лагранжа. Если (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты на W , а $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n, t)$ — соответствующие локальные координаты на $TW \times \mathbb{R}$, то, напомним, уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пример: длина сети. Если $X = W$ — риманово многообразие, то в качестве функционала ψ_L можно выбрать функционал ℓ длины кривой в римановой метрике на W . Полученный в результате функционал Ψ_L называется *длиной* и обозначается через ℓ .

Приведем аналог следствия 1.2.

Следствие 1.3. Пусть Γ — экстремаль функционала длины ℓ . Тогда каждое ребро сети Γ — геодезическая² на многообразии W .

Пример: финслерова длина сети. Более общей геометрической иллюстрацией сформулированного подхода является функционал длины сети на финслеровом многообразии. Пусть W — финслерово многообразие с финслеровой структурой, заданной функцией $L: TW \rightarrow \mathbb{R}$, и $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ — кусочно-гладкая кривая на W . Тогда длина кривой — это

$$\int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

а длина сети — сумма длин всех ее ребер. Поэтому если в качестве лагранжиана взять финслерову структуру L , то определенный выше функционал Ψ_L — это *финслерова длина сети*.

Пример: l_p -длина сети. Еще один пример получается, если рассмотреть l_p пространства. Напомним, что l_p -расстоянием между точками

²Здесь и далее под *геодезическими* мы понимаем кривые, являющиеся экстремальными функционала длины, т.е. мы не требуем, чтобы параметр геодезических был пропорционален натуральному.

$x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ из $W = \mathbb{R}^n$ называется величина

$$l_p(x, y) = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \text{ в частности,} \\ \sum_{i=1}^n |x^i - y^i| & \text{при } p = 1 \text{ (манхеттенское расстояние) и} \\ \max_i |x^i - y^i| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Это расстояние можно задать на дифференциально-геометрическом языке. Для этого рассмотрим лагранжиан $L_p(x, \xi, t) = \|\xi\|_p = l_p(\xi, 0)$, и пусть $\Omega(x, y)$, как и выше, — это множество всех кусочно-гладких кривых из \mathbb{R}^n , соединяющих точки x и y . Легко проверяется, что

$$l_p(x, y) = \inf_{\gamma \in \Omega(x, y)} \int \|\dot{\gamma}\|_p dt.$$

Естественно определить l_p -длину кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ как $\int_a^b \|\dot{\gamma}\|_p dt$, а l_p -длину сети — как сумму l_p -длин ее ребер. Поэтому если в качестве лагранжиана L взять L_p , то определенный выше функционал Ψ_L — это l_p -длина сети.

Пример: длина в нормированном пространстве. Более общо, пусть $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ — конечномерное линейное нормированное пространство. Рассмотрим лагранжиан $L(x, \xi, t) = \|\xi\|$, и определим длину кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ как $\int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt$, а длину сети — как сумму длин ее ребер. Эти определения согласуются с обычным определением длины кривой как предела длин вписанных ломаных. Таким образом, получается еще один пример реберного функционала — функционал *нормированной длины*.

1.4.1.2. Классический функционал Больца

Если в предыдущем пункте вместо классического вариационного функционала ψ_L рассмотреть функционал Больца ψ_B , то мы зададим на пространстве кусочно-гладких сетей \mathcal{N} *классический функционал Больца* $\Psi_B = \Psi$. Напомним, что *функционалом Больца* на Ω называется функционал вида

$$\psi_B(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt + T(\gamma(a), \gamma(b)),$$

где $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ — кривая из Ω , функция $L: TW \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — лагранжиан и $T: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Первое слагаемое в приведенной выше формуле является классическим вариационным функционалом и называется *интегральной частью функционала Больца*, а второе

слагаемое, зависящее только от положений концевых точек кривой, — терминальной частью.

Следствие 1.4. Пусть Γ — экстремаль классического функционала Больца Ψ_B . Тогда каждое ребро сети Γ — экстремаль интегральной части функционала Больца ψ_B , ограниченной на $\Omega(A, B)$, где A и B — концевые точки этого ребра.

1.4.2. Конструкция реберных функционалов для сетей фиксированной топологии

Оказывается, если ограничиться рассмотрением сетей фиксированной топологии, то конструкции реберных функционалов можно сделать более простой и более общей.

Пусть, как и выше, Ω — некоторое семейство непрерывных кривых на топологическом пространстве X и пусть $\mathcal{N}(G)$ — множество всех сетей на X с фиксированной топологией G , ребра которых лежат в Ω . Пусть e_1, \dots, e_n — ребра графа G , занумерованные каким-нибудь фиксированным способом. Предположим, что каждому ребру e_i поставлен в соответствие некоторый функционал $\psi_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, заданный на кривых из Ω . Наконец, пусть задана некоторая гладкая функция $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Зададим на множестве сетей $\mathcal{N}(G)$ функционал Ψ , положив

$$\Psi(\Gamma) = F(\psi_1(\gamma_1), \dots, \psi_n(\gamma_n)), \quad \Gamma \in \mathcal{N}(G),$$

где γ_i — ребро сети Γ , соответствующее ребру e_i графа G .

Имеет место следующий простой результат.

Предложение 1.2. Пусть Γ — экстремаль функционала Φ , определенного выше, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — ребра сети Γ и $x_0 = (\psi_1(\gamma_1), \dots, \psi_n(\gamma_n))$. Тогда если $\frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0) \neq 0$ для некоторого k , $1 \leq k \leq n$, то ребро γ_k — экстремаль функционала ψ_k , ограниченного на пространство $\Omega(A, B) \subset \Omega$, где A и B — концевые точки ребра γ_k .

Приведем серию примеров, являющихся частными случаями описанной только что общей конструкции.

Пример: взвешенная длина параметрической сети. Пусть $X = W$ — риманово многообразие, G — граф с ребрами e_1, \dots, e_n и $\omega_1, \dots, \omega_n$ — положительные вещественные числа. Пусть Ω — пространство всех кусочно-гладких кривых на W , а $\mathcal{N}(G)$ — пространство всех кусочно-гладких сетей топологии G на W . Как и выше, обозначим через

$\ell: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ функционал римановой длины, и пусть $F = \sum_{i=1}^n \omega_i x^i$. Тогда для каждой сети Γ из $\mathcal{N}(G)$ положим

$$\Psi(\Gamma) = F(\ell(\gamma_1), \dots, \ell(\gamma_n)) = \sum_i \omega_i \ell(\gamma_i),$$

где γ_i — ребро сети Γ , соответствующее ребру e_i графа G . Функционал $\Psi: \mathcal{N}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *взвешенной длиной*. Это название объясняется тем, что числа ω_i можно рассматривать как веса ребер графа G .

Из предложения 1.2 вытекает следующий результат.

Следствие 1.5. *Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}(G)$ — экстремаль функционала взвешенной длины. Тогда каждое ребро сети Γ — геодезическая на многообразии W .*

Пример: функционально взвешенная длина обобщенной сети. Заменяя в предыдущем примере функцию F на произвольную гладкую функцию, мы получим функционал F -взвешенной длины, определенный так:

$$\Psi(\Gamma) = F(\ell(\gamma_1), \dots, \ell(\gamma_n)).$$

Следствие 1.6. *Пусть Γ — экстремаль функционала F -взвешенной длины и γ_i — ребро сети Γ , соответствующее ребру e_i графа G . Положим $x_0 = (\ell(\gamma_1), \dots, \ell(\gamma_n))$. Тогда если $\frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0) \neq 0$ для некоторого k , $1 \leq k \leq n$, то γ_k — геодезическая на многообразии W .*

Пример: классический вариационный функционал параметрической сети. Пусть $X = W$ — гладкое многообразие, G — фиксированный граф с ребрами e_1, \dots, e_n и Ω — пространство всех кусочно-гладких кривых на W . Рассмотрим набор из n лагранжианов L_i , и пусть $\psi_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — классический вариационный функционал, соответствующий лагранжиану L_i . Выберем в качестве функции F сумму координат. Пусть $\mathcal{N}(G)$ — пространство всех кусочно-гладких сетей топологии G на W . Для каждой сети $\Gamma \in \mathcal{N}(G)$ положим

$$\Psi(\Gamma) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\gamma_i),$$

где γ_i — ребра сети Γ , соответствующие ребрам e_i графа G . Тогда Ψ задает функционал на $\mathcal{N}(G)$, который называется *классическим вариационным функционалом*.

Следствие 1.7. Пусть Γ — экстремаль классического вариационного функционала и γ_i — ребро сети Γ , соответствующее ребру e_i графа G . Тогда γ_i — экстремаль классического вариационного функционала ψ_i , ограниченного на пространство $\Omega(A, B)$, где A и B — концевые точки ребра γ_i .

Пример: функционал Больца параметрической сети. Заменяя в предыдущем примере классические вариационные функционалы на функционалы Больца, мы построим функционал Ψ , который также называется *функционалом Больца*.

Замечание. На самом деле, все рассмотренные построения можно проделать и для клеточных комплексов произвольной размерности, а не обязательно только для одномерных. По аналогии естественно определяются параметрические разветвленные поверхности и разветвленные поверхности-следы. По-видимому, язык следов может быть эффективно использован при исследовании бифуркаций, скажем, минимальных поверхностей (мыльных пленок). На рисунке 1.4 приведен пример трех комплексов, которые реализуются как минимальные поверхности, затягивающие контур Дугласа (см. [149]): первый и третий из них соответствуют устойчивым мыльным пленкам, а второй возникает во время перестройки. При естественном обобщении определения слабой проекции на двумерные комплексы первый и третий комплексы проектируются на второй, что позволяет рассматривать деформацию, возникающую во время бифуркации, как непрерывную деформацию следа (хотя мыльная пленка претерпевает разрыв).

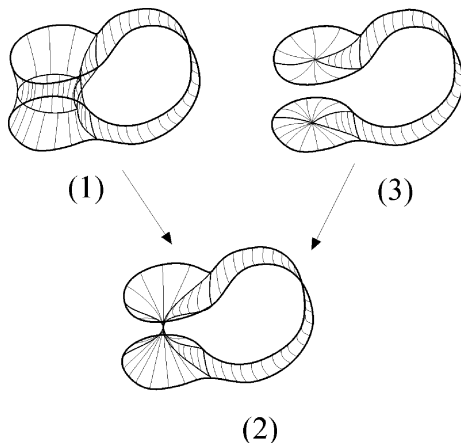


Рис. 1.4. Бифуркация мыльной пленки в терминах двумерных поверхностей-следов.

ГЛАВА 2

Критерии экстремальности сетей

Данная глава посвящена изучению необходимых и достаточных условий экстремальности сетей по отношению к реберным функционалам. В предыдущей главе мы выяснили, что ребра таких сетей, как правило, являются экстремальными соответствующих функционалов на пространствах кривых. Однако, за исключением нескольких вырожденных случаев, этого оказывается недостаточно для экстремальности сети в целом.

Для функционала римановой длины критерии экстремальности носят локальный характер и представляют собой условия на стыковку ребер–геодезических в вершинах сети, см. ниже. Тем не менее, в общем случае критерий экстремальности сети локальным не является. Одна из причин этого — негладкость лагранжиана вне нулевого сечения. Примером такого функционала может служить манхеттенская длина. В главе 6 мы приведем полученный авторами совместно с Хонг Ван Ле критерий экстремальности сетей по отношению к функционалу манхеттенской длины.

Однако для широкого класса функционалов критерий экстремальности носит все же локальный характер. Мы введем в рассмотрение класс так называемых квазирегулярных лагранжианов, для которых, при некоторых дополнительных условиях, приведем критерий экстремальности, сводящийся к описанию правил стыковки ребер–экстремалей.

Кроме того, при изучении экстремальных сетей–следов выяснилось, что далеко не каждый функционал имеет нетривиальные экстремали. Например, все экстремальные сети–следы для функционала энергии — точечные. Для классических вариационных функционалов мы изучим следующий вопрос: какие свойства порождающих их лагранжианов приводят к существованию нетривиальных экстремальных сетей–

следов. Оказывается, существование таких экстремалей тесно связано с наличием особенностей у лагранжиана, см. теорему 2.2 и следствия 2.2–2.5. Тривиальность экстремалей здесь понимается в следующем смысле: сеть–след называется *тривиально-экстремальной*, если, во-первых, каждое ее ребро — экстремаль по отношению к произвольным деформациям (в частности, смещающим граничные вершины сети) и, во-вторых, каждая точечная кривая, образ которой совпадает с произвольной вершиной сети, также является экстремалью по отношению к любым деформациям. Заметим, что если разрезать тривиально-экстремальную сеть–след по любому набору его вершин, то в результате мы получим объединение сетей–следов, каждая из которых экстремальна. Мы покажем, что если лагранжиан является гладким, то соответствующий функционал не имеет нетривиальных экстремалей.

Часть результатов, приведенных в настоящей главе, была получена авторами в сотрудничестве с профессором Хонг Ван Ле во время совместной работы в MPI für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, в апреле–июне 1999.

2.1. Локальная структура экстремальных параметрических сетей

Пусть W — гладкое многообразие, $\pi: TW \rightarrow W$ — касательное расслоение, $L: TW \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный лагранжиан¹. Пусть Ω — пространство всех кусочно-гладких кривых на W и $\psi_L: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — классический вариационный функционал, соответствующий лагранжиану L , т.е.

$$\psi_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

где $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ — кривая из Ω .

Пусть G — оснащенный граф, ∂G — его граница, $\beta: \partial G \rightarrow W$ — произвольное отображение и $\Gamma: G \rightarrow W$ — произвольная кусочно-гладкая параметрическая сеть с границей $\partial\Gamma = \beta$. На множестве таких сетей

¹Для простоты мы ограничиваемся здесь рассмотрением лишь автономных лагранжианов и семейств функций $\{F_k\}$, равных сумме переменных, хотя все те же результаты могут быть получены в неавтономном случае для произвольного семейства функций $\{F_k\}$. Сформулировать и доказать соответствующие теоремы представляется читателю в качестве упражнения.

определен функционал Ψ_L , значение которого на сети Γ равно сумме значений функционала ψ_L на ребрах этой сети.

Пусть (x, ξ) — произвольная точка из TW . Предположим, что лагранжиан L дважды непрерывно дифференцируем в точке (x, ξ) . Обозначим через $p(x, \xi) = L_\xi(x, \xi)$ точку из кокасательного пространства T_x^*W , определенную так. Если x^i — координаты на W в окрестности точки x , а ξ^i — соответствующие координаты в касательном пространстве T_xW , то i -я координата ковектора $p(x, \xi)$ имеет вид:

$$p(x, \xi)_i = \frac{\partial L}{\partial \xi^i}(x, \xi).$$

Ковектор $p(x, \xi)$ называется (обобщенным) *импульсом в точке* (x, ξ) . Далее, определим другой ковектор $[L](x, \xi)$ так. Рассмотрим произвольную гладкую кривую $x(t)$, для которой $\dot{x}(0) = \xi$. Положим

$$[L](x, \xi)_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left\{ p_i(x(t), \dot{x}(t)) \right\} - \frac{\partial L}{\partial x^i}(x(0), \dot{x}(0)).$$

Хорошо известно, что это определение не зависит от выбора кривой $x(t)$, см. [37]. Ковектор $[L]$ называется *производной Лагранжа функции* L .

Кривую $\gamma(t)$ назовем *квазирегулярной*, если она или регулярна, или является отображением в точку. Параметрическую (оснащенную) сеть Γ назовем *квазирегулярной*, если все ее ребра — квазирегулярные кривые. Ребро графа G , параметризующее регулярное (точечное) ребро сети Γ , также будем называть *регулярным* (соответственно, *точечным*).

Лагранжиан L назовем *квазирегулярным*, если

- (1) функция L является гладкой на всем TW , кроме, быть может, нулевого сечения $W_0 \subset TW$;
- (2) ограничение функции L на нулевое сечение $W_0 \subset TW$ равно нулю;
- (3) для любого вектора $\zeta \in T_{(P, \xi)}(TW)$ существует производная $\zeta(L)$ функции L по направлению² вектора ζ ;
- (4) для произвольной гладкой деформации γ_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, точечной кривой γ_0 , такой, что все кривые γ_ε , $\varepsilon > 0$, являются регулярными, функция $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t))$ непрерывна по совокупности переменных (t, ε) в области определения. Это условие будем называть *условием согласованности*.

²Здесь и всюду ниже производная функции по направлению понимается как односторонний предел. В частности, производные функции по противоположным направлениям, вообще говоря, не обязаны быть противоположными.

Примером квазирегулярного не всюду гладкого лагранжиана является лагранжиан, соответствующий функционалу длины на римановом многообразии. Более общий пример такого лагранжиана задается гладко зависящей от точки и ненулевого касательного вектора нормой на касательном пространстве к многообразию. Отметим, что строгая выпуклость нормы не предполагается.

Свойства, определяющие квазирегулярный лагранжиан, возникли при попытке понять, какие характеристики функционала римановой длины приводят к наличию нетривиальных экстремалей. Из первого свойства вытекает, что регулярные ребра экстремальных сетей удовлетворяют стандартным уравнениям Эйлера–Лагранжа. Второе условие гарантирует, что функционал корректно определен на сетях–следах (для этого необходимо равенство функционала нулю на точечных ребрах). Третье и четвертое свойства представляются необходимыми для использования стандартных приемов математического анализа, таких как дифференцирование интегралов, зависящих от параметра.

В следующем утверждении мы вычислим производную по направлению от функционала ψ_L с квазирегулярным лагранжианом L .

Утверждение 2.1. Пусть L — квазирегулярный лагранжиан и ψ_L — соответствующий классический вариационный функционал. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, — произвольная квазирегулярная кривая и γ_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$ — гладкая деформация кривой γ , такая, что при $\varepsilon > 0$ все кривые γ_ε регулярны. Обозначим через $\eta(t)$ поле деформации γ_ε , т.е. $\eta(t) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \gamma_\varepsilon(t)$. Тогда если кривая $\gamma(t)$ регулярна, то

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \psi_L(\gamma_\varepsilon) = p(\gamma, \dot{\gamma})(\eta) \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b [L](\gamma, \dot{\gamma})(\eta) dt.$$

Если же кривая γ — точечная, т.е. $\gamma(t) = x$ при всех t , то

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \psi_L(\gamma_\varepsilon) = \int_a^b \zeta(L)(\gamma, 0) dt,$$

где $\zeta = (\eta, \dot{\eta})$ — векторное поле вдоль точечной кривой $t \mapsto (\gamma(t), 0) = (x, 0)$ в TW . Если дополнительно предположить, что лагранжиан L является гладким в окрестности точки $(x, 0)$, то

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \psi_L(\gamma_\varepsilon) = p(x, 0)(\eta) \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b [L](x, 0)(\eta) dt.$$

Доказательство. Первое утверждение хорошо известно, см., например, [37].

Докажем второе утверждение. Рассмотрим функцию

$$f(t, \varepsilon) = L(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t)),$$

где $t \in [a, b]$ и $\varepsilon \in [0, 1]$. Частная производная $f_\varepsilon(t, \varepsilon)$ функции $f(t, \varepsilon)$ по параметру ε равна $\zeta(L)(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$. Из условия квазирегулярности лагранжиана L вытекает, что функция $f_\varepsilon(t, \varepsilon)$ непрерывна по совокупности переменных. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t)) dt &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, \varepsilon) dt = \int_a^b f_\varepsilon(t, \varepsilon) dt \\ &= \int_a^b \zeta(L)(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Напомним, что квазирегулярная (параметрическая) сеть Γ называется *экстремальной* по отношению к функционалу Ψ_L с квазирегулярным лагранжианом, если для произвольной деформации Γ_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, сети $\Gamma = \Gamma_0$ имеет место неравенство:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi_L(\Gamma_\varepsilon) \geq 0.$$

Пусть $\Gamma: G \rightarrow W$ — произвольная квазирегулярная параметрическая сеть. Максимальные связные подграфы графа G , все ребра которых — точечные, назовем *точечными компонентами графа G* . Приведенные компоненты графа G — это или его точечные компоненты, или его вершины, не инцидентные точечным ребрам. Соответствующие элементы параметрической сети назовем так же.

Для каждой приведенной компоненты $H \subset \Gamma$ обозначим через E_H множество ребер сети H , через I_H — множество смежных с H ребер из $\Gamma \setminus H$, конечные вершины которых лежат в H , а через O_H — множество смежных с H ребер из $\Gamma \setminus H$, начальные вершины которых лежат в H . Отметим, что I_H и O_H могут пересекаться. Кроме того, объединение всех множеств I_H и O_H по всем приведенным компонентам H сети Γ совпадает с множеством всех регулярных ребер сети Γ . Наконец, если γ — ребро сети Γ , то через $[a_\gamma, b_\gamma]$ обозначим отрезок, параметризующий это ребро. Через ∂H обозначим множество вершин из H , являющихся граничными в сети Γ . Через $\bar{\partial} H$ обозначим множество вершин

из H , инцидентных регулярным ребрам сети Γ . Далее, для каждой вершины $x \in \bar{\partial}H$ обозначим через $I_H(x)$ и $O_H(x)$ подмножества из I_H и O_H соответственно, состоящие из всех ребер, инцидентных x . Положим $N_H(x) = I_H(x) \cup O_H(x)$.

Удобно ввести следующее обозначение. Мы положим $p_x(\gamma)$ равным $\pm p(\gamma, \dot{\gamma})$ в вершине x ребра γ сети Γ , где знак “+” выбирается, если x — конечная вершина ребра γ , и “−” в случае, когда x — начальная вершина.

Из утверждения 2.1 легко получается следующая теорема о локальной структуре.

Теорема 2.1. Пусть L — квазирегулярный лагранжиан. Квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала Ψ_L , если и только если каждое регулярное ребро $\gamma: [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow W$ сети Γ — экстремаль функционала ψ_L , т.е. $[L](\gamma, \dot{\gamma}) = 0$, и для каждой приведенной компоненты $H: G_H \rightarrow W$ сети Γ и любой гладкой сети $\eta: G_H \rightarrow TW$, где $\pi \circ \eta = \Gamma|_{G_H}$ и $\eta(\partial G_H) \subset W_0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in I_H} p(\gamma, \dot{\gamma})(\eta_\gamma)|_{t=b_\gamma} - \sum_{\gamma \in O_H} p(\gamma, \dot{\gamma})(\eta_\gamma)|_{t=a_\gamma} + \sum_{\gamma \in E_H} \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \zeta_\gamma(L)(\gamma, \dot{\gamma}) dt = \\ = \sum_{x \in \bar{\partial}H} \left[\sum_{\gamma \in N_H(x)} p_x(\gamma) \right] (\eta(x)) + \sum_{\gamma \in E_H} \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \zeta_\gamma(L)(\gamma, \dot{\gamma}) dt, \end{aligned}$$

где η_γ — ребро $\eta|_{[a_\gamma, b_\gamma]}$ сети η , а $\zeta_\gamma = (\eta_\gamma, \dot{\eta}_\gamma)$ — векторное поле вдоль кривой $(\gamma, \dot{\gamma})$ в TW .

Определим *поднятие* параметрической сети $\Gamma: G \rightarrow W$ в касательное расслоение как множество кривых $\left\{ (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right\}$ по всем ребрам γ сети Γ .

Следствие 2.1. Пусть, в предположениях теоремы 2.1, лагранжиан L является гладким в окрестности поднятия сети (например, это имеет место, если сеть Γ — регулярна). Тогда квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала Ψ_L , если и только если каждое ребро $\gamma: [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow W$ сети Γ — экстремаль функционала ψ_L , т.е. $[L](\gamma, \dot{\gamma}) = 0$, и для каждой подвижной вершины x сети Γ имеет место равенство:

$$\sum_{\gamma} p_x(\gamma) = 0,$$

где сумма берется по всем ребрам γ , инцидентным вершине x .

Замечание. Теорема 2.1 и Следствие 2.1 легко обобщаются на реберные функционалы, построенные по семействам лагранжианов, приписанных ребрам параметризующего графа. Сформулировать и доказать соответствующую теорему предоставляется читателю в качестве упражнения.

2.2. Локальная структура экстремальных сетей-следов

В этом разделе мы рассмотрим экстремальные сети-следы и изучим их локальную структуру. Оказывается, нетривиальность локальной структуры связана, в первую очередь, с негладкостью лагранжиана L , соответствующего классическому вариационному функционалу.

Пусть L — квазирегулярный лагранжиан. Тогда функционал Ψ_L , заданный на параметрических квазирегулярных сетях, порождает функционал на множестве соответствующих сетей-следов, который мы обозначим той же буквой. Отметим, что канонические представители таких сетей являются регулярными параметрическими сетями. Мы начнем с разбора ситуации, когда лагранжиан L — гладкий.

2.2.1. Гладкие лагранжианы

Пусть лагранжиан L — гладкий на всем TW , и предположим, что L равен нулю на нулевом сечении W_0 . Тогда L , в частности, является квазирегулярным лагранжианом. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.2. *Сеть-след Υ является экстремалью для функционала Ψ_L с гладким лагранжианом L , равным нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$, если и только если выполняются следующие свойства:*

- (1) *каждое ребро γ сети Υ является экстремалью функционала ψ_L ;*
- (2) *для любой вершины x сети Υ и любого ребра γ , инцидентного x , имеют место равенства $p(x, 0) = 0$ и $p_x(\gamma) = 0$.*

Доказательство. По определению, сеть-след Υ экстремальна, если и только если любой ее представитель — экстремаль соответствующего функционала на параметрических сетях. В частности, канонический представитель сети Υ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, поэтому его ребра — экстремали функционала ψ_L , что доказывает необходимость первого условия.

Аналогично, воспользовавшись утверждением 2.1, можно показать, что каждое точечное ребро произвольного представителя сети Υ является экстремалью функционала ψ_L , т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа.

Далее, пусть γ — произвольное ребро сети Υ , инцидентное вершине x . Рассмотрим представителя Γ сети Υ , такого, что

- приведенная компонента вершины x сети Γ состоит из одного ребра γ' ;
- ребра γ и γ' имеют единственную общую вершину x' , степень которой в Γ равна 2.

Построенная параметрическая сеть Γ является экстремальной, поэтому, в силу следствия 2.1, примененного к вершине x' , имеет место равенство $p_{x'}(\gamma) \pm p(x', 0) = 0$, где знак выбирается в зависимости от ориентации ребра γ' . Так как эта ориентация может быть выбрана любой и так как $p_{x'}(\gamma) = p_x(\gamma)$, имеем

$$p_x(\gamma) = p(x', 0) = -p(x', 0) = p(x, 0) = 0,$$

что и требовалось.

Обратное утверждение немедленно вытекает из следствия 2.1, так как все импульсы равны нулю по условию. Теорема доказана. ■

Следствие 2.2. Пусть Υ — экстремальная сеть для функционала Ψ_L с гладким лагранжианом L , равным нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Тогда каждое ребро сети Υ — экстремаль функционала ψ_L по отношению к произвольным деформациям, и каждая точечная кривая, образ которой совпадает с произвольной вершиной сети Υ , также является экстремалью функционала ψ_L по отношению к любым деформациям. Другими словами, каждая экстремальная сеть-след функционала Ψ_L является тривиально-экстремальной.

Следствие 2.3. Пусть Υ — экстремальная сеть-след для функционала Ψ_L с гладким лагранжианом L , равным нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Пусть x — вершина сети Υ , а $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — инцидентные x ребра сети Υ . Обозначим через ξ_i вектор скорости ребра γ_i в вершине x . Тогда каждая точка (x, ξ_i) , а также точка $(x, 0)$ является стационарной точкой ограничения лагранжиана L на $T_x W$.

Следствие 2.4. Пусть L — гладкий лагранжиан, равный нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Если лагранжиан L , ограниченный на

$T_x W$, не имеет стационарных точек вне $0 \in T_x W$ для любого $x \in W$, то каждая экстремальная сеть функционала Ψ_L — точечная.

Пример. Пусть $L(x, \xi) = \langle \xi, \xi \rangle$ — лагранжиан, соответствующий функционалу энергии на римановом многообразии W . Из следствия 2.4 вытекает, что в классе следов этот функционал не имеет экстремалей, отличных от точечных.

Пример. Пусть $L(x, \xi) = T(\xi) - U(x)$ — лагранжиан, соответствующий функционалу, описывающему движение материальной точки в поле консервативных сил с потенциалом $U(x)$ на римановом многообразии W . Из следствия 2.4 вытекает, что в классе следов этот функционал не имеет экстремалей, отличных от точечных.

Следствие 2.5. Пусть L — гладкий лагранжиан, равный нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Предположим, что решение задачи Коши для уравнения Эйлера–Лагранжа с лагранжианом L локально единственно. Тогда если лагранжиан L , ограниченный на $T_x W$, имеет не более двух стационарных точек для любого $x \in W$, то каждая экстремальная сеть функционала Ψ_L — или точка, или кривая (канонический представитель имеет лишь вершины степени 1 и 2).

2.2.2. Квазирегулярные лагранжианы

Вернемся к случаю квазирегулярных лагранжианов общего вида. Мы начнем с нескольких необходимых условий экстремальности сетей-следов, а затем приведем критерий экстремальности.

Утверждение 2.2. Пусть L — квазирегулярный лагранжиан и Υ — экстремальная сеть-след для функционала Ψ_L . Тогда $\zeta(L)(x, 0) \geq 0$ для любой вершины $x \in \Upsilon$ и любого вектора $\zeta \in T_{(x, 0)} TW$.

Доказательство. Предположим противное, а именно, пусть в некоторой вершине x для некоторого $\zeta_0 \in T_{(x, 0)} TW$ имеет место следующее неравенство: $\zeta_0(L)(x, 0) < 0$. Рассмотрим представителя Γ сети Υ , у которого прообраз вершины x состоит из одного ребра $\gamma: [0, \delta] \rightarrow x$, инцидентного вершине степени 1, соответствующей концу δ параметризующего отрезка $[0, \delta]$.

Фиксируем в окрестности точки x на многообразии W произвольные локальные координаты x^i . Тем самым у нас заданы локальные координаты (x^i, ξ^j) на расслоении TW . Пусть в этих координатах вектор ζ_0 имеет вид $\zeta = \alpha^i \partial_{x^i} + \beta^i \partial_{\xi^i}$. Положим $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ и $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$,

где $n = \dim W$. Построим деформацию параметрической сети Γ , постоянную на всех ее ребрах, кроме ребра γ , а на ребре γ зададим ее так: $\gamma_\varepsilon(t) = x + \varepsilon(\alpha + t\beta)$. Тогда поле $\eta(t)$ этой деформации имеет вид $\eta(t) = \alpha + t\beta$, а соответствующее поле $\zeta(t)$ равно $(\eta(t), \dot{\eta}(t)) = (\alpha + t\beta, \beta)$. В частности, $\zeta(0) = \zeta_0$. Следовательно, выбрав δ достаточно малым и воспользовавшись условием согласованности, получим:

$$\int_0^\delta \zeta(L) dt < 0.$$

Последнее противоречит экстремальности сети Γ , см. теорему 2.1. Утверждение доказано. ■

Утверждение 2.3. Пусть L — квазирегулярный лагранжиан и Υ — экстремальная сеть-след для функционала Ψ_L . Тогда в каждой подвижной вершине x сети Υ сумма импульсов $p_x(\gamma)$ по всем инцидентным x ребрам γ из Υ равна нулю.

Доказательство. Это так в силу следствия 2.1, поскольку канонический представитель является регулярной критической сетью. Доказательство закончено. ■

Обозначим через $V(TW)$ подрасслоение в расслоении $T(TW) \rightarrow TW$, каждый слой которого состоит из всех векторов, касательных к слою касательного расслоения $TW \rightarrow W$. Обозначим через $H(W_0)$ распределение касательных плоскостей к нулевому сечению $W_0 \subset TW$. В каждой точке x из W касательное пространство $T_{(x,0)}TW$ раскладывается в прямую сумму подпространств $V_{(x,0)}TW$ и $H_{(x,0)}W_0$. Плоскости $H_{(x,0)}W_0$ назовем *горизонтальными плоскостями*.

Отметим, что каждый вектор $\zeta \in T_{(x,0)}TW$ может быть однозначно разложен в сумму своих *вертикальной* $\zeta_v \in V_{(x,0)}TW$ и *горизонтальной* $\zeta_h \in H_{(x,0)}W_0$ составляющих.

Будем говорить, что квазирегулярный лагранжиан L *дифференцируем вдоль базы W* , если для каждого $x \in W$ и каждого вектора $\zeta \in T_{(x,0)}TW$ имеет место равенство

$$\zeta(L) = \zeta_v(L) + \zeta_h(L),$$

причем $\zeta_h(L)$ — линейная функция от $\zeta_h \in H_{(x,0)}W_0$.

Утверждение 2.4. Пусть L — квазирегулярный лагранжиан и Υ — экстремальная сеть-след для функционала Ψ_L . Предположим,

что лагранжиан L дифференцируем вдоль базы. Тогда для каждой вершины x сети Υ ограничение функции $\zeta(L)$ на горизонтальную плоскость $H_{(x,0)}W_0$ равно нулю.

Доказательство. В силу утверждения 2.2 имеем $\zeta(L)(x,0) \geq 0$ для любого $\zeta \in T_{(x,0)}TW$, в частности, для всех ζ из горизонтальной плоскости $H_{(x,0)}W_0$. Из дифференцируемости лагранжиана L вдоль базы вытекает, что ограничение функции $\zeta(L)(x,0)$ на плоскость $H_{(x,0)}W_0$ — линейная функция, которая, тем самым, равна нулю. Доказательство закончено. ■

Квазирегулярный лагранжиан L назовем *правильным*, если для каждой точки $x \in W$ функция $f(\zeta) = \zeta(L)(x,0)$ на $T_{(x,0)}TW$ является гладкой вне $\zeta = 0$.

Вершину x следа Υ (соответствующую вершину канонического представителя для Υ) назовем *свободной*, если импульсы $p_x(\gamma)$ инцидентных ей ребер γ равны нулю.

Напомним, что существует канонический изоморфизм μ между касательными пространствами T_xW к многообразию W и соответствующими вертикальным пространствам $V_{(x,0)}TW$. Этот изоморфизм определяется так. Пусть ξ — произвольный вектор из T_xW . Рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = (x, t\xi)$ в TW , выходящую из точки $\gamma(0) = (x, 0)$. Вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$, по определению, лежит в $V_{(x,0)}TW$. Изоморфизм μ сопоставляет вектору ξ вектор $\dot{\gamma}(0)$.

Утверждение 2.5. Пусть Υ — сеть-след, являющаяся экстремалью функционала Ψ_L , где L — правильный квазирегулярный лагранжиан, дифференцируемый вдоль базы. Пусть x — несвободная подвижная вершина сети Υ . Тогда ограничение функции $f(\zeta) = \zeta(L)(x,0)$ на $V_{(x,0)}TW \setminus \{0\}$ положительно. При этом $\zeta(L)(x,0) = \zeta_v(L)(x,0)$.

Доказательство. Из утверждения 2.4 вытекает, что следующее равенство имеет место: $\zeta(L)(x,0) = \zeta_v(L)(x,0)$. Кроме того, из утверждения 2.2 следует, что $\zeta(L)(x,0) \geq 0$. Таким образом, для доказательства утверждения достаточно проверить, что $\zeta(L)(x,0)$ не может равняться нулю для вертикальных не нулевых векторов $\zeta \in V_{(x,0)}TW$.

Предположим противное, т.е. пусть в некоторой несвободной вершине x сети Υ для некоторого вертикального вектора $\zeta_0 \neq 0$ имеет место равенство $\zeta_0(L)(x,0) = 0$. Так как вершина x — несвободна, существует такое инцидентное x ребро γ , что его импульс $p_x(\gamma)$ отличен от нуля. Рассмотрим представителя Γ сети Υ , для которого прообраз вершины x состоит из одного ребра $\gamma': [-a, a] \rightarrow x$. При этом одна из

инцидентных γ' вершин, которую мы обозначим через x' , инцидентна ребру γ , а другая, обозначаемая через x'' , — всем остальным ребрам $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, инцидентным вершине x в Υ .

Положим $\mu^{-1}(\zeta_0) = \nu_0$. Построим деформацию сети Γ' , оставляющую на месте все вершины сети Γ' , кроме вершин ребра γ' .

Предположим сначала, что $p_x(\gamma)(\nu_0) \neq 0$. Если $p_x(\gamma)(\nu_0) > 0$, то ребро γ' выберем так, чтобы точка $-a$ из параметризующего отрезка $[-a, a]$ соответствовала x' . Если же $p_x(\gamma)(\nu_0) < 0$, то будем предполагать, что $-a$ соответствует вершине x'' . Для определенности будем предполагать, что имеет место вторая возможность.

Пусть в окрестности точки $(x, 0)$ касательного расслоения TW заданы локальные координаты (x^i, ξ^j) , порожденные некоторыми координатами x^i на W . Деформацию на ребре γ' зададим так: $\gamma'_\varepsilon(t) = \varepsilon\nu_0(t + a)/(2a)$, где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Тогда поле деформации $\eta(t)$ ребра γ' имеет вид: $\eta(t) = \nu_0(t + a)/(2a)$, а его поднятие $\zeta(t)$ равно

$$(\eta(t), \dot{\eta}(t)) = \left(\frac{t+a}{2a}\nu_0, \frac{1}{2a}\nu_0 \right).$$

Вертикальная составляющая поля $\zeta(t)$, равная $\dot{\eta}(t)$, имеет вид $\frac{1}{2a}\nu_0$, откуда $\zeta_v(L)(x, 0) = 0$.

С другой стороны, $\eta(-a) = 0$, а $\eta(a) = \nu_0$, поэтому первая вариация функционала Ψ_L для рассматриваемой деформации сети Γ равна

$$p_x(\gamma)(\nu_0) + \int_{-a}^a \zeta_v(L)(x, 0) dt = p_x(\gamma)(\nu_0) < 0,$$

противоречие. Осталось заметить, что суммарный импульс p ребер, инцидентных вершине x'' сети Γ , противоположен импульсу $p_x(\gamma)$. Поэтому если $p_x(\gamma)(\nu_0)$ — положительно, то $p(\nu_0)$ — отрицательно, и применимы те же рассуждения.

Пусть теперь $p_x(\gamma)(\nu_0) = 0$. Так как $p_x(\gamma) \neq 0$, существует такое направление $\theta \in T_x W$, что $p_x(\gamma)(\theta) < 0$. Рассмотрим функцию $A(\delta) = (\nu_0 + \delta\theta)(L)(x, 0)$. По определению правильного лагранжиана, функция A — гладкая при достаточно малых δ . Более того, точка $\delta = 0$ является точкой минимума функции A . Действительно, $A(0) = 0$ в силу выбора ν_0 , а по утверждению 2.2, $A(\delta) \geq 0$. Поэтому

$$A(\delta) = o(\delta) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

так как 0 — внутренняя точка интервала изменения параметра δ .

Рассмотрим деформацию сети Γ , построенную так же, как в первом случае, используя вместо направления ν_0 направление $\nu_0 + \delta\theta$. Запишем формулу первой вариации:

$$p_x(\gamma)(\nu_0 + \delta\theta) + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a A(\delta) dt = \delta(p_x(\gamma)(\theta) + o(1)) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Поэтому при достаточно малых $\delta > 0$ первая вариация отрицательна, что противоречит экстремальности сети Γ . Доказательство закончено. ■

Следствие 2.6. Пусть Υ — сеть-след, являющаяся экстремалью функционала Ψ_L , где L — правильный квазирегулярный лагранжиан, дифференцируемый вдоль базы. Пусть x — несвободная подвижная вершина сети Υ . Тогда для некоторого числа $c(x) > 0$, зависящего только от точки x , и любого $\eta \in T_x W$ выполняется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{L(x, \varepsilon\eta)}{\varepsilon} \geq c(x)\|\eta\|.$$

В частности, ограничение функции L на любое линейное подпространство в $V_{(x,0)}TW$ не дифференцируемо в нуле.

Докажем еще одно свойство экстремальных сетей-следов.

Утверждение 2.6. Пусть Υ — сеть-след, являющаяся экстремалью функционала Ψ_L , где L — правильный квазирегулярный лагранжиан, дифференцируемый вдоль базы. Тогда в каждой вершине x сети Υ для любых инцидентных x ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и любого вектора $\eta \in T_x W$ выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i)(\eta) + \mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0.$$

Доказательство. Разобьем все ребра сети Υ , инцидентные вершине x , на два класса, отнеся к первому ребра $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, а ко второму — все остальные ребра. Рассмотрим представителя Γ сети Υ , для которого прообраз вершины x состоит из одного ребра $\gamma: [-a, a] \rightarrow x$. При этом одна из инцидентных γ вершин, которую мы обозначим через x' , инцидентна ребрам $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, а другая, обозначаемая через x'' , — всем остальным ребрам, инцидентным вершине x в Υ . Без ограничения общности будем считать, что вершине x' соответствует конец a параметризующего отрезка $[-a, a]$.

Фиксируем на W в окрестности точки x произвольные локальные координаты x^i и, без ограничения общности, предположим, что в этих координатах $x = 0$.

Рассмотрим деформацию Γ_ε сети Γ , при которой все вершины сети Γ , кроме вершины x' , остаются на месте, вершина x' равномерно движется со скоростью ν : $x'(\varepsilon) = \varepsilon\nu$. При этом ребро γ деформируется линейно: $t \mapsto \varepsilon\nu \frac{t+a}{2a}$ для каждого $t \in [-a, a]$. Тогда поле деформации $\eta(t)$ вдоль ребра γ имеет вид: $\eta(t) = \nu \frac{t+a}{2a}$, откуда $\dot{\eta}(t) = \frac{1}{2a}\nu$. Как всегда, положим $\zeta(t) = (\eta(t), \dot{\eta}(t))$. Запишем условие неотрицательности первой вариации для такой деформации, учитывая, что $\zeta(L) = \zeta_v(L) = \dot{\eta}(L)$ в силу утверждения 2.4. Имеем

$$\left(\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i)\right)(\nu) + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \nu(L)(x, 0) dt = \left(\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i)\right)(\nu) + \nu(L)(x, 0) \geq 0.$$

Доказательство закончено. ■

Следующая теорема является критерием экстремальности сети-следа по отношению к функционалу, заданному правильным квазирегулярным лагранжианом, дифференцируемым вдоль базы.

Теорема 2.3. *Сеть-след Υ является экстремалью функционала Ψ_L с правильным квазирегулярным лагранжианом L , дифференцируемым вдоль базы, если и только если выполняются следующие условия.*

- (1) *Каждое ребро γ сети Υ является экстремалью функционала ψ_L .*
- (2) *В каждой вершине x сети Υ для любых инцидентных x ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и любого вектора $\eta \in T_x W$ выполнено следующее условие:*

$$\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i)(\eta) + \mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0.$$

- (3) *В каждой подвижной вершине сети Υ сумма импульсов инцидентных этой вершине ребер равна нулю.*
- (4) *В каждой неподвижной вершине x сети Υ для любого вектора $\zeta \in V_{(x,0)}TW$ имеет место неравенство $\zeta(L)(x, 0) \geq 0$. Отметим, что если записать ζ в виде $\mu(\eta)$, $\eta \in T_x W$, то условие этого пункта переписывается так: $\mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0$.*

Доказательство. Пусть сеть Υ экстремальна. Тогда канонический представитель сети Υ — регулярная сеть, экстремальная по отношению к функционалу, порожденному лагранжианом L на пространстве параметрических сетей. По следствию 2.1, все ребра канонического представителя — экстремали функционала ψ_L . Справедливость остальных свойств сети Υ доказана в утверждениях 2.2–2.6. Тем самым, необходимость доказана.

Перейдем к доказательству достаточности. Предположим, что сеть Υ удовлетворяет условиям (1)–(4) теоремы. Пусть $\Gamma: G \rightarrow W$ — произвольный представитель сети Υ и $[\Gamma_\varepsilon]$ — некоторая деформация следа Υ . Мы должны показать, что первая вариация функционала Ψ_L для этой деформации неотрицательна. Так как первая вариация функционала Ψ_L раскладывается в сумму выражений, соответствующих приведенным компонентам параметрической сети Γ , достаточно проверить неотрицательность первой вариации в предположении, что деформация Γ_ε оставляет на месте все приведенные компоненты сети Γ , кроме одной, которую мы обозначим через H .

Пусть x — соответствующая H вершина из Υ , а $\bar{\partial}H = \{x_1, \dots, x_k\}$ — множество вершин сети H , инцидентных регулярным ребрам из Γ . Обозначим через E^i множество невырожденных ребер сети Γ , инцидентных вершине x_i , а через $p_x(E^i)$ — суммарный импульс ребер из E^i в вершине x .

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если x — подвижная вершина сети Υ , то для любого $\eta \in T_x W$ имеет место неравенство: $\mu(\nu)(L)(x, 0) \geq 0$.*

Доказательство. Действительно, воспользуемся условием (2) для случая, когда множество $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ ребер совпадает с множеством всех ребер из Υ , инцидентных x . Для произвольного вектора η имеем:

$$\sum_{i=1}^{\deg x} p_x(\gamma_i)(\eta) + \mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0.$$

Так как x — подвижная вершина, то сумма в левой части этого неравенства равна нулю в силу свойства (3), откуда и вытекает требуемое. Лемма доказана. \blacksquare

Отметим, что, в силу условия (4) и леммы 2.1, достаточно ограничиться случаем, когда сеть H является деревом.

Пусть γ — произвольное ребро сети H . Обозначим через $[a_\gamma, b_\gamma]$ параметризующий это ребро отрезок, и пусть x_a и x_b — вершины ребра γ ,

соответствующие a_γ и b_γ . Если мы разрежем дерево H по ребру γ , то сеть H распадется на две компоненты H_1 и H_2 , где через H_1 обозначена компонента, содержащая вершину x_a . Разобьем множество невырожденных ребер сети Γ , инцидентных H , на два класса E_1^γ и E_2^γ , отнеся к классу E_i^γ ребра, смежные с компонентой H_i .

Фиксируем в окрестности точки x на многообразии W локальные координаты. Тогда в соответствующих координатах на $T(TW)$ изоморфизм μ задается единичной матрицей. Поэтому ниже мы будем опускать его в формулах.

Обозначим через $\eta_\gamma(t)$, $t \in [a_\gamma, b_\gamma]$, поле деформации Γ_ε на ребре γ , а через $p_x(E_i^\gamma)$ — сумму импульсов ребер из E_i^γ в вершине x . Тогда из условия (2) вытекает, что для каждого $t \in [a_\gamma, b_\gamma]$ имеют место неравенства

$$p_x(E_i^\gamma)(\dot{\eta}_\gamma(t)) + \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Проинтегрировав эти неравенства по t от a_γ до b_γ , получим:

$$p_x(E_i^\gamma)(\eta_\gamma(b_\gamma)) - p_x(E_i^\gamma)(\eta_\gamma(a_\gamma)) + \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) dt \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Предположим, что вершина x сети Υ подвижна. Тогда, в силу условия (3), $p_x(E_1^\gamma) + p_x(E_2^\gamma) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} & p_x(E_2^\gamma)(\eta_\gamma(b_\gamma)) - p_x(E_2^\gamma)(\eta_\gamma(a_\gamma)) + \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) dt = \\ & = p_x(E_2^\gamma)(\eta_\gamma(b_\gamma)) + p_x(E_1^\gamma)(\eta_\gamma(a_\gamma)) + \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть y — одна из двух инцидентных γ вершин. Если $y = x_a \in H_1$, то положим $p_y^\gamma = p_x(E_1^\gamma)$, а $\bar{p}_y^\gamma = p_x(E_2^\gamma)$; в противном случае положим $p_y^\gamma = p_x(E_2^\gamma)$, а $\bar{p}_y^\gamma = p_x(E_1^\gamma)$.

Запишем неравенство (2.2) для каждого ребра γ из H и сложим эти неравенства. Полученная сумма распадается на две части: сумму \sum_2 интегралов по всем ребрам из H (эта сумма совпадает с интегральной частью формулы первой вариации для деформации Γ_ε) и сумму \sum_1 импульсов. Мы покажем, что эта сумма импульсов совпадает с неинтегральной частью формулы первой вариации для деформации Γ_ε , что и завершит разбор случая подвижной вершины x . Для этого сгруппируем слагаемые из суммы \sum_1 , собрав вместе импульсы, примененные к

значению поля деформации η в одной и той же вершине y сети H , и обозначим их сумму через \sum_y .

Пусть $y \in \bar{\partial}H$, т.е. $y = x_i$ для подходящего i , и пусть d — это степень вершины y в H . Обозначим через f_1, \dots, f_d инцидентные y ребра из H . Тогда сумма \sum_y имеет вид $\sum_j p_y^{f_j}$, или

$$\sum_y = - \sum_j \bar{p}_y^{f_j}.$$

Осталось заметить, что в правой части стоит следующее выражение:

$$- \sum_j \bar{p}_y^{f_j} = - \sum_{j \neq i} p_x(E^j) = p_x(E^i).$$

Последнее равенство имеет место в силу предположения (3). Таким образом, $\sum_{x_i} = p_x(E^i)$.

Пусть теперь $y \notin \bar{\partial}H$. Тогда $\sum_y = \sum_\gamma p_y^\gamma$, где суммирование берется по всем ребрам γ из H , инцидентным y . Так как вершина x подвижная, то $p_y^\gamma + \bar{p}_y^\gamma = 0$ по предположению. Поэтому $\sum_y = - \sum_\gamma \bar{p}_y^\gamma$. Легко видеть, что последняя сумма равна сумме импульсов в вершине x всех ребер из Υ , инцидентных x , и, значит, равна нулю. Тем самым, случай подвижной вершины x полностью разобран.

Пусть теперь x — неподвижная вершина сети Υ . Среди вершин сети H в этом случае необходимо имеются граничные. Напомним, что в граничной вершине x сумма импульсов ребер сети Υ , инцидентных x , не предполагается равной нулю. Обозначим эту сумму через p . Пусть y — неподвижная вершина из H . Как и выше, обозначим через η поле деформации Γ_ε , и пусть η_y — значение поля η в вершине y . Так как y неподвижна, то $\eta_y = 0$.

Запишем формулу первой вариации для деформации Γ_ε и добавим к ней нулевое слагаемое $-p(\eta_y)$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что полученное выражение неотрицательно. Обозначим через p_y сумму импульсов в вершине y невырожденных ребер сети Γ , инцидентных y (если таких ребер нет, то положим $p_y = 0$).

Теперь мы повторим рассуждения, приведенные выше для случая подвижной вершины x , заменив в них $\bar{\partial}H$ на $\bar{\partial}H \cup \{y\}$ и сумму p_y импульсов в вершине y — на $p_y - p$. Отметим, что сумма так переопределенных импульсов в вершинах из переопределенного множества $\bar{\partial}H$ теперь равна нулю. Кроме того, неравенства (2.1) остаются справедливыми, так как значения поля деформации в неподвижной вершине y

равно нулю. Таким образом, мы находимся в тех же предположениях, что и в случае подвижной вершины x . Доказательство закончено. ■

Пример. Пусть Ψ_L — функционал длины на римановом многообразии W . Очевидно, мы находимся в условиях теоремы 2.3. Поэтому, в качестве следствия, получается описание локальной структуры экстремальных следов, см. [75] или [78].

Следствие 2.7. *Сеть-след Υ с границей $\partial\Upsilon$ на римановом многообразии W является экстремалью функционала длины, если и только если выполнены следующие условия.*

- (1) *Ребра сети Υ — геодезические.*
- (2) *Угол между любыми двумя смежными ребрами больше или равен 120° .*
- (3) *Каждая вершина степени 1 принадлежит $\partial\Upsilon$.*
- (4) *Если вершина степени 2 не принадлежит $\partial\Upsilon$, то угол между инцидентными ей ребрами равен 180° .*

Отметим, что первое и второе условия следствия 2.7 вытекают, соответственно, из первого и второго условий теоремы 2.3. Третье и четвертое условия следствия 2.7 вытекают из третьего условия теоремы 2.3. Четвертое условие теоремы 2.3 для функционала длины выполняется автоматически.

ГЛАВА 3

Линейные сети

Данная глава посвящена изучению линейных сетей в пространстве \mathbb{R}^N . Напомним, что (параметрическая) сеть в \mathbb{R}^N называется *линейной*, если все ее ребра — прямолинейные отрезки. Отметим: мы не предполагаем, что рассматриваемые сети обладают тем или иным свойством экстремальности. На первый взгляд, мы, тем самым, несколько отклоняемся от основной темы книги — экстремальных сетей. Однако из результатов предыдущей главы вытекает, что параметрические сети и сети-следы в \mathbb{R}^N , экстремальные по отношению к таким функционалам, как длина, взвешенная длина, длина, порожденная нормой (в частности, манхеттенская длина), являются линейными сетями. Поэтому общие свойства линейных сетей, о которых пойдет речь в настоящей главе, будут полезны в дальнейшем при изучении сетей, экстремальных относительно этих функционалов. Кроме того, на наш взгляд, приведенные здесь геометрические результаты представляют и самостоятельный интерес.

Мы рассмотрим две основных задачи. Первая из них состоит в описании множества всех линейных сетей, сонаправленных с данной линейной сетью, у которых фиксировано некоторое подмножество множества вершин — граница сети. Вторая задача касается связи между степенью закрученности плоского линейного дерева (т.е. максимальным углом поворота при движении по ломаным, лежащим в дереве) и количеством уровней выпуклости некоторого естественного подмножества множества вершин линейной сети, которое мы называем геометрической границей. Мы покажем, что между этими двумя характеристиками линейного дерева имеется тесная связь: степень закрученности оценивается сверху линейной функцией числа уровней выпуклости геометрической границы.

Напомним определение разбиения произвольного непустого конечного множества M точек плоскости на уровни выпуклости. Отнесем к *первому уровню выпуклости* M^1 множества M все точки из M , лежа-

щие на границе выпуклой оболочки множества M . Заметим, что M^1 не пусто. Выбросим M^1 из M . Если полученное в результате множество не пусто, используем для его преобразования ту же процедуру. А именно, все точки из M , попавшие на границу выпуклой оболочки множества $M \setminus M^1$, отнесем ко *второму уровню выпуклости* M^2 множества M . Продолжим этот процесс до тех пор, пока все точки из M не попадут на какой-нибудь уровень выпуклости. Построенное разбиение $M = \sqcup_{i=1}^k M^i$ называется *разбиением на уровни выпуклости*, а множество M^i называется *i -м уровнем выпуклости множества M* . Если $M = \sqcup_{i=1}^k M^i$, то говорят, что M имеет k уровней выпуклости. Число уровней выпуклости множества M обозначим через $\kappa(M)$. Отметим, что множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки, если и только если оно имеет один уровень выпуклости, который, очевидно, совпадает с ним самим. Такие множества обычно называют *экстремальными*, но у нас слово “экстремальный” уже используется в отношении сетей. Поэтому нам удобно называть в дальнейшем экстремальные множества *выпуклыми*, имея в виду, что они порождают выпуклые многоугольники.

В данной главе параметрические сети рассматриваются с точностью до замены параметризации.

3.1. Взаимно параллельные линейные сети с данной границей

Обозначим через \mathbb{R}^N стандартное вещественное N -мерное линейное пространство.

Определение. Параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$, все ребра которой — прямолинейные отрезки (возможно, вырожденные), называется *линейной (параметрической) сетью типа G* .

Пусть $\mathcal{L}(G)$ — это множество всех линейных сетей вида $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$, где G — произвольный фиксированный граф. Элементы пространства $\mathcal{L}(G)$ однозначно определяются положениями своих вершин. Поэтому если $|G|$ — количество вершин графа G , то $\mathcal{L}(G)$ представимо в виде пространства $\mathbb{R}^N{|G|}$. Это представление задает естественную гладкую структуру на $\mathcal{L}(G)$, которая и будет иметься в виду в дальнейшем, когда мы будем говорить, например, о дифференцируемости функций, заданных на пространстве линейных сетей. Элементы множества $\mathcal{L}(G)$ назовем *линейными сетями топологии G или типа G* .

Пусть G — граф с некоторой границей, а φ — произвольное граничное отображение. Множество всех линейных сетей $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$, таких,

что $\partial\Gamma = \varphi$, обозначим через $[G, \varphi]$ и будем называть *пространством линейных сетей топологии G с данной границей φ* . По определению, $[G, \varphi] \subset \mathcal{L}(G)$. Каждый элемент из $[G, \varphi]$ однозначно задается положением своих подвижных вершин, поэтому если s — количество подвижных вершин графа G , то $[G, \varphi]$ естественным образом наделяется структурой пространства $\mathbb{R}^{Ns} \subset \mathbb{R}^{N|G|}$.

Замечание. Линейные сети в \mathbb{R}^N можно рассматривать как важный частный случай так называемых *геодезических сетей*, т.е. параметрических сетей на римановом многообразии, все ребра которых — геодезические, см. [87].

Для погруженных линейных сетей можно ввести естественное понятие параллельности, которое оказывается чрезвычайно полезным при изучении геометрии сетей в евклидовом пространстве, экстремальных по отношению к функционалам длины и взвешенной длины.

Пусть Γ и Γ' — две погруженных линейных сети одного и того же типа G . Ориентируем граф G произвольным образом. Это позволит нам рассматривать образы ребер этого графа при отображениях Γ и Γ' как векторы в пространстве \mathbb{R}^N . Мы скажем, что сети Γ и Γ' *параллельны*, если для каждого ребра e из G векторы $\Gamma(e)$ и $\Gamma'(e)$ сонаправлены.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ — погруженная линейная сеть типа G с произвольной фиксированной границей $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^N$. Обозначим через $[G, \varphi]_\Gamma$ множество всех погруженных линейных сетей из $[G, \varphi]$, параллельных Γ . Общая задача, которая будет решена в настоящем разделе (см. теорему 3.1), состоит в следующем.

Задача. Описать структуру множества $[G, \varphi]_\Gamma$.

В качестве следствий теоремы 3.1 мы получим описание всех погруженных взвешенных экстремальных сетей данного типа с данной границей (см. следствие 4.9). Эти результаты получены авторами в [84] (см. также [87]).

Выше, в главе 1, мы определили разбиение произвольного графа, а значит, и произвольной сети, на невырожденные компоненты. При рассмотрении классов параллельности линейных сетей эти компоненты, как легко видеть, независимы в следующем смысле.

Предложение 3.1. Пусть $\{\Gamma_i: G_i \rightarrow \mathbb{R}^N\}_{i=1}^k$ — невырожденные компоненты линейной погруженной сети Γ с границей φ и φ_i — граница сети Γ_i . Тогда

$$[G, \varphi]_\Gamma = [G_1, \varphi_1]_{\Gamma_1} \times \cdots \times [G_k, \varphi_k]_{\Gamma_k}.$$

Отметим, что предложение 3.1 позволяет свести задачу описания множества $[G, \varphi]_\Gamma$ к задаче описания таких множеств для невырожденных компонент.

Пусть Γ , как и выше, — погруженная линейная сеть типа G с границей φ . Для описания множества $[G, \varphi]_\Gamma$ нам понадобится следующая линейная система уравнений. Фиксируем в пространстве \mathbb{R}^N некоторые евклидовы координаты. Фиксируем некоторую ориентацию сети Γ и будем называть эту ориентацию *исходной*. Если e — произвольное ребро сети Γ , ориентированное одним из двух возможных способов, то положим $\varepsilon(e)$ равным 1, если эта ориентация ребра e совпадает с исходной. В противном случае положим $\varepsilon(e) = -1$. Пусть $\nu(e)$ — координаты единичного вектора направления ребра e сети Γ в исходной ориентации.

Разобьем граф G на невырожденные компоненты G_i , и пусть $\Gamma_i = \Gamma|_{G_i}$ — соответствующие сети. Рассмотрим произвольную компоненту Γ_i . Обозначим через M_1, \dots, M_n координаты образов граничных вершин v_1, \dots, v_n сети Γ_i . Пусть e_j — единственное граничное ребро, инцидентное вершине v_j . Для каждого ребра e_j , отличного от e_1 , фиксируем некоторый ориентированный путь γ_j в Γ_i , соединяющий ребра e_1 и e_j , начинающийся в v_1 и заканчивающийся в v_j . Отметим, что ориентация пути γ_j определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из γ_j . Далее, пусть c_1, \dots, c_k — циклы из Γ_i , соответствующие некоторой фундаментальной системе циклов графа G_i , на каждом из которых фиксирована ориентация. Отметим, что объединение построенных систем фундаментальных циклов по всем невырожденным компонентам G_i образует фундаментальную систему циклов подвижного подграфа \hat{G} графа G . Как и в случае путей γ_j , ориентация каждого цикла c_q определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из c_q .

Каждому ребру e сети Γ_i поставим в соответствие вещественную переменную λ_e . Рассмотрим следующую линейную систему уравнений на вещественные переменные λ_e , записанную в векторной форме:

$$\begin{cases} \sum_{e: e \in \gamma_j} \varepsilon(e) \nu(e) \lambda_e = M_j - M_1, & \forall \gamma_j, \quad j = 2, \dots, n \\ \sum_{e: e \in c_q} \varepsilon(e) \nu(e) \lambda_e = 0, & \forall c_q, \quad q = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Здесь $(\dots, \lambda_e, \dots) \in \mathbb{R}^m$, где m — количество ребер графа G_i . Эта система линейных уравнений называется *фундаментальной системой невырожденной компоненты Γ_i* , а ее ранг — *рангом $\text{rk } \Gamma_i$ компоненты Γ_i* .

Геометрический смысл фундаментальной системы состоит в следующем. Уравнения фундаментальной системы, соответствующие путям γ_j ,

выражают векторы $M_1 M_j$ в виде суммы векторов—звеньев ориентированной ломаной γ_j . Уравнения фундаментальной системы, отвечающие циклам c_q , означают замкнутость каждой ориентированной ломаной c_q : сумма всех векторов—звеньев такой ломаной равна нулю.

Определение. *Фундаментальной системой сети Γ называется линейная система уравнений, составленная из фундаментальных систем всех невырожденных компонент сети Γ . Рангом $\text{rk}(\Gamma)$ сети Γ называется ранг ее фундаментальной системы.*

Замечание. Так как каждое ребро сети Γ принадлежит ровно одной ее невырожденной компоненте, фундаментальная система сети Γ имеет блочный вид, и поэтому ранг сети Γ равен сумме рангов ее невырожденных компонент:

$$\text{rk}(\Gamma) = \sum_i \text{rk}(\Gamma_i).$$

Отметим, что определенная нами фундаментальная система сети Γ зависит от выбора путей γ_j и циклов c_q . Тем не менее, имеет место следующий гомологический результат (см. [84]).

Предложение 3.2. *Все фундаментальные системы сети Γ эквивалентны как линейные системы уравнений. В частности, множества решений всех фундаментальных систем совпадают, и ранг сети Γ определен корректно, т.е. не зависит от выбора фундаментальной системы сети.*

Изучим, как связаны решения фундаментальной системы сети Γ и элементы множества $[G, \varphi]_\Gamma$. Если Γ' — произвольная параллельная Γ линейная сеть типа G с границей φ , то набор длин ребер сети Γ' удовлетворяет фундаментальной системе сети Γ .

Обратно, пусть $\{\lambda_e\}$ — некоторое решение фундаментальной системы. Покажем, что если все λ_e положительны, то существует параллельная Γ линейная сеть типа G с границей φ , длины ребер которой равны соответствующим значениям λ_e . Для этого сначала для произвольного решения $\{\lambda_e\}$ фундаментальной системы построим линейную сеть Γ' из $[G, \varphi]$. Легко видеть, что если мы реализуем все невырожденные компоненты сети Γ' на соответствующих им подмножествах множества M , то мы, тем самым, реализуем и всю сеть Γ' . Поэтому, в силу блочного вида фундаментальной системы, без ограничения общности можно предполагать, что граф G совпадает со своей единственной невырожденной компонентой.

Пусть T — остовное дерево графа G с границей $\partial T = \partial G$. Выберем все пути γ_j лежащими в T . Напомним, что на графе G , а значит, и на

дереве T , фиксирована ориентация. Построим линейное дерево Υ , такое, что $\Upsilon(v_1) = M_1$, и вектор $\Upsilon(e)$, соответствующий произвольному ориентированному ребру e из T , равен $\lambda_e \nu(e)$. Так как набор чисел $\{\lambda_e\}$ удовлетворяет фундаментальной системе, то граница $\partial\Upsilon$ дерева Υ совпадает с $\partial\Gamma$ (отметим, что, по определению, параметризующее дерево T сети Υ является остовным подграфом в G).

Так как отображение Υ определено на всех вершинах графа G , то оно по линейности продолжается до единственной линейной сети $\Gamma': G \rightarrow \mathbb{R}^N$. Остается проверить, что вектор $\Gamma'(e)$, соответствующий произвольному ориентированному ребру e из G , равен $\lambda_e \nu(e)$. Это легко вытекает из вида фундаментальной системы.

Обозначим через \mathcal{L} аффинное подпространство в \mathbb{R}^m , являющееся множеством решений фундаментальной системы сети Γ (здесь m — количество ребер графа G). Пусть $\psi: \mathcal{L} \rightarrow [G, \varphi]$ — построенное только что отображение, ставящее в соответствие каждому набору $(\dots, \lambda_e, \dots) \in \mathcal{L}$ соответствующую линейную сеть из $[G, \varphi]$, точнее, вектор координат подвижных вершин этой сети. Очевидно, что ψ — аффинное отображение.

В терминах фундаментальной системы сети Γ удастся описать множество $[G, \varphi]_\Gamma$. А именно, имеет место следующая теорема (см. [84]).

Теорема 3.1. *Пусть Γ — погруженная линейная сеть типа G с границей φ в \mathbb{R}^N . Обозначим через m число ребер графа G и через r — ранг $\text{rk}(\Gamma)$ сети Γ . Тогда $[G, \varphi]_\Gamma$ — открытое выпуклое многогранное подмножество в $\psi(\mathcal{L})$ (вообще говоря, не ограниченное), его размерность равна $m - r$, и количество граней максимальной размерности не превосходит m .*

Оказывается, если граница сети Γ удовлетворяет некоторым естественным ограничениям, то теорему 3.1 можно усилить. Пусть, как и выше, $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ — погруженная линейная сеть. Определим *геометрическую границу* $\partial_g \Gamma$ сети Γ следующим образом. Вершину v сети Γ отнесем к $\partial_g \Gamma$, если и только если существует такая проходящая через v гиперплоскость в \mathbb{R}^N , что одно из ограниченных ей открытых полупространств содержит внутренности всех ребер из Γ , инцидентных v .

Имеет место следующее предложение.

Предложение 3.3. *Погруженная линейная сеть содержится в выпуклой оболочке своей геометрической границы.*

Из предложения 3.3 и теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

Следствие 3.1. *В предположениях теоремы 3.1, если граница φ сети Γ содержит геометрическую границу $\partial_g \Gamma$ этой сети, то мно-*

жество $[G, \varphi]_\Gamma$ является внутренностью выпуклого (ограниченного) многогранника размерности $m - r$, у которого количество граней максимальной размерности не превосходит m .

Замечание. Легко построить пример погруженной линейной сети Γ , у которой граница φ не содержит геометрической границы $\partial_g \Gamma$, однако множество $[G, \varphi]_\Gamma$ ограничено. Было бы интересно найти критерий ограниченности множества $[G, \varphi]_\Gamma$ в терминах геометрии границы φ .

3.2. Геометрия плоских линейных деревьев

В настоящем разделе мы изучим связь между степенью закрученности вложенного плоского линейного дерева (т.е. максимальным углом поворота при движении по ломаным, лежащим в дереве) и количеством уровней выпуклости его геометрической границы. Оказывается, степень закрученности оценивается сверху линейной функцией числа уровней выпуклости геометрической границы. Доказательства приводимых здесь теорем можно найти в [69] и [83], см. также [87].

Поскольку мы будем работать с *вложенными* линейными деревьями, то можно перейти от рассмотрения параметрических линейных сетей к соответствующим вложенным сетям-следам, которые, в свою очередь, естественно отождествляются с соответствующими плоскими деревьями. Тем самым, результаты, приведенные ниже, имеют место для всех этих объектов.

Отметим, что вложенное в плоскость линейное дерево, т.е. *плоское линейное дерево*, представляет собой, по определению, плоскую линейную укладку соответствующего параметрического графа. Казалось бы, вопрос о плоских линейных укладках произвольных графов (а не только деревьев) давно и хорошо изучен: имеются критерии существования вложения в плоскость произвольного графа, например теорема Куратовского–Понтрягина, и, более того, известна теорема Вагнера–Фари: если граф допускает некоторое вложение в плоскость, то он допускает и линейную плоскую укладку (см., например, [39]). Наконец, найдены алгоритмы, проверяющие, существует ли у данного графа плоская укладка, и строящие соответствующий вложенный плоский линейный граф, если ответ положителен.

Однако совсем иначе обстоит дело, если мы потребуем, чтобы искомая плоская линейная укладка графа G обладала какими-либо дополнительными геометрическими свойствами. Сформулируем общую задачу — *граничную задачу с заданными углами*, — которая возникает при таком подходе.

Задача. Пусть фиксирован граф G и граничное отображение $\beta: V \rightarrow M$ (здесь $M \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество точек плоскости и V — подмножество множества вершин из G). Существует ли плоская линейная сеть Γ типа G , затягивающая множество M по граничному отображению β , такая, что углы между некоторыми парами ребер из Γ удовлетворяет некоторым заранее заданным ограничениям? Описать все графы G , для которых решение существует.

Техника, которая будет развита в данном разделе, позволит нам доказать ряд результатов о геометрии вложенных плоских линейных деревьев. В частности, мы получим ограничения на возможные топологии деревьев G , допускающих линейные укладки с ограничениями на углы (см. ниже). В следующих главах мы применим разработанную технику и получим эффективные ограничения на возможные топологии вложенных плоских линейных деревьев, являющихся экстремалиями для функционала длины, взвешенной длины, манхеттенской длины. Кроме того, на наш взгляд, общая теорема 3.2 о вложенных плоских линейных деревьях имеет и самостоятельный интерес.

3.2.1. Число вращения вложенного плоского линейного дерева

Напомним, что если (a, b) — упорядоченная пара линейно независимых векторов на плоскости с фиксированной ориентацией, то можно определить *ориентированный угол* $\alpha(a, b)$ от a к b так. Величина $\alpha(a, b)$ равна величине меньшего из двух углов между векторами, а знак — знаку ориентированного репера (a, b) . Если векторы a и b сонаправлены, то ориентированный угол также определен и равен нулю. Для противоположенных векторов ориентированный угол не определен.

Определим понятие числа вращения произвольного вложенного плоского линейного дерева Γ . Будем считать, что на плоскости фиксирована каноническая ориентация. Пусть теперь a и b — произвольные ребра из Γ . Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a, b)$ в Γ , начинающийся на a и заканчивающийся на b . Путь $\gamma(a, b)$ представляет собой ориентированную ломаную на плоскости. Звенья ломаной $\gamma(a, b)$ можно рассматривать как векторы. Упорядочим векторы-звенья ломаной $\gamma(a, b)$ в соответствии с ориентацией этой ломаной. *Числом вращения между ребрами a и b линейного дерева Γ* назовем умноженную на $3/\pi$ сумму ориентированных углов между последовательными векторами-звеньями ломаной $\gamma(a, b)$. Другими словами, число вращения $\text{tw}(a, b)$ есть полный угол поворота векторов-звеньев при движении вдоль $\gamma(a, b)$

от a к b , умноженный на $3/\pi$. Отметим, что так определенное число вращения упорядоченной пары ребер обладает следующими свойствами:

- $\text{tw}(a, b) = -\text{tw}(b, a)$ (косая симметрия);
- $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, c) = \text{tw}(a, c)$ для любых ребер a, b и c из Γ , лежащих на одном пути в Γ (аддитивность вдоль путей);
- $\text{tw}(a, a) = 0$.

Определение. Числом вращения вложенного линейного дерева Γ называется максимум чисел вращения по всем упорядоченным парам (a, b) ребер из Γ :

$$\text{tw } \Gamma = \max_{(a,b)} \text{tw}(a, b).$$

3.2.2. Основная теорема

Выше мы определили понятие геометрической границы для произвольной линейной сети в \mathbb{R}^N и, в частности, для плоских линейных деревьев. Теперь все готово для того, чтобы сформулировать основную теорему настоящего раздела.

Теорема 3.2. Пусть Γ — произвольное плоское вложенное линейное дерево и $M = \partial_g \Gamma$ — его геометрическая граница. Обозначим через $\kappa(M)$ количество уровней выпуклости множества $\partial_g \Gamma$. Тогда

$$\text{tw } \Gamma \leq 12(\kappa(M) - 1) + 6.$$

Более того, эта оценка является точной в следующем смысле. Для каждого целого $k \geq 1$ существует вложенное плоское линейное дерево Γ , такое, что $\text{tw } \Gamma = 12(k - 1) + 6$, и $\kappa(\partial_g \Gamma) = k$.

Полное доказательство этой теоремы опубликовано в [83]. Довольно подробный скетч приведен также в [87]. Здесь мы ограничиваемся тем, что опишем основные конструкции, на которых основано это доказательство. Мы выделяем их в отдельный параграф, который можно при первом чтении опустить.

3.3. К доказательству теоремы 3.2

Как мы уже говорили, в данном разделе мы приводим основные конструкции и результаты, использованные нами при доказательстве теоремы 3.2. Основная идея

этого доказательства состоит в следующем. Рассмотрим пару ребер (a, b) , на которой достигается число вращения линейного дерева Γ . Оказывается, см. ниже, можно без ограничения общности предполагать, что эти ребра — граничные. В частности, ломаная $\gamma(a, b)$ начинается на одном уровне выпуклости геометрической границы дерева Γ и заканчивается на другом. Мы построим некоторое разбиение ломаной $\gamma(a, b)$ на куски, каждый из которых или соединяет многоугольники, порожденные соседними уровнями выпуклости, или начинается и заканчивается на одном и том же таком многоугольнике (такие многоугольники мы будем для краткости тоже называть *уровнями выпуклости*). Числа вращения этих кусков удастся оценить исходя из того, что между соседними уровнями выпуклости нет граничных вершин дерева Γ . Эти оценки и приводят к утверждению теоремы. Однако реализация приведенной идеи требует развития определенной техники для работы с ломаными.

3.3.1. Плоские ломаные I: случай общего положения

В данном подразделе мы остановимся на необходимых фактах из геометрии пары ломаных, соединяющих две фиксированных точки плоскости. При этом мы будем предполагать сначала, что эти ломаные находятся в “общем положении”. В следующем подразделе, см. раздел 3.3.2, мы откажемся от этого предположения.

Напомним определение ломаной.

Определение. Конечный набор прямолинейных отрезков $[A_i, A_{i+1}] = \Delta_i$, $i = 0, \dots, n-1$, называется *незамкнутой ломаной*, если все точки A_i попарно различны, а интервалы (A_i, A_{i+1}) попарно не пересекаются и не содержат точек A_k , $k = 0, \dots, n$.

Конечное множество отрезков $\Delta_i = [A_i, A_{(i+1) \bmod n}]$, $i = 0, \dots, n-1$, называется *замкнутой ломаной*, если все точки A_i попарно различны, а интервалы $(A_i, A_{(i+1) \bmod n})$ попарно не пересекаются и не содержат точек A_k , $k = 0, \dots, n-1$.

Отрезки $[A_i, A_{i+1}]$ называются *ребрами ломаной*, а точки A_i — ее *вершинами*. Если ломаная незамкнута, то вершины A_0 и A_n называются *концевыми*, а все остальные — *внутренними вершинами* ломаной. Далее, если ломаная L незамкнута, то ее ребра $[A_i, A_{i+1}]$ при $i = 0, n-1$ называются *концевыми ребрами*, а все остальные — *внутренними ребрами* ломаной L . Если же ломаная L замкнута, то все ее вершины и ребра называются *внутренними*.

Ломаная L' называется *подломаной* ломаной L , если каждое ребро ломаной L' является также и ребром ломаной L .

Если ломаные L' и L совпадают как подмножества плоскости, но L' содержит некоторые дополнительные вершины, то L' называется *измельчением ломаной* L .

Отметим, что, по определению, каждая ломаная представляет собой вложенную кусочно-регулярную (даже кусочно-линейную) кривую на плоскости и, в частности, является линейной сетью.

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующие обозначения. Если L — незамкнутая ломаная, а A и B — две ее произвольные точки, то через $L[A, B]$ обозначим часть L между A и B . Если из $L[A, B]$ выброшена точка A или B , то заменим соответствующую квадратную скобку “[” или “]” на круглую, “(” или “)”.

Замечание. В дальнейшем, говоря о ломаных, мы, допуская определенную вольность речи, иногда будем подразумевать их “естественные” измельчения, которые очевидно определяются из контекста. Например, если некоторая ломаная L' , как подмножество плоскости, содержится в ломаной L , то мы будем говорить, что L' является подломаной ломаной L , хотя, формально, это верно лишь для измельчения

ломаной L , полученного добавлением ко множеству ее вершин всех вершин ломаной L' .

Замечание. Отметим, что здесь, для простоты, мы рассматриваем вложенные ломанные, хотя многие результаты могут быть легко перенесены на случай погруженных ломанных.

3.3.1.1. Твистинги и кручение

Пусть L — произвольная ломаная. По определению, все ее вершины A_i канонически перенумерованы. Ясно, что каждая ломаная может быть задана занумерованным набором своих вершин. Если перенумеровать точки A_i в противоположном порядке, то мы снова получим ломаную, которая совпадает с исходной как подмножество плоскости. Выбор одной из двух канонических нумераций вершин ломаной L называется *ориентацией ломаной L* . Если ориентация ломаной L фиксирована, то можно рассматривать каждое звено $A_i A_{i+1}$ ломаной L как вектор с началом в A_i и концом в A_{i+1} .

Напомним, что если (a, b) — упорядоченная пара линейно независимых векторов на ориентированной плоскости, то определен *ориентированный угол* $\alpha(a, b)$ от a к b . Напомним, что величина $\alpha(a, b)$ равна размеру меньшего из двух углов между векторами, а знак — знаку ориентированного репера (a, b) . Если векторы a и b сонаправлены, то ориентированный угол также определен и равен нулю. Для противоположно направленных векторов ориентированный угол не определен.

В дальнейшем нам будет удобно нормировать ориентированный угол.

Определение. Твистингом $\text{tw}(a, b)$ упорядоченной пары векторов a и b назовем число $\frac{3}{\pi}\alpha(a, b)$.

Итак, пусть L — ориентированная ломаная и $a_i = [A_i, A_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, — ее последовательные ребра (если ломаная замкнута, то сложение в индексах понимается по модулю n).

Определение. Твистингом $\text{tw } A_i$ вершины A_i назовем твистинг между последовательными векторами-звеньями, инцидентными A_i , т.е. число $\text{tw}(a_{i-1}, a_i)$.

Отметим, что в случае незамкнутой ломаной твистинг определен лишь для внутренних вершин.

Предположим теперь, что ломаная L незамкнута.

Определение. Сумма твистингов всех внутренних вершин ориентированной ломаной L называется *кручением вдоль L* и обозначается через $\text{tn } L$:

$$\text{tn } L = \sum_{i=1}^{n-1} \text{tw } A_i.$$

Если ломаная L состоит из одного звена, то положим $\text{tn } L = 0$.

Легко видеть, что кручение вдоль незамкнутой ориентированной ломаной L обладает следующими свойствами:

- если заменить ориентацию ломаной L на противоположную, то кручение вдоль L изменит знак (косая симметрия);
- если ломаная L' получена из L измельчением, то кручения вдоль L и L' совпадают;

- если A_i — произвольная внутренняя вершина L , а L_1 и L_2 — ориентированные в соответствии с ориентацией L ломаные, на которые A_i разбивает L , то $\text{tn } L = \text{tn } L_1 + \text{tw } A_i + \text{tn } L_2$;
- если P — произвольная точка, лежащая внутри произвольного ребра из L , а L_1 и L_2 — ломаные, на которые P разбивает L , ориентированные в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L_1 + \text{tn } L_2$ (аддитивность).

Пусть теперь L — замкнутая ориентированная ломаная.

Определение. Сумма твистингов всех вершин из L называется *кручением вдоль замкнутой ломаной* L и обозначается через $\text{tn } L$:

$$\text{tn } L = \sum_{i=0}^{n-1} \text{tn } A_i.$$

Сформулируем несколько очевидных свойств кручения вдоль замкнутой ориентированной ломаной L .

- Если заменить ориентацию ломаной L на противоположную, то кручение вдоль L изменит знак (косая симметрия).
- Если ломаная L' получена из L измельчением, то кручения вдоль L и L' совпадают.
- Если A_i — произвольная вершина из L и L' — незамкнутая ломаная, полученная из L разрезанием по A_i и ориентированная в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L' + \text{tw } A_i$.
- Если P — произвольная точка, лежащая внутри произвольного ребра из L , и L' — незамкнутая ломаная, полученная из L разрезанием по P и ориентированная в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L'$.

Следующее предложение непосредственно вытекает из определений.

Предложение 3.4. Пусть L — произвольная замкнутая ломаная, ориентированная против часовой стрелки. Тогда $\text{tn } L = 6$. Если же L ориентирована по часовой стрелке, то $\text{tn } L = -6$.

В дальнейшем нам также понадобится следующее понятие деформации ломаной.

Определение. Семейство ломаных L^t , $t \in [0, 1]$, с вершинами в точках A_i^t , где $i = 0, \dots, n$, называется *деформацией ломаной* $L = L^0$, если все кривые A_i^t непрерывны. Часто деформацию произвольного измельчения ломаной L мы также будем называть деформацией ломаной L , опуская слово “измельчение”.

Вершина A_i ломаной L называется *неподвижной* при деформации L^t , если $A_i^t = A_i$ для любого $t \in [0, 1]$. Все остальные вершины называются *подвижными*. Ребро $[A_i, A_{i+1}]$ ломаной L называется *подвижным*, если подвижна хотя бы одна из его вершин. Множество всех подвижных ребер из L называется *носителем деформации* L^t .

Замечание. Определенная нами деформация L_t ломаной L является частным случаем деформации сети L в классе ломаных.

Легко доказывается следующее предложение.

Предложение 3.5. Пусть L^t — произвольная деформация ориентированной ломаной L . Если L незамкнута, то предположим дополнительно, что направления первого и последнего ее звеньев не меняются в процессе деформации. Тогда кручение вдоль L не меняется при деформации:

$$\text{tn } L^t = \text{const} = \text{tn } L, \quad t \in [0, 1].$$

3.3.1.2. Пара ломаных в общем положении

Пусть L^1 и L^2 — две ломаные, некоторые вершины которых фиксированы.

Определение. Будем говорить, что L^1 и L^2 находятся в общем положении, если они пересекаются не более чем в конечном числе точек, каждая из которых или не является вершиной ни одной из ломаных, или является фиксированной вершиной ломаных L^i .

Пусть теперь L^1 и L^2 — некоторые ломаные, находящиеся в общем положении. Выбросим из L^2 все точки пересечения с L^1 и обозначим через L_j^2 замыкания полученных связных компонент. Ясно, что L_j^2 являются ломаными. Если ломаная L^2 ориентирована, то будем предполагать, что компоненты L_j^2 занумерованы в соответствии с ориентацией ломаной L^2 .

Определение. Построенное разбиение $L^2 = \cup L_j^2$ назовем каноническим разбиением ломаной L^2 по отношению к L^1 .

Предположим теперь, что ломаные L^1 и L^2 соединяют точки A и B , являющиеся их единственными фиксированными вершинами, и пусть эти ломаные находятся в общем положении. Пусть $L^2 = \cup_{j=1}^N L_j^2$ — каноническое разбиение L^2 относительно L^1 . Ориентируем обе ломаные L^1 и L^2 от A к B . Каждая ломаная L_j^2 , вместе с соответствующей частью ломаной L^1 , ограничивает некоторую ограниченную область Ω_j на плоскости. Более точно, если A_j и B_j — начальная и конечная вершины ломаной L_j^2 и b_j — часть ломаной L^1 между A_j и B_j , то область Ω_j ограничена замкнутой ломаной $L_j^2 \cup b_j$. Ломаную b_j будем называть *основанием* области Ω_j , а сами области Ω_j — *Ω_j -областями*. Первая и последняя из областей Ω_j называются *концевыми*, а все остальные — *внутренними*.

Выбранная ориентация ломаной L^2 определяет *положительное направление движения* вдоль L^2 и, следовательно, вдоль каждой L_j^2 . Припишем каждой из L_j^2 знак $\text{sign}(L_j^2)$, положив его равным $+1$, если обход области Ω_j против часовой стрелки индуцирует движение вдоль L_j^2 в положительном направлении, и -1 в противном случае.

Определение. Пусть $L^2 = \cup_{j=1}^N L_j^2$ — каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 . Сумма знаков $\text{sign}(L_j^2)$ по всем $j = 1, \dots, N$ называется *индексом ломаной L^2 относительно L^1* и обозначается через $\text{ind}(L^2, L^1)$.

Рассмотрим теперь концевые области Ω_1 и Ω_N и ориентируем их границы в соответствии с положительным направлением движения вдоль L_1^2 и L_N^2 . Обозначим

¹Такое определение канонического разбиения было дано в [69, 70]. В разделе 3.3.2 мы дадим *другое* определение канонического разбиения, работающее без предположений об общем положении ломаных. Поэтому определенное только что понятие естественнее называть, скажем, *регулярным каноническим разбиением*, что мы и будем делать, начиная с раздела 3.3.2. Здесь мы сохраним терминологию из [69].

через $\alpha(L^2, L^1)$ твистинг точки A как вершины ориентированной замкнутой ломаной $\partial\Omega_1$ и через $\beta(L^2, L^1)$ — твистинг точки B как вершины ориентированной замкнутой ломаной $\partial\Omega_N$. Назовем эти числа *начальным* и *конечным твистингом ломаной L^2 по отношению к L^1* . Отметим, что $\alpha(L^2, L^1)$ совпадает с деленным на $\pi/3$ ориентированным углом между направлением, противоположным направлению начального звена ломаной L^1 , и направлением начального звена ломаной L^2 . В свою очередь, $\beta(L^2, L^1)$ совпадает с деленным на $\pi/3$ ориентированным углом между направлением последнего звена ломаной L^2 и направлением, противоположным направлению последнего звена ломаной L^1 . (Напомним, что, так как ломаные L_1 и L_2 находятся в общем положении, величины этих углов отличны от π , поэтому ориентированный угол определен.)

Теперь все готово, чтобы сформулировать главный результат данного раздела.

Теорема 3.3. Пусть L^1 и L^2 — ломаные, соединяющие пару различных точек A и B и ориентированные от A к B . Предположим, что единственные фиксированные вершины ломаных L^1 и L^2 — это точки A и B , и, кроме того, пусть ломаные L^1 и L^2 находятся в общем положении. Тогда

$$\text{tn } L^2 = \text{tn } L^1 + 6 \text{ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1).$$

Прежде чем говорить о доказательстве этой теоремы, приведем другое, иногда более удобное, определение индекса одной ломаной по отношению к другой.

Пусть L^1 и L^2 — такие же, как и выше. Рассмотрим каноническое разбиение L^2 относительно L^1 , и пусть Ω_j — произвольная внутренняя область, а L_j^2 — соответствующий элемент канонического разбиения.

Определение. Область Ω_j и ломаная L_j^2 называются *A-областью* и *A-элементом* соответственно, если Ω_j содержит A и не содержит B . Если Ω_j содержит B и не содержит A , то Ω_j и L_j^2 называются *B-областью* и *B-элементом*. Далее, если Ω_j содержит как A , так и B , то Ω_j и L_j^2 называются *полными*, или *F-областью* и *F-элементом*. Наконец, если Ω_j не содержит ни A , ни B , то Ω_j и L_j^2 называются *пустыми*, или *E-областью* и *E-элементом*.

Ясно, что каждая внутренняя Ω -область (внутренний элемент канонического разбиения) является или *A-*, или *B-*, или *F-*, или *E-*областью (элементом). Таким образом, мы разбили множество всех внутренних Ω -областей (внутренних элементов канонического разбиения) на четыре класса, каждый из которых может быть пустым. Продолжим теперь это разбиение на концевые Ω -области (элементы) так. Отметим, что концевая Ω -область не может содержать внутри себя одновременно точки A и B . Если концевая Ω -область содержит внутри себя точку A или B , то отнесем ее, соответственно, к *A-* или *B-*областям. В противном случае, если замыкание концевой Ω -области содержит точку A , то отнесем эту область к *A-*областям, иначе — к *B-*областям. В частности, если существует ровно одна Ω -область (она же концевая), то отнесем ее к *A-*областям, см. рис. 3.1.

Построим теперь по паре ломаных L^1 и L^2 некоторое слово. Определим *знак области Ω_j* как знак $\text{sign}(L_j^2)$ и обозначим его через $\text{sign}(\Omega_j)$. Припишем каждой Ω -области букву $X_j^{\text{sign}(\Omega_j)}$, где буква X_j равна A , B , F или E в зависимости от того, к какому классу принадлежит область Ω_j . Составим *слово $W(L^2, L^1)$* , записав полученные буквы по порядку:

$$W(L^2, L^1) = X_1^{\text{sign}(\Omega_1)} \dots X_N^{\text{sign}(\Omega_N)}.$$

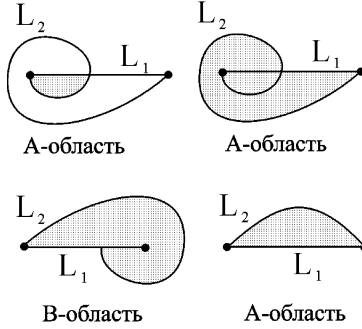


Рис. 3.1. Примеры концевых А- и В-областей.

Определим *вес слова* $W(L^2, L^1)$ как сумму степеней всех входящих в него букв и обозначим его через $\text{weight}(L^2, L^1)$. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Во введенных выше обозначениях*

$$\text{ind}(L^2, L^1) = \text{weight}(L^2, L^1).$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.3.

Эскиз доказательства теоремы 3.3. Мы определяем специальную деформацию некоторого измельчения ломаной L^2 , в результате которой ломаные L^1 и L^2 остаются в общем положении, уменьшается количество ограниченных ими пустых областей, но индекс и концевые твистинги не меняются. Ясно, что последовательным применением таких деформаций можно преобразовать ломаную L^2 в ломаную, не образующую пустых областей с L^1 , для которой, как оказывается, легко описывается структура канонического разбиения по отношению к L^1 и непосредственно доказывается искомая зависимость между кручениями.

А именно, оказывается, если ломаная L^2 не имеет пустых областей относительно L^1 , то порядки, индуцированные на множестве точек пересечения ломаных L^1 и L^2 ориентациями этих ломаных, совпадают. Отсюда вытекает, что слово $W(L^2, L^1)$ имеет одну из следующих двух форм:

- $A^p F^r B^q$, где все p , q и r одновременно или положительны, или отрицательны, причем $r = \pm 1$; или
- $A^p B^q$, где $pq \leq 0$, причем если $p = 0$, то $|q| \geq 2$, и если $q = 0$, то $|p| \geq 1$.

Теперь утверждение теоремы 3.3 получается следующим прямым подсчетом. Рассмотрим произвольную область Ω_i и фиксируем направление обхода ее границы в соответствии с ориентацией ломаной L^2 . Обозначим через A_i и B_i начальную и конечную точки ломаной L_i^2 соответственно, а через L_i^1 — основание области Ω_i , т.е. участок ломаной L^1 между A_i и B_i . Тогда, в силу предложения 3.4 и свойств кручения замкнутой ломаной, имеем:

$$\text{tn } L_i^2 - \text{tn } L_i^1 + \alpha_i(L_i^2, L_i^1) + \beta_i(L_i^2, L_i^1) = 6 \text{ sign } \Omega_i, \quad (*)$$

где через $\alpha_i(L_i^2, L_i^1)$ и $\beta_i(L_i^2, L_i^1)$ обозначены, соответственно, начальный и конечный твистинги L_i^2 по отношению к L_i^1 .

Из предположения об отсутствии пустых областей вытекает, что

$$\beta_i(L_i^2, L_i^1) = -\alpha_{i+1}(L_{i+1}^2, L_{i+1}^1).$$

Поэтому, суммируя соотношения $(*)_i$ для всех i , получаем

$$\text{tn } L^2 - \text{tn } L^1 + \alpha(L^2, L^1) + \beta(L^2, L^1) = 6 \text{ ind}(L^2, L^1),$$

что и требовалось.

3.3.1.3. Шапочки

В данном разделе мы определим важное для дальнейшего понятие шапочки.

Пусть ломаная L^1 замкнута, а ломаная L^2 незамкнута. Как и выше, будем предполагать, что ломаные находятся в общем положении. Рассмотрим каноническое разбиение $L^2 = \cup L_i^2$ ломаной L^2 по отношению к L^1 . Обозначим через W область, ограниченную ломаной L^1 . Тогда каждый внутренний элемент L_j^2 канонического разбиения, лежащий вне W , называется *шапочкой*. Если концевая точка, скажем A , ломаной L^2 принадлежит L^1 и соответствующий концевой элемент разбиения лежит вне W , то этот концевой элемент также называется *шапочкой*.

Пусть L_j^2 — некоторая шапочка и A_j и B_j — концевые вершины L_j^2 . Эти точки разбивают замкнутую ломаную L^1 на две ломаных, которые мы обозначим через L' и L'' . Рассмотрим области W' и W'' , ограниченные парами ломаных (L_j^2, L') и (L_j^2, L'') соответственно. Тогда одна из этих областей содержит другую. Пусть, для определенности, $W' \subset W''$.

Определение. Внутренность построенной выше “меньшей” области W' называется *шапочкой, соответствующей L_j^2* , или *H -областью*, и обозначается через $H(L_j^2)$. Ломаную L' назовем *основанием шапочки* (как L_j^2 , так и $H(L_j^2)$) и обозначим через $b(L_j^2)$.

Ясно, что $\partial H(L_j^2) = L_j^2 \cup b(L_j^2)$.

Ниже нам понадобится частный случай, когда замкнутая ломаная L^1 порождена некоторым уровнем выпуклости конечного множества M точек плоскости. А именно, обозначим t -й уровень выпуклости множества M через M^t , через σ^t — выпуклую оболочку множества M^t и через W^t — границу многоугольника σ^t , т.е. $W^t = \partial \sigma^t$. Положим, для удобства, $\sigma = \sigma^1$ и $W = W^1$.

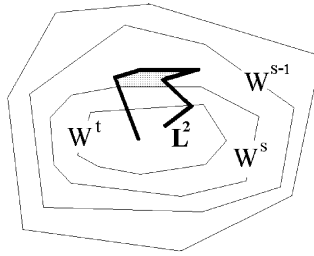
Пусть L^2 — незамкнутая ломаная, содержащаяся в σ . Предположим, что L^2 находится в общем положении по отношению ко всем замкнутым ломаным W^t .

Определение. Шапочка, образованная ломаной L^2 по отношению к W^t , называется *t -шапочкой*.

Пусть L_i^2 — некоторая t -шапочка. Предположим, что L_i^2 пересекает множество $\sigma \setminus \sigma^s$, но не пересекает множество $\sigma \setminus \sigma^{s-1}$ для некоторого s , рис. 3.2. Тогда, очевидно, $t \geq s$, и ломаная L_i^2 образует s -шапочку, но не образует $(s-1)$ -шапочки.

Определение. В только что введенных обозначениях каждая из s -шапочек, образованных ломаной L_i^2 , называется *топом шапочки L_i^2* или ее *вертушкой*. Число s называется *индексом шапочки L_i^2* .

Замечание. Пусть L_i^2 — некоторая шапочка и L' — некоторый ее топ. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $H(L') \subset H(L_i^2)$. Тем не менее, следующее предложение имеет место.

Рис. 3.2. Верхушка t -шапочки индекса s .

Предложение 3.6. Пусть L_i^2 и L_j^2 — две t -шапочки и $H(L_i^2) \subset H(L_j^2)$. Предположим также, что индексы этих шапочек совпадают. Тогда для любого топона L_i' меньшей шапочки L_i^2 найдется топ L_j' большей шапочки L_j^2 , такой, что $H(L_i') \subset H(L_j')$.

3.3.2. Плоские ломаные II: общий случай

В дальнейшем нам придется иметь дело с парами ломаных, которые, вообще говоря, не находятся в общем положении (дело в том, что мы собираемся работать с произвольными линейными деревьями). Поэтому нам нужно распространить соответствующие результаты из предыдущего подраздела 3.3.1 на общий случай. Этому и посвящен настоящий подраздел.

Итак, пусть L^1 и L^2 — две произвольных ориентированных ломаных на плоскости. Выбросим из ломаной L^2 множество $L^1 \cap L^2$. Замыкания L_j^2 полученных связных компонент, очевидно, являются ломаными, каждая из которых — подломаная ломаной L^2 . Рассмотрим теперь само множество $L^1 \cap L^2$. Отметим, что как $L^1 \cap L^2$, так и его связные компоненты — замкнуты. Кроме того, ясно, что произвольная связная компонента S_i^2 множества $L^1 \cap L^2$ — или ломаная, которая является подломаной как L^2 , так и L^1 , или точка. Таким образом, мы представили ломаную L^2 в виде объединения замкнутых множеств двух типов: L_j^2 и S_i^2 .

Определение. Построенное разбиение $L^2 = (\cup L_j^2) \cup (\cup S_i^2)$ назовем *каноническим разбиением ломаной L^2 по отношению к L^1* . Ломаные L_j^2 будем называть *регулярными* элементами канонического разбиения, а элементы S_i^2 — *сингулярными*.

Пусть теперь ломаная L^2 незамкнута. Элемент канонического разбиения ломаной L^2 по отношению к L^1 , содержащий хотя бы одну из концевых вершин ломаной L^2 , назовем *концевым*. Все остальные элементы канонического разбиения будем называть *внутренними*. Если же ломаная L^2 замкнута, то все элементы ее канонического разбиения будем называть *внутренними*.

Замечание. Отметим, что если V — концевая вершина ломаной L^2 , то она принадлежит или одному, или двум элементам канонического разбиения. При этом, в первом случае элемент канонического разбиения, содержащий V , может быть как регулярным ($V \notin L^1$), так и сингулярным ($V \in S_i^2$, и $S_i^2 \neq V$). Во втором случае один из таких элементов регулярный, а другой — сингулярный и совпадает с V (другими

словами, во втором случае вершина V является изолированной точкой пересечения ломаных L^1 и L^2).

Замечание. С формальной точки зрения, для ломаных, находящихся в общем положении, в разделе 3.3.1 было определено *другое* понятие канонического разбиения, которое мы, начиная с этого места, будем называть *регулярным каноническим разбиением*. Пусть L^1 и L^2 — пара ломаных, находящихся в общем положении при некоторых фиксированных общих вершинах. Пусть $L^2 = \cup L_j^2$ — регулярное каноническое разбиение и $L^2 = (\cup L_j^2) \cup (\cup S_i^2)$ — каноническое разбиение, определенное только что (нерегулярное). Ясно, что каждый элемент регулярного канонического разбиения \bar{L}_j^2 совпадает, как подломаная ломаной L^2 , с соответствующим регулярным элементом L_j^2 канонического разбиения. Каждый сингулярный элемент S_i^2 канонического разбиения является или внутренней точкой некоторого ребра ломаной L^2 , или совпадает с одной из фиксированных вершин.

Пусть S_i^2 — некоторый сингулярный элемент канонического разбиения. Элемент S_i^2 или представляет собой ломаную, начальную и конечную точки которой мы обозначим через A_i и B_i соответственно, или состоит из одной точки, которую мы также обозначим через $A_i = B_i$. В дальнейшем, переходя при необходимости к подразбиениям исходных ломаных, *будем предполагать, что каждая из точек A_i и B_i или является вершиной обеих ломаных L^1 и L^2 , или не является вершиной ни одной из них*. Из этого предположения вытекает, в частности, что если S_i^2 состоит более чем из одной точки, то обе его концевые вершины являются вершинами обеих ломаных. Если же S_i^2 состоит из одной точки $A_i = B_i = S_i^2$, то эта точка может как быть общей вершиной ломаных L^1 и L^2 , так и не быть вершиной ни одной из них. В последнем случае эта точка является внутренней для некоторых ребер из L^1 и L^2 . Таким образом, из нашего предположения вытекает, в частности, что если хотя бы одна из точек A_i и B_i не является общей вершиной ломаных L^1 и L^2 , то элемент S_i^2 состоит из одной точки.

Чтобы сформулировать для произвольной пары ломаных L^1 и L^2 аналог теоремы 3.3 из раздела 3.3.1 о связи кручений, нам следует обобщить на случай таких ломаных понятие индекса $\text{ind}(L^2, L^1)$ и концевых твистингов. В свою очередь, чтобы определить индекс пары ломаных, нужно приписать каждому элементу построенного канонического разбиения некоторый “знак”. Прежде чем определять знаки сингулярных элементов канонического разбиения, полезно разбить множество всех таких элементов на два класса. Элементы, попавшие в один класс, будем называть *трансверсальными*, а в другой — *касательными*.

Итак, пусть, как и выше, $L^2 = (\cup L_j^2) \cup (\cup S_i^2)$ — каноническое разбиение ломаной L^2 относительно ломаной L^1 . Мы будем предполагать в дальнейшем, если не оговорено противное, что ломаные L^1 и L^2 различны как подмножества плоскости, исключая тем самым из рассмотрения тривиальный случай совпадающих ломаных.

Начнем с определения допустимой окрестности сингулярного элемента. Пусть S_i^2 — произвольный сингулярный элемент, и обозначим через A_i и B_i начальную и конечную вершины ломаной S_i^2 . Обозначим через E_i^j ориентированную подломаную ломаной L^j , полученную из S_i^2 добавлением всех тех ребер ломаной L^j , которые содержат хотя бы одну из точек A_i и B_i . Обозначим начальное и конечное звенья построенной ломаной E_i^j через b^j и e^j соответственно. Отметим, что b^j и e^j могут обозначать одно и то же ребро (а именно, если ломаная E_i^j состоит из одного ребра).

Рассмотрим в плоскости ε -окрестность U_ε элемента S_i^2 , т.е. множество тех точек плоскости, расстояние от которых до S_i^2 не превосходит $\varepsilon > 0$, причем выберем ε

настолько малым, чтобы окрестность U_ε пересекалась только со звеньями ломаной S_i^2 и звеньями b^1, b^2, e^1 и e^2 , построенными выше.

Определение. Построенное выше множество U_ε будем называть *допустимой ε -окрестностью* сингулярного элемента S_i^2 .

Построим теперь разбиение множества всех сингулярных элементов на два класса.

Предположим сначала, что ломаные L_1 и L_2 незамкнуты и имеют общую концевую вершину V , и пусть S_i^2 — сингулярный элемент, содержащий V . Если S_i^2 совпадает с V , этот элемент отнесем к *трансверсальным* элементам. Если же $S_i^2 \neq V$, то отнесем его к *касательным* элементам.

Рассмотрим теперь оставшиеся возможности, см. рис. 3.3. Разобранные выше случаи имеют на рис. 3.3 номера 1 и 3. Во всех оставшихся случаях одна из ломаных, скажем L^1 , разбивает каждую допустимую окрестность U_ε элемента S_i^2 на две компоненты. Сингулярный элемент S_i^2 назовем *касательным*, если ломаная L^j , $j \neq i$, пересекает внутренность ровно одной из этих компонент. В противном случае сингулярный элемент S_i^2 назовем *трансверсальным*.

В дальнейшем нам также будет полезно следующее разбиение множества трансверсальных сингулярных элементов на два класса. Назовем трансверсальный сингулярный элемент *существенным*, если он содержит внутреннюю вершину хотя бы одной из ломаных L^1 или L^2 . В противном случае, трансверсальный сингулярный элемент назовем *несущественным*.

Итак, мы построили разбиение множества всех сингулярных элементов канонического разбиения на два класса — касательные и трансверсальные сингулярные элементы.

Предположим теперь, что обе ломаные L^1 и L^2 незамкнуты и соединяют различные точки A и B , т.е. соответствующие концевые точки ломаных L^1 и L^2 совпадают. Как и выше, будем предполагать, что $L^1 \neq L^2$. Ориентируем ломаные L^1 и L^2 от A к B . Для таких ломаных определим знаки элементов канонического разбиения.

Для дальнейшего нам будет удобно подправить определение допустимой ε -окрестности для случая концевого сингулярного элемента, отличного от вершины. В сделанных предположениях такой элемент может выглядеть лишь так, как изображено на рис. 3.3, случай 3. А именно, пусть S_i^2 — такой сингулярный элемент, а V — концевая вершина ломаной L^2 , принадлежащая S_i^2 . Пусть e — общее звено ломаных L^1 и L^2 , содержащее V , а ℓ — прямая, проходящая через V перпендикулярно к e . Обозначим через $H(V)$ замкнутый полукруг, отсекаемый от U_ε прямой ℓ и пересекающийся с e лишь по точке V . Перестроенное множество U_ε определим как замыкание множества $U_\varepsilon \setminus H(V)$ и будем по-прежнему обозначать через U_ε .

Отметим, что после описанной перестройки ломаные L^1 и L^2 разбивают произвольную ε -допустимую окрестность каждого касательного сингулярного элемента S_i^2 на две компоненты.

Для регулярных элементов канонического разбиения — ломаных L_j^2 — знак определяется точно так же, как и в случае ломаных общего положения. А именно, напомним, если A_j и B_j — начальная и конечная вершины ломаной L_j^2 , являющейся регулярным элементом канонического разбиения, и b_j — часть ломаной L^1 между A_j и B_j , то замкнутая ломаная $L_j^2 \cup b_j$ ограничивает конечную область на плоскости, которую мы обозначим через Ω_j . Ломаную b_j , как и выше, будем называть *основанием* области Ω_j , а сами области Ω_j назовем Ω -областями. Выбранная ориентация ломаной L^2 определяет *положительное направление движения* вдоль L^2 и, следовательно, вдоль каждой L_j^2 . Определим *знак* $\text{sign}(L_j^2)$ ломаной L_j^2 равным $+1$,

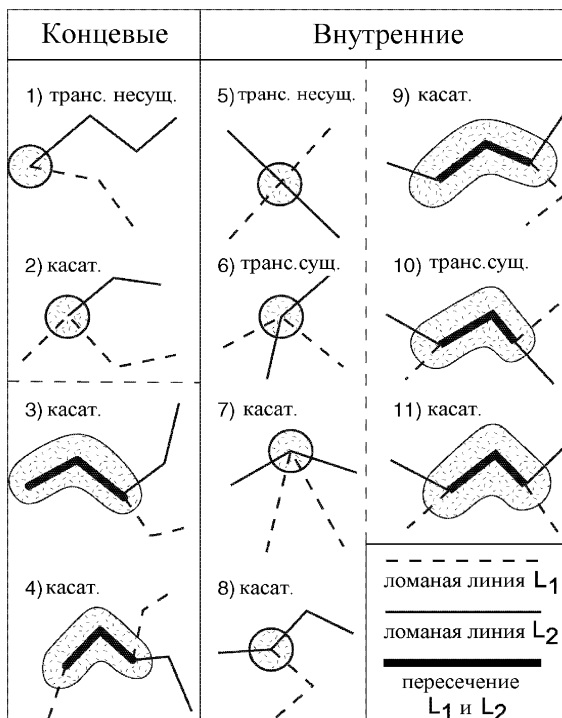


Рис. 3.3. Типы сингулярных элементов.

если, двигаясь в положительном направлении по ломаной L_j^2 , мы обходим область Ω_j против часовой стрелки. В противном случае положим $\text{sign}(L_j^2) = -1$.

Определим теперь знаки сингулярных элементов. Если S_i^2 — трансверсальный сингулярный элемент, то положим $\text{sign}(S_i^2) = 0$. Пусть теперь S_i^2 — касательный сингулярный элемент. Рассмотрим некоторую его допустимую окрестность U , и пусть δ — граница допустимой окрестности U . По определению, ломаная L^2 разбивает δ на две компоненты. Обозначим через δ_0 ту из этих компонент, которая содержит внутри себя точки из L^1 (эта компонента существует и единственна по определению). Ориентация ломаной L^2 задает порядок на точках пересечения ломаной L^2 с δ . Ориентируем δ_0 от первой точки пересечения ломаной L^2 с δ ко второй. Назовем так ориентированную кривую δ_0 *главной компонентой* границы δ допустимой окрестности. С другой стороны, ориентация плоскости также задает ориентацию кривой δ_0 , как части замкнутой кривой δ . Если эти две ориентации на δ_0 совпадают, то положим $\text{sign}(S_i^2) = +1$, в противном случае положим $\text{sign}(S_i^2) = -1$.

Итак, каждому элементу канонического разбиения приписан знак, который равен ± 1 или 0. (Здесь мы пользуемся предположением о том, что ломаные L^1 и L^2

не совпадают как подмножества плоскости. Отметим, что если $L^1 = L^2$, то знак единственного сингулярного элемента не определен.)

Определение. Пусть L^1 и L^2 — две ломаные, не совпадающие как подмножества плоскости. Пусть L^1 и L^2 соединяют различные точки A и B и $L^2 = (\cup L_j^2) \cup (\cup S_i^2)$ — каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 . Сумма знаков элементов канонического разбиения называется *индексом ломаной L^2 относительно L^1* и обозначается через $\text{ind}(L^2, L^1)$:

$$\text{ind}(L^2, L^1) = \sum_j \text{sign}(L_j^2) + \sum_i \text{sign}(S_i^2).$$

Замечание. Пусть L^1 и L^2 — пара ломаных, соединяющих фиксированные точки A и B на плоскости и находящихся в общем положении. Тогда, как мы уже отмечали выше, для ломаных L^1 и L^2 определено как регулярное каноническое разбиение, так и просто каноническое разбиение (не регулярное). Поэтому для ломаной L^2 относительно L^1 определено два числа: индекс в смысле ломаных в общем положении, определенный в разделе 3.3.1, который мы, начиная с этого момента, будем называть *регулярным индексом*, и индекс, определенный только что. Однако поскольку все сингулярные элементы канонического разбиения в случае ломаных в общем положении являются трансверсальными и не дают вклада в индекс, то регулярный индекс ломаной L^2 по отношению к L^1 совпадает с общим (не регулярным) индексом.

Перейдем теперь к определению концевых твистингов. Если концевой сингулярный элемент состоит из одной точки V (здесь или $V = A$, или $V = B$), то, очевидно, имеется концевой регулярный элемент, содержащий точку V , и можно определить твистинг точно так же, как и в случае общего положения. А именно, нужно ориентировать границу Ω -области Ω , порожденной этим регулярным концевым элементом, в соответствии с положительным направлением движения по ломаной L^2 и определить концевой твистинг в точке V равным твистингу этой точки как вершины ориентированной ломаной $\partial\Omega$. В этом случае, напомним, если $V = A$, то концевой твистинг $\alpha(L^2, L^1)$ в вершине A совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением, противоположным направлению начального звена ломаной L^1 , и направлением начального звена ломаной L^2 . В свою очередь, если $V = B$, то концевой твистинг $\beta(L^2, L^1)$ в вершине B совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением последнего звена ломаной L^2 и направлением, противоположным направлению последнего звена ломаной L^1 .

Предположим теперь, что не существует концевого регулярного элемента, содержащего точку V . Это означает, что имеется единственный элемент канонического разбиения, содержащий точку V , и этот элемент, который мы обозначим через S_V^2 , является касательным сингулярным элементом. Отметим, что теперь угол между инцидентными вершине V концевыми ребрами ломаных L^1 и L^2 равен 0, поэтому воспользоваться старым определением концевого твистинга в точке V нельзя. Действительно, величина угла между нужными нам направлениями этих ребер равна π , поэтому *ориентированный* угол между этими направлениями не определен. Чтобы задать концевой твистинг в точке V , мы воспользуемся знаком касательного сингулярного элемента S_V^2 . А именно, в этом случае, положим концевой твистинг в вершине V равным $3 \text{sign}(S_V^2)$. Как и выше, обозначим концевые твистинги в вершинах A и B через $\alpha(L^2, L^1)$ и $\beta(L^2, L^1)$ соответственно.

Теперь все готово, чтобы сформулировать главный результат настоящего раздела, являющийся обобщением теоремы 3.3 на случай произвольных ломаных.

Теорема 3.4. Пусть L^1 и L^2 — ломаные, соединяющие пару точек A и B , не совпадающие как подмножества плоскости и ориентированные от A к B . Тогда

$$\text{tn } L^2 = \text{tn } L^1 + 6 \text{ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1).$$

Идея доказательства теоремы 3.4 состоит в построении специальной деформации ломаной L^2 , которая неподвижна на концевых точках A и B , сохраняет индекс $\text{ind}(L^2, L^1)$, непрерывно меняет кручение $\text{tn } L^2$ и концевые твистинги, и приводит ломаную L^2 в общее положение по отношению к ломаной L^1 и фиксированным точкам A и B . Применив к полученным в результате ломаным теорему 3.3 и проверив, что полученное равенство сохраняется при построенной деформации, получаем требуемое. Подробности можно найти в [83], а также в [87].

Как и в случае общего положения, индекс одной ломаной по отношению к другой можно определить другим, иногда более удобным способом.

Пусть L^1 и L^2 — такие же, как и выше. Рассмотрим каноническое разбиение L^2 относительно L^1 . Как и в случае общего положения, мы хотим построить разбиение элементов канонического разбиения на классы. Начнем с регулярных элементов. Для них разбиение строится точно так же, как и в случае общего положения. А именно, пусть L_j^2 — произвольный внутренний регулярный элемент канонического разбиения и Ω_j — соответствующая Ω -область.

Определение. Область Ω_j и соответствующий регулярный элемент L_j^2 называются *А-областью* и *А-элементом* соответственно, если Ω_j содержит точку A и не содержит B . Если Ω_j содержит B и не содержит A , то Ω_j и L_j^2 называются *В-областью* и *В-элементом*. Далее, если Ω_j содержит и A , и B , то Ω_j и L_j^2 называются *полными* или *F-областью* и *F-элементом*. Наконец, если Ω_j не содержит ни A , ни B , то Ω_j и L_j^2 называются *пустыми* или *Е-областью* и *Е-элементом*.

Ясно, что каждый внутренний регулярный элемент канонического разбиения является или *А*-, или *В*-, или *F*-, или *Е*-элементом. Как и в случае общего положения, продолжим это разбиение на концевые регулярные элементы (если они есть). Отметим, что концевая регулярная Ω -область не может содержать внутри себя одновременно точки A и B . Если концевая Ω -область содержит внутри себя точку A или B , то отнесем ее, соответственно, к *А*- или *В*-областям. В противном случае, если замыкание концевой Ω -области содержит точку A , то отнесем эту область к *А*-областям, иначе — к *В*-областям. В частности, если ломаные L^1 и L^2 пересекаются только по концевым точкам, т.е. каноническое разбиение состоит из одного концевого регулярного элемента и двух концевых сингулярных элементов, то отнесем этот регулярный элемент и соответствующую Ω -область к *А*-областям, см. рис. 3.1. Таким образом, множество всех регулярных элементов канонического разбиения (соответственно, всех Ω -областей) разбито на четыре класса: *А*-, *В*-, *F*- и *Е*-элементы (области).

Пусть теперь S_j^2 — сингулярный элемент канонического разбиения. Отнесем все внутренние сингулярные элементы к *Е*-элементам. Концевой сингулярный элемент также отнесем к *Е*-элементам, если и только если он является трансверсальным (т.е. он состоит из одной точки, или, другими словами, имеется регулярный концевой элемент, содержащий этот сингулярный). Если же концевой сингулярный элемент не совпадает с соответствующей концевой вершиной (т.е. является касательным), то отнесем этот элемент к *А*-элементам, если он содержит точку A , и к *В*-элементам в противном случае. Отметим, что сингулярный элемент не может содержать сразу обе точки A и B , так как ломаные L^1 и L^2 , по предположению, не совпадают

как подмножества плоскости. Таким образом, построено разбиение множества всех элементов канонического разбиения на четыре класса.

Построим теперь по паре ломаных L^1 и L^2 некоторое слово. Пусть $L^2 = \cup_{i=1}^N L_i$ — каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 , где через L_i обозначены последовательно занумерованные элементы канонического разбиения (как регулярные, так и сингулярные). Припишем теперь каждому элементу L_i букву $X_i^{\text{sign}(L_i)}$, где буква X_i равна A, B, F или E в зависимости от того, к какому классу принадлежит элемент L_i , и $\text{sign}(L_i)$ — знак этого элемента, определенный выше. Составим слово $W(L^2, L^1)$, записав полученные буквы по порядку:

$$W(L^2, L^1) = X_1^{\text{sign}(L_1)} \dots X_N^{\text{sign}(L_N)}.$$

Определим *вес слова* $W(L^2, L^1)$ как сумму степеней всех входящих в него букв и обозначим его через $\text{weight}(L^2, L^1)$. Буквы, входящие в слово в нулевой степени, договоримся не писать. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Во введенных выше обозначениях*

$$\text{ind}(L^2, L^1) = \text{weight}(L^2, L^1).$$

В заключение данного раздела мы приведем еще несколько полезных оценок на кручение ломаной L , концевые точки A и B которой расположены на замкнутой ломаной W , ограничивающей выпуклый многоугольник σ . Обозначим через W^1 и W^2 те ломаные, на которые точки A и B разбивают W . Предположим, что ломаная L не содержится целиком в W , в частности, L не совпадает ни с W^1 , ни с W^2 .

Утверждение 3.3. *В сделанных предположениях имеет место следующее неравенство:*

$$|\text{tn } L| \leq 3|\text{ind}(L, W^1) + \text{ind}(L, W^2)| + 6.$$

Нам также понадобится следующая модификация утверждения 3.3. В обозначениях этого утверждения рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L относительно W . Предположим, что концевой сингулярный элемент L_1 , содержащий точку A , не совпадает с точкой A и, для определенности, является подломаной ломаной W^1 . Как и выше, будем предполагать, что $L \not\subset W$, поэтому, в частности, $L_1 \neq W^1$. Для краткости обозначим концевой сингулярный элемент L_1 через ℓ , и пусть A' — концевая вершина ломаной ℓ , отличная от A . Обозначим через \bar{L} и \bar{W}^1 ломаные, полученные, соответственно, из L и W^1 выбрасыванием подломаной ℓ . Далее, обозначим через \bar{W}^2 ломаную, полученную из W^2 добавлением ломаной ℓ .

Утверждение 3.4. *В сделанных предположениях имеет место следующее неравенство:*

$$|\text{tn } L| \leq 3|\text{ind}(\bar{L}, \bar{W}^1) + \text{ind}(\bar{L}, \bar{W}^2)| + 6.$$

Другими словами, в сделанных предположениях, при оценке кручения ломаной L можно перейти к ломаной \bar{L} , сингулярные концевые элементы которой совпадают с соответствующими концевыми вершинами.

Оказывается, утверждение 3.3 можно существенно усилить, если предположить дополнительно, что ломаная L целиком лежит в многоугольнике σ .

Утверждение 3.5. *Пусть L — ломаная, лежащая в выпуклом многоугольнике σ , причем предположим, что концевые точки A и B ломаной L расположены на ограничивающей многоугольник σ ломаной W . Тогда кручение ломаной L по абсолютной величине не превосходит шести: $|\text{tn } L| \leq 6$.*

3.3.3. Число вращения плоского линейного дерева

Определим теперь снова понятие числа вращения произвольного вложенного плоского линейного дерева Γ , используя разработанную терминологию. Пусть a и b — произвольные ребра из Γ . Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a, b)$ в Γ , начинающийся на a и заканчивающийся на b . Путь $\gamma(a, b)$, очевидно, представляет собой ориентированную ломаную на плоскости. *Числом вращения между ребрами a и b линейного дерева Γ* назовем кручение ломаной $\gamma(a, b)$: $\text{tw}(a, b) = \text{tn } \gamma(a, b)$. Отметим, что так определенное число вращения ориентированной пары ребер обладает следующими свойствами:

- $\text{tw}(a, b) = -\text{tw}(b, a)$ (косая симметрия);
- $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, c) = \text{tw}(a, c)$ для любых ребер a, b и c из Γ , лежащих на одном пути в Γ (аддитивность вдоль путей);
- $\text{tw}(a, a) = 0$.

Определение. *Числом вращения вложенного плоского линейного дерева Γ* называется максимум чисел вращения по всем упорядоченным парам (a, b) ребер из Γ :

$$\text{tw } \Gamma = \max_{(a, b)} \text{tw}(a, b).$$

3.3.3.1. Правильные линейные деревья

Приведем теперь эскиз доказательства теоремы 3.2. В качестве первого шага мы перейдем от рассмотрения произвольных вложенных плоских линейных деревьев к так называемым правильным линейным деревьям.

Внутренние вершины произвольного вложенного плоского линейного дерева Γ могут быть следующих трех типов. Внутренняя вершина P из Γ называется *устойчивой*, если для любой прямой ℓ , проходящей через P , каждая из открытых полуплоскостей, порожденных ℓ , содержит ребра из Γ , инцидентные P . Внутренняя вершина степени два называется *фиктивной*, а внутренняя вершина степени больше, чем два и не являющаяся устойчивой, называется *неустойчивой*, см. рис. 3.4. Вложенное плоское линейное дерево Γ , не содержащее ни фиктивных, ни неустойчивых внутренних вершин, назовем *правильным*.



Рис. 3.4. Типы внутренних вершин.

В [83] построена непрерывная деформация произвольного вложенного плоского линейного дерева в правильное, такая, что неравенство из теоремы 3.2 сохраняется при этой деформации. Таким образом, достаточно доказать теорему 3.2 лишь для правильных линейных деревьев, т.е. для линейных деревьев, все внутренние вершины которых устойчивы.

Далее, легко проверить, что если Γ — произвольное правильное линейное дерево и a и b — такие ребра из Γ , что $\text{tw}(a, b) = \text{tw } \Gamma$, то ребра a и b необходимо являются граничными. Другими словами, число вращения правильного линейного дерева всегда достигается на паре его граничных ребер.

3.3.3.2. Квазигеодезические

Определим теперь в правильных линейных деревьях пути специального вида.

Определение. Путь γ в правильном линейном дереве Γ , соединяющий пару граничных вершин из Γ и такой, что существует прямая l на плоскости, ортогональная проекция пути γ на которую взаимно однозначна с образом, называется *квазигеодезической*. Прямая l в этом случае называется *направляющей квазигеодезической* γ .

Пусть теперь n — произвольный единичный вектор (т.е. некоторое направление) и пусть l — некоторая прямая, параллельная n . Пусть γ — некоторая квазигеодезическая с направляющей l в правильном линейном дереве Γ . Обозначим через A и B граничные вершины из Γ , которые соединяет γ , и пусть P — некоторая точка на γ . Точка P разбивает путь γ на две компоненты γ' и γ'' (если P совпадает с A или B , то одна из этих компонент пуста). Обозначим через ν ортогональную проекцию плоскости на прямую l . Положим $A_l = \nu(A)$, $B_l = \nu(B)$ и $P_l = \nu(P)$. Предположим, что компонента γ'' не пуста, вектор $P_l B_l$ сонаправлен с n и B — конечная вершина пути γ'' .

Определение. Построенная выше компонента γ'' называется *квазигеодезическим лучом, выпущенным из точки P в направлении n* . Далее, если a — ребро пути γ , содержащее P и пересекающееся с γ'' более чем по точке, то γ'' называется также *квазигеодезическим лучом, выпущенным с ребра a сети Γ в направлении n* .

Имеет место следующий результат.

Лемма 3.1. *Из любой внутренней вершины произвольного правильного линейного дерева в любом направлении можно выпустить квазигеодезический луч. С любого ребра произвольного правильного линейного дерева в любом направлении, не перпендикулярном этому ребру, можно выпустить квазигеодезический луч.*

Для нас также важно следующее свойство квазигеодезических.

Лемма 3.2. *Кручение произвольной квазигеодезической строго меньше 3.*

3.3.3.3. Шапочки

В данном разделе мы обобщим понятие шапочки, определенное выше для ломаных в общем положении, на случай произвольных ломаных.

Пусть L^1 — произвольная замкнутая ломаная и L^2 — произвольная незамкнутая ломаная. Построим каноническое разбиение $L^2 = \cup L_j$ ломаной L^2 по отношению к L^1 . Обозначим через σ область, ограниченную ломаной L^1 . Тогда каждый внутренний регулярный элемент L_j канонического разбиения, лежащий вне многоугольника σ , называется *регулярной шапочкой*. Концевой регулярный элемент называется *регулярной шапочкой*, если он лежит вне области σ , а обе его концевые вершины лежат на ломаной L^1 .

Далее, внутренний сингулярный элемент L_i канонического разбиения называется *сингулярной шапочкой*, если оба примыкающих к L_i регулярных элемента лежат в σ . Концевой сингулярный элемент называется *сингулярной шапочкой*, если, во-первых, он отличен от концевой точки и, во-вторых, единственный соседний с ним

внутренний регулярный элемент лежит в σ . В дальнейшем мы иногда будем говорить просто о шапочках, имея в виду как регулярные, так и сингулярные шапочки.

Пусть L_j — некоторая регулярная шапочка и A_j и B_j — концевые вершины L_j . Эти точки разбивают замкнутую ломаную L^1 на две ломаных, которые мы обозначим через L' и L'' . Рассмотрим области σ' и σ'' , ограниченные парами ломаных (L_j, L') и (L_j, L'') соответственно. Тогда одна из этих областей содержит другую. Пусть, для определенности, $\sigma' \subset \sigma''$.

Определение. Открытая область σ' , построенная выше, называется H -областью, соответствующей регулярной шапочке L_j , и обозначается через $H(L_j)$. Ломаную L' назовем *основанием* (как для L_j , так и для $H(L_j)$) и обозначим через $b(L_j)$. Замыкание области $H(L_j)$ будем обозначать через $\overline{H}(L_j)$ и называть \overline{H} -множеством, соответствующим регулярной шапочке L_j .

Ясно, что $\partial H(L_j) = L_j \cup b(L_j)$ и $\overline{H}(L_j) = H(L_j) \cup \partial H(L_j)$.

Пусть теперь L_i — сингулярная шапочка. Основанием $b(L_i)$ сингулярной шапочки L_i будем называть саму ломаную L_i . Удобно также определить для сингулярных шапочек понятие \overline{H} -множества, положив $\overline{H}(L_i) = b(L_i) = L_i$.

Рассмотрим теперь произвольное правильное линейное дерево Γ . Пусть $\partial_g \Gamma = M$ — геометрическая граница дерева Γ и L^1 — замкнутая ломаная, являющаяся границей некоторого уровня выпуклости M^t множества M . Пусть незамкнутая ломаная L^2 — это некоторый путь в дереве Γ . Построим каноническое разбиение $L^2 = \cup L_j$ ломаной L^2 по отношению к L^1 .

Шапочка L_i , образованная ломаной $L^2 \subset \Gamma$ по отношению к L^1 , называется *существенной*, или если она регулярна, или если она сингулярна и, к тому же, содержит хотя бы одну внутреннюю вершину дерева Γ . В противном случае шапочка называется *несущественной*. Таким образом, шапочка L_i является несущественной, если и только если она сингулярна, и все вершины ломаной $L_i \subset \Gamma$ являются граничными вершинами правильного линейного дерева Γ . Отметим, что все вершины несущественной шапочки L_i необходимо лежат на одном и том же уровне выпуклости.

Замечание. В отличие от случая общего положения, путь $L^2 \subset \Gamma$ может образовывать шапочки и по отношению к первому, т.е. самому внешнему уровню выпуклости множества $M = \partial_g \Gamma$. Однако, очевидно, каждая такая шапочка является несущественной.

Пусть, как и выше, M^t — это t -й уровень выпуклости граничного множества $M = \partial_g \Gamma$ правильного линейного дерева Γ . Пусть σ^t — выпуклая оболочка множества M^t , а W^t — граница многоугольника σ^t , т.е. $W^t = \partial \sigma^t$. Через $\text{Int}(\sigma^t)$ обозначим внутренность многоугольника σ^t , т.е. $\text{Int}(\sigma^t) = \sigma^t \setminus W^t$. Положим $\sigma = \sigma^1$ и $W = W^1$. Пусть L^2 — произвольный путь в дереве Γ (в частности, L^2 — некоторая незамкнутая ломаная). Легко видеть, что ломаная L^2 целиком содержится в σ .

Определение. Существенная шапочка, образованная ломаной L^2 по отношению к W^t , называется t -шапочкой.

Пусть L_i — некоторая t -шапочка (в частности, шапочка L_i — существенная). Заметим, что если ломаная L_i образует также и некоторую s -шапочку, то, во-первых, $s \leq t$, а, во-вторых, ломаная L_i образует также и r -шапочки для всех r , $s \leq r \leq t$. Существует такое наименьшее число s_0 , что ломаная L_i образует s_0 -шапочку. Другими словами, s_0 — такое число, что ломаная L_i образует некоторую s_0 -шапочку и не образует $(s_0 - 1)$ -шапочек (еще раз напомним, что все t -шапочки существенны по определению).

Определение. В сделанных только что обозначениях число s_0 называется *индексом t -шапочки L_i* . Каждая из (существенных) s_0 -шапочек, образованных ломаной L_i , называется *верхушкой t -шапочки L_i* или ее *топом*. Верхушка L' называется *регулярной*, если шапочка L' регулярна, и *сингулярной* в противном случае.

Замечание. Геометрический смысл понятия индекса существенной шапочки ясен из следующего рассмотрения. Предположим, что t -шапочка L_i пересекает множество $\sigma \setminus \text{Int}(\sigma^s)$, но не пересекает множество $\sigma \setminus \text{Int}(\sigma^{s-1})$ для некоторого s . Тогда, очевидно, $t \geq s$, и ломаная L_i образует шапочку по отношению к W^s , но не образует шапочки по отношению к W^{s-1} . Возможны следующие два случая.

- (1) Хотя бы одна из шапочек, образованных ломаной L_i по отношению к W^s , является существенной. Тогда индекс t -шапочки L_i равен s .
- (2) Все шапочки, образованные ломаной L_i по отношению к W^s , являются несущественными. Тогда, как несложно показать, индекс t -шапочки равен $s + 1$.

Замечание. Пусть L_i — некоторая t -шапочка и L' — некоторая ее верхушка. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L_i)$. Тем не менее, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.6. Пусть L_i и L_j — две t -шапочки и $\overline{H}(L_i) \subset \overline{H}(L_j)$. Предположим также, что индексы этих шапочек совпадают. Тогда для любой верхушки T_i меньшей шапочки L_i найдется верхушка T_j большей шапочки L_j , такая, что $\overline{H}(T_i) \subset \overline{H}(T_j)$.

Из леммы 3.1 о квазигеодезических вытекает следующее важное предложение.

Предложение 3.7. Пусть Γ — некоторое правильное линейное дерево. Рассмотрим произвольный путь L в Γ , и пусть σ^t — выпуклая оболочка некоторого уровня выпуклости M^t границы $M = \partial_g \Gamma$ дерева Γ . Обозначим через W^t замкнутую ломаную, ограничивающую σ^t . Рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L по отношению к W^t , и пусть L_j — некоторая регулярная шапочка, образованная ломаной L по отношению к W^t . Тогда

- (1) если соответствующая H -область $H(L_j)$ содержит точку пути L , то $H(L_j)$ также содержит точку из границы $M = \partial_g \Gamma$ дерева Γ ;
- (2) если внутренность основания $b(L_j)$ шапочки L_j содержит вершину пути L , являющуюся внутренней вершиной дерева Γ , то $H(L_j)$ содержит точку из границы $M = \partial_g \Gamma$ дерева Γ .

Из предложения 3.7 получаются следующие важные следствия.

Следствие 3.2. Пусть Γ — произвольное правильное линейное дерево, $M = \partial_g \Gamma$ — его геометрическая граница и пусть L — некоторый путь в Γ . Пусть L' — некоторая регулярная шапочка, образованная путем L по отношению к какому-нибудь уровню выпуклости множества M , а \hat{L}' — регулярная верхушка шапочки L' (если такая есть). Тогда

- (1) соответствующая H -область верхушки \hat{L}' не пересекается с L , другими словами, $H(\hat{L}') \cap L = \emptyset$;
- (2) внутри основания $b(\hat{L}')$ верхушки \hat{L}' не содержится вершин пути L , являющихся внутренними вершинами дерева Γ .

Следствие 3.3. Пусть Γ — произвольное правильное линейное дерево, $M = \partial_g \Gamma$ — его геометрическая граница и пусть L — некоторый путь в Γ . Предположим, что L образует две существенных шапочки L' и L'' по отношению к некоторому уровню выпуклости M^t множества M , причем $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L'')$. Тогда индексы шапочек L' и L'' различны.

В частности, если L^1, \dots, L^m — некоторые существенные шапочки, образованные L и такие, что

$$\overline{H}(L^1) \subset \dots \subset \overline{H}(L^m),$$

а L^1 является t -шапочкой, то $m < t$.

Теперь у нас все готово, чтобы перейти непосредственно к доказательству теоремы 3.2.

3.3.4. Доказательство теоремы 3.2

Фиксируем основные обозначения. Пусть Γ — вложенное плоское линейное дерево, $M = \partial_g \Gamma$ — его геометрическая граница и пусть M имеет κ уровней выпуклости. Мы хотим доказать, что тогда $\text{tw } \Gamma \leq 12(\kappa - 1) + 6$.

Прежде всего, мы будем предполагать без ограничения общности (см. выше), что дерево Γ является правильным.

Пусть a и b — некоторые ребра из правильного линейного дерева Γ , такие, что $\text{tw } \Gamma = \text{tw}(a, b)$. Как было отмечено выше, ребра a и b — граничные. Обозначим через L единственный путь в Γ , соединяющий a и b , и ориентируем L от a к b . Тогда $\text{tn } L = \text{tw } \Gamma$. Обозначим через A и B концевые вершины пути L , инцидентные a и b соответственно. При этом обе точки A и B принадлежат M .

Пусть M^t — t -й уровень выпуклости множества M . Предположим, что $A \in M^p$, $B \in M^q$, и пусть $p \leq q$.

Обозначим через σ^t выпуклую оболочку множества M^t и через W^t — границу множества σ^t : $\partial \sigma^t = W^t$. Как и выше, будем обозначать через $\text{Int}(\sigma^t)$ внутренность многоугольника σ^t . Для краткости положим $\sigma = \sigma^1$ и $W = W^1$.

Пусть $S^t = \sigma^t \setminus \sigma^{t+1}$. Если множество σ^{t+1} не пусто, то множество S^t двусвязно (т.е. гомотопнo окружности) и ограничено W^t и W^{t+1} , причем $W^t \subset S^t$, а $W^{t+1} \cap S^t = \emptyset$.

Мы отдельно рассмотрим две возможности: или $p = q$, или $p < q$. Начнем с первого случая.

3.3.5. Случай $p = q$

Если $p = q = 1$, т.е. путь L начинается и заканчивается на границе W выпуклой оболочки σ внешнего уровня выпуклости M^1 , то, в силу утверждения 3.5, $|\text{tn } L| \leq 6$, и утверждение теоремы имеет место. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $p = q \geq 2$.

Далее, если ломаная L целиком лежит на границе W^p выпуклого многоугольника σ^p , то, очевидно, $|\text{tn } L| \leq 6$, и утверждение теоремы снова имеет место. Поэтому ниже мы предполагаем, что $L \not\subset W^p$.

Обозначим через W_1 и W_2 те части замкнутой ломаной W^p , на которые ее разбивают точки A и B . Так как $L \not\subset W^p$, то, в частности, L не совпадает ни с W_1 , ни с W_2 . Рассмотрим каноническое разбиение $L = \cup L_i$ ломаной L относительно W^p . Пусть \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B — множества, состоящие из всех p -шапочек (существенных по определению), образованных L , таких, что их \overline{H} -множества содержат точки A

и B соответственно. Очевидно, \overline{H} -множества шапочек, принадлежащих \mathcal{H}_A (соответственно, \mathcal{H}_B), упорядочены по включению. Поэтому из следствия 3.3 вытекает следующий результат.

Предложение 3.8. *Каждое из множеств \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B состоит не более чем из $p - 1$ элемента.*

Непосредственно из построения вытекает следующее:

- (1) все p -шапочки, порожденные L и не принадлежащие ни \mathcal{H}_A , ни \mathcal{H}_B , являются пустыми элементами канонического разбиения ломаной L или относительно W_1 , или относительно W_2 ;
- (2) каждый *внутренний* не пустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2 , является регулярным и содержит, по крайней мере, одну (существенную) шапочку из $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B$; более того, разные такие непустые элементы содержат различные шапочки из \mathcal{H} ;
- (3) каждый *концевой* непустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2 , может быть как регулярным, так и сингулярным. Он может образовывать шапочку, а может и не образовывать. Если рассматриваемый элемент образует шапочку, то эта шапочка может быть как существенной, так и несущественной.

Уже исходя из этих несложных наблюдений можно было бы получить оценку на индексы $\text{ind}(L, W_i)$, однако эта оценка оказывается слишком грубой для доказательства теоремы. Поэтому необходимы немного более тонкие рассуждения, проясняющие ситуацию с непустыми концевыми элементами, описанную в пункте 3. Для того чтобы сделать это, нам понадобится слегка подправить ломаную L .

Рассмотрим произвольную шапочку, соответствующую произвольному пустому элементу L_j , образованному L по отношению к одной из ломаных W_i , $i = 1, 2$. Мы назовем такую шапочку *пустой шапочкой*. Шапочка называется *строго пустой*, если соответствующее \overline{H} -множество не содержит \overline{H} -множеств, порожденных другими пустыми шапочками ломаной L . Ясно, что всегда существует строго пустая шапочка $\overline{H}(L')$, образованная ломаной L по отношению к W_i и содержащаяся в $\overline{H}(L_j)$.

Можно показать, что существует деформация ломаной L , неподвижная на всех непустых шапочках и сохраняющая направления граничных ребер ломаной L , такая, что полученная в результате ломаная не образует пустых шапочек. Ни кручение ломаной L , ни концевые твистинги при этой деформации не меняются. Таким образом, можно предполагать, без ограничения общности, что L не образует пустых шапочек.

Теперь, с помощью утверждения 3.4, избавимся от касательных концевых сингулярных элементов (если такие есть) как по отношению к W_1 , так и по отношению к W_2 . Обозначим через \overline{L} ломаную, полученную из L выбрасыванием касательных концевых сингулярных элементов (если они есть). Ориентируем ломаную \overline{L} в соответствии с ориентацией ломаной L , и пусть A' и B' — начальная и конечная вершины ломаной \overline{L} . Обозначим через \overline{W}_1 и \overline{W}_2 ломаные, на которые точки A' и B' разбивают W^p . При этом ломаная \overline{W}_i , $i = 1, 2$, получается из W_i добавлением и/или выбрасыванием концевых касательных сингулярных элементов ломаной L . Имеет место следующая очевидная лемма.

Лемма 3.3. *В сделанных выше предположениях пусть L_i — некоторая шапочка, образованная ломаной L по отношению к W^p . Тогда соответствующее \overline{H} -множество или содержит обе точки A и A' , или не содержит ни одной из этих точек. Аналогично, это \overline{H} -множество или содержит обе точки B и B' , или не содержит ни одной из этих точек.*

Таким образом, из построения и из леммы 3.3 вытекает, что \overline{L} , во-первых, не имеет конечных касательных сингулярных элементов, т.е. образует по отношению к каждой \overline{W}_i четыре конечных элемента, два из которых — регулярны, и, во-вторых, ломаная \overline{L} так же, как и L , не содержит пустых шапочек по отношению к \overline{W} .

Определим теперь числа n_i , $i = 1, 2$, так. Положим n_i равным количеству конечных областей, образованных ломаной \overline{L} по отношению к \overline{W}_i и не содержащих шапочек из \mathcal{H} . Очевидно, $n_i \leq 2$ по определению. Далее, напомним, что ломаная \overline{L} ориентирована от A' к B' . Обозначим через n_f общее количество тех первых регулярных элементов разбиений \overline{L} относительно как \overline{W}_1 , так и \overline{W}_2 , которые не содержат шапочек из \mathcal{H} . Аналогично, через n_l обозначим количество последних, не совпадающих с первыми, регулярных элементов этих разбиений, также не содержащих шапочек из \mathcal{H} . Очевидно, $n_f \leq 2$, $n_l \leq 2$ и $n_1 + n_2 = n_f + n_l$. Оказывается, если ломаная \overline{L} не образует пустых шапочек и конечных касательных сингулярных элементов, то имеет место следующая более сильная оценка.

Предложение 3.9. Пусть ломаная \overline{L} не образует пустых шапочек по отношению к W^p , а также не образует конечных касательных сингулярных элементов. Тогда, в сделанных выше обозначениях, имеет место следующее неравенство:

$$n_1 + n_2 = n_f + n_l \leq 2.$$

Обозначим через n_i^A количество тех регулярных конечных A' -элементов разбиения ломаной \overline{L} по отношению к \overline{W}_i , которые не содержат шапочек из \mathcal{H} . Аналогично, через n_i^B обозначим количество тех регулярных конечных B' -элементов разбиения ломаной \overline{L} по отношению к \overline{W}_i , которые не содержат шапочек из \mathcal{H} . Очевидно, $n_1^A + n_1^B = n_1$ и $n_2^A + n_2^B = n_2$, поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.4. В сделанных выше обозначениях

$$n_1^A + n_2^A + n_1^B + n_2^B \leq 2.$$

Замечание. Из определений немедленно вытекает, что количество A' -элементов, образованных ломаной \overline{L} по отношению к ломаной \overline{W}_i , не превосходит $n_i^A + \#(\mathcal{H}_A)$, а количество B' -элементов, образованных ломаной \overline{L} по отношению к ломаной \overline{W}_i , не превосходит $n_i^B + \#(\mathcal{H}_B)$, где через $\#(X)$ обозначается количество элементов во множестве X .

При разборе случая $p < q$ нам понадобится следующее уточнение предложения 3.9.

Следствие 3.5. Пусть, как и выше, ломаная \overline{L} не образует пустых шапочек по отношению к W^p , а также не образует конечных касательных сингулярных элементов. Предположим дополнительно, что одно из граничных ребер ломаной \overline{L} лежит вне σ^p . Тогда

- $n_1 + n_2 \leq 1$;
- $n_i + \max(n_j^A, n_j^B) \leq 1$ при $i \neq j$;
- $\max(n_1^A, n_1^B) + \max(n_2^A, n_2^B) \leq 1$.

Рассмотрим теперь канонические разбиения ломаной \overline{L} по отношению к \overline{W}_i . Исходя из вышесказанного, можно показать, что

$$|\text{ind}(\overline{L}, \overline{W}_1) + \text{ind}(\overline{L}, \overline{W}_2)| \leq 2(2p - 3) + 2 = 4(p - 1).$$

Теперь, воспользовавшись утверждением 3.4, имеем

$$|\operatorname{tn} L| \leq 3 |\operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_1}) + \operatorname{ind}(\overline{L}, \overline{W_2})| + 6 \leq 3 \cdot 4(p-1) + 6 = 12(p-1) + 6,$$

т.е. $|\operatorname{tn} L| \leq 12(p-1) + 6$. Основная теорема доказана в случае $p = q$.

3.3.6. Случай $p < q$

Итак, пусть теперь $p < q$. Разобьем ломаную L следующим образом. Первый фрагмент, L_1 , — это часть ломаной L между точкой $A = A_1$ и такой первой точкой $B_1 \in L$, что вся оставшаяся часть ломаной L между B_1 и B лежит в замкнутом многоугольнике σ^p . Другими словами, L_1 — это минимальная связная часть ломаной L , содержащая A и такая, что $L \setminus L_1$ целиком содержится в σ^p . Отметим, что L_1 может состоять из одной точки $A_1 = B_1$.

Второй фрагмент L_2 ломаной L — это часть ломаной L между точкой $A_2 = B_1$ и такой первой точкой B_2 , что вся оставшаяся часть ломаной L , начиная с B_2 , лежит в замкнутом многоугольнике σ^{p+1} . Другими словами, B_2 — это первая точка на L , такая, что $L \setminus (L_1 \cup L_2) \subset \sigma^{p+1}$.

Далее, для $i > 1$ и такого, что $p+i-1 \leq q$, т.е. $i \leq q-p+1$, определим фрагмент L_i ломаной L как часть L между $A_i = B_{i-1}$ и такой первой точкой B_i , что оставшаяся часть ломаной L от B_i до B содержится в замкнутом многоугольнике σ^{p+i-1} .

Последний фрагмент разбиения — L_{q-p+2} — совпадает с оставшейся частью ломаной L , если эта часть не пуста.

Итак, мы построили разбиение ломаной L на участки $L_1, L_2, \dots, L_{q-p+2}$, такие, что каждый фрагмент L_i соединяет точки A_i и B_i , где $A_1, B_1 \in W^p$, $A_i = B_{i-1} \in W^{p+i-2}$ и $B_i \in W^{p+i-1}$ при $1 \leq i \leq q-p+1$, причем $L_i \subset \sigma^{p+i-2}$ при $2 \leq i \leq q-p+1$. Кроме того, A_{q-p+2} и B_{q-p+2} принадлежат W^q , и $L_{q-p+2} \subset \sigma^q$. Обозначим через a_i и b_i концевые ребра ломаной L_i , инцидентные точкам A_i и B_i соответственно. Отметим, что, по определению, ребро b_i , $i = 1, \dots, (q-p+1)$, пересекает границу W^{p+i-1} выпуклого многоугольника σ^{p+i-1} по единственной точке B_i .

Предположим, что точка B_i , $i = 1, \dots, q-p+1$, пересечения ломаной L с ломаной W^{p+i-1} является внутренней точкой некоторого звена ломаной L . Тогда начальный сингулярный элемент ломаной L_i , $i = 2, \dots, q-p+2$, так же, как и конечный элемент предыдущей ломаной L_{i-1} , является трансверсальным (состоит из одной точки), и, более того, $\operatorname{tw}(b_{i-1}, a_i) = 0$. В частности, из этого предположения вытекает, что первый и последний фрагменты L_1 и L_{q-p+2} содержат, по крайней мере, по одному ребру. Путь L , обладающий указанным свойством, назовем *хорошим*. Мы сначала докажем теорему для хорошего пути L , а затем рассмотрим общий случай.

Итак, если путь L — хороший, то для доказательства теоремы достаточно показать следующее, см. [83]:

- (1) имеет место неравенство: $\operatorname{tn} L_1 \leq 12(p-1) + 3$;
- (2) для каждого из фрагментов L_i , $i = 2, \dots, q-p+1$, выполнено $\operatorname{tn} L_i \leq 12$;
- (3) для последних двух фрагментов L_{q-p+1} и L_{q-p+2} справедлива оценка:

$$|\operatorname{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2})| \leq 15.$$

Используя перечисленные оценки и тот факт, что $\operatorname{tw}(b_{i-1}, a_i) = 0$ при $i = 2, \dots, q-p+2$, получим утверждение теоремы:

$$\begin{aligned} |\operatorname{tn} L| &= |\operatorname{tn} L_1 + \sum_{i=2}^{q-p} \operatorname{tn} L_i + \operatorname{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2})| \leq \\ &\leq 12(p-1) + 3 + 12(q-p-1) + 15 = 12(q-1) + 6. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 3.2 достаточно перестроить произвольное правильное дерево Γ в новое правильное линейное дерево Γ' , обладающее следующими свойствами.

- (1) Геометрическая граница $M' = \partial_g \Gamma'$ дерева Γ' состоит из того же количества уровней выпуклости, что и геометрическая граница $\partial_g \Gamma$ дерева Γ , т.е. $\kappa(M') = \kappa(M)$.
- (2) В дереве Γ' имеется путь L' , начинающийся на p -м уровне выпуклости множества M' , заканчивающийся на q -м уровне выпуклости множества M' и получающийся из исходного пути $L \subset \Gamma$ деформацией ломаных. При этом кручение пути L' совпадает с кручением пути L .
- (3) Путь L' — хороший путь в дереве Γ' .

Опишем алгоритм такой перестройки. Начнем со следующего очевидного утверждения. Пусть Γ — произвольное, не обязательно правильное, линейное дерево и $\{V_i\}$ — множество всех его вершин. Зададим в каждой точке V_i произвольный вектор v_i , длина которого не больше чем некоторое фиксированное $\varepsilon > 0$.

Утверждение 3.7. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой системы векторов v_i , описанной выше, найдется деформация дерева Γ в классе линейных деревьев, обладающая следующим свойством: если V'_i — образ вершины V_i при этой деформации, то вектор $V_i V'_i$ совпадает с заданным вектором v_i .*

Деформацию линейного дерева Γ из утверждения 3.7 назовем *допустимой ε -деформацией*.

Следствие 3.6. *Пусть Γ — произвольное правильное линейное дерево. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует допустимая ε -деформация дерева Γ в правильное дерево Γ' , такая, что каждый уровень выпуклости геометрической границы $\partial \Gamma'$ полученного дерева является многоугольником, все углы которого меньше чем π .*

Ясно, что число вращения при деформациях, описанных в следствии 3.6, меняется непрерывно. Вышесказанное позволяет, для завершения доказательства, предполагать, что каждый уровень выпуклости граничного множества исходного правильного линейного дерева Γ представляет собой многоугольник с углами, меньшими π .

Рассмотрим определенный выше путь L , и пусть, как и выше, A и B — начальная и конечная вершины пути L . По построению, вершины A и B являются граничными, причем A лежит на p -м, а B — на q -м уровнях выпуклости множества $\partial_g \Gamma$. Перестроим дерево Γ в окрестности каждой его граничной вершины V , отличной от A и B и такой, что степень вершины V больше 1, добавив к Γ маленькое ребро e_V таким образом, чтобы в перестроенном дереве Γ , которое мы обозначим через Γ' , вершина V стала внутренней. Геометрическая граница $\partial_g \Gamma'$ нового дерева Γ' состоит из точек A и B и вершин степени 1.

Добавление ребер e_V к дереву Γ приводит, вообще говоря, к перестройке уровней выпуклости его границы. Однако, так как каждый уровень выпуклости исходного множества $\partial \Gamma$ представляет собой многоугольник с углами, меньшими π , можно выбирать ребра e_V настолько малыми, что указанная перестройка уровней выпуклости сведется к малой деформации выпуклых многоугольников в классе выпуклых многоугольников. В частности, ребра e_V могут быть выбраны настолько малыми, что число уровней выпуклости дерева Γ не изменится, т.е. $\kappa(\Gamma) = \kappa(\Gamma')$, и, более того, точка A останется вершиной перестроенного p -го уровня выпуклости, а точка B — вершиной перестроенного q -го уровня выпуклости множества $\partial \Gamma'$.

Отметим, что путь L пока вообще не изменялся. Ломаная L является путем в дереве Γ' , соединяющим его граничные вершины A и B . Как и выше, рассмотрим разбиение пути L на фрагменты L_1, \dots, L_{q-p+2} (по отношению к геометрической границе дерева Γ') и обозначим через A_i и B_i начальную и конечную вершины фрагмента L_i . Из построения следует, что все внутренние вершины ломаной L являются внутренними вершинами дерева Γ' (их степень в Γ' больше 1). Поэтому путь L может не оказаться хорошим в Γ' , только если некоторые из точек B_i , $i = 1, \dots, q - p + 1$, являются внутренними вершинами дерева Γ' . Напомним, что точка B_i принадлежит границе выпуклой оболочки σ' для $(p + i - 1)$ -го уровня выпуклости множества $\partial_g \Gamma'$. Сдвинем каждую из таких внутренних вершин B_i внутрь соответствующего σ' . Ясно, что при такой перестройке дерева Γ' его геометрическая граница вообще не меняется, а кручение пути L можно изменить сколь угодно мало. Теперь путь L является хорошим, что и требовалось. Первое утверждение теоремы 3.2 полностью доказано.

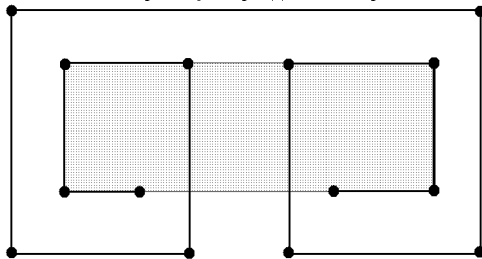


Рис. 3.5. Двойная спираль с числом вращения 18.

Для доказательства точности полученной оценки достаточно рассмотреть ломаную, имеющую форму двойной спирали и устроенную так, как показано на рисунке 3.5. На рис. 3.5 рассмотрен случай $k = 2$. Все вершины изображенной ломаной принадлежат геометрической границе, число уровней выпуклости граничного множества равно 2, число вращения равно 18. Общий случай получается из этого увеличением числа витков спиралей. Тем самым теорема полностью доказана.

ГЛАВА 4

Экстремали функционалов типа длины: случай параметрических сетей

В данной главе мы воспользуемся общими результатами главы 2 для описания локальной структуры параметрических сетей, экстремальных по отношению к функционалам длины и взвешенной длины на римановом многообразии. Затем мы применим результаты главы 3 для описания пространства экстремалей функционала взвешенной длины в предположении, что топология сети и граница фиксированы, а также для изучения глобальной структуры вложенных плоских взвешенных бинарных деревьев. Отметим, что эти результаты были первоначально получены авторами непосредственно, т. е. без привлечения общих теорем глав 2 и 3, см. [75], [78], [70], [84] или [87].

4.1. Экстремальные параметрические сети для функционала римановой длины

Как уже отмечалось в главе 2, функционал длины на римановом многообразии W с метрикой (g_{ij}) порожден квазирегулярным лагранжианом $L(x, \xi) = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}$, поэтому для описания локальной структуры экстремальных параметрических сетей для этого функционала можно воспользоваться теоремой 2.1. Однако, прежде чем делать это, мы вычислим явный вид импульса $p_x(\gamma)$ ребра γ в вершине x , а также явный вид интегральной части из теоремы 2.1. Доказательства следующих двух лемм представляют собой несложные упражнения по дифференциальной геометрии, см. также [87].

Лемма 4.1. *Пусть Γ — квазирегулярная параметрическая сеть на римановом многообразии W и γ — произвольное ее регулярное ре-*

бро, инцидентное некоторой вершине x . Тогда импульс функционала римановой длины ребра γ в вершине x имеет вид:

$$p_x(\gamma)(\xi) = \frac{\pm 1}{\|\dot{\gamma}(x)\|} \langle \dot{\gamma}(x), \xi \rangle,$$

где ξ — произвольный касательный вектор из $T_x W$, и знак “—” выбирается в том и только том случае, когда вершина x является началом ребра γ . Другими словами, при стандартном изоморфизме между $T_x W$ и $T_x^* W$, заданном внутренним скалярным произведением, ко-вектор $p_x(\gamma)$ отождествляется с (единичным) вектором направления ребра γ , ориентированного как приходящее в вершину x .

Далее, пусть из некоторой точки A полного риманова многообразия W выходит две гладких кривых $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow W$, $i = 1, 2$. Обозначим через $\ell(\varepsilon)$ длину кратчайшей геодезической, соединяющей точки $\gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_2(\varepsilon)$, и пусть E_i — вектор скорости кривой γ_i в начальный момент времени $\varepsilon = 0$.

Лемма 4.2. *Функция $\ell(\varepsilon)$ дифференцируема в начальный момент времени $\varepsilon = 0$. Ее производная имеет вид:*

$$\left. \frac{d\ell}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \|E_1 - E_2\|.$$

Введем следующие обозначения. Пусть x — произвольная вершина сети Γ . Если все ребра сети Γ , инцидентные вершине x , вырождены, то положим $N_x = 0$. Если же вершине x инцидентны некоторые невырожденные ребра, то обозначим через N_x сумму единичных векторов скоростей, с которыми точки, движущиеся по этим невырожденным ребрам, приходят в вершину x . Наконец, если x и y — две произвольные вершины сети Γ , то через ν_{xy} мы обозначим число вырожденных ребер, соединяющих x и y .

Теперь, применяя леммы 4.1 и 4.2 к основному неравенству из теоремы 2.1, получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть W — риманово многообразие. Квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала римановой длины, если и только если каждое ее регулярное ребро — геодезическая, и для каждой приведенной компоненты $H: G_H \rightarrow P \in W$ сети Γ и любой линейной сети $\eta: G_H \rightarrow T_P W$,*

где $\eta|_{\partial G_H} = 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\sum_{x \in V(H)} \langle \eta(x), N_x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V(H)} \|\eta(x) - \eta(y)\| \nu_{xy}, \quad (4.1)$$

где через $V(H)$ обозначено множество вершин приведенной компоненты H , а скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и норма $\|\cdot\|$ порождены римановой метрикой на W .

Следствие 4.1 имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть x_1, \dots, x_k — вершины компоненты H , занумерованные произвольным образом. Рассмотрим набор векторов $\{\eta(x_i) = \eta_i\}$ как множество точек в пространстве $\mathbb{R}^n = T_P W$, где n — размерность многообразия W . Конфигурационное пространство всевозможных положений $\{\eta_i\}$ совпадает с пространством \mathbb{R}^{nk} . Пусть $E = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ и $N_H = (N_1, \dots, N_k)$, где $N_i = N_{x_i}$, тогда первая сумма в выражении (4.1) равна скалярному произведению в \mathbb{R}^{nk} векторов E и N_H , т.е. равна $\langle E, N_H \rangle$. Отметим, что скалярное произведение на \mathbb{R}^{nk} задается как на прямом произведении $T_P W \times \dots \times T_P W$.

Вторая сумма в выражении (4.1) равна длине линейной сети $\eta: G_H \rightarrow T_P W$. Обозначим, для краткости, длину сети η через $\ell_H(E)$.

Следствие 4.2. Пусть W — риманово многообразие. Квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала римановой длины, если и только если каждое ее регулярное ребро — геодезическая, и для каждой приведенной компоненты $H: G_H \rightarrow P \in W$ сети Γ и любой линейной сети $\eta: G_H \rightarrow T_P W$, где $\eta|_{\partial G_H} = 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\langle E, N_H \rangle + \ell_H(E). \quad (4.2)$$

Рассмотрим функцию $t = \ell_H(E)$ на \mathbb{R}^{nk} . Имеет место следующее несложное утверждение.

Утверждение 4.1. Функция $\ell_H: \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз на пространстве \mathbb{R}^{nk} .

Далее, $\ell_H(\lambda E) = |\lambda| \ell_H(E)$ для любого вещественного λ , поэтому график этой функции представляет собой конус S_H в пространстве \mathbb{R}^{nk+1} с вершиной в начале координат $O \in \mathbb{R}^{nk+1}$. Конус S_H лежит в верхнем полупространстве $t \geq 0$, симметричен относительно оси Ot и ограничивает выпуклое подмножество $\{(E, t) \in \mathbb{R}^{nk+1} \mid t \geq \ell_H(E)\}$ — надграфик

функции ℓ_H . Поэтому неравенство

$$\langle E, N_H \rangle + \ell_H(E) \geq 0 \quad \text{для любого вектора } E \in \mathbb{R}^{nk},$$

которое переписывается в виде

$$\langle -N_H, E - 0 \rangle \leq \ell_H(E) - \ell_H(0) \quad \text{для любого вектора } E \in \mathbb{R}^{nk},$$

эквивалентно тому, что гиперплоскость $t = -\langle E, N_H \rangle$ в пространстве \mathbb{R}^{nk+1} является опорной в точке O к конусу C_H . При этом неравенство выполняется строго для всех ненулевых E , если и только если эта гиперплоскость пересекает конус C_H только по точке O . Таким образом, доказан следующий результат.

Следствие 4.3. *Квазирегулярная параметрическая сеть Γ на римановом многообразии W экстремальна по отношению к функционалу длины, если и только если все ее ребра — геодезические, и для каждой ее приведенной компоненты H гиперплоскость $t = -\langle E, N_H \rangle$ является опорной в точке O для конуса C_H в соответствующем пространстве \mathbb{R}^{nk+1} , т.е. вектор $-N_H$ является субградиентом функции $t = \ell_H(E)$ в точке $O' = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{nk}$.*

Переформулируем теперь требования следствия 4.3 в более конструктивной форме. Для этого рассмотрим приведенную компоненту $H: G_H \rightarrow P \in W$ и ориентируем ее ребра так, чтобы все ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин из G_H , имели одни и те же начало и конец. Каждую такую ориентацию будем называть *правильной*. Определим матрицу смежности правильно ориентированного графа G_H , положив c_{xy} равным по величине числу ν_{xy} всех (вырожденных) ребер графа G_H , соединяющих вершины x и y , и присвоив c_{xy} знак “плюс”, если и только если x — начало всех ребер из G_H , соединяющих x и y , и знак “минус” — в противном случае. Поставим в соответствие каждой неупорядоченной паре $\{x, y\}$ соседних вершин графа G_H переменную ξ_{xy} размерности n , а именно, $\xi_{xy} = (\xi_{xy}^1, \dots, \xi_{xy}^n)$. Отметим, что так как мы работаем с неупорядоченными парами, то ξ_{xy}^k и ξ_{yx}^k обозначают одну и ту же переменную. Для каждой подвижной вершины x графа G_H запишем векторное линейное уравнение

$$\sum_{y \text{ смежна с } x} c_{xy} \xi_{xy} = N_x,$$

где суммирование берется по всем (не только подвижным) вершинам y графа G_H , соседним с x .

Определение. Линейную систему уравнений

$$\sum_{\substack{y \\ y \text{ смежна с } x}} c_{xy} \xi_{xy} = N_x$$

по всем подвижным вершинам x графа G_H назовем *характеристической системой локальной структуры компоненты H* . Объединение характеристических систем локальной структуры по всем приведенным компонентам H сети Γ называется *характеристической системой локальной структуры сети Γ* .

Замечание. Характеристическая система локальной структуры каждой (нетривиальной, т.е. отличной от вершины) приведенной компоненты параметрической сети зависит, вообще говоря, от выбора ее правильной ориентации. Однако решения систем, соответствующих различным ориентациям, получают друг из друга подходящей заменой знаков их n -мерных компонент. Поскольку, как мы увидим из следующей теоремы, нас интересуют только модули n -мерных компонент решений характеристической системы, мы, допуская тем самым определенную вольность, не будем в дальнейшем различать системы, соответствующие разным правильным ориентациям.

Из следствия 4.3 получается следующая теорема, для доказательства которой остается вычислить субградиент функции $t = \ell_N(E)$ (подробности можно найти в [87]).

Теорема 4.1. *Квазирегулярная параметрическая сеть Γ на римановом многообразии W является экстремальной для функционала длины, если и только если все ее ребра — геодезические, и, кроме того, ее характеристическая система локальной структуры имеет такое решение, что значения каждой его n -мерной компоненты ξ_{xy} по модулю не превосходят единицы.*

Пример. Пусть G — граф, имеющий шесть вершин $P_i, Q_i, i = 0, 1, 2$, ребра вида $P_i Q_i$ в количестве p штук для каждого i и ребра вида $Q_i Q_j$ в количестве q штук для каждой пары $(i, j), i < j$. Сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ параметризована графом G ; граница β сети Γ отображает множество вершин $\{P_i\}$ на множество вершин правильного треугольника $A_0 A_1 A_2$; наконец, отображение Γ переводит ребра $Q_i Q_j$ в центр S этого треугольника, а ребра $P_i Q_i$ — в отрезки $A_i S$. Выясним, при каких p и q сеть Γ является экстремальной. Для этого, в соответствии с теоремой 4.1, достаточно записать характеристическую систему локальной структуры сети Γ и проверить, имеются ли среди ее решений такие, что все их 2-мерные компоненты по модулю не превосходят 1.

Характеристическая система локальной структуры в этом случае совпадает с характеристической системой локальной структуры единственной нетривиальной приведенной компоненты $H: G_H \rightarrow S \in \mathbb{R}^2$. Граф G_H состоит из трех вершин Q_0 , Q_1 и Q_2 и $3q$ ребер вида $Q_i Q_j$. Зададим правильную ориентацию графа G_H , ориентируя все ребра из G_H от Q_i к $Q_{(i+1) \bmod 3}$, $i = 0, 1, 2$. При такой ориентации характеристическая система уравнений локальной структуры записывается так:

$$\begin{cases} q\xi_{01} - q\xi_{20} &= pN_0, \\ -q\xi_{01} + q\xi_{12} &= pN_1, \\ q\xi_{20} - q\xi_{12} &= pN_2, \end{cases} \quad (*)$$

где ξ_{01} , ξ_{12} и ξ_{20} — независимые двумерные векторы-переменные, а N_i , $i = 0, 1, 2$, — единичные векторы $A_i S / \|A_i S\|$.

Отметим, что сумма векторов N_i , $i = 0, 1, 2$, равна нулю по условию; сумма левых частей уравнений системы (*) также, очевидно, равна нулю. Общее решение системы (*) имеет вид:

$$(\xi_{01}, \xi_{12}, \xi_{20}) = (N_0 p / q + \psi, (N_0 p + N_1 p) / q + \psi, \psi),$$

где ψ — произвольный вектор из \mathbb{R}^2 . Чтобы проверить, имеются ли среди решений системы (*) удовлетворяющие условиям $\|\xi_{ij}\| \leq 1$, перепишем решение системы в виде

$$q\xi_{01} = pN_0 + q\psi, \quad q\xi_{12} = -pN_2 + q\psi.$$

Условие $\|\xi_{ij}\| \leq 1$ эквивалентно существованию такого вектора ψ , $\|\psi\| \leq 1$, что оба вектора $pN_0 + q\psi$ и $-pN_2 + q\psi$ не превосходят по модулю q , т.е. лежат в круге радиуса q с центром в нуле. Предположим, что такой вектор ψ существует. Рассмотрим на плоскости треугольник T , одна вершина которого расположена в точке ноль, а две другие — в точках pN_0 и $-pN_2$. Этот треугольник, очевидно, правильный, и длина его стороны равна p . Сдвинув треугольник T на вектор $q\psi$, мы снова получим правильный треугольник T' , который, по предположению, целиком лежит в круге радиуса q с центром в точке ноль. Такое, очевидно, возможно, только если длина p стороны треугольника T' не превосходит длины стороны правильного треугольника, вписанного в круг радиуса q , т.е. $p \leq \sqrt{3}q$. Последнее неравенство эквивалентно следующему геометрическому условию: круги радиуса q , построенные в вершинах правильного треугольника T , имеют общую точку.

Обратно, предположим, что круги радиуса q , построенные в вершинах треугольника T , имеют общую точку φ . Это означает, что существуют такие векторы ψ_0, ψ_1 и ψ_2 , что $\|\psi_i\| \leq 1$, и

$$pN_0 + q\psi_0 = q\psi_1 = -pN_2 + q\psi_2 = \varphi.$$

Но тогда

$$pN_0 - q\psi_1 = -q\psi_0, \quad -pN_2 - q\psi_1 = q\psi_2, \quad \psi_1 = \varphi/q,$$

т.е. существует вектор $\psi = -\psi_1$, не превосходящий по модулю единицы и такой, что векторы $pN_0 + q\psi$ и $-pN_2 + q\psi$ лежат в круге радиуса q с центром в нуле. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 4.2. *В рассматриваемом случае сеть Γ экстремальна, если и только если $p \leq \sqrt{3}q$.*

4.2. Локальная структура взвешенных экстремальных параметрических сетей

Результаты раздела 4.1 могут быть обобщены на случай взвешенных параметрических сетей с положительными весами. Поскольку лагранжианы, задающие этот функционал, отличаются от лагранжиана, задающего функционал длины, на постоянные множители, леммы 4.1 и 4.2 тривиально переносятся на этот случай.

Как и выше, введем следующие обозначения. Пусть x — произвольная вершина взвешенной сети Γ . Если все ребра сети Γ , инцидентные вершине x , вырождены, то положим $N_x = 0$. Если же вершине x инцидентны некоторые невырожденные ребра e , то обозначим через N_x линейную комбинацию $\sum_e \omega(e)n_e$ единичных векторов скоростей n_e , с которыми точки, движущиеся по этим невырожденным ребрам, приходят в вершину x с коэффициентами — весами $\omega(e)$ этих ребер. Наконец, если x и y — две произвольные вершины сети Γ , то через ν_{xy} мы обозначим суммарный вес вырожденных ребер, соединяющих x и y .

Следствие 4.4. *Пусть W — риманово многообразие. Квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала взвешенной длины, если и только если каждое ее регулярное ребро — геодезическая, и для каждой приведенной компоненты $H: G_H \rightarrow P \in W$ сети Γ и любой линейной сети $\eta: G_H \rightarrow T_P W$,*

где $\eta|_{\partial G_H} = 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\sum_{x \in V(H)} \langle \eta(x), N_x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V(H)} \|\eta(x) - \eta(y)\| \nu_{xy}, \quad (4.3)$$

где через $V(H)$ обозначено множество вершин приведенной компоненты H , а скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и норма $\|\cdot\|$ порождены римановой метрикой на W .

В случае погруженных взвешенных сетей условия следствия 4.4 существенно упрощаются.

Следствие 4.5. *Погруженная параметрическая взвешенная сеть Γ на римановом многообразии W является экстремальной для функционала взвешенной длины, если и только если все ее ребра — геодезические, и, кроме того, в каждой подвижной вершине x линейная комбинация (единичных) векторов направлений, приходящих в x ребер сети Γ с коэффициентами — весами этих ребер, — равна нулю.*

Снова рассмотрим приведенную компоненту $H: G_H \rightarrow P \in W$, и пусть на ней фиксирована некоторая правильная ориентация. Определим взвешенную матрицу смежности правильно ориентированного графа G_H , положив c_{xy} равным по величине суммарному весу ν_{xy} всех (вырожденных) ребер графа G_H , соединяющих вершины x и y , и присвоив c_{xy} знак “плюс”, если и только если x — начало всех ребер из G_H , соединяющих x и y , и знак “минус” — в противном случае. Как и выше, поставим в соответствие каждой неупорядоченной паре $\{x, y\}$ соседних вершин графа G_H переменную ξ_{xy} размерности n , а именно, $\xi_{xy} = (\xi_{xy}^1, \dots, \xi_{xy}^n)$. Для каждой подвижной вершины x графа G_H запишем векторное линейное уравнение

$$\sum_{\substack{y \\ y \text{ смежна с } x}} c_{xy} \xi_{xy} = N_x,$$

где суммирование берется по всем (не только подвижным) вершинам y графа G_H , соседним с x . Линейную систему уравнений

$$\sum_{\substack{y \\ y \text{ смежна с } x}} c_{xy} \xi_{xy} = N_x$$

по всем подвижным вершинам x графа G_H назовем *характеристической системой локальной структуры компоненты H* . Объединение характеристических систем локальной структуры по всем приведенным

компонентам H сети Γ называется *характеристической системой локальной структуры взвешенной сети Γ* .

Теорема 4.2. *Взвешенная квазирегулярная параметрическая сеть Γ на римановом многообразии W является экстремальной для функционала взвешенной длины, если и только если все ее ребра — геодезические, и, кроме того, ее характеристическая система локальной структуры имеет такое решение, что значения каждой его n -мерной компоненты ξ_{xy} по модулю не превосходит единицы.*

Сети, экстремальные по отношению к функционалу взвешенной длины, будем называть, для краткости, *взвешенными экстремальными сетями*.

4.3. Многогранник взвешенных экстремальных сетей в \mathbb{R}^N с заданными типом и границей

В данном разделе мы используем приведенные в главе 3 общие результаты для описания структуры множества лежащих в \mathbb{R}^N погруженных взвешенных экстремальных сетей фиксированного типа и с данной границей. Локальная структура таких сетей описывается следствием 4.5. Отметим, что сети, экстремальные относительно стандартного функционала длины, являются частным случаем таких сетей. Таким образом, все теоремы этого раздела могут быть переформулированы и для обычного функционала длины.

Вообще говоря, взвешенная экстремальная сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ может содержать кратные ребра. Из теорем о локальной структуре вытекает, что если каждые две точки многообразия W соединяет не более одной геодезической (например, W — область в \mathbb{R}^N или в пространстве Лобачевского), то образы всех кратных ребер совпадают. Более того, если в этом случае перестроить взвешенный граф G , заменив каждый набор e_1, \dots, e_p кратных ребер на одно из этих ребер с весом, равным $\sum_{i=1}^p \omega(e_i)$, и определить на полученном графе \bar{G} сеть $\bar{\Gamma}$, совпадающую с Γ , то взвешенная сеть $\bar{\Gamma}$ вновь будет экстремальной с той же границей, что и сеть Γ . Описанную операцию на взвешенных графах и соответствующих сетях назовем *склеивкой кратных ребер*, а полученные в результате склейки кратных ребер граф \bar{G} и сеть $\bar{\Gamma}$ будем обозначать через $g(G)$ и $g(\Gamma)$ соответственно.

Следствие 4.6. *Пусть Γ является взвешенной экстремальной сетью и v — произвольная ее подвижная вершина. Тогда степень вер-*

шины v не меньше 2, и веса ребер e_1, \dots, e_k , инцидентных v , удовлетворяют “правилу многоугольника”: вес каждого такого ребра e_i не больше суммы весов всех остальных ребер e_j , $j \neq i$. В частности, если направления всех ребер, инцидентных вершине v , коллинеарны, то эти ребра разбиваются на два класса с одинаковыми суммарными весами. Поэтому веса ребер, инцидентных подвижной вершине степени 2, равны между собой.

Замечание. Пусть G — некоторый взвешенный граф и $\Gamma: G \rightarrow W$ — взвешенная экстремальная сеть. Если некоторая вершина степени 2 сети Γ — подвижная, то инцидентные этой вершине ребра, по следствию 4.6, необходимо имеют одинаковые веса и поэтому стыкуются под углом в 180° . Отсюда вытекает, что если выбросить из множества вершин параметризующего графа G подвижные вершины степени 2, инцидентные разным (не циклическим) ребрам одного веса¹, и “укрупнить” при этом ребра, склеивая каждую пару ребер из G , инцидентных такой вершине, в одно ребро того же веса, то получим новую взвешенную минимальную сеть, образ которой совпадает с образом сети Γ .

Обратно, из любой взвешенной сети Γ , не меняя ее образа, можно получить другую взвешенную сеть, выбрав на ребрах параметризующего графа G произвольные внутренние точки и добавив их к множеству подвижных вершин. При этом надо сделать очевидную перестройку ребер и весовой функции сети. Более того, по теореме о локальной структуре, см. следствие 4.5, при любой такой перестройке сети каждая взвешенная экстремальная сеть остается взвешенной экстремальной сетью.

Определение. Каждую не инцидентную циклическому ребру подвижную вершину степени 2 произвольного взвешенного графа G , а также соответствующую вершину произвольной сети Γ типа G будем называть *фиктивной*.

Для сетей в многообразиях, каждые две точки которых соединяются не более чем одной геодезической, понятие фиктивной вершины можно естественно расширить. Пусть теперь G — произвольный взвешенный граф (возможно, с кратными ребрами), параметризующий сеть Γ в многообразии W , обладающем указанным свойством, и $g(G)$ — результат склейки кратных ребер графа G .

Определение. Вершину v сети Γ типа G (соответственно, графа G) назовем *фиктивной*, если и только если фиктивной является соответствующая вершина графа $g(G)$.

Другими словами, вершина v сети Γ является фиктивной, если она подвижна, смежна ровно с двумя вершинами, скажем v_1 и v_2 , и сумма весов ребер, соединяющих v с v_1 , равна сумме весов ребер, соединяющих

¹Отметим, что если связный граф G содержит вершину степени 2, инцидентную циклическому ребру, то G совпадает с этим циклическим ребром.

v с v_2 . Отметим, что на случай таких сетей естественно переносится операция удаления фиктивных вершин.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4.3. *Пусть каждые две точки риманова многообразия W соединяет не более одной геодезической. Тогда взвешенная сеть Γ с границей $\partial\Gamma$ является экстремальной, если и только если экстремальной является взвешенная сеть, полученная из Γ удалением всех фиктивных вершин.*

Пусть Γ — произвольная взвешенная экстремальная сеть с границей $\partial\Gamma$. Если для некоторой граничной вершины выполняется условие теоремы о локальной структуре, характеризующее подвижные вершины, т.е. линейная комбинация векторов направлений ребер, входящих в эту вершину, с коэффициентами — весами этих ребер — равна нулю, то такую вершину можно исключить из границы, объявив ее подвижной, что не изменит свойства сети Γ быть взвешенной минимальной. Такие граничные вершины будем называть *ложными*. Легко видеть, что взвешенные экстремальные сети общего положения не содержат ложных вершин.

Задача описания взвешенных экстремальных сетей общего вида сводится к задаче описания невырожденных взвешенных экстремальных сетей. А именно, имеет место следующий очевидный результат.

Утверждение 4.4. *Взвешенная сеть G с границей ∂G является экстремальной тогда и только тогда, когда каждая ее невырожденная компонента — взвешенная экстремальная сеть по отношению к своей границе.*

4.3.1. Структура множества взвешенных экстремальных сетей

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что $W = \mathbb{R}^N$. Напомним обозначения из главы 3. Через $\mathcal{L}(G)$ мы обозначаем пространство всех линейных сетей топологии G . Функционал взвешенной длины порождает на этом пространстве функцию ℓ_ω . Несложно проверить, что функция $\ell_\omega: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, и поэтому ограничение функции ℓ_ω на подпространство $[G, \varphi]$ сетей с фиксированной границей φ выпукло (напомним, мы предполагаем, что веса всех ребер — положительны). Отсюда вытекает, что множество экстремумов функции $\ell_\omega: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}$ непусто, выпукло, а значит, линейно связно, ограничено и состоит из точек абсолютного минимума.

Множество всех минимумов функции $\ell_\omega: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^N$ обозначим через $[G, \varphi]_{\min}$. Сформулируем необходимое и достаточное условие того, что точка $x \in [G, \varphi]$ является точкой минимума.

Следствие 4.7. *Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω , а Γ — линейная сеть из $[G, \varphi]$, не содержащая вырожденных ребер. Тогда Γ является точкой абсолютного минимума функции взвешенной длины ℓ_ω , т.е. $\Gamma \in [G, \varphi]_{\min}$, если и только если Γ — взвешенная экстремальная сеть с границей φ . В частности, если все абсолютные минимумы функции взвешенной длины на пространстве $[G, \varphi]$ содержат вырожденные ребра, то не существует погруженной взвешенной экстремальной сети типа G с границей φ .*

Приведем теперь аналог доказанной Хвангом [65] теоремы единственности экстремальных деревьев данного типа с данной границей. Для этого мы расширим класс фиктивных вершин так. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ — погруженная взвешенная экстремальная сеть с границей φ . По движная вершина V сети Γ называется *слабо фиктивной*, если все инцидентные ей ребра взаимно параллельны. Из экстремальности сети Γ вытекает, что ребра сети Γ , инцидентные слабо фиктивной вершине V , а также соответствующие ребра графа G разбиваются на два класса с одинаковым суммарным весом. При этом образы любых двух таких ребер пересекаются по точке тогда и только тогда, когда эти ребра принадлежат разным классам. Отметим, что фиктивные вершины являются фиктивными для любой взвешенной экстремальной сети Γ , т.е. это свойство не зависит от выбора отображения Γ в классе взвешенных экстремальных сетей. В общем случае, слабо фиктивные вершины могут перестать быть таковыми при сколь угодно малом изменении отображения Γ в классе взвешенных экстремальных сетей. Приведем пример.

Пример. Пусть G — граф, состоящий из четырех ребер, стыкующихся в одной общей вершине v , и весовая функция постоянна и равна 1. Пусть граница ∂G графа G состоит из 4 его вершин степени 1. Рассмотрим граничное отображение φ , переводящее множество ∂G в четыре различных точки M_1, \dots, M_4 , лежащие на одной прямой l . Будем предполагать, без ограничения общности, что точки M_i занумерованы последовательно. Тогда, для любого расположения образа A вершины v на интервале (M_2, M_3) , соответствующая линейная сеть Γ является взвешенной экстремальной сетью типа G с границей φ . Вершина $\Gamma: v \mapsto A$ этой сети — слабо фиктивна. Отметим, что в этом случае имеется однопараметрическое семейство взвешенных экстремальных сетей типа G с границей φ .

Если же сколь угодно мало изменить отображение φ так, чтобы точки M_i стали вершинами плоского выпуклого четырехугольника, то для такого граничного отображения существует единственная взвешенная экстремальная сеть Γ типа G . Образ A вершины v сети Γ совпадает с точкой пересечения диагоналей граничного четырехугольника. Ясно, что вершина $\Gamma: v \mapsto A$ в этом случае не является слабо фиктивной.

Предложение 4.1. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ — погруженное взвешенное экстремальное дерево без слабо фиктивных вершин. Тогда Γ — единственная взвешенная экстремальная сеть типа G с границей $\partial\Gamma$.

Если дерево Γ содержит слабо фиктивные вершины, то, как видно из предыдущего примера, никакой единственности нет. Кроме того, если дерево Γ не является погруженным, то препятствия к единственности такого дерева, вообще говоря, не ясны (см., однако, в [97] результат Г. А. Карпунина о единственности в терминах характеристической системы, а также главу 5). Можно было бы, например, потребовать отсутствия слабо фиктивных вершин у соответствующей приведенной сети, но, как показывает следующий пример, этого не достаточно.

Пример. Рассмотрим погруженное плоское линейное дерево Γ , изображенное на рис. 4.1. Легко видеть, что Γ является экстремальной сетью для функционала длины. Кроме того, деформируя дерево Γ в дерево $\bar{\Gamma}$, мы снова, очевидно, получаем экстремальную сеть. Отметим, что приведенная сеть, соответствующая Γ , не содержит слабо фиктивных вершин.

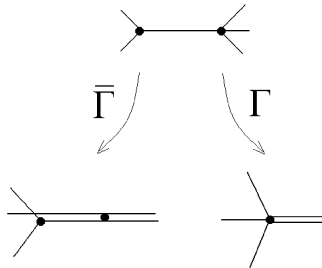


Рис. 4.1. Пример дерева экстремальной длины с вырождениями, не единственного в своем классе.

Если Γ не является деревом, то, вообще говоря, также единственности нет. Приведем соответствующий пример.

Пример. Рассмотрим правильный шестиугольник на плоскости, из каждой вершины которого наружу отложен отрезок, составляющий со смежными сторонами шестиугольника углы в 120° . Если в качестве границы полученной линейной сети выбрать все ее вершины степени 1 и выбрать весовую функцию постоянной, то полученная взвешенная экстремальная сеть может быть продеформирована в классе взвешенных экстремальных сетей того же типа и с той же границей: шестиугольник можно сжимать и растягивать вдоль прямых, проходящих через граничные ребра. Если к границе добавить еще хотя бы одну вершину степени три, то полученная взвешенная экстремальная сеть уже не может быть продеформирована. Причину этого легко понять: если разрезать такую сеть по граничной вершине степени три, то она превратится во взвешенное экстремальное дерево, которое единственно в соответствии с предложением 4.1.

Следующее предложение позволит нам свести задачу описания множества взвешенных экстремальных сетей данного типа с фиксированной границей к теореме 3.1 главы 3.

Предложение 4.2. Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω , а Γ и Γ' — две погруженных взвешенных экстремальных сети типа G с одной и той же границей φ . Тогда сети Γ и Γ' параллельны. Поэтому, в частности, если Γ_t — линейная деформация, соединяющая сети Γ и Γ' , то все Γ_t суть взаимно параллельные взвешенные экстремальные сети типа G с границей φ .

Из предложения 4.2 несложно получить следующий результат.

Следствие 4.8. Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω и φ — произвольное граничное отображение. Тогда множество всех погруженных экстремальных сетей типа G с границей φ или пусто, или совпадает с относительной внутренностью выпуклого компакта $[G, \varphi]_{\min}$. Поэтому если существует взвешенная экстремальная сеть типа G с границей φ , то

$$\text{Int}[G, \varphi]_{\min} = [G, \varphi]_{\Gamma},$$

где, напомним, через $[G, \varphi]_{\Gamma}$ обозначено множество линейных сетей из $[G, \varphi]$, параллельных Γ .

Таким образом, из теоремы 3.1 и следствия 3.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 4.9. Пусть Γ — погруженная взвешенная экстремальная сеть типа G в \mathbb{R}^N с границей φ и весовой функцией ω . Обозначим через r ранг сети Γ , а через t — количество ребер сети Γ .

Тогда множество взвешенных погруженных экстремальных сетей типа G с границей φ представляет собой относительную внутренность выпуклого $(t - r)$ -мерного многогранника $[G, \varphi]_{\min}$, являющегося множеством всех минимумов функции $\ell_\omega: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}$ взвешенной длины.

Более того, многогранник $[G, \varphi]_{\min}$ имеет не более чем t граней максимальной размерности.

Опишем теперь более подробно, как устроены деформации погруженных взвешенных экстремальных сетей данной топологии с фиксированной границей.

Пусть G — произвольный взвешенный граф с весовой функцией ω и границей B и $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ — погруженная взвешенная экстремальная сеть с границей $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^N$. Ребро графа назовем *циклическим*, если оно принадлежит хотя бы одному циклу. Обозначим через \hat{G}_B подвижный подграф в G . Ребро e из G отнесем к *нулевому уровню*, если e — циклическое ребро подвижного подграфа \hat{G}_B . Ребро, не принадлежащее нулевому уровню, но инцидентное или некоторому ребру нулевого уровня, или слабо фиктивной вершине, назовем *ребром первого уровня*, а все остальные ребра (т.е. ребра, не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях) назовем *ребрами второго уровня*.

Имеет место следующий результат.

Теорема 4.3. Пусть Γ — произвольная погруженная взвешенная экстремальная сеть в \mathbb{R}^N типа G с границей φ и Γ_t , $t \in [0, 1]$, — некоторая ее деформация в классе погруженных взвешенных экстремальных сетей того же типа G с той же границей φ . Тогда в процессе деформации Γ_t все ребра остаются параллельны себе. При этом ребра второго уровня неподвижны, а для ребер первого уровня остаются неподвижными прямые, содержащие эти ребра.

Теорема 4.3 позволяет описать, чем погруженные взвешенные экстремальные сети с одинаковыми топологиями и границами отличаются друг от друга.

Следствие 4.10. Пусть Γ и Γ' — две погруженных взвешенных экстремальных сети в \mathbb{R}^N одного и того же типа G и с одной и той же границей. Тогда имеют место следующие свойства:

- сети Γ и Γ' параллельны друг другу;

- взвешенные длины сетей Γ и Γ' равны;
- если e — произвольное ребро из G , лежащее на втором уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' совпадают;
- если e — произвольное ребро из G , лежащее на первом уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' лежат на одной прямой;
- если e — произвольное ребро из G , лежащее на нулевом уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' параллельны между собой.

4.3.2. Погруженные взвешенные экстремальные сети Штейнера на плоскости

Рассмотрим теперь важный частный случай — так называемые плоские сети Штейнера. Напомним, что погруженная связная сеть называется *сетью Штейнера*, если степени ее вершин не превосходят трех. Для взвешенных экстремальных сетей Штейнера на плоскости удастся вычислить размерность многогранника $[G, \varphi]_{\min}$, исходя из топологии параметризующего графа G с границей ∂G . Оказывается, размерность равна цикломатическому числу подвижного подграфа. А именно, имеет место следующий результат [84].

Теорема 4.4. Пусть Γ — не имеющая слабо фиктивных вершин степени 3 погруженная взвешенная экстремальная сеть Штейнера типа G в \mathbb{R}^2 с границей φ и весовой функцией ω . Обозначим через k цикломатическое число подвижного подграфа \hat{G}_φ графа G , через f — количество фиктивных вершин сети Γ , а через m — количество ребер сети Γ .

Тогда множество погруженных взвешенных экстремальных сетей типа G с границей φ представляет собой внутренность выпуклого $(k + f)$ -мерного многогранника $[G, \varphi]_{\min}$, являющегося множеством всех минимумов функции взвешенной длины $\ell_\omega: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}$. Все экстремальные сети данной топологии и с данной границей параллельны между собой и имеют одинаковую взвешенную длину.

Более того, многогранник $[G, \varphi]_{\min}$ имеет не более чем m граней максимальной размерности.

Оказывается, если погруженная взвешенная экстремальная сеть Γ не является сетью Штейнера, т.е. степень вершин сети может быть больше трех, или размерность объемлющего пространства больше 2, или сеть

Штейнера содержит слабо фиктивные вершины степени три, то размерность многогранника $[G, \varphi]_{\min}$ не вычисляется в терминах цикломатического числа подвижного подграфа. Приведем соответствующие примеры.

Пример. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 плоскость \mathbb{R}^2 , в которой расположим правильный шестиугольник, из каждой вершины которого наружу выпущены отрезки, образующие со смежными сторонами шестиугольника углы по 120° . Проведем прямую l , параллельную одной из сторон шестиугольника и пересекающую шестиугольник по внутренним точкам двух его сторон. Эта прямая разбивает нашу сеть на две компоненты. Легко видеть, что одну из этих двух компонент можно так повернуть относительно прямой l , что у полученного пространственного 8-угольника все углы будут равны 120° . Если теперь из вершин 8-угольника, лежащих на l , выпустить отрезки, образующие со смежными сторонами 8-угольника углы в 120° , то в результате мы получим экстремальную сеть, имеющую 8 внутренних вершин — вершин 8-угольника, и 8 граничных вершин — концов отрезков, выпущенных из вершин 8-угольника. Несложно проверить, что построенная сеть не деформируется в классе экстремальных сетей с той же границей. Таким образом, мы построили пример графа G с постоянной весовой функцией и граничным отображением φ , для которого существует единственная взвешенная экстремальная сеть типа G с границей φ , несмотря на то, что цикломатическое число подвижного подграфа графа G равно 1. Идея построения этого примера принадлежит М. В. Пронину.

Пример. Рассмотрим квадрат на плоскости и продолжим его стороны за вершины. В результате получим линейную сеть с 8 вершинами степени 1 и четырьмя вершинами степени 4. В качестве границы этой сети выберем множество ее вершин степени 1, а весовую функцию положим тождественно равной 1. Легко проверяется, что, хотя подвижный подграф полученной взвешенной экстремальной сети содержит цикл, эта сеть не может быть продеформирована в классе взвешенных экстремальных сетей того же типа и с той же границей.

Пример. Рассмотрим на плоскости правильный шестиугольник, из каждой вершины которого наружу отложены отрезки, образующие с прилегающими сторонами равные углы. На паре противоположных сторон шестиугольника выберем по внутренней точке, скажем V_1 и V_2 , и проведем через них прямую ℓ . Из точек V_i отложим отрезки, параллельные сторонам шестиугольника, содержащим V_i , и лежащие в одной

и той же полуплоскости Π , ограниченной прямой ℓ . Итак, мы построили линейную погруженную сеть с одним циклом, восемью вершинами степени 3 и восемью вершинами степени 1. Определим границу этой сети как множество всех ее вершин степени 1 и зададим весовую функцию равной 1 на всех ребрах, лежащих в полуплоскости Π , и равной 2 на всех остальных ребрах. Ясно, что эта взвешенная сеть является экстремальной и имеет две слабо фиктивных вершины степени 3. Кроме того, очевидно, единственный цикл этой сети нельзя сжимать и растягивать, поэтому размерность пространства всех экстремальных сетей этого типа с той же границей равна 2, т. е. количеству слабо фиктивных вершин.

4.4. Глобальное устройство плоских взвешенных экстремальных деревьев

Пусть Γ — взвешенное экстремальное параметрическое дерево типа G с границей β , затягивающее конечное множество M точек плоскости. Предположим, как обычно, что веса всех ребер сети Γ положительны. Тогда из теоремы о локальном устройстве взвешенных экстремальных сетей (см. следствие 4.5) вытекает, что дерево Γ — линейное, и в каждой подвижной вершине сети Γ линейная комбинация направлений всех приходящих в нее ребер с коэффициентами, равными весам этих ребер, равна 0.

Отсюда, так как все веса положительны, следует, что каждая подвижная вершина из Γ является внутренней вершиной линейного дерева Γ . Иными словами, геометрическая граница $\partial_g \Gamma$ содержится во множестве M . Поэтому из теоремы 3.2 немедленно получается следующее утверждение, обобщающее результаты из [80, 70] для экстремальных взвешенных бинарных деревьев.

Следствие 4.11. *Пусть Γ — произвольное вложенное взвешенное экстремальное дерево с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда $\text{tw } \Gamma \leq 12(\kappa(\partial_g \Gamma) - 1) + 6 \leq 12(\kappa(M) - 1) + 6$, где через $\kappa(M)$ обозначено количество уровней выпуклости множества M .*

Замечание. Для случая плоских бинарных деревьев с выпуклой границей, являющихся экстремальными для функционала длины, авторами доказано утверждение, обратное к следствию 4.11. А именно, оказывается, что *плоское бинарное дерево планарно эквивалентно вложенному дереву экстремальной длины с выпуклой границей, если и только если его число вращения не превосходит пяти*, см. ниже теорему 5.6. Авторам неизвестно, можно ли обобщить указанный результат на случай

экстремальных деревьев с произвольной границей. В следующем разделе мы приведем результаты Н. С. Гусева [58], посвященные исследованию этой нетривиальной задачи.

4.5. Н. С. Гусев.

О выпуклых реализациях плоских линейных деревьев

Здесь мы изучим задачу о выпуклой реализации плоских линейных деревьев. Нам понадобятся некоторые определения.

Полуплоскость P вместе с некоторой частью своей границы назовем *опирающейся* на точку p , если $p \in \partial P$.

Как это принято в теории графов, неориентированный без кратных ребер и петель (т.е. простой) граф G будем задавать парой в виде пары (V, E) , где V — множество вершин графа G , а E — множество его ребер, т.е. множество двухэлементных подмножеств множества V . *Вложением* связного простого графа $G = (V, E)$ в плоскость назовем такое инъективное отображение τ , определенное на $V \sqcup E$ и сопоставляющее вершинам точки, а ребрам интервалы, что замыкания образов несмежных ребер не пересекаются, а замыкания образов смежных ребер пересекаются только по образу их общей вершины. Вложение τ графа G будем также обозначать (G, τ) или говорить, что граф G — τ -*вложенный*. Значение вложения τ графа G на вершине p будем обозначать τ_p или $\tau(p)$.

Вершину p τ -вложенного графа G назовем τ -*граничной* (*граничной*), если найдется открытая полуплоскость P , опирающаяся на образ p , такая, что все τ -образы ребер графа G , инцидентных этой вершине, лежат в P ; неграничную вершину, такую, что образы всех инцидентных ей ребер располагаются на одной прямой, назовем τ -*фиктивной*.

Множество всех τ -граничных вершин графа G назовем его τ -*границей* (*границей*) и обозначим через $\delta_\tau G$.

Два вложения графов (G, α) и (H, β) назовем *параллельными*, если найдутся изометрия ψ плоскости \mathbb{R}^2 и изоморфизм ϕ графов G и H такие, что для произвольных трех вершин p, q, r графа G таких, что p и r соседние с q , выполняется равенство:

$$\angle(\overrightarrow{\alpha_q \alpha_p}, \overrightarrow{\alpha_q \alpha_r}) = \angle(\overrightarrow{\gamma_q \gamma_p}, \overrightarrow{\gamma_q \gamma_r}),$$

где $\gamma = \psi \circ \beta \circ \phi$ — композиция отображений, а $\angle(a, b)$ — ориентированный угол от вектора a до вектора b , принимающий значения в $(-\pi, \pi]$;

заметим, что в качестве изоморфизма плоскости достаточно брать или тождественное отображение, или отражение относительно прямой.

Вложение графа назовем *выпуклым*, если его граница лежит на границе выпуклого многоугольника, и *выпукло-реализуемым*, если найдется ему параллельное выпуклое вложение.

Задача. Исследовать, при каких условиях вложение дерева является выпукло-реализуемым.

Заметим, что естественное предположение о том, что для выпуклой реализуемости вложения дерева достаточно того, что число вращения его не превосходит 6, неверно. Это показывают простейшие примеры, см. рис. 4.2.



Рис. 4.2. Примеры не выпукло-реализуемых ломаных с числом вращения, меньшим 6.

Пусть (T, τ) — вложение дерева, $p \in \delta_\tau T$. Тогда ребро e , инцидентное p , назовем *p -опорным*, если образы всех ребер, инцидентных p , лежат в одной замкнутой полуплоскости относительно прямой, проходящей через образ e .

Заметим, что у всякой граничной вершины p или одно, или два опорных ребра. Если их два, то занумеруем их (e_1^p, e_2^p) так, чтобы пара векторов направлений этих ребер с началами в p образовывала положительно ориентированный базис. Если опорное ребро одно, то положим $e_1^p = e_2^p$.

Назовем *фрагментом дерева T , соответствующим ребру e* (*фрагментом ребра e*), максимальный по включению отрезок среди всех отрезков, содержащихся в образе дерева T и содержащих образ ребра e .

Ребро e назовем *двусторонним*, если среди образов ребер, пересекающих фрагмент ребра e , найдутся два, лежащие по разные стороны относительно прямой, проходящей через этот фрагмент.

Назовем *ломаной* дерево, степени всех вершин которого суть 1 или 2. *Простой ломаной* будем называть образ вложения ломаной. Ломаная *ориентирована*, если известно (задано), какая из двух ее вершин степени один начальная и какая — конечная. У всякой ориентированной ломаной A обозначим A_0, \dots, A_{n+1} все ее вершины в порядке ориентации,

а число n назовем длиной ломаной. Для вложения f ориентированной ломаной A длины $n > 0$ обозначим

$$\text{ang}_f(i) := \angle(\overrightarrow{f(A_{i-1})f(A_i)}, \overrightarrow{f(A_i)f(A_{i+1})}), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\text{ang}_f := (\text{ang}_f(1), \dots, \text{ang}_f(n));$$

$$\text{tw}(f) := \sum_{i=1}^n \text{ang}_f(i).$$

Пусть (T, τ) — вложение дерева, $p, q \in \delta_\tau T, p \neq q$. Тогда положим

- T^{pq} — ориентированная от p к q ломаная, соединяющая вершины p и q в дереве T ;
- \hat{T}^{pq} — ломаная, получаемая из T^{pq} добавлением тех ребер из e_1^p и e_2^q , которые не входят в T^{pq} , с сохранением ориентации ломаной.

Обозначив через ω вложение ломаной \hat{T}^{pq} , осуществляемое вложением всего дерева, определим также следующую функцию:

$$\text{agg}_\tau(p, q) := \text{tw}(\omega) - \nu\pi,$$

где ν — количество тех ребер из набора (e_1^p, e_2^q) , которые входят в состав ломаной T^{pq} .

Назовем вложение (T, τ) *неположительным*, если для всяких неравных граничных вершин p, q выполняются оба условия:

- (1) $\text{agg}_\tau(p, q) \leq 0$;
- (2) если хотя бы одно из ребер e_1^p или e_2^q двустороннее, то неравенство строгое.

Теорема 4.5. *Если вложение дерева выпукло-реализуемо, то оно неположительно.*

Далее мы не будем отличать ломаные от простых ломаных и будем считать, что ломаная параметризована деревом, вершины которого суть $0, \dots, n+1$, а ребра суть пары $\{0, 1\}, \dots, \{n, n+1\}$, а также что у ломаных нет фиктивных вершин.

Сформулируем несколько дополнительных определений.

Назовем конечную последовательность чисел $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *угловой последовательностью*, если найдется ориентированная ломаная f такая, что покомпонентно совпадают наборы чисел ang_f и φ (ясно, что это равносильно условию $\varphi_i \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, где $i = 1, \dots, n$).

Пусть φ — угловая последовательность длины n , тогда определим ее расширение $\overline{\varphi}_0, \dots, \overline{\varphi}_{n+1}$, положив

$$\overline{\varphi}_i = \begin{cases} \varphi_i, & i = 1, \dots, n; \\ -\pi \operatorname{sign} \varphi_1, & i = 0; \\ -\pi \operatorname{sign} \varphi_n, & i = n + 1. \end{cases}$$

Для φ — угловой последовательности длины n и $i, j = 0, \dots, n + 1$, где $i \leq j$, обозначим $\varphi(i, j) := \sum_{k=i}^j \overline{\varphi}_k$.

Угловую последовательность φ длины n назовем *выпуклой*, если $\forall i, j = 0, \dots, n + 1, i < j, \operatorname{sign} \overline{\varphi}_i = \operatorname{sign} \overline{\varphi}_j =: \varepsilon$ выполняется

- (1) $\varphi(i, j) \in [0, 2\pi\varepsilon]$,
- (2) если $i > 1$ или $j < n$, то $\varphi(i, j) \neq 2\pi\varepsilon$,
- (3) если $\operatorname{sign} \varphi_{i-1}$ или $\operatorname{sign} \varphi_{j+1} = -\varepsilon$, то $\varphi(i, j) \neq 0$.

Заметим, что при этом из второго условия вытекает, что в третьем условии $\varphi(i, j) \neq 2\pi\varepsilon$.

Функцию Φ , сопоставляющую угловой последовательности φ некоторую ориентированную ломаную $f = \Phi(\varphi)$ такую, что $\operatorname{ang}_f = \varphi$, назовем непрерывной, если каждая вершина этой ломаной f непрерывно зависит от набора действительных чисел φ .

Теорема 4.6. *Вложение ломаной (T, τ) выпукло-реализуемо, если и только если оно строго неположительно.*

Плоская ломаная длины $n \geq 1$ выпукло-реализуема, если и только если ее угловая последовательность (с какой-нибудь, а следовательно, и с противоположной ориентацией) является выпуклой.

Существует такой алгоритм построения выпуклой реализации выпуклой угловой последовательности, что функция, соответствующая этому алгоритму, непрерывна.

Кроме того, все выпуклые угловые последовательности данной длины n образуют многогранное множество, состоящее из 2^n связных компонент, каждая из которых — выпукла; а если $n \geq 3$, то замыкание всего многогранника — связно и невыпукло.

То, что выпуклые угловые последовательности длины n образуют многогранное множество J , следует из того, что они определяются системой линейных неравенств. Количество связных компонент и их выпуклость вытекает из определения, а то, что замыкание J при $n \geq 3$

невыпукло, следует из того, что всегда найдутся две выпуклые угловые последовательности длины n такие, что соединяющий их отрезок не лежит в J . Приведем пример таких последовательностей, соответствующих ломаным на рис. 4.3:

$$a = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{где } k \geq 4;$$

$$b = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{где } k \geq 4.$$

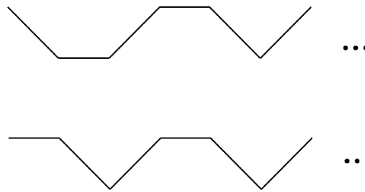


Рис. 4.3. Выпуклые ломаные, выпуклая комбинация угловых последовательностей которых невыпукла.

Эти последовательности выпуклы, т.к. ломаные выпуклы. А если взять $c = at + b(1 - t)$, где $0 < t < \frac{1}{2}$, то c — невыпукла, т.к.

$$c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{\pi}{4} + t\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - t\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = t\frac{\pi}{4} > 0,$$

что противоречит первому условию определения выпуклой угловой последовательности.

4.6. Геометрия плоских вложенных экстремальных взвешенных бинарных деревьев

В данном разделе мы более подробно изучим случай вложенных плоских экстремальных взвешенных бинарных деревьев. Ясно, что каждая невырожденная компонента такого дерева также представляет собой бинарное дерево. Кроме того, в силу утверждения 4.4, изучение таких деревьев сводится к изучению их невырожденных компонент. Поэтому в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что граница таких деревьев состоит в точности из всех вершин степени 1.

Оказывается, для вложенного плоского взвешенного бинарного дерева можно определить число вращения, исходя только из плоской топологии дерева (т.е. класса его планарной эквивалентности) и весовой

функции. Другими словами, можно определить число вращения для класса эквивалентных плоских взвешенных деревьев (под эквивалентностью мы понимаем здесь планарную эквивалентность, сохраняющую весовую функцию). При этом мы подберем определение так, чтобы для каждого вложенного экстремального взвешенного бинарного дерева его число вращения как *вложенного плоского взвешенного бинарного дерева* совпадает с его числом вращения как *вложенного плоского линейного дерева*. Такой подход позволяет отсеивать многие топологии *a priori*, не строя соответствующих экстремальных реализаций.

4.6.1. Число вращения плоского вложенного взвешенного бинарного дерева

Локальное устройство погруженных взвешенных экстремальных бинарных деревьев (или, для краткости, 2-деревьев) описано в следствии 4.5: все ребра плоского погруженного экстремального взвешенного дерева Γ — прямолинейные отрезки, и линейная комбинация единичных векторов направлений ребер из Γ , входящих в произвольную его подвижную вершину, с коэффициентами — весами этих ребер — равна нулю. Отсюда и из предположения о положительности весов, очевидно, вытекает, что веса каждых трех ребер дерева Γ , инцидентных одной и той же его вершине степени 3, удовлетворяют следующему правилу: сумма любых двух из них не меньше, чем третий, — это необходимое условие существования такого взвешенного экстремального 2-дерева. При этом если имеет место равенство, то одно из ребер меньшего веса необходимо содержится в другом, т.е. в этом случае экстремальное дерево не может быть вложенным. Поэтому, говоря о взвешенных 2-деревьях, мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что в каждой вершине V степени 3 выполнено следующее правило треугольника: *сумма весов любых двух инцидентных V ребер строго больше веса третьего инцидентного V ребра*.

Определим теперь понятие числа вращения вложенного плоского взвешенного 2-дерева, веса которого удовлетворяют правилу треугольника. Для этого сначала рассмотрим произвольную вершину P степени 3 взвешенного 2-дерева Γ , и пусть e_i , $i = 1, 2, 3$, — ребра сети Γ , инцидентные P . Обозначим через ω_i вес ребра e_i . Рассмотрим на плоскости треугольник $P_1P_2P_3$, такой, что для любых трех различных i, j и k , где $1 \leq i, j, k \leq 3$, длина стороны P_iP_j равна ω_k . Этот треугольник существует, так как веса ω_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют, по предположению, правилу треугольника. Треугольник $P_1P_2P_3$ называется *харак-*

характеристическим треугольником вершины P . Обозначим через α_i угол характеристического треугольника в вершине P_i .

Рассмотрим теперь произвольную упорядоченную пару (e_i, e_j) , составленную из ребер e_l , $l = 1, 2, 3$, инцидентных P . Пусть U — некоторая круговая окрестность вершины P сети Γ , такая, что ее пересечение с деревом Γ представляет собой звезду с центром в P и вершинами степени 1, лежащими на окружности ∂U . Тогда $\partial U \cap \Gamma$ состоит из трех точек A_i , $i = 1, 2, 3$. Для определенности будем считать, что $A_l \in e_l$. Обозначим через δ дугу из ∂U , ограниченную точками A_i и A_j и содержащую A_k , где $k \neq i$ и $k \neq j$. Если движение вдоль δ от A_i к A_j происходит по часовой стрелке, то сопоставим паре (e_i, e_j) число $-\frac{3}{\pi}\alpha_k$. В противном случае сопоставим паре (e_i, e_j) число $+\frac{3}{\pi}\alpha_k$. Это число называется *твистингом от ребра e_i к ребру e_j* .

Рассмотрим теперь произвольную пару (a, b) ребер дерева Γ , и пусть γ — единственный путь в Γ , соединяющий эти ребра. Ориентируем путь γ от a к b , и пусть $a = e_1, \dots, e_k = b$ — последовательные ребра пути γ , а P_0, P_1, \dots, P_k — его последовательные вершины. Для каждой внутренней вершины P_i пути γ рассмотрим пару последовательных ребер (e_i, e_{i+1}) из γ , инцидентных вершине P_i . Твистинг от ребра e_i к ребру e_{i+1} называется *твистингом вершины P_i ориентированного пути γ* .

Определение. Сумма твистингов всех внутренних вершин ориентированного пути γ , идущего от ребра a к ребру b во вложенном взвешенном 2-дереве Γ , называется *числом вращения $\text{tw}(a, b)$ упорядоченной пары (a, b) ребер из Γ* .

Определение. Максимум чисел вращения $\text{tw}(a, b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер дерева Γ , называется *числом вращения $\text{tw} \Gamma$ вложенного взвешенного 2-деревя Γ* .

Отметим, что $\text{tw}(a, b) = -\text{tw}(b, a)$ и $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, c) = \text{tw}(a, c)$ для любых ребер a , b и c из Γ , лежащих на одном пути в Γ . Кроме того, если $\text{tw} \Gamma = \text{tw}(a, b)$, то ребра a и b инцидентны вершинам степени 1. Ребро 2-деревя, инцидентное вершине степени 1, т.е. граничной вершине, называется *граничным ребром*.

Пусть Γ — вложенное взвешенное экстремальное 2-дерево и (a, b) — произвольная упорядоченная пара его ребер. Рассмотрим единственный путь γ в Γ , соединяющий a и b , и ориентируем его от a к b . Путь γ является, очевидно, ломаной линией, поэтому определено кручение $\text{tn} \gamma$ вдоль него. С другой стороны, определено число вращения $\text{tw}(a, b)$ между ребрами a и b взвешенного 2-деревя Γ . По определению, $\text{tn} \gamma = \text{tw}(a, b)$. Этот факт дает определенному только что числу вра-

щения экстремального взвешенного 2-дерева естественную геометрическую интерпретацию.

Утверждение 4.5. *Число вращения произвольного вложенного взвешенного экстремального 2-дерева Γ как вложенного плоского взвешенного бинарного дерева совпадает с числом вращения дерева Γ как вложенного плоского линейного дерева.*

Таким образом, из утверждения 4.5 и следствия 4.11, после некоторых дополнительных рассуждений, получаем следующее важное утверждение.

Следствие 4.12. *Пусть Γ — вложенное экстремальное взвешенное 2-дерево с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда $\text{tw } \Gamma < 12(\kappa(M) - 1) + 6$, где через $\text{tw } \Gamma$ обозначено, как и выше, число вращения Γ как вложенного плоского взвешенного бинарного дерева.*

Следствие 4.12 может быть перенесено на случай произвольных вложенных взвешенных деревьев Штейнера так. Назовем *числом вращения* $\text{tw } \Gamma$ вложенного плоского взвешенного дерева Штейнера Γ вектор, составленный из чисел вращения его невырожденных компонент. Кроме того, определим $\kappa(\partial\Gamma)$ как вектор, составленный из количеств уровней выпуклости границ невырожденных компонент сети Γ . (Порядки перечисления невырожденных компонент предполагаются одинаковыми в обоих случаях.)

Следствие 4.13. *Пусть Γ — вложенное экстремальное взвешенное дерево Штейнера с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество $M = \partial\Gamma$ точек плоскости. Тогда $\text{tw } \Gamma < 12(\kappa(\partial\Gamma) - 1) + 6$, т.е. каждая компонента вектора в левой части неравенства строго меньше соответствующей компоненты в правой части неравенства.*

Если весовая функция постоянна, то функционал взвешенной длины пропорционален функционалу обычной длины и экстремали этих функционалов совпадают. В этом случае приведенные выше результаты можно упростить и уточнить.

Во-первых, определение числа вращения упрощается, так как характеристический треугольник произвольной вершины бинарного дерева является правильным, т.е. все углы α_k равны между собой и равны $\pi/3$. Поэтому твистинг в вершине пути равен $+1$, если мы сворачиваем в ней налево, и -1 в противном случае. Число вращения вдоль пути γ равно,

очевидно, разности количеств левых и правых поворотов во внутренних вершинах пути γ при движении вдоль γ .

Во-вторых, оценку на число вращения, приведенную в следствии 4.12, можно уточнить так.

Следствие 4.14. *Пусть Γ — вложенное бинарное дерево, экстремальное по отношению к функционалу евклидовой длины и затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда $\text{tw } \Gamma \leq 12(\kappa(M) - 1) + 5$, где через $\text{tw } \Gamma$ обозначено число вращения Γ как плоского бинарного дерева.*

ГЛАВА 5

Экстремали функционала длины: случай сетей–следов

В предыдущей главе мы изучили локальные и некоторые глобальные свойства параметрических сетей, являющихся экстремалами по отношению к функционалам типа длины. В настоящей главе мы изучим локальные и некоторые глобальные свойства сетей–следов, экстремальных по отношению к функционалу римановой длины. Локальная структура таких сетей–следов описывается следствием 2.7 из главы 2. В частности, из следствия 2.7 вытекает, что у таких сетей–следов степень вершины не превосходит трех, т.е. каждая связная компонента является сетью Штейнера, и поэтому канонический представитель каждой такой компоненты является экстремальной параметрической сетью Штейнера по отношению к функционалу длины. Отметим, что не всякая экстремальная параметрическая сеть Штейнера является каноническим представителем сети–следа, экстремальной по отношению к функционалу длины.

Утверждение 5.1. *Для функционала римановой длины экстремальная параметрическая сеть Штейнера является каноническим представителем некоторой экстремальной сети–следа тогда и только тогда, когда угол между любыми двумя ее смежными граничными ребрами не меньше 120° .*

Утверждение 5.1 позволяет перенести результаты главы 4 о параметрических сетях Штейнера на случай сетей–следов. Так, например, пространства экстремальных по отношению к функционалу длины сетей Штейнера в \mathbb{R}^n , у которых фиксированы топология канонического представителя и граница, устроены так же, как и в параметрическом случае, см. теорему 4.4 и следствие 4.9 соответственно.

Вложенные сети–следы, экстремальные по отношению к функционалу римановой длины, будем для краткости называть *локально минимальными сетями*.

Напомним, что связная сеть-след, затягивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой другой связной сети с той же границей. Естественное определение локальной минимальности сети-следа состоит в том, что такая сеть является локально кратчайшей. А именно, сеть-след называется *локально минимальной*, если для каждой точки сети существует локальная сеть с центром в этой точке, являющаяся кратчайшей. В случае функционала римановой длины это условие эквивалентно экстремальности, см. [87]. Кратчайшие (в целом) связные сети-следы часто также называют *минимальными деревьями Штейнера* или *абсолютно минимальными сетями*.

Мы начнем с детального изучения локально минимальных сетей на евклидовой плоскости.

5.1. Локально минимальные сети на евклидовой плоскости

Мы начнем с того, что воспользуемся результатами предыдущей главы. Понятие числа вращения, определенное для параметрических бинарных деревьев, дословно переносится на случай бинарных деревьев-следов. Более того, имеется такая же связь между числом вращения локально минимального бинарного дерева и количеством уровней выпуклости граничного множества, см. следствие 4.14 (как и в параметрическом случае, мы предполагаем, что граничное множество состоит из всех вершин степени 1). А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 5.1. *Число вращения плоского локально минимального бинарного дерева-следа с границей M , имеющей k уровней выпуклости, не превосходит $12(k - 1) + 5$.*

Следствие 5.1. *Число вращения плоского локально минимального бинарного дерева с выпуклой границей не превосходит 5.*

Определение. Если для плоской связной сети Γ существует планарно эквивалентная ей локально минимальная плоская сеть с выпуклой границей, мы будем говорить, что Γ имеет *выпуклую минимальную реализацию*.

В случае выпуклых границ авторами доказано и обратное к следствию 5.1 утверждение, см. ниже и [73, 74, 77, 78], а именно: *если число вращения плоского 2-дерева Γ не превосходит 5, то существует пла-*

нарно эквивалентное ему локально минимальное 2-дерево с выпуклой границей. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 5.2. *Плоское бинарное дерево имеет выпуклую минимальную реализацию, если и только если его число вращения не превосходит 5.*

Конструктивное доказательство этого факта, полученное авторами, см. [77, 78, 87], существенно опирается на полное описание всех плоских бинарных деревьев с числом вращения, не превосходящим 5, см. ниже теоремы 5.4 и 5.5. Оказалось, что множество всех таких бинарных деревьев допускает конечное, в некотором смысле, описание на языке триангуляций специального вида. Уже в случае бинарных деревьев с числом вращения 6 такой конечности нет, что существенно усложняет ситуацию. Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение, обратное к теореме 5.1, в общем случае.

Оказывается, для плоских локально минимальных сетей удастся получить ряд более глубоких результатов, часть из которых изложена в настоящем разделе. Многие из них основаны на разработанном авторами “языке паркетов”, к описанию которого мы и перейдем.

5.1.1. Соответствие между плоскими бинарными деревьями и диагональными триангуляциями

Пусть P — плоский n -угольник и $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^{n-2}$ — некоторая его диагональная триангуляция. Последнее означает, что многоугольник P разбит на треугольники Δ_i , каждый из которых образован некоторой тройкой из сторон и диагоналей n -угольника P . Таким образом, $P = \cup_i \Delta_i$ и внутренности разных треугольников Δ_i не пересекаются; в частности, каждый треугольник Δ_i принадлежит P (вообще говоря, мы не предполагаем, что n -угольник P — выпуклый). Треугольники триангуляции T будем называть *ячейками*. Стороны и вершины ячеек триангуляции T называются, соответственно, *ребрами* и *вершинами* триангуляции T ; при этом, ребра триангуляции T , являющиеся сторонами n -угольника P , называются *граничными*, а все остальные ребра — *внутренними* ребрами или *диагоналями*.

По каждой диагональной триангуляции T можно построить плоское бинарное дерево, граница которого состоит из всех его вершин степени 1. Это делается так. Отметим внутри каждой ячейки Δ_i по одной точке v_i , а также внутри каждого граничного ребра b_i (стороны n -угольника P) — по одной точке w_i . Каждую пару точек v_i и v_j , таких,

что ячейки Δ_i и Δ_j смежны, соединим вложенной кривой γ_{ij} , лежащей внутри $\Delta_i \cup \Delta_j$. Каждую пару точек v_i и w_j , принадлежащих одной ячейке Δ_i , также соединим вложенной кривой δ_{ij} , внутренность которой лежит внутри Δ_i . Кривые γ_{ij} и δ_{ij} проведем так, чтобы внутренность каждой из них не пересекала объединение всех остальных кривых этого семейства. Тем самым мы получим вложенную сеть, *ребра* которой — кривые γ_{ij} и δ_{ij} , а *вершины* — концы этих кривых. Полученная сеть называется *двойственной сетью триангуляции* T и обозначается через Γ_T . Ребра γ_{ij} двойственной сети Γ_T называются *внутренними*, а δ_{ij} — *граничными*.

Обратно, пусть Γ — плоское бинарное дерево, граница которого состоит из всех его вершин степени 1, и пусть n — количество этих вершин. Мы хотим построить триангуляцию T некоторого многоугольника P , такую, что ее двойственная сеть Γ_T планарно эквивалентна сети Γ . Отбрасывая тривиальный случай, когда Γ состоит из одного ребра, будем предполагать, что $n \geq 3$.

Если $n = 3$, то выберем в качестве P произвольный треугольник, а в качестве T — единственную триангуляцию треугольника P , состоящую из одной ячейки P . Ясно, что Γ_T и Γ планарно эквивалентны.

Для рассмотрения общего случая нам понадобится следующее определение.

Определение. Два смежных ребра произвольного 2-дерева G образуют *усы*, если каждое из них инцидентно вершине степени 1.

Доказательство следующей леммы представляет собой простое упражнение по теории графов.

Лемма 5.1. Если 2-дерево G состоит из трех ребер, то каждая пара его ребер образует усы. Если же G имеет более трех ребер, то оно содержит, по крайней мере, двое непересекающихся усов.

Пусть $n > 3$. Обойдем дерево Γ в положительном направлении, и пусть e_0, \dots, e_{n-1} — последовательные граничные ребра из Γ . Пусть P — произвольный выпуклый n -угольник. Ориентируем P в положительном направлении, и пусть b_0, \dots, b_{n-1} — последовательные стороны из P . Для удобства изложения индексы i в e_i и b_i мы будем рассматривать как элементы группы \mathbb{Z}_n вычетов по модулю n .

Рассмотрим естественное взаимно однозначное соответствие ν между граничными ребрами дерева Γ и сторонами многоугольника P , определенное так: $\nu : e_i \mapsto b_i$. По лемме 5.1, дерево Γ содержит некоторые усы (e, f) . Ясно, что усы (e, f) имеют вид (e_k, e_{k+1}) для некоторого $k \in \mathbb{Z}_n$. Стороны $b_k = \nu(e_k)$ и $b_{k+1} = \nu(e_{k+1})$ многоугольника

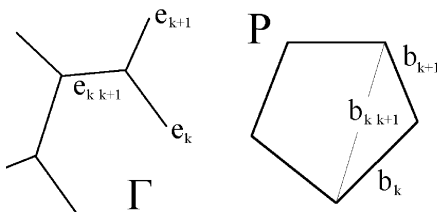


Рис. 5.1. Построение триангуляции по бинарному дереву.

P — соседние, поэтому существует единственная диагональ $b_{k k+1}$ многоугольника P , образующая вместе со сторонами b_k и b_{k+1} некоторый треугольник Δ_1 .

Пусть $e_{k k+1}$ — ребро из Γ , смежное одновременно с ребрами e_k и e_{k+1} . Отрежем от дерева Γ усы (e_k, e_{k+1}) и обозначим полученное бинарное дерево через Γ^1 . Одновременно отрежем от многоугольника P треугольник Δ_1 и полученный выпуклый многоугольник обозначим через P^1 . Зададим взаимно однозначное соответствие ν^1 между граничными ребрами дерева Γ^1 и сторонами $(n-1)$ -угольника P^1 , положив его равным ν для всех граничных ребер из Γ^1 , отличных от $e_{k k+1}$, и определив его на ребре $e_{k k+1}$ единственно возможным способом: $\nu^1 : e_{k k+1} \mapsto b_{k k+1}$.

К вновь полученной тройке (Γ^1, P^1, ν^1) применим вышеописанную операцию. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока многоугольник P не превратится в некоторый треугольник Δ . Обозначим через Δ_i , $i = 1, \dots, n-3$, треугольник, отрезанный от перестроенного многоугольника P на i -м шаге, а через Δ_{n-2} — треугольник Δ . В результате мы получаем триангуляцию $T = \{\Delta_i\}$ многоугольника P , у которой двойственная сеть Γ_T планарно эквивалентна Γ .

Опишем теперь некоторые структурные элементы триангуляций, которые будут нам полезны в дальнейшем.

5.1.2. Структурные элементы диагональных триангуляций

Пусть $T = \{\Delta_i\}$ — некоторая диагональная триангуляция произвольного многоугольника P . В соответствии со сделанным выше соглашением все граничные вершины двойственной сети Γ_T принадлежат граничным ребрам триангуляции T и, наоборот, каждое граничное ребро из T содержит ровно одну вершину двойственной сети Γ_T , и эта вершина является граничной для Γ_T . В частности, каждое граничное ребро

сети Γ_T пересекает ровно одно ребро триангуляции T , и это ребро из T является граничным; обратно, каждое граничное ребро триангуляции пересекается с единственным граничным ребром сети Γ_T . Далее, каждое внутреннее ребро двойственной сети Γ_T пересекает единственную диагональ триангуляции T , и обратно, каждая диагональ триангуляции T пересекается с единственным внутренним ребром сети Γ_T .

Таким образом, мы описали следующие естественные взаимно однозначные соответствия:

$$\begin{array}{ll} \{\text{граничные ребра } T\} & \longleftrightarrow \{\text{граничные вершины } \Gamma_T\} \\ \{\text{граничные ребра } T\} & \longleftrightarrow \{\text{граничные ребра } \Gamma_T\} \\ \{\text{диагонали } T\} & \longleftrightarrow \{\text{внутренние ребра } \Gamma_T\} \\ \{\text{ячейки } T\} & \longleftrightarrow \{\text{внутренние вершины } \Gamma_T\} \end{array}$$

Именно описанные только что соответствия и будут иметься в виду в дальнейшем.

Если двойственная сеть диагональной триангуляции T обладает некоторым свойством, то мы, в дальнейшем, будем говорить, что сама триангуляция T обладает этим свойством. Так, например, совокупность ячеек из T называется *связной*, если пересечение двойственной сети Γ_T с этими ячейками связно. Или, скажем, *числом вращения триангуляции* T называется число вращения сети Γ_T . Далее, будем говорить, что диагональная триангуляция T имеет *выпуклую минимальную реализацию*, если такой реализацией обладает ее двойственная сеть. Таким образом, из следствия 5.1 вытекает, что число вращения диагональной триангуляции, обладающей выпуклой минимальной реализацией, не превосходит пяти.

Из вышесказанного следует, что для описания локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей достаточно описать все диагональные триангуляции с не превосходящим пяти числом вращения. Оказывается, для этого описания полезно перейти к диагональным триангуляциям специального вида, определяемым тем, что все их ячейки — правильные треугольники. Составленные из правильных треугольников диагональные триангуляции многоугольников будем называть *деревянными паркетами*, подчеркивая тем самым, что двойственная сеть таких триангуляций является деревом.

Легко построить пример плоского бинарного дерева, для которого соответствующая диагональная триангуляция планарно не эквивалентна никакому деревянному паркету, см. рис. 5.2. Тем не менее, в интересующем нас случае диагональных триангуляций с числом вращения,

не превосходящим пяти, всегда можно построить соответствующий деревянный паркет. Этот факт будет установлен в следующем разделе в теореме 5.3 о паркетной реализации.

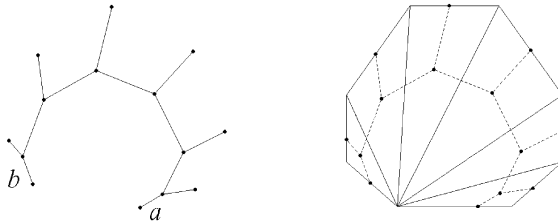


Рис. 5.2. Это плоское бинарное дерево не имеет паркетной реализации.

5.1.3. Паркетная реализация бинарных деревьев с не превосходящим пяти числом вращения

Построим каноническое разбиение плоскости на конгруэнтные¹ правильные треугольники. Для этого сначала разобьем плоскость на полосы одинаковой ширины семейством параллельных прямых. На одной из этих прямых фиксируем точку и повернем эти прямые на 60° и -60° вокруг этой точки. Полученные три семейства параллельных прямых, называемых в дальнейшем *направляющими*, и задают искомое разбиение, которое мы будем называть (треугольным) *паркетом плоскости*, а правильные треугольники, его составляющие, — *ячейками*.

Определение. Произвольную совокупность ячеек назовем *паркетом*.

Стороны ячеек будем называть *ребрами паркета*, а их вершины — *вершинами паркета*. Множество ячеек паркета плоскости, расположенных между соседними параллельными направляющими, назовем *полосой паркета плоскости*.

Пусть D — произвольный паркет. Пару ячеек паркета D назовем *смежными*, если они пересекаются по ребру. Границу паркета D как подмножества плоскости назовем *контуром паркета D* и обозначим через ∂D . Ребра ячеек из D , лежащие на контуре, назовем *граничными ребрами* или *ребрами контура*, а остальные ребра — *внутренними*.

¹Теперь в школьной геометрии слово “конгруэнтные” заменено на “равные”.

В дальнейшем мы часто будем объединять последовательно расположенные параллельные ребра контура в отрезки, называемые *звеньями контура*.

Определим теперь *двойственную сеть Γ_D паркета D* как плоский граф, полученный следующим образом. Соединим центр каждой ячейки этого паркета D отрезками с серединами ее сторон. В качестве вершин двойственной сети Γ_D возьмем центры ячеек из D и середины граничных ребер паркета D . При этом отрезки, соединяющие центры смежных ячеек с серединой их общей стороны, мы объединим в одно ребро. Отметим, что двойственная сеть Γ_D является объединением невырожденных локально минимальных сетей, каждая из которых затягивает множество середин ребер одной из связных компонент контура паркета D (см. рис. 5.3).

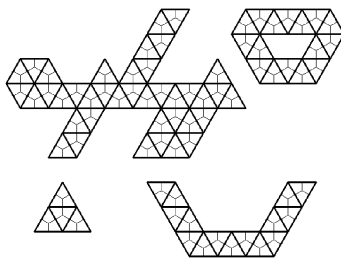


Рис. 5.3. Двойственная сеть паркета.

Произвольную совокупность ячеек паркета назовем его *подпаркетом*. Далее, для удобства, терминологию из теории графов, применяемую к двойственной сети паркета, мы будем переносить на сам паркет. А именно, назовем паркет *связным*, если его двойственная сеть связна, *деревянным* — если его двойственная сеть — дерево. *Связными компонентами* паркета назовем его подпаркеты, двойственные сети которых являются связными компонентами двойственной сети самого паркета. Также под *числом вращения* деревянного паркета будем понимать число вращения его двойственной сети.

С другой стороны, мы будем переносить термины, применяемые к паркетам, на их двойственные сети и, более общо, на планарно эквивалентные этим сетям плоские сети.

Теорема 5.3. *Всякое плоское бинарное дерево с числом вращения, не превосходящим пяти, планарно эквивалентно двойственной сети некоторого паркета.*

Теорема 5.3 о *паркетной реализации* позволяет нам вместо плоских бинарных деревьев рассматривать деревянные паркеты с числом вращения, не превосходящим пяти. Класс таких паркетов мы будем обозначать через \mathcal{WP}_5 .

5.1.4. Паркеты и их свойства

В настоящем пункте мы начнем изучать различные “элементарные кирпичи”, из которых составлены паркеты. Особое внимание мы уделим случаю деревянных паркетов. На протяжении этого пункта все паркеты считаются связными.

5.1.4.1. Разбиения паркета на скелет и наросты

Оказывается, структуру паркета можно достаточно легко понять, если предварительно избавиться от некоторых “случайных” его элементов, называемых нами наростами.

Пусть D — произвольный (связный) паркет. Его ячейку назовем *крайней*, если, по крайней мере, два ее ребра лежат на контуре ∂D , и *внутренней* — если все ее ребра лежат внутри паркета. Если ровно одно ребро ячейки лежит на ∂D , то такая ячейка называется *полукрайней*.

Среди крайних ячеек важный класс образуют так называемые наросты.

Определение. Крайнюю ячейку назовем *наростом*, если она примыкает к внутренней ячейке.

Отметим, что наросты бывают двух типов. Пусть Δ — нарост, крепящийся к внутренней ячейке Δ' . Если к Δ' больше не крепится никаких наростов, то Δ называется *внутренним наростом*. В противном случае нарост Δ — *концевой*, см. рис. 5.4.

Легко видеть, что паркет, состоящий из 1, 2 или 3 ячеек, не содержит наростов. Первый паркет, содержащий наросты, состоит из 4 ячеек и изображен на рис. 5.4 справа. Отметим, что этот паркет является исключительным в следующем смысле: к его внутренней ячейке примыкают сразу три нароста. Легко видеть, что если у паркета имеется более четырех ячеек, то к каждой внутренней ячейке может крепиться не более двух наростов.

Определение. Паркет, не содержащий наростов, назовем *скелетом*.

Как мы увидим ниже, скелеты имеют достаточно жесткую структуру, что позволяет в некоторых случаях их полностью описать.

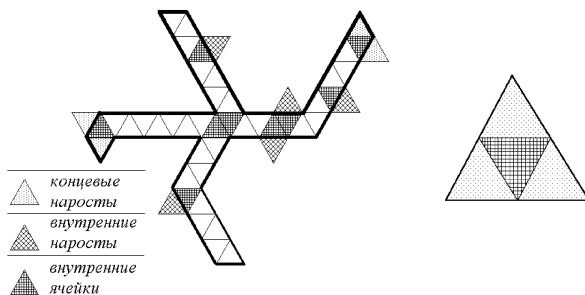


Рис. 5.4. Разложение паркета на скелет и наросты.

Пусть D — паркет. Рассмотрим все его внутренние ячейки и для каждой такой ячейки — все крепящиеся к ней наросты. Если к данной внутренней ячейке Δ крепится ровно один нарост, выкинем его. Если же к Δ крепится несколько наростов, выкинем любой из них. Проведем эту операцию для всех внутренних ячеек. Несложно проверить следующее утверждение.

Утверждение 5.2. *Получившийся в результате только что описанной операции паркет является скелетом.*

Пусть D — паркет, $\{\Delta_i\}$ — семейство выброшенных по только что описанному правилу наростов, S — оставшийся скелет. Представление $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ называется *разложением паркета D на скелет и наросты*. Отметим, что это разложение однозначно в том и только том случае, если у паркета D нет *концевых наростов*, т.е. нескольких наростов, крепящихся к одной внутренней ячейке. Чтобы подчеркнуть происхождение скелета S , мы иногда будем называть его *скелетом паркета D* .

В самом общем виде план построения классификации паркетов из \mathcal{WP}_2 состоит из двух шагов: сначала описываются все скелеты из \mathcal{WP}_2 , а затем выясняется, каким образом к этим скелетам можно прикреплять наросты так, чтобы не выйти за рамки класса \mathcal{WP}_2 . В следующем разделе мы начнем изучать устройство скелетов.

5.1.4.2. Разбиение деревянного скелета на узлы ветвления и линейные участки

В настоящем разделе S обозначает произвольный деревянный скелет.

Выберем из скелета S все его внутренние ячейки и рассмотрим связанные компоненты полученного паркeta. Эти связанные компоненты назовем *узлами ветвления*.

Рассмотрим множество ячеек скелета S , не являющихся внутренними. Связные компоненты полученного паркeta назовем *линейными участками*.

Итак, мы построили *разложение скелета на узлы ветвления и линейные участки*. В отличие от разложения паркeta на скелет и наросты, это новое разложение единственно. Легко видеть, что узлы ветвления скелета произвольного деревянного паркeta не зависят от разложения этого паркeta на скелет и наросты. Поэтому узлы ветвления скелета паркeta D мы будем также называть *узлами ветвления паркeta D* . Более того, если фиксировано разложение $S \sqcup \{\Delta_i\}$ паркeta D на скелет и наросты или же если вид этого разложения не важен, то и линейные участки скелета S также будут называться *линейными участками паркeta D* .

Как мы увидим ниже, узлы ветвления деревянных скелетов могут быть ровно пяти типов, причем у скелетов из \mathcal{WP}_5 все эти пять типов встречаются. Для линейных участков ограниченность пятеркой числа вращения приводит к появлению у линейных участков важной геометрической характеристики, называемой направляющей линейного участка. Неформально, направляющая линейного участка — это направляющая паркeta плоскости, вдоль которой “происходит распространение” рассматриваемого линейного участка. Определение направляющей линейного участка удобно давать в терминах осей, построение которых описывается в следующем разделе.

5.1.4.3. Ось

Пусть S — произвольный (связный) скелет, состоящий из n ячеек. *Ось*² $\text{Sp } S$ скелета S называется плоский граф, получающийся следующим образом.

Если $n = 1$, то $\text{Sp } S$ — это произвольная средняя линия единственной ячейки из S . В этом случае ось можно построить тремя различными способами.

Если $n = 2$, то $\text{Sp } S$ состоит из двух параллельных средних линий, выходящих из середины общей стороны двух ячеек, составляющих S . На сей раз ось можно выбрать двумя способами.

²В поисках более удачной терминологии мы изменили встречающееся в предыдущих работах авторов название “позвоночник” на название “ось”.

Если $n \geq 3$, то $\text{Sp } S$ строится однозначно следующим образом. В каждой некрайней ячейке соединим отрезками середины тех сторон, которые лежат внутри скелета S . В силу отсутствия наростов каждая крайняя ячейка примыкает к ячейке, не являющейся внутренней, т.е. к ячейке, в которой проведена единственная средняя линия. Построим в крайней ячейке ту среднюю линию, которая параллельна единственной средней линии в примыкающей к ней ячейке.

Все принадлежащие $\text{Sp } S$ средние линии называются *осями соответствующих ячеек из S* . Удобно объединить последовательно идущие взаимно параллельные оси ячеек из S в *ребра оси $\text{Sp } S$* . Поэтому вершины графа $\text{Sp } S$ — это, во-первых, середины тех ребер контура, в которые приходит ось, во-вторых, все середины ребер внутренних ячеек и, в-третьих, середины тех внутренних ребер скелета S , к которым примыкают полукрайние ячейки с непараллельными осями.

Пусть скелет S деревянный. Тогда все циклы его оси $\text{Sp } S$ находятся во внутренних ячейках. Несложно построить деформацию оси $\text{Sp } S$ в классе квазивложенных сетей, стягивающую в точку каждую связную компоненту подграфа, составленного из этих циклов. Полученная сеть — след, очевидно, является деревом. В построенном дереве объединим последовательно идущие ребра, стыкующиеся в вершинах степени 2, в одно ребро. Получим плоское дерево K без вершин степени 2.

Определение. Только что построенное плоское дерево K называется *кодом скелета S* .

Как мы увидим ниже, коды скелетов из \mathcal{WP}_3 легко описать: они, с точностью до планарной эквивалентности, представляют собой всевозможные плоские деревья с не более чем шестью вершинами степени 1.

Пусть S — деревянный скелет, а L — его линейный участок. *Осью $\text{Sp } L$ линейного участка L* назовем пересечение оси $\text{Sp } S$ скелета S с линейным участком L : $\text{Sp } L = \text{Sp } S \cap L$.

Важное замечание. Ось линейного участка существенно зависит от способа крепления этого участка к оставшейся части скелета. Это приводит к тому, что ось линейного участка L и его же ось как паркета могут отличаться друг от друга. Соответствующий пример приведен на рис. 5.5.

Деревянный скелет назовем *линейным*, если его ось — ломаная линия. Ясно, что деревянный скелет линейен тогда и только тогда, когда он не содержит узлов ветвления. Очевидно, каждый линейный участок является линейным скелетом.

Оси оказываются полезными для описания линейных участков скелетов из \mathcal{WP}_3 . А именно, имеет место следующее предложение.

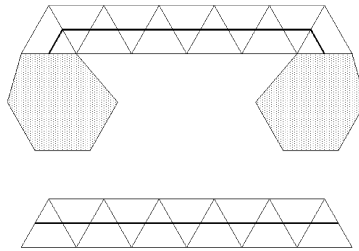


Рис. 5.5. Оси линейного участка и соответствующего этому участку паркета.

Предложение 5.1. *Ось любого линейного участка скелета из \mathcal{WP}_5 однозначно ортогонально проектируется на некоторую направляющую паркета плоскости.*

Прямые, обладающие свойством из предложения 5.1, называются *направляющими* рассматриваемого линейного участка.

5.1.5. Структурные элементы скелетов из \mathcal{WP}_5

Выше мы построили разбиение произвольного деревянного скелета на узлы ветвления и линейные участки. Настоящий раздел посвящен описанию узлов ветвления деревянных скелетов и линейных участков скелетов с числом вращения, не превосходящим 5.

5.1.5.1. Узлы ветвления деревянных скелетов

Оказывается, в деревянных скелетах, в независимости от их числа вращения, может встречаться всего пять типов узлов ветвления, а именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 5.2. *Узлы ветвления деревянных паркетов могут быть лишь следующих пяти типов, приведенных на рис. 5.6.*



Рис. 5.6. Узлы ветвления деревянных паркетов.

5.1.5.2. Линейные участки

В настоящем разделе мы опишем линейные участки L паркетов из \mathcal{WP}_3 . В силу предложения 5.1 оси $\text{Sp } L$ таких линейных участков однозначно проектируются на некоторые направляющие паркета плоскости, называемые направляющими линейного участка. Поэтому в ориентированной оси $\text{Sp } L$ ее векторы-звенья могут быть лишь трех направлений. Кроме того, такие $\text{Sp } L$ могут проектироваться на несколько непараллельных направляющих паркета плоскости. Ниже, для удобства изложения, мы будем также называть *направляющей* целый класс параллельности одной из таких прямых. Тем самым, имеет смысл говорить, что линейный скелет (участок) обладает одной, двумя или тремя направляющими.

Определение. Линейный скелет (участок), имеющий три направляющие, называется *змеей*. Такой скелет целиком находится в некоторой полосе паркета плоскости, и его ось — отрезок прямой. Число вращения оси в этом случае равно 0.

Линейный скелет (участок), имеющий две направляющие, называется *лестницей*. Ориентированная ось такого скелета (участка) состоит из векторов-звеньев двух направлений. Число вращения оси равно 1.

Линейный скелет (участок), имеющий одну направляющую, называется *ломаной змеей*. Ориентированная ось такого скелета (участка) состоит из векторов-звеньев трех возможных направлений. Число вращения оси равно 2.

Паркет, состоящий не более чем из трех ячеек, всегда является змеей. Отметим еще раз, что линейный участок, являющийся змеей как паркет, может быть ломаной змеей как линейный участок. Линейный участок из одной ячейки — всегда змея, из двух ячеек — змея или лестница, из трех ячеек — змея, лестница или ломаная змея, т.е. может относиться к любому из трех возможных типов.

5.1.6. Операции редукции и антиредукции

В настоящем пункте мы определим операции редукции и антиредукции, которые в дальнейшем будут необходимы при формулировке основных классификационных теорем для паркетов из \mathcal{WP}_3 . Неформально, операция редукции представляет собой факторизацию плоского бинарного дерева (паркета) по поддереву (подпаркету) специального вида, а антиредукция — обратную операцию по отношению к редукции. Классификационная теорема для скелетов (см. теорему 5.4 ниже) дает три канонических типа скелетов из \mathcal{WP}_3 , из которых остальные получаются с помощью редукции.

5.1.6.1. Разрезание и склейка

В главе 1 мы определили основные операции на графах и сказали, что эти операции очевидным образом переносятся на сети. Здесь нам понадобятся разрезание плоских сетей по ребру и склейка таких сетей. Первая из этих операций переносится на плоские сети в соответствии с общей идеологией и, очевидно, не нарушает вложенность полученных компонент. Вторая операция зависит от взаимного расположения образов отмеченных вершин. Если эти образы совпадают, то на сети корректно переносится операция склейки отмеченных вершин. Если же образы различны, то будем дополнительно требовать, чтобы ребро склейки представляло собой вложенную кривую, не пересекающую исходных сетей (напомним, что ребро графа параметризуется интервалом).

Отметим, что операции разрезания и склейки по вершинам степени 1 взаимно обратны: сеть, являющаяся результатом склейки сетей, возникших при разрезании плоской сети Γ по некоторому ребру, совпадает с Γ (здесь склейка осуществляется по вершинам разреза). Обратно, реберно вложенная сеть, полученная разрезанием сети, склеенной из плоских сетей Γ_1 и Γ_2 по вершинам степени 1, деформационно-эквивалентна $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ (здесь разрезание происходит по ребру склейки, а соответствующая деформация осуществляется в классе реберно вложенных сетей).

5.1.6.2. Редукция плоского бинарного дерева

Пусть Γ — плоское бинарное дерево и $\Gamma \wr a = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ — результат разрезания дерева Γ по некоторому его ребру a .

Определение. Будем говорить, что каждая из компонент связности графа $\Gamma \wr a$ *I-редуцирована* из Γ , а операцию построения сети Γ_i из сети Γ назовем *редукцией I-го типа*.

Пусть, как и выше, Γ — плоское бинарное дерево и a_1 и a_2 — пара его различных ребер. Разрежем Γ по ребрам a_1 и a_2 , и пусть Γ_0 — та компонента связности полученного плоского графа, которая содержит два ребра разреза, а Γ_i — компонента, содержащая лишь ребро разреза, полученное из a_i , которое мы также обозначим через a_i .

Определение. Плоское бинарное дерево $(\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_2, a_2)$ назовем *II-редуцированным* из Γ по ребрам a_1 и a_2 , а операцию построения сети $(\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_2, a_2)$ из сети Γ — *редукцией II-го типа*. Ребра a_1 и a_2 будем называть *ребрами разреза*.

Легко видеть, что редукция I-го типа не увеличивает число вращений. Для редукции второго типа это уже не так, как видно из примера, приведенного на рис. 5.7. Однако имеет место следующее утверждение.

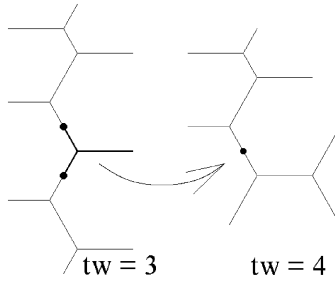


Рис. 5.7. Редукция II-го типа может увеличить число вращений.

Утверждение 5.3. Пусть Γ' — плоское бинарное дерево, полученное редукцией II-го типа из бинарного дерева Γ по ребрам a и b . Тогда если $\text{tw}_\Gamma(a, b) = 0$, то число вращений дерева Γ' не превосходит числа вращений дерева Γ :

$$\text{tw } \Gamma' \leq \text{tw } \Gamma.$$

5.1.6.3. Редукция паркетов из \mathcal{WP}_5

Операция редукции, определенная нами для бинарных деревьев, может быть естественным образом перенесена на деревянные паркетные. Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_5 и Γ — его двойственная сеть. Пусть бинарное дерево Γ' получено из Γ в результате редукции I-го или II-го типа. Предположим, что число вращений Γ' не превосходит пяти. В силу теоремы о паркетной реализации бинарное дерево Γ' планарно эквивалентно двойственной сети некоторого паркета D' из \mathcal{WP}_5 .

Определение. Паркет D' назовем *редуцированным* из паркета D , а операцию построения паркета D' из паркета D — *редукцией соответствующего типа*.

На геометрическом языке редукцию паркета можно представлять себе так. Редукция I-го типа состоит в разрезании паркета по произвольному внутреннему ребру и выбрасывании одной из связных компонент.

Редукция II-го типа заключается в следующем. Рассмотрим внутреннее ребро a и b паркета D , пересекающиеся с ребрами разреза a' и b' двойственной сети Γ паркета D . Пусть γ — единственный путь в Γ , соединяющий a' с b' и ориентированный от a' к b' . Ориентация пути γ порождает ориентацию ребер a' и b' , которые тем самым можно рассматривать как векторы. Ориентируем a и b так, чтобы пары векторов

(a, a') и (b, b') имели одинаковую ориентацию. Будем рассматривать так ориентированные ребра a и b как векторы, приложенные к соответствующим точкам плоскости (касательные векторы на плоскости). Разрежем паркет D по a и b и выкинем ту часть паркета, которая одновременно пересекается с a и b . Пусть φ — сохраняющее ориентацию движение плоскости, совмещающее вектор a с вектором b . Если D' и D'' — оставшиеся невыброшенными части паркета D , то $\varphi(D') \cup D''$ и есть, с точностью до движения плоскости, редуцированный паркет.

В дальнейшем внутренние ребра паркета, пересекающиеся с ребрами разреза двойственной сети этого паркета, также будем называть *ребрами разреза*.

Один из важных примеров редукции II-го типа возникает в случае равенства нулю числа вращения между ребрами разреза. В этом случае число вращения редуцированного паркета заведомо не превосходит числа вращения исходного паркета, т.е. при работе с паркетами из \mathcal{WP}_2^2 не выводит из этого класса (см. утверждение 5.3). В дальнейшем под редукцией II-го типа паркетов из \mathcal{WP}_2^2 мы будем понимать именно такую редукцию.

5.1.7. Боковины и их свойства

В настоящем пункте мы опишем некоторое каноническое разбиение контура деревянного скелета на концевые ребра и боковины. Это разбиение будет полезно нам для определения того, куда можно крепить наросты на скелет из \mathcal{WP}_2^2 , чтобы не выйти за пределы класса \mathcal{WP}_2^2 . Оказывается, числа вращения боковин скелетов из \mathcal{WP}_2^2 так же, как и числа вращения осей линейных участков таких скелетов, не превосходят 2. Во второй части классификационной теоремы мы изучим возможное расположение наростов в терминах числа вращения боковин.

5.1.7.1. Определение боковин

Пусть D — произвольный деревянный паркет и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ — некоторое его разбиение на скелет и наросты. Ребра контура паркета D , пересекающиеся с осью скелета S , назовем *концевыми*. Отметим, что концевые ребра определены неоднозначно, т.е., вообще говоря, они зависят от разбиения паркета на скелет и наросты (см. рис. 5.8). Однако для скелета неоднозначность в определении концевых ребер исчезает. Заметим также, что при фиксированном разбиении $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ концевые ребра паркета D совпадают с концевыми ребрами его скелета S .

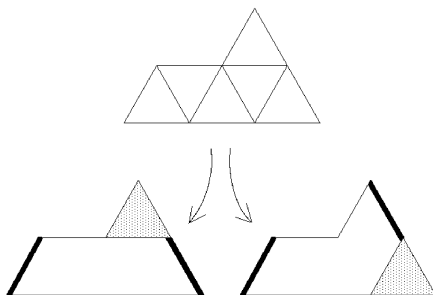


Рис. 5.8. Концевые ребра паркета определены неоднозначно.

Определение. Замыкания связных компонент, на которые распадается контур деревянного скелета после выбрасывания всех его концевых ребер, назовем *боковинами* этого скелета.

5.1.7.2. Связь между числами вращения боковин и числом вращения паркета

Предложение 5.3. Пусть S — деревянный скелет и $\{B_j\}$ — множество всех его боковин. Тогда $S \in \mathcal{WP}_2$, если и только если число вращения каждой боковины B_j не превосходит 2:

$$(\text{tw } S \leq 5) \iff (\text{tw } B_j \leq 2 \text{ для всех } j).$$

5.1.7.3. Терминологические замечания

Напомним, что числа вращения осей линейных скелетов из \mathcal{WP}_2 , линейных участков паркетов из \mathcal{WP}_2 , а также боковин паркетов из \mathcal{WP}_2 не превосходят 2, т.е. по отношению к своему числу вращения они могут быть ровно трех типов, так же, как и линейные скелеты (участки паркетов) из \mathcal{WP}_2 . Удобно перенести на ось и боковины названия тех линейных скелетов, осями (боковинами) которых они являются. А именно, ось (боковину) A назовем *змеей*, если $\text{tw } A = 0$, *лестницей*, если $\text{tw } A = 1$, и *ломаной змеей*, если $\text{tw } A = 2$.

5.1.8. Теорема классификации скелетов из \mathcal{WP}_2

Выше мы построили код скелета S , являющийся плоским деревом и описывающий топологию скелета S . Однако код не отражает геометри-

ческих особенностей скелета S , таких как, скажем, взаимного расположения направляющих линейных участков, входящих в S . Поэтому для описания геометрии скелетов построим *схему скелета* S , закодировав каждый узел ветвления кружочком, а каждый линейный участок L — набором черточек по следующему правилу: если L — змея, то поставим ему в соответствие одну черточку, параллельную оси участка L ; если L — лестница, то поставим ему в соответствие пару пересекающихся черточек, каждая из которых параллельна одной из двух направляющих участка L ; если же L — ломаная змея, то поставим в соответствие L три черточки, параллельные между собой и параллельные единственной направляющей участка L .

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать первую основную теорему настоящего раздела — *теорему классификации скелетов* из \mathcal{WP}_3 . Доказательство этой теоремы можно найти в [77] или в [78].

Теорема 5.4. Пусть S — *деревянный скелет* с числом вращения, не превосходящим 5. Тогда он может быть получен последовательным применением операций *редукции* к некоторому скелету одного из трех канонических типов, схемы которых изображены на рис. 5.9.

Обратно, каждый скелет, полученный последовательным применением операций *редукции* к произвольному скелету одного из трех канонических типов, принадлежит \mathcal{WP}_3 .

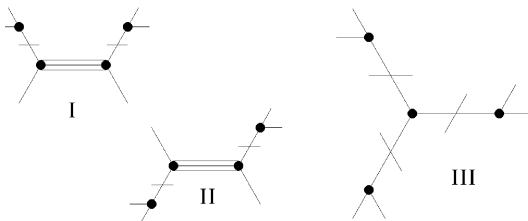


Рис. 5.9. Схемы классифицирующих скелетов.

Определение. Скелеты из \mathcal{WP}_3 с шестью концевыми линейными участками, схемы которых приведены на рис. 5.9, называются *классифицирующими скелетами* I-го, II-го или III-го типов в соответствии с римской цифрой, приписанной коду на этом рисунке.

Определение. Линейный участок скелета S , содержащий крайнюю ячейку, называется *концевым*. Остальные линейные участки называются

ся *перегородками*. Скелет S , содержащий k концевых линейных участков, будем называть k -скелетом. Если каждый узел ветвления k -скелета состоит ровно из одной ячейки, то такой k -скелет назовем *невырожденным*.

Отметим, что у линейного деревянного скелета имеется два совпадающих концевых линейных участка (фактически, под концевым линейным участком деревянного скелета мы понимаем пару, состоящую из крайней ячейки и содержащего ее линейного участка).

5.1.8.1. Направления концевых линейных участков скелетов из \mathcal{WP}_5

Пусть S — деревянный скелет и L — произвольный его концевой линейный участок. Ориентируем ось $\text{Sp } L$ участка L так, чтобы концевое звено оси было последним.

Определение. *Направлениями концевого линейного участка L назовем направления векторов-звеньев его оси $\text{Sp } L$, ориентированной, как описано выше.*

Предложение 5.4. *Направления концевых линейных участков произвольного скелета из \mathcal{WP}_5 попарно различны.*

5.1.8.2. Коды невырожденных 6-скелетов

Выше, в разделе 5.1.4.3 настоящей главы, были определены коды деревянных скелетов. Ясно, что код невырожденного 6-скелета представляет собой плоское бинарное дерево с шестью вершинами степени 1. Таких деревьев, с точностью до планарной эквивалентности, имеется ровно три (рис. 5.10). Не представляет труда построить примеры невырожденных 6-скелетов, коды которых планарно эквивалентны каждому из этих трех деревьев соответственно. Будем называть коды невырожденных 6-скелетов кодами *I-го*, *II-го* и *III-го типа* в соответствии с рис. 5.10. Имеет место следующее предложение.

Предложение 5.5. *Коды всех возможных невырожденных 6-скелетов представляют собой все возможные плоские бинарные деревья с шестью вершинами степени 1.*

Поскольку каждый скелет из \mathcal{WP}_5 может быть получен редукцией из некоторого невырожденного 6-скелета, а операция редукции не увеличивает числа концевых линейных участков и может только уменьшать число узлов ветвления, имеет место следующее утверждение.

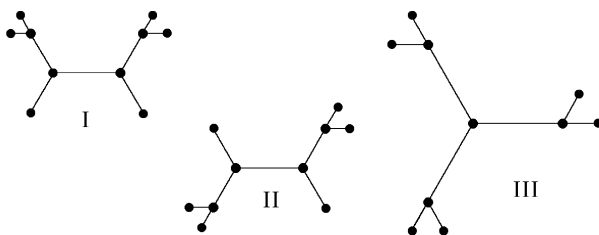


Рис. 5.10. Коды невырожденных 6-скелетов.

Следствие 5.2. Коды скелетов из \mathcal{WP}_5 представляют собой всевозможные плоские деревья с не более чем шестью вершинами степени 1 и без вершин степени 2.

5.1.9. Расположение наростов в паркетах, принадлежащих \mathcal{WP}_5 , на их скелетах

В настоящем разделе будет приведена теорема, описывающая расположение наростов паркетоов из \mathcal{WP}_5 на их скелетах. Прежде всего, отметим, что боковины скелета независимы в следующем смысле.

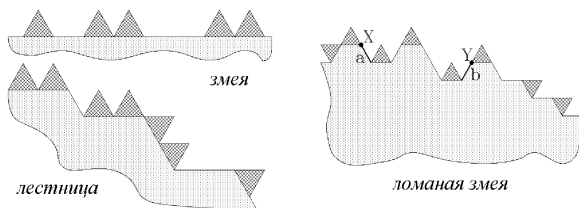
Предложение 5.6. Пусть S — скелет из \mathcal{WP}_5 , а B_i — его боковины. Пусть D_i — деревянный паркет, скелет которого (для некоторого разложения) совпадает с S , причем множество A_i всех наростов паркета D_i крепится к одной боковине B_i . Предположим, что каждый паркет D_i принадлежит \mathcal{WP}_5 . Тогда паркет D , полученный из S присоединением всех наростов из множества $\sqcup A_i$, также принадлежит \mathcal{WP}_5 .

Из предложения 5.6 вытекает, что достаточно описать возможное расположение наростов на одной боковине скелета из \mathcal{WP}_5 . Такое описание дает следующая теорема о расположении наростов.

Теорема 5.5. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_5 и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ — его разложение на скелет и наросты. Пусть B — некоторая боковина скелета S . Ориентируем B в соответствии с обходом контура скелета S по часовой стрелке. Тогда наросты паркета D могут располагаться на B по следующим правилам (см. рис. 5.11).

- (1) Если B — змея, то на расположение наростов на B никаких ограничений нет.

- (2) Пусть B — лестница. Будем двигаться по B в соответствии с ориентацией. Тогда встречающиеся наросты сначала расположены произвольным образом на звеньях одного и того же направления, а затем, начиная с некоторого момента, — лишь на звеньях другого направления, составляющего с первым угол $-\pi/3$ (если, конечно, звенья такого направления существуют).
- (3) Пусть B — ломаная змея и l — ее направляющая, ориентированная так, что проекции векторов-звеньев ломаной B на l положительны. Пусть a — первое звено ломаной B , повернутое относительно направления l на $-\pi/3$, а b — последнее звено ломаной B , повернутое относительно направления l на $+\pi/3$. Обозначим через X начальную вершину вектора-звена a и через Y — конечную вершину вектора-звена b . Вершины X и Y разбивают ломаную B на три последовательных участка, первый и последний из которых, очевидно, являются не более чем лестницами (т.е. или лестницами, или змеями). На среднем участке наросты могут быть расположены произвольным образом лишь на звеньях, параллельных l . На начальном и конечном участках наросты располагаются по правилам (1) или (2).

Рис. 5.11. Расположение наростов в паркетах из \mathcal{WP}_3 .

5.1.10. Теорема реализации

В действительности, полученная нами классификация точна, а именно, имеет место следующая теорема о реализации. Доказательство этой теоремы можно найти в [77], [78] или в [87].

Теорема 5.6. Двойственная сеть произвольного паркета из \mathcal{WP}_3 планарно эквивалентна некоторому плоскому локально минимальному бинарному дереву с выпуклой границей. Другими словами, каждое

плоское бинарное дерево с числом вращения, не превосходящим 5, имеет выпуклую минимальную реализацию.

5.1.11. Локально минимальные бинарные деревья с правильной границей

В настоящем разделе мы применим технику, разработанную выше, и получим полную классификацию локально минимальных бинарных деревьев, затягивающих вершины правильных многоугольников, в случае, когда соответствующие этим деревьям паркеты являются скелетами.

Определение. Если для плоской связной сети Γ существует планарно эквивалентная ей локально минимальная плоская сеть, затягивающая множество вершин некоторого правильного многоугольника, то мы будем говорить, что Γ имеет *правильную минимальную реализацию*.

Мы приведем некоторые результаты, описывающие произвольные паркеты из \mathcal{WP}_2 , имеющие правильную минимальную реализацию. Дело в том, что наличие у границы локально минимального бинарного дерева большой группы симметрий, как в случае множества вершин правильного многоугольника, накладывает дополнительные ограничения на возможные топологии таких сетей. Доказательства приведенных здесь теорем опубликованы в [78], [77], [85], [145], [146], [147], [89].

5.1.11.1. Полная классификация локально минимальных скелетов с правильной границей

Абсолютно минимальные сети, затягивающие вершины правильного n -угольника, давно описаны. Как уже отмечалось, первые систематические результаты на эту тему были получены Ярником и Кесслером [95], которые дали ответ для $n = 3, 4, 5$ и для $n \geq 13$. Окончательный ответ был получен Ду, Хвангом и Венгом в 1987 году, см. [33]. Было доказано, что абсолютно минимальное дерево, затягивающее вершины правильного n -угольника, для всех $n \geq 6$ состоит из всех сторон n -угольника, за исключением любой одной.

Задача описания локально минимальных сетей, затягивающих множество вершин правильного многоугольника, оказывается намного более сложной. Полный ответ в этой задаче пока не известен, хотя получены существенные продвижения. В важном частном случае бинарных деревьев типа скелетов авторам удалось получить полный ответ, доказав следующую *теорему классификации скелетов с правильной границей*.

Теорема 5.7. Пусть Γ_m — локально минимальное бинарное дерево, затягивающее вершины правильного n -угольника. Предположим, что соответствующий Γ_m паркет S является скелетом. Тогда

- если скелет S — линейный, то S — змея, рис. 5.12, слева, причем, для любого n существует правильная минимальная реализация змеи с n граничными ребрами;
- если S имеет три концевых линейных участка и, значит, одну ячейку ветвления, т.е. S является 3-скелетом, то все линейные участки из S — змеи, состоящие из одинакового числа ячеек, причем S инвариантен относительно поворота на 120° вокруг центра единственной своей ячейки ветвления, рис. 5.12, справа. Более того, такая реализация существует тогда и только тогда, когда $n = 6k + 3$, где k — произвольное целое положительное число;
- скелет S не может быть 4-скелетом;
- скелет S не может быть 5-скелетом;
- если S является 6-скелетом, то он представляет собой один из четырех скелетов, приведенных на рис. 5.13 и 5.14. При этом соответствующие значения n равны 24, 30, 36 и 42.

Более того, все правильные минимальные реализации каждого такого скелета отличаются друг от друга на подобие.

Итак, среди скелетов из \mathcal{WP}_3 , имеющих правильную минимальную реализацию, существует две бесконечные по n серии и одна конечная.

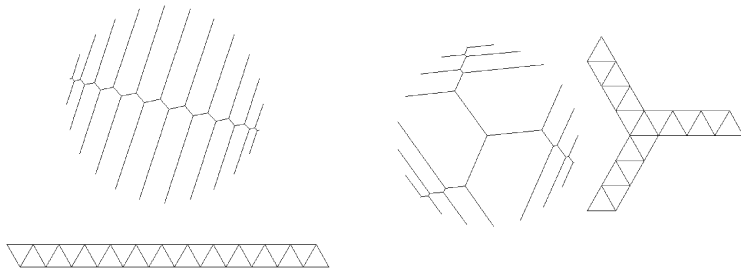


Рис. 5.12. Представители бесконечных серий скелетов без узлов ветвления и 3-скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию.

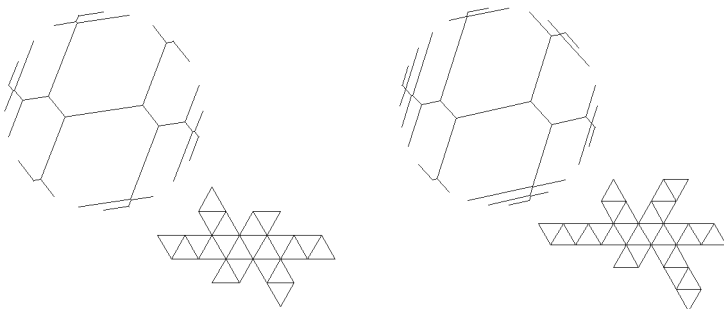


Рис. 5.13. 6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализацию: случаи $n = 24$ и $n = 30$.

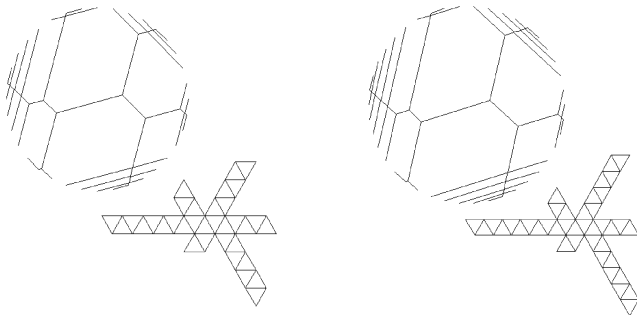


Рис. 5.14. 6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализацию: случаи $n = 36$ и $n = 42$.

5.1.11.2. Некоторые свойства паркетов из \mathcal{WP}_5 , имеющих правильную минимальную реализацию

Доказательство теоремы 5.7 основано на ряде общих свойств скелетов из \mathcal{WP}_5 , имеющих правильную минимальную реализацию. Оказывается, многие из этих свойств имеют место и в случае общих паркетов из \mathcal{WP}_5 .

Напомним, что скелет паркета определен однозначно, если и только если паркет не имеет концевых наростов (см. выше). С помощью довольно тонких оценок, полученных в [85] и [89], авторами была доказана следующая теорема.

Теорема 5.8. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_5 , имеющий минимальную реализацию на правильном n -угольнике, $n \geq 12$. Тогда паркет D не

имеет конечных наростов, и поэтому скелет S паркета D определен однозначно. Более того, все конечные линейные участки скелета S — змеи.

В качестве следующего шага на пути описания паркетов, имеющих правильную минимальную реализацию, было бы полезно изучить следующие два вопроса.

- Как устроены перегородки паркетов, имеющих правильную минимальную реализацию? Гипотеза: при достаточно больших n перегородок нет.
- Как могут быть расположены наросты на паркетах, имеющих правильную минимальную реализацию?

Расположение наростов на паркетах из \mathcal{WP}_2 , имеющих выпуклую минимальную реализацию на фиксированном множестве M , изучалось авторами в работах [85] и [89]. Были получены оценки на возможное расположение наростов на конечных линейных участках таких паркетов в терминах геометрии граничного множества M . Применяя эти оценки к случаю правильных границ, авторы показали, что наросты на конечных линейных участках паркетов из \mathcal{WP}_2 , имеющих минимальную реализацию на множестве вершин правильного n -угольника, при достаточно большом n расположены далеко от конечных ячеек. Некоторые из этих оценок приведены в следующем разделе.

5.1.12. Наросты и линейные участки локально минимальных сетей с выпуклыми границами

В настоящем разделе мы продолжаем исследование локально минимальных бинарных деревьев, затягивающих множества M вершин выпуклых многоугольников. Несмотря на технический характер приводимых ниже оценок, мы решили включить их в данную монографию, чтобы дать читателю представление о том аппарате, с помощью которого доказываются результаты типа теоремы 5.8 и теоремы 5.10. При первом чтении этот раздел можно опустить.

Для удобства изложения мы обобщим некоторые понятия, введенные выше для описания скелетов. Как было отмечено, узлы ветвления определены однозначно не только для скелетов, но и для паркетов общего вида. Пусть D — деревянный паркет. Тогда связные компоненты паркета D , из которого выброшены узлы ветвления, назовем *линейными участками паркета D* . Если D — скелет, то линейные участки такого паркета D совпадают с определенными выше линейными участками скелета D .

Пусть D — деревянный паркет и S — произвольный его скелет. Тогда линейный участок паркета D , содержащий концевой линейный участок скелета S , будем называть *концевым линейным участком паркета D* . Если для паркета D выбран некоторый скелет S , то линейный участок паркета D назовем *змеёй, лестницей* или *ломаной змеёй*, если пересечение этого участка со скелетом S относится к соответствующему типу. В частности, если паркет D не содержит концевых наростов, то его скелет S определен однозначно, поэтому предыдущее определение мы будем применять к такому паркету D без апелляции к его скелету S .

Пусть D — деревянный паркет. Выбросим из границы паркета D два его концевых ребра, соответствующих некоторым концевым линейным участкам E и E' . Рассмотрим незамкнутые ломаные, являющиеся замыканиями связных компонент полученного множества. Та из этих двух ломаных, движение по которой от E к E' по границе паркета D происходит против часовой стрелки, называется *супербоковиной паркета D от E к E'* . Количество ребер паркета D , входящих в супербоковину, называется *длиной* этой супербоковины. Супербоковина, не содержащая концевых ребер, называется *боковиной*. Если D' — это некоторый паркет, содержащийся в D , то каждое непустое пересечение паркета D' с любой боковиной паркета D называется *боковиной паркета D'* . В частности, имеет смысл говорить о *боковинах концевого линейного участка* и т.д.

Мы приведем здесь несколько тонких оценок на возможные расположения наростов и на формы линейных участков общих деревянных паркетов, исходя из различных геометрических характеристик граничных множеств M . Эти оценки будут использованы в дальнейшем для построения бесконечной серии таких выпуклых граничных множеств, лежащих на окружности и не сильно отличающихся от вершин правильных многоугольников, для которых не существует ни одного локально минимального бинарного дерева, их затягивающего. Кроме того, как мы говорили в предыдущем разделе, эти результаты использовались нами для доказательства теоремы 5.8.

5.1.12.1. Концевые наросты

Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP} и Δ — его нарост. Напомним, что нарост Δ называется *концевым*, если единственная внутренняя ячейка паркета D , на которую крепится Δ , смежна еще с одним наростом, отличным от Δ , который мы обозначим через Δ' . Отметим, что Δ' тоже является концевым наростом. Таким образом, всегда можно говорить о *паре концевых наростов*.

Предположим теперь, что паркет D имеет минимальную реализацию Γ на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Тогда, очевидно, граничные ребра сети Γ , соответствующие паре концевых наростов Δ и Δ' , приходят в четыре последовательные вершины многоугольника M . Две средние соседние вершины из этих четырех назовем *концевой парой* вершин из M , соответствующей паре концевых наростов Δ и Δ' сети Γ .

Предложение 5.7. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Пусть t и t' — концевая пара вершин из M , соответствующая паре концевых наростов Δ и Δ' паркета D . Тогда сумма внутренних углов многоугольника M в вершинах t и t' больше π и меньше $5\pi/3$.

Ниже мы приведем несколько полезных следствий из предложения 5.7.

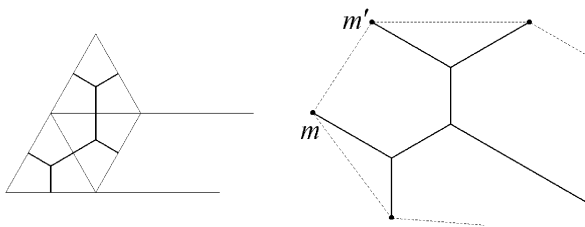


Рис. 5.15. Пара концевых наростов.

Следствие 5.3. *Предположим, что паркет D из \mathcal{WP}_2^B имеет минимальную реализацию Γ на множестве M вершин выпуклого многоугольника, такого, что сумма любых его двух последовательных внутренних углов или не меньше $5\pi/3$, или не больше π . Тогда D не имеет концевых наростов.*

Следствие 5.4. *Паркет D из \mathcal{WP}_2^B , имеющий минимальную реализацию на множестве M вершин n -угольника, все углы которого равны между собой, в частности, на правильном n -угольнике, при $n \geq 12$ не имеет концевых наростов.*

Лежащее на окружности S^1 множество M , состоящее из n точек, назовем квазиправильным многоугольником, если существует вписанный в S^1 правильный n -угольник P , такой, что внутри каждой высекаемой им дуги окружности S^1 лежит ровно одна точка из M . Многоугольники M и P назовем *соответствующими друг другу*.

Следствие 5.5. *Пусть M — квазиправильный n -угольник и D — паркет из \mathcal{WP}_2^B , имеющий на M минимальную реализацию. Тогда если $n \geq 18$, то D не имеет концевых наростов.*

5.1.12.2. О концевых вершинах

Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_2^B , не имеющий концевых наростов, и пусть Γ — некоторая минимальная реализация паркета D на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Граничную вершину сети Γ , соответствующую некоторому концевому участку паркета D , назовем *концевой*. Отметим, что так как для паркетов без концевых наростов скелет определен однозначно, концевые вершины также однозначно определены.

Пусть $k \in M$ — концевая вершина сети Γ , соответствующая некоторому концевому линейному участку Z из D , и пусть t и t' — соседние с k вершины многоугольника M .

Предложение 5.8. *В сделанных выше предположениях внутренний угол многоугольника M при вершине k меньше π . Более того, углы треугольника $kt t'$ при вершинах t и t' меньше $2\pi/3$.*

5.1.12.3. Геометрия концевых линейных участков

Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_2^B и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ — некоторое его разложение на скелет и наросты. Пусть Δ — произвольная концевая ячейка паркета D .

В дальнейшем, для удобства, концевой линейный участок скелета S , содержащий ячейку Δ , будем называть Δ -концом.

Назовем Δ -змеей (связный) подпаркет в S , содержащий Δ и такой, что его пересечение с осью скелета S является отрезком прямой. Максимальная Δ -змея называется *концевой Δ -змеей паркета D* , а подпаркет в D , состоящий из концевой Δ -змеи и всех наростов из D , которые к ней крепятся, называется *Δ -хвостом паркета D* . Максимальная Δ -змея, на которую не крепится ни одного нароста паркета D , называется *Δ -жалом*. Ясно, что у паркета без концевых наростов длина каждого жала не меньше 2, а у паркета с парой концевых наростов Δ и Δ' длина Δ -жала равна длине Δ' -жала и равна 1.

Пусть S — некоторый скелет и Γ_S — его двойственная сеть. Напомним, что граничные ребра сети Γ_S , соответствующие концевым ребрам скелета S , называются концевыми. Остальные граничные ребра сети Γ_S назовем *отростками*.

Пусть E — концевой линейный участок из D , содержащий Δ . Если концевой линейный участок E не является змеей (как линейный участок), то будем говорить, что концевой линейный участок E имеет излом или поворачивает, и ячейку участка E , смежную с концевой Δ -змеей и не принадлежащую этой змее, назовем *ячейкой поворота*. Если Γ — минимальная реализация паркета D и s — внутренняя вершина из Γ , соответствующая ячейке поворота участка E , то отросток скелета S (рассматриваемого как подсеть в Γ), инцидентный вершине s , а также соответствующее граничное ребро скелета S , назовем *ребром поворота концевого линейного участка E сети Γ и паркета D* соответственно.

Мы оценим наименьшую возможную длину каждого Δ -жала и Δ -хвоста паркета D , имеющего минимальную реализацию на некотором выпуклом многоугольнике, исходя из геометрии этого многоугольника. Кроме того, мы изучим взаимное расположение двух различных концевых линейных участков. Так как для рассматриваемых нами приложений (правильных и квазиправильных n -угольников), начиная с $n \geq 12$ в правильном случае и начиная с $n \geq 18$ в квазиправильном случае, концевых наростов быть не может, мы всюду ниже будем предполагать, что паркет D не имеет концевых наростов.

Итак, пусть концевых наростов нет. Мы начнем с оценки длины жала концевой змеи в предположении, что либо на концевой змее имеются наросты, либо на концевой змее наростов нет, но соответствующий концевой линейный участок имеет излом.

Длина жала: на концевой змее есть наросты. Пусть D — произвольный паркет из WP_2^2 и $D = SL\{\Delta_i\}$ — некоторое его разложение на скелет и наросты. Пусть Δ — концевая ячейка скелета S , и предположим, что на Δ -конце E нет концевых наростов, а на концевой Δ -змее наросты есть. Обозначим через Δ' ближайший к Δ нарост из Δ -хвоста паркета D . Пусть k — концевое ребро ячейки Δ , а e — отличное от k граничное ребро из Δ . Ориентируем оба отрезка e и k от их общей вершины. Пара (e, k) образует некоторый репер на плоскости. Определим *тип Δ -хвоста* равным 1, 2, 3 или 4 в соответствии с номером одной из следующих четырех возможностей, см. также рис. 5.16.

- (1) Репер (e, k) ориентирован положительно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , не содержащей ребро e .
- (2) Репер (e, k) ориентирован положительно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , содержащей ребро e .
- (3) Репер (e, k) ориентирован отрицательно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , не содержащей ребро e .

- (4) Репер (e, k) ориентирован отрицательно, и нарост Δ' расположен на боковине концевой Δ -змеи Z , содержащей ребро e .

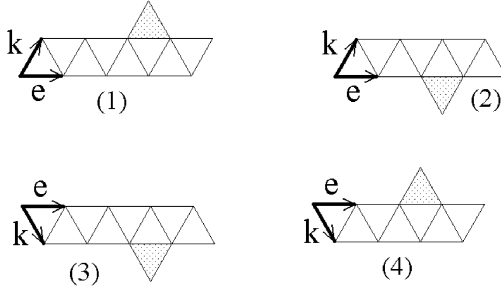


Рис. 5.16. Типы хвостов.

Пусть M — произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ — последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки. Для удобства будем считать, что индексы i вершин m_i — это элементы из циклической группы порядка n , т.е. из \mathbb{Z}_n . Рассмотрим произвольную вершину m_k многоугольника M . Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M , такую, что точка $m_k \in M$ является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ из D . Так как, по предположению, на концевом линейном участке E паркeta D , содержащем ячейку Δ , нет концевых наростов, из предложения 5.8 вытекает, что внутренний угол многоугольника M в вершине m_k меньше π .

Обозначим через $\alpha_{k\pm 1}$ величину угла $m_k m_{k\pm 1} m_{k\mp 1}$. Для каждого целого p , $1 \leq p \leq n$, определим β_p равным величине положительного угла³ между направлениями векторов $m_{k-1} m_{k+1}$ и $m_{k+p-1} m_{k+p}$, и для целого q , $1 \leq q \leq n$, положим γ_q равным величине отрицательного угла между направлениями векторов $m_{k+1} m_{k-1}$ и $m_{k-q+1} m_{k-q}$. Ясно, что β_1 и γ_1 не равны нулю, так как угол при вершине m_k меньше π . Кроме того, обе последовательности $\{\beta_p\}$ и $\{\gamma_q\}$ монотонно возрастают (не обязательно строго). При этом, так как $\beta_n = 2\pi - \alpha_{k-1}$, а $\gamma_n = 2\pi - \alpha_{k+1}$, и, по предложению 5.8, углы $\alpha_{k\pm 1}$ меньше $2\pi/3$, имеем: $\beta_n > 4\pi/3$ и $\gamma_n > 4\pi/3$.

Определим теперь четверку чисел, отвечающих за возможную длину Δ -жала в зависимости от типа Δ -хвоста.

- (1) Пусть q_0 — это такое первое q , что $\pi/3 - \alpha_{k+1} < \gamma_q < 2\pi/3$. Положим $g_o^+(m_k) = 2q_0 - 3$.
- (2) Пусть p_0 — это такое первое p , что $\pi/3 < \beta_p < 2\pi/3 + \alpha_{k+1}$. Положим $g_e^-(m_k) = 2p_0 - 4$.
- (3) Пусть p_0 — это такое первое p , что $\pi/3 - \alpha_{k-1} < \beta_p < 2\pi/3$. Положим $g_o^-(m_k) = 2p_0 - 3$.

³ Положительным (отрицательным) углом от ненулевого вектора a до ненулевого вектора b называется величина дуги единичной окружности направлений, проходимой при движении в положительную (отрицательную) сторону от направления вектора a к направлению вектора b . Эти углы меняются в пределах $[0, 2\pi)$.

- (4) Пусть q_0 — это такое первое q , что $\pi/3 < \gamma_q < 2\pi/3 + \alpha_{k-1}$. Положим $g_e^+(m_k) = 2q_0 - 4$.

Наконец, определим *наростовый вектор* $g(m_k)$ *точки* m_k как вектор

$$(g_o^+(m_k), g_e^-(m_k), g_o^-(m_k), g_e^+(m_k)).$$

Если какого-нибудь p_0 или q_0 не существует, то соответствующую компоненту вектора $g(m_k)$ положим равной бесконечности. Обозначим через $g(m_k)[i]$ компоненту вектора $g(m_k)$ с номером i . Подчеркнем, что наростовый вектор $g(m_k)$ зависит только от геометрии самого множества M и выбора точки m_k . Имеет место следующее предложение, см. [85], [89].

Предложение 5.9. *Предположим, что к концевой Δ -змее паркета D крепится по крайней мере один нарост и Δ -хвост имеет тип i . Тогда i -я компонента $g(m_k)[i]$ наростового вектора $g(m_k)$ вершины m_k конечна и длина Δ -жала не меньше, чем $g(m_k)[i]$. Более того, для каждого $g_0 \geq 2$ существуют выпуклая граница $M \ni m_k$ и паркет $D \in \mathcal{WP}_2^3$ с Δ -хвостом типа i такие, что $g(m_k)[i] = g_0$, и длина Δ -жала в точности равна $g(m_k)[i]$.*

Отметим, что если множество M симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через вершину m_k , то $g_e^-(m_k) = g_e^+(m_k)$ и $g_o^-(m_k) = g_o^+(m_k)$. Поэтому в этом случае под наростовым вектором удобно понимать вектор $g_s(m_k)$, состоящий из двух компонент, соответствующих первому и второму типам Δ -хвоста:

$$g_s(m_k) = (g_o^+(m_k), g_e^-(m_k)).$$

Обозначим через $G(m_k)$ наименьшую из компонент наростового вектора $g(m_k)$ и назовем ее *наростовым числом точки* m_k .

Следствие 5.6. *Предположим, что к концевой Δ -змее паркета D крепится по крайней мере один нарост. Тогда длина Δ -жала не меньше наростового числа $G(m_k)$.*

Применим предложение 5.9 к случаю правильного многоугольника.

Следствие 5.7. *Пусть M — множество вершин правильного n -угольника и $n \geq 12$. Тогда наростовый вектор любой вершины $m \in M$ равен*

$$g_s(m) = \left(2 \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil - 1, 2 \left\lceil \frac{n+3}{6} \right\rceil - 2 \right),$$

а наростовое число $G(m)$ равно $\lfloor n/3 \rfloor - 2$. Поэтому если D — произвольный паркет, имеющий минимальную реализацию на правильном n -угольнике, $n \geq 12$, то любое его Δ -жало, не совпадающее с Δ -хвостом (т.е. такое, что на концевой Δ -змее имеются наросты), содержит по крайней мере $\lfloor n/3 \rfloor - 2$ ячейки.

Рассмотрим еще один интересный частный случай. Пусть M — произвольное конечное подмножество окружности и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ — последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки. Как и выше, будем считать, что индексы i вершин m_i — это элементы из \mathbb{Z}_n . Рассмотрим произвольную вершину m_k , и пусть δ_{\pm} обозначает угловую величину стороны $m_k m_{k \pm 1}$, см. рис. 5.17. Опустим на каждую сторону $m_{k \pm (i-1)} m_{k \pm i}$ многоугольника M перпендикуляр r_i^{\pm} из центра окружности и ориентируем его от центра окружности. Обозначим через φ_i^+ величину положительного угла от r_1^+ до r_i^+ . Аналогично, через φ_i^- обозначим величину отрицательного угла от r_1^- до r_i^- .

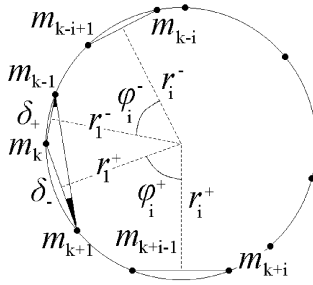


Рис. 5.17. Точки на окружности.

- (1) Пусть q_0 — это такое первое q , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2}.$$

- (2) Пусть p_0 — это такое первое p , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3}.$$

- (3) Пусть p'_0 — это такое первое p , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2}.$$

- (4) Пусть q'_0 — это такое первое q , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3}.$$

Следствие 5.8. В сделанных предположениях наростовый вектор $g(m_k)$ вершины m_k множества $M \subset S^1$ равен

$$(2q_0 - 3, 2p_0 - 4, 2p'_0 - 3, 2q'_0 - 4).$$

Следствие 5.9. Пусть M — множество вершин квазиправильного n -угольника и $n \geq 18$. Тогда все компоненты наростового вектора любой вершины $m \in M$ конечны и наростовый вектор вершины m покомпонентно не меньше следующего вектора

$$\left(2\left[\frac{n}{6}\right] - 3, 2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 4, 2\left[\frac{n}{6}\right] - 3, 2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 4 \right),$$

а наростовое число $G(m)$ больше или равно $[n/3] - 4$. Поэтому если D — произвольный паркет, имеющий минимальную реализацию на квазиправильном n -угольнике, то любое его Δ -жало, не совпадающее с Δ -хвостом (т.е. на концевой Δ -змее имеются наросты), содержит по крайней мере $[n/3] - 4$ ячеек.

Длина жала: на концевой змее наростов нет, концевой линейный участок имеет излом. Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_2^* и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ — некоторое его разложение на скелет и наросты; Δ — концевая ячейка скелета S и E — Δ -конец паркета D . Обозначим через E_S соответствующий E концевой линейный участок скелета S , т.е. $E_S = E \cap S$. Пусть Z — концевая Δ -змея. Предположим, что на Z наростов нет (в этом случае Z совпадает с Δ -жалом). Предположим, что Δ -конец E имеет излом. Обозначим через e единственное граничное не концевое ребро ячейки Δ и через t — ребро поворота концевого линейного участка E паркета D . Назовем *боковиной поворота концевого линейного участка E* ту из двух его боковин, которая пересекается (возможно, по двум точкам) с ребром поворота t , а противоположную боковину концевого линейного участка E назовем *подчиненной боковиной*.

Далее, пусть, как и выше, M — произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ — последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки. Снова будем считать, что индексы i вершин m_i — это элементы из \mathbb{Z}_n . Рассмотрим произвольную вершину m_k многоугольника M . Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M , такую, что точка $m_k \in M$ является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ из D .

Мы оценим длину концевой змеи Z , рассмотрев для этого четыре возможных случая, в зависимости от того, на одной или разных боковинах концевого линейного участка E_S скелета S расположены ребра e и t , а также в зависимости от того, крепится ли к ребру e нарост или нет. С формальной точки зрения, мы должны различать также, в какую из вершин m_{k+1} или m_{k-1} приходит отросток сети Γ , соответствующий ребру e . Однако, так как эти случаи полностью аналогичны, мы предположим, что этот отросток приходит в точку m_{k+1} , а для случая m_{k-1} приведем только ответы.

Мы начнем с определения так называемых характеристических полуплоскостей и соответствующих им t -множеств и t -чисел. Отметим, что эти определения не зависят от того, есть ли на концевой змее Z наросты, отличные от концевых.

Характеристические полуплоскости. Мы определим сначала характеристические полуплоскости первого типа и проиллюстрируем, как работает это понятие. Затем, поступая по аналогии, мы определим характеристические полуплоскости остальных трех типов.

Пусть сначала ребра e и t лежат на разных боковинах концевого линейного участка E_S . Рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой $m_k m_{k+1}$ и содержащую многоугольник M . Повернем эту полуплоскость вокруг точки m_k в положительном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью первого типа точки m_k* и обозначается через $\Pi_o^+(m_k)$. Положим $T_o^+(m_k) = \Pi_o^+(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_o^+(m_k) = 2\#T_o^+(m_k),$$

где через $\#T_o^+(m_k)$ обозначено количество элементов множества $T_o^+(m_k)$. Множество $T_o^+(m_k)$ называется *t -множеством первого типа точки m_k* , а число $t_o^+(m_k)$ — *t -числом первого типа точки m_k* .

Предложение 5.10. *В сделанных предположениях, если к ребру t не крепится нарост, то все точки из t -множества первого типа точки m_k затягиваются отростками концевой змеи Z , длина которой не меньше, чем $t_o^+(m_k)$. Если же к ребру t крепится нарост, то отростки концевой змеи Z затягивают все точки*

из множества $T_o^+(m_k)$, кроме, быть может, одной. Длина концевой змеи Z в этом случае не меньше, чем $t_o^+(m_k) - 2$.

Определим теперь характеристические полуплоскости и соответствующие им t -множества и t -числа всех остальных типов. Третий тип получается из первого типа простой “заменой знака”. А именно, рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой $m_k m_{k-1}$ и содержащую многоугольник M . Повернем эту полуплоскость вокруг точки m_k в отрицательном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью третьего типа точки m_k* и обозначается через $\Pi_o^-(m_k)$. Положим $T_o^-(m_k) = \Pi_o^-(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_o^-(m_k) = 2\#\Pi_o^-(m_k).$$

Множество $T_o^-(m_k)$ называется *t -множеством третьего типа точки m_k* , а число $t_o^-(m_k)$ — *t -числом третьего типа точки m_k* .

Перейдем теперь ко второму и четвертому типам. Проведем через m_k прямую l , параллельную прямой $m_{k-1}m_{k+1}$, рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую M , и повернем ее вокруг точки m_k в отрицательном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью второго типа точки m_k* и обозначается через $\Pi_e^-(m_k)$. Положим $T_e^-(m_k) = \Pi_e^-(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_e^-(m_k) = 2\#\Pi_e^-(m_k) - 1.$$

Множество $T_e^-(m_k)$ называется *t -множеством второго типа точки m_k* , а число $t_e^-(m_k)$ — *t -числом второго типа точки m_k* .

Наконец, проведем через m_k прямую l , параллельную прямой $m_{k-1}m_{k+1}$, рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую M , и повернем ее вокруг точки m_k в положительном направлении на угол 120° . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью четвертого типа точки m_k* и обозначается через $\Pi_e^+(m_k)$. Положим $T_e^+(m_k) = \Pi_e^+(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$, и пусть

$$t_e^+(m_k) = 2\#\Pi_e^+(m_k) - 1.$$

Множество $T_e^+(m_k)$ называется *t -множеством четвертого типа точки m_k* , а число $t_e^+(m_k)$ — *t -числом четвертого типа точки m_k* .

Оценки на длину жала. Чтобы сформулировать общий результат для всех рассмотренных случаев, удобно ввести еще функцию $d(E)$, равную 1, если на ребре t есть нарост, и равную 0 в противном случае. Кроме того, мы отнесем каждый из рассматриваемых случаев взаимного расположения ребер e и t и расположения отрезка e по отношению к вершинам m_{k-1} и m_{k+1} к одному из четырех *классов излома*. Это соответствие показано на рис. 5.18.

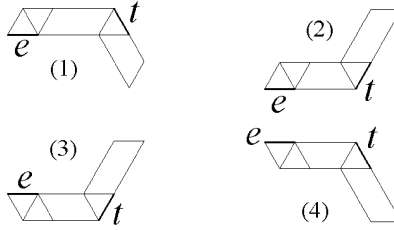
Наконец, определим *вектор поворота $t(m_k)$ для точки m_k* , положив

$$t(m_k) = (t_o^+(m_k), t_o^-(m_k), t_e^-(m_k), t_e^+(m_k)),$$

а также *число поворота $T(m_k)$ точки m_k* как

$$T(m_k) = \min\{t_o^+(m_k), t_o^-(m_k), t_e^-(m_k), t_e^+(m_k)\} = \min_i t(m_k)[i].$$

Имеет место следующий результат.

Рис. 5.18. Четыре класса поворачивающих концевых линейных участков E .

Предложение 5.11. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_5 , имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике M . Пусть, для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты, ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом, и к концевой Δ -змеи наросты не крепятся. Обозначим через t ребро поворота концевого линейного участка E , а через $m_k \in M$ — концевую вершину, соответствующую ячейке Δ . Тогда если концевой линейный участок E относится к i -му классу излома, то концевая змея Z содержит не менее $t(m_k)[i] - 2d(E)$ ячеек.

Следствие 5.10. В предположениях предложения 5.11, в независимости от класса излома, концевая змея Z содержит не менее $T(m_k) - 2$ ячеек.

Следствие 5.11. В предположениях предложения 5.11, если паркет D является скелетом, то, в независимости от класса излома, концевая змея Z содержит не менее $T(m_k)$ ячеек.

Отметим, что если множество M симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через точку m_k , то первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты вектора поворота для точки m_k совпадают. Поэтому в этом случае удобно понимать под вектором поворота для m_k вектор

$$t_s(m_k) = (t_o^+(m_k), t_o^-(m_k)).$$

Следствие 5.12. Пусть M — правильный n -угольник. Тогда вектор поворота для его произвольной вершины m имеет вид

$$t_s(m) = \left(2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2, 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 \right),$$

а число поворота $T(m)$ равно $2\lceil n/3 \rceil - 2$. Поэтому, в сделанных предположениях, при $n \geq 12$, если D — скелет, то длина концевой змеи не меньше, чем $2\lceil n/3 \rceil - 2$, а в общем случае — не меньше, чем $2\lceil n/3 \rceil - 4$.

Более того, длина боковины поворота концевой змеи концевого линейного участка E в случае излома класса 1 или 3 не меньше, чем $\lceil n/3 \rceil - 1 - d(E)$, а в случае изломов класса 2 или 4 — не меньше, чем $\lceil n/3 \rceil - d(E)$. Длина противоположной боковины в случае излома класса 1 или 3 не меньше, чем $\lceil n/3 \rceil - 1 - d(E)$, а в случае изломов класса 2 или 4 — не меньше, чем $\lceil n/3 \rceil - d(E)$.

Следствие 5.13. Пусть M — квазиправильный n -угольник. Тогда вектор поворота для произвольной его вершины m_k покомпонентно не меньше, чем вектор

$$\left(2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 4, 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 5, 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 4, 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 5 \right),$$

и, значит, число поворота $T(m_k)$ вершины m_k не меньше, чем $2\lfloor n/3 \rfloor - 5$. Поэтому, в сделанных предположениях, при $n \geq 18$, если D — скелет, то длина концевой змеи не меньше, чем $2\lfloor n/3 \rfloor - 5$, а в общем случае — не меньше, чем $2\lfloor n/3 \rfloor - 7$.

Длина хвоста: концевой линейный участок имеет излом и на концевой змее есть наросты. Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_2^3 и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ — некоторое его разложение на скелет S и наросты; Δ — концевая ячейка скелета S , и E — Δ -конец паркета D . Обозначим через E_S соответствующий E концевой линейный участок скелета S , т.е. $E_S = E \cap S$. Пусть Z — концевая Δ -змея. Предположим, что на Z нет концевых наростов, но другие наросты имеются. Предположим, что Δ -конец E имеет излом. Обозначим через e единственное граничное не концевое ребро ячейки Δ и через t — ребро поворота концевого линейного участка E паркета D . Напомним, что *боковиной поворота концевого линейного участка E* называется та из двух его боковин, которая пересекается (возможно, по двум точкам) с ребром поворота t , а противоположная боковина концевого линейного участка E называется *подчиненной боковиной*.

Далее, пусть, как и выше, M — произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ — последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки, занумерованные элементами из \mathbb{Z}_n . Рассмотрим произвольную вершину m_k многоугольника M . Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M , такую, что точка $m_k \in M$ является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ из D .

Мы оценим длину концевой Δ -змеи Z и Δ -хвоста X , рассмотрев для этого те же четыре возможных случая, что и выше, в зависимости от того, на одной или разных боковинах концевого линейного участка E_S скелета S расположены ребра e и t , а также в зависимости от того, крепится ли к ребру e нарост или нет. С формальной точки зрения, мы должны различать, в какую из вершин m_{k+1} или m_{k-1} приходит отрезок сети Γ , соответствующий ребру e . Однако эти случаи полностью аналогичны. Кроме того, нам придется в каждом случае различать, на какой боковине концевой змеи Z расположен первый, считая от концевой ячейки Δ , нарост Δ' . Наконец, мы будем учитывать, крепится ли нет нарост к ребру поворота t , используя для этого определенную выше функцию $d(E)$.

Мы воспользуемся определением характеристических полуплоскостей, данным в предыдущем разделе, и соответствующих им t -множеств и t -чисел. Отметим еще раз, что эти определения не зависят от того, есть ли на концевой змее Z наросты, отличные от концевых. Имеет место следующее предложение.

Предложение 5.12. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_2^3 , имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике M . Пусть, для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты, ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом и на концевой Δ -змее Z нет концевых наростов, но другие наросты есть. Обозначим через t ребро поворота концевого линейного участка E , а через $m_k \in M$ — концевую вершину, соответствующую ячейке Δ . Пусть концевой линейный участок E относится к i -му классу излома. Если на ребре поворота t нароста нет, то все точки из соответствующего t -множества затягиваются граничными ребрами Δ -хвоста из боковины поворота, а если на ребре t нарост есть, то граничные ребра Δ -хвоста из боковины поворота затягивают все точки из соответствующего t -множества, кроме, быть может, одной.

Приведем теперь общие оценки на длину концевой змеи и на длину хвоста, а также следствия для случаев правильного и квазиправильного многоугольников.

Предложение 5.13. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_5 , имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике M . Пусть, для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты, ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом и на концевой Δ -змеи Z нет концевых наростов, а другие наросты имеются. Пусть Δ' — ближайший к Δ нарост на концевой Δ -змеи. Обозначим через $t_k \in M$ концевую вершину, соответствующую ячейке Δ . Тогда длины концевой Δ -змеи и Δ -хвоста, а также длины боковин Δ -хвоста оцениваются снизу величинами, приведенными в следующих таблицах.

Оценки на длину концевой змеи.		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1	$2 \left\lceil \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rceil$	$2 \left\lceil \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rceil$
2	$2 \left\lceil \frac{t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$	$2 \left\lceil \frac{t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$
3	$2 \left\lceil \frac{t_o^-(m_k) + g_o^-(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rceil$	$2 \left\lceil \frac{t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rceil$
4	$2 \left\lceil \frac{t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$	$2 \left\lceil \frac{t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rceil - 1$

Оценки на длину хвоста.		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1	$\left\lceil \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$
2	$\left\lceil \frac{3t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$
3	$\left\lceil \frac{3t_o^-(m_k) + g_o^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$
4	$\left\lceil \frac{3t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{3t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rceil$

Оценки на длину боковины поворота Δ -хвоста.	
Тип излома	Оценка
1	$t_o^+(m_k)/2 - d(E)$
2	$(t_e^-(m_k) + 1)/2 - d(E)$
3	$t_o^-(m_k)/2 - d(E)$
4	$(t_e^+(m_k) + 1)/2 - d(E)$

Оценки на длину подчиненной боковины Δ -хвоста поворота; здесь в обозначениях опущены указания на точку m_k .	
Тип излома	Оценка
1	$\min\left\{\left\lfloor \frac{t_o^+ + g_o^+ + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_o^+ + g_e^- + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor + 1\right\}$
2	$\min\left\{\left\lfloor \frac{t_e^- + g_e^- + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{t_e^- + g_o^+ + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor\right\}$
3	$\min\left\{\left\lfloor \frac{t_o^- + g_o^- + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_o^- + g_e^+ + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor + 1\right\}$
4	$\min\left\{\left\lfloor \frac{t_e^+ + g_e^+ + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{t_e^+ + g_o^- + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor\right\}$

Следствие 5.14. Пусть, в предположениях предложения 5.13, множество M — это правильный n -угольник и $n \geq 12$. Тогда таблицы оценки длины концевой змеи, хвоста и боковин хвоста выглядят так.

Оценки на длину концевой змеи для правильного n -угольника.		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1,3	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2$	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2$
2,4	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n-6+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3$	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n-9+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3$

Оценки на длину хвоста для правильного n -угольника.		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1,3	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+15+18d(E)}{12} \right\rfloor - 1$	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+18d(E)}{12} \right\rfloor - 1$
2,4	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6+18d(E)}{12} \right\rfloor - 1$	$2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-9+18d(E)}{12} \right\rfloor - 1$

Оценки на длину боковины поворота Δ -хвоста в случае правильного n -угольника.	
Тип излома	Оценка
1,3	$\lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E)$
2,4	$\lfloor n/3 \rfloor - d(E)$

Оценки на длину подчиненной боковины Δ -хвоста в случае правильного n -угольника.	
	Оценка
1,3	$\min\left\{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor\right\} = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \right\rfloor$
2,4	$\min\left\{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+18+6d(E)}{12} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor\right\} = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+18+6d(E)}{12} \right\rfloor$

Следствие 5.15. В предположениях следствия 5.14, в независимости от класса поворота и расположения первого нароста Δ' , длина Δ -хвоста не меньше чем

$$2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n+15+18d(E)}{12}\right] - 1 \geq 2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n+9}{12}\right] - 3.$$

Из следствий 5.12 и 5.14 получается следующий полезный результат.

Следствие 5.16. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_3 , имеющий минимальную реализацию на правильном n -угольнике, $n \geq 12$. Пусть, для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты, ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом. Тогда боковина поворота Δ -хвоста не меньше чем $\lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E)$, а подчиненная боковина Δ -хвоста не меньше чем

$$\left[\frac{n}{3}\right] - 1 - \left[\frac{n+6+6d(E)}{12}\right].$$

Следствие 5.17. Пусть, в предположениях предложения 5.13, множество M — это квазиправильный n -угольник и $n \geq 18$. Тогда таблицы оценки длины концевой змеи, хвоста и боковин хвоста выглядят так.

Оценки на длину концевой змеи для квазиправильного n -угольника.		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1,3	$2\left[\frac{n}{3}\right] - 2\left[\frac{n+15+6d(E)}{12}\right] - 2$	$2\left[\frac{n}{3}\right] - 2\left[\frac{n+15+6d(E)}{12}\right] - 2$
2,4	$2\left[\frac{n}{3}\right] - 2\left[\frac{n+15+6d(E)}{12}\right] - 3$	$2\left[\frac{n}{3}\right] - 2\left[\frac{n+9+6d(E)}{12}\right] - 3$

Оценки на длину хвоста для квазиправильного n -угольника.		
Тип излома	Δ' на боковине поворота	Δ' не на боковине поворота
1,3	$2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n+3+18d(E)}{12}\right] - 4$	$2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-9+18d(E)}{12}\right] - 4$
2,4	$2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n+15+18d(E)}{12}\right] - 4$	$2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-3+18d(E)}{12}\right] - 4$

Оценки на длину боковины поворота Δ -хвоста в случае квазиправильного n -угольника.	
Тип излома	Оценка
1,2,3,4	$\lfloor n/3 \rfloor - 2 - d(E)$

Оценки на длину подчиненной боковины Δ -хвоста в случае квазиправильного n -угольника.	
Оценка	
1,3	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 1 \right\} =$ $= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2$
2,4	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2 \right\} =$ $= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3$

Следствие 5.18. В предположениях следствия 5.17, в независимости от класса поворота и расположения первого нароста Δ' , длина концевой Δ -змеи не меньше чем

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n+9}{12} \right\rfloor - 5,$$

а длина Δ -хвоста не меньше чем

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+15+18d(E)}{12} \right\rfloor - 4 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+9}{12} \right\rfloor - 6.$$

Следствие 5.19. Пусть D — паркет из \mathcal{WP}_5^2 , имеющий минимальную реализацию на квазиправильном n -угольнике, $n \geq 18$. Пусть, для некоторого разложения паркета D на скелет и наросты, ячейка Δ является концевой. Пусть Δ -конец E имеет излом. Тогда боковина поворота Δ -хвоста не меньше чем $\lfloor n/3 \rfloor - 2 - d(E)$, а подчиненная боковина Δ -хвоста не меньше чем

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3.$$

Взаимное расположение концевых линейных участков. Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_5^2 и $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ — некоторое его разложение на скелет и наросты; Δ_1 и Δ_2 — концевые ячейки скелета S , и E_i , $i = 1, 2$, — Δ_i -конец паркета D . Предположим, что на концевых линейных участках E_1 и E_2 нет концевых наростов. Обозначим через Z_i концевые змеи концевых линейных участков E_i . Положительный угол φ от направления концевой змеи Z_1 к направлению концевой змеи Z_2 (напомним, что концевые змеи ориентируются к своим концевым ячейкам) назовем *углом от концевого линейного участка E_1 к концевому линейному участку E_2* . Отметим, что угол φ принимает лишь значения вида $q\pi/3$, $q = 1, \dots, 5$.

Далее, пусть, как и выше, M — произвольный выпуклый n -угольник и $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$ — последовательные его вершины при обходе M против часовой стрелки, занумерованные элементами из \mathbb{Z}_n . Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M , такую, что точки m_k и m_r из M являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам Δ_1 и Δ_2 .

Пусть Δ — концевая ячейка скелета S , и предположим, что на Δ -конце E нет концевых наростов. Пусть e_1 — концевое ребро ячейки Δ , а e_2 — отличное от e_1 граничное ребро из Δ . Ориентируем оба отрезка e_1 и e_2 от их общей вершины.

Пара (e_2, e_1) образует некоторый репер на плоскости. Определим *индекс конечного линейного участка E* равным 1, если ориентация репера (e_2, e_1) положительна, и равным 2 в противном случае. Индекс конечного линейного участка E обозначим через $\text{ind } E$.

Пусть m_p — произвольная вершина из M . Рассмотрим вертикальный угол, порожденный прямыми $m_p m_{p+1}$ и $m_{p-1} m_{p+1}$ и содержащий угол $m_p m_{p+1} m_{p-1}$, и сдвинем его на вектор $m_{p+1} m_p$ в вершину m_p . Полученный в результате вертикальный угол назовем *углом направлений первого типа в точке m_p* и обозначим через $A^1(m_p)$. Далее, рассмотрим вертикальный угол, порожденный прямыми $m_p m_{p-1}$ и $m_{p-1} m_{p+1}$ и содержащий угол $m_p m_{p-1} m_{p+1}$, и сдвинем его на вектор $m_{p-1} m_p$ в вершину m_p . Полученный в результате вертикальный угол назовем *углом направлений второго типа в точке m_p* и обозначим через $A^2(m_p)$.

Будем говорить, что прямая *лежит внутри вертикального угла A* , если она целиком лежит в A и пересекается с границей угла A в точности по вершине этого угла.

Пусть $A^i(m_p)$ — угол направлений i -го типа точки m_p . Заметим, что произвольная прямая ℓ , лежащая внутри угла $A^i(m_p)$, является опорной прямой для многоугольника M , поэтому корректно определен вектор нормали $N(\ell)$ к прямой ℓ , направленный в ту открытую полуплоскость, ограниченную ℓ , которая не содержит вершин из M . Ориентируем все прямые ℓ , лежащие в $A^i(m_p)$, задав на каждой из них направление l так, чтобы пара $(N(\ell), l)$ образовывала положительно ориентированный репер. В дальнейшем всегда будем предполагать, что все прямые из каждого $A^i(m_p)$ ориентированы таким образом.

Имеют место следующие очевидные утверждения.

Предложение 5.14. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M , такую, что точка m_p из M является конечной вершиной, соответствующей конечной ячейке Δ конечного линейного участка E , на котором нет конечных наростов. Тогда если конечной линейный участок E имеет индекс i , то прямая, проходящая через отросток сети Γ , соответствующий ячейке Δ , параллельна некоторой прямой, лежащей внутри угла направлений $A^i(m_p)$.

Предложение 5.15. Пусть паркет D имеет минимальную реализацию Γ на M , такую, что точки m_k и m_r из M являются конечными вершинами, соответствующими конечным ячейкам Δ_1 и Δ_2 конечных линейных участков E_1 и E_2 , на которых нет конечных наростов. Пусть ℓ_i — прямая, проходящая через отросток сети Γ , соответствующий ячейке Δ_i . Обозначим через N_i направления конечных Δ_i -змей из Γ . Ориентируем прямую ℓ_i , выбрав на ней направление l_i так, чтобы пара (N_i, l_i) образовывала положительно ориентированный репер. Пусть φ — угол от конечного линейного участка E_1 к конечному линейному участку E_2 . Тогда ориентированная прямая ℓ_1 может быть переведена в ориентированную прямую ℓ_2 композицией поворота в положительном направлении на угол φ и некоторого сдвига с сохранением ориентации.

Следствие 5.20. В предположениях предложения 5.15, пусть i_1 и i_2 — индексы конечных линейных участков E_1 и E_2 соответственно. Пусть ξ — движение плоскости, переводящее точку m_k в точку m_r и являющееся композицией поворота на угол φ в положительном направлении и некоторого сдвига. Тогда вертикальные углы $\xi(A^{i_1}(m_k))$ и $A^{i_2}(m_r)$ с общей вершиной $\xi(m_k) = m_r$ пересекаются по внутренности. Более того, существуют такие прямые ℓ_1 из $A^{i_1}(m_k)$ и ℓ_2 из $A^{i_2}(m_r)$, что отображение ξ переводит ориентированную прямую ℓ_1 в ориентированную прямую ℓ_2 с сохранением ориентации.

Обозначим через α_k^\pm величину угла $m_k m_{k\pm 1} m_{k\mp 1}$. Для каждого целого p , $1 \leq p \leq n$, определим β_p равным величине положительного угла от вектора $m_{k-1} m_{k+1}$ к вектору $m_{k+p} m_{k+p+1}$.

Определим теперь четверку множеств, отвечающих за возможное расположение концевого линейного участка E_2 по отношению к концевому линейному участку E_1 .

- (1) К множеству $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi < \beta_p < \varphi + \alpha_k^+ + \alpha_{k+p}^+.$$

- (2) К множеству $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi + \alpha_k^+.$$

- (3) К множеству $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi - \alpha_k^- < \beta_p < \varphi + \alpha_{k+p}^+.$$

- (4) К множеству $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$ отнесем все такие точки m_{k+p} , что

$$\varphi - \alpha_k^- - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi.$$

Определенные только что множества назовем Ω -множествами. Отметим, что Ω -множества определяются только геометрией множества M и величиной угла φ .

Предложение 5.16. В сделанных выше предположениях, если φ — это угол от концевого линейного участка E_1 к концевому линейному участку E_2 , на концевых линейных участках нет концевых наростов, и паркет D имеет минимальную реализацию на M , такую, что точки m_k и m_r из M являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам Δ_1 и Δ_2 , а $i = \text{ind } E_1$ и $j = \text{ind } E_2$, то m_r принадлежит множеству $\Omega_{i,j}(m_k, \varphi)$.

Далее, пусть $\varphi = q\pi/3$ и m_k — произвольная вершина из M . В каждом Ω -множестве $\Omega_{i,j}(m_k, \varphi)$ выберем самую близкую от m_k точку A и самую далекую от m_k точку B при движении от m_k в положительном направлении. Количество пройденных при таком движении точек из M в первом и во втором случае обозначим через $a_{i,j}(m_k, \varphi)$ и $b_{i,j}(m_k, \varphi)$ соответственно. Положим

$$a_{i,j}(\varphi) = \min_{m_k} a_{i,j}(m_k, \varphi), \quad b_{i,j}(\varphi) = \max_{m_k} b_{i,j}(m_k, \varphi)$$

и назовем $a_{i,j}(\varphi)$ и $b_{i,j}(\varphi)$ нижним и верхним боковыми числами типа (i, j) множества M , соответствующими углу φ .

Из предложения 5.16 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 5.21. В сделанных выше предположениях, если φ — это угол от концевого линейного участка E_1 к концевому линейному участку E_2 , на концевых линейных участках нет концевых наростов, паркет D имеет минимальную реализацию на M , такую, что точка m_k из M является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке Δ_1 концевого линейного участка E_1 , а $i = \text{ind } E_1$ и $j = \text{ind } E_2$, то длина l супербоковины паркета D от E_1 к E_2 лежит в пределах

$$a_{i,j}(m_k, \varphi) \leq l \leq b_{i,j}(m_k, \varphi).$$

Следствие 5.22. В сделанных выше предположениях, если φ — это угол от концевого линейного участка E_1 к концевому линейному участку E_2 , на концевых

линейных участках нет концевых наростов, паркет D имеет минимальную реализацию на M и $i = \text{ind } E_1$, $j = \text{ind } E_2$, то длина l супербоковины паркета D от E_1 к E_2 лежит в пределах

$$a_{i,j}(\varphi) \leq l \leq b_{i,j}(\varphi).$$

Применим предложение 5.16 и следствия 5.21 и 5.22 к случаю правильного n -угольника.

Следствие 5.23. Пусть, в предположениях предложения 5.16, M — это правильный n -угольник, $n \geq 12$. Пусть $\varphi = q\pi/3$ и $l_{i,j}(\varphi)$ — длина супербоковины паркета D от концевого линейного участка E_1 к концевому линейному участку E_2 . Пусть R — остаток от деления числа nq на 6. Тогда

- если $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 1$, то $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi) = \{m_{k+p}\} = \{m_r\}$, и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{1}{2},$$

в частности, $R \neq 3$; длина супербоковины $l_{1,1}(\varphi)$ определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{1,1}(\varphi) = \begin{cases} \left[\frac{nq}{6} \right] - 1 & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \text{не реализуется} & \text{при } R = 3, \\ \left[\frac{nq}{6} \right] & \text{при } R = 4, 5; \end{cases}$$

- если $\text{ind } E_1 = 1$, а $\text{ind } E_2 = 2$, то $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi) = \{m_{k+p}\} = \{m_r\}$, и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2};$$

длина супербоковины $l_{1,2}(\varphi)$ определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{1,2}(\varphi) = \begin{cases} \text{не реализуется} & \text{при } R = 0, \\ \left[\frac{nq}{6} \right] & \text{при } R = 1, \dots, 5; \end{cases}$$

- если $\text{ind } E_1 = 2$, а $\text{ind } E_2 = 1$, то $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi) = \{m_{k+p}\} = \{m_r\}$, и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2};$$

длина супербоковины $l_{2,1}(\varphi)$ определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{2,1}(\varphi) = \begin{cases} \text{не реализуется} & \text{при } R = 0, \\ \left[\frac{nq}{6} \right] - 1 & \text{при } R = 1, \dots, 5; \end{cases}$$

- если $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 2$, то $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi) = \{m_{k+p}\} = \{m_r\}$, и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{1}{2},$$

в частности, $R \neq 3$; длина супербоковины $l_{2,2}(\varphi)$ определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{2,2}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1 & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \text{не реализуется} & \text{при } R = 3, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor & \text{при } R = 4, 5; \end{cases}$$

В частности, независимо от индексов концевых линейных участков, каждое Ω -множество состоит не более чем из одной точки.

Более того, независимо от индексов концевых линейных участков E_1 и E_2 , длина супербоковины от E_1 к E_2 не меньше чем $\lfloor nq/6 \rfloor - 1$ и не больше чем $\lfloor nq/6 \rfloor$.

Применим теперь предложение 5.16 к случаю квазиправильного n -угольника.

Следствие 5.24. Пусть, в предположениях предложения 5.16, M — это квазиравильный n -угольник, $n \geq 18$. Пусть $\varphi = q\pi/3$ и $l_{i,j}(\varphi)$ — длина супербоковины паркета D от концевого линейного участка E_1 к концевому линейному участку E_2 . Пусть R — остаток от деления числа nq на 6.

- Если $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 1$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины $l_{1,1}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{1,1}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, & \text{при } R = 3, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor + 1, & \text{при } R = 4, 5. \end{cases}$$

- Если $\text{ind } E_1 = 1$, а $\text{ind } E_2 = 2$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p + \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины $l_{1,2}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{1,2}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, & \text{при } R = 0, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor + 1, & \text{при } R = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

- Если $\text{ind } E_1 = 2$, а $\text{ind } E_2 = 1$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2}.$$

а длина супербоковины $l_{2,1}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{2,1}(\varphi) = \begin{cases} \left[\frac{nq}{6} \right] - 2, \left[\frac{nq}{6} \right] - 1, & \text{при } R = 0, \\ \left[\frac{nq}{6} \right] - 2, \left[\frac{nq}{6} \right] - 1, \left[\frac{nq}{6} \right], & \text{при } R = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

- Если $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 2$, т.е. точка $m_r = m_{k+p}$ принадлежит множеству $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$, то

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{3}{2}.$$

а длина супербоковины $l_{2,2}(\varphi)$ принимает одно из следующих значений:

$$l_{2,2}(\varphi) = \begin{cases} \left[\frac{nq}{6} \right] - 2, \left[\frac{nq}{6} \right] - 1, \left[\frac{nq}{6} \right], & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \left[\frac{nq}{6} \right] - 1, \left[\frac{nq}{6} \right], & \text{при } R = 3, \\ \left[\frac{nq}{6} \right] - 1, \left[\frac{nq}{6} \right], \left[\frac{nq}{6} \right] + 1, & \text{при } R = 4, 5. \end{cases}$$

В частности, каждое из Ω -множеств состоит не более чем из трех элементов.

Более того, независимо от индексов концевых линейных участков E_1 и E_2 , длина супербоковины от E_1 к E_2 не меньше чем $\lfloor nq/6 \rfloor - 2$ и не больше чем $\lfloor nq/6 \rfloor + 1$.

Жаловый модуль. Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{WP}_3 , имеющий минимальную реализацию на множестве M вершин выпуклого многоугольника. Обозначим через $\xi(D)$ длину наибольшего жала паркета D . Положим

$$\xi(M) = \min_D \xi(D).$$

Если ни один такой паркет не имеет минимальной реализации на множестве M , то положим $\xi(M) = \infty$. Определенное так $\xi(M)$ называется *жаловым модулем множества* M .

Пусть теперь ни один паркет из \mathcal{WP}_3 , имеющий концевые наросты, не обладает минимальной реализацией на множестве M . Пусть $G(m)$ — наростовое число вершины $m \in M$. Определим *наростовое число* $G(M)$ множества M как минимум наростовых чисел $G(m)$ всех вершин m из M . Далее, пусть $T(m)$ — число поворота вершины $m \in M$. Определим *число поворота* $T(M)$ множества M как минимум чисел поворота $T(m)$ по всем вершинам $m \in M$. Наконец, пусть $a_{i,j}(\varphi)$ — нижнее боковинное число типа (i, j) множества M , соответствующее углу φ . Положим

$$a(M) = \min_{(i,j)} a_{i,j}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Назовем число $a(M)$ *главным боковинным числом множества* M . Имеет место следующий результат.

Теорема 5.9. Пусть M — множество вершин произвольного выпуклого n -угольника, такого, что ни один паркет из \mathcal{WP}_3 с концевыми наростами не имеет минимальной реализации на M . Тогда жаловый модуль $\xi(M)$ множества M оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq \min \left\{ G(M), T(M) - 2, n - 2, 2 \left\lceil \frac{a(M) + 1}{2} \right\rceil - 1 \right\}.$$

Из полученных выше оценок на наростовые числа, числа поворота и длины боковин в случае правильных и квазиправильных n -угольников вытекают следующие результаты.

Следствие 5.25. Пусть M — множество вершин правильного n -угольника, $n \geq 12$. Тогда жаловый модуль $\xi(M)$ множества M оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq 2 \left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil.$$

Следствие 5.26. Пусть M — множество вершин квазиправильного n -угольника, $n \geq 18$. Тогда жаловый модуль $\xi(M)$ множества M оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq 2 \left\lceil \frac{n - 6}{12} \right\rceil.$$

Пусть M — произвольный выпуклый n -угольник, $t_k \in M$ — некоторая его вершина, p — неотрицательное целое число, не превосходящее $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$, и σ равно -1 , 0 или 1 . Обозначим через $S(t_k, p, \sigma)$ множество вершин из M вида $\{t_{k-p}, \dots, t_{k+p}\} \cup \{t_{k+\sigma(p+1)}\}$. Будем говорить, что множество $S(t_k, p, \sigma)$ *затягивается ростком змеи с началом в t_k* , если существует такая точка $t \in \text{conv } M$, что множество $S(t_k, p, \sigma) \cup \{t\}$ затягивается некоторой локально минимальной змеей Z , одно из концевых ребер которой, скажем e , приходит в точку t_k , другое — в точку t , а последовательные отростки, начиная с отростка, смежного с ребром e , — в точки $t_{k \pm 1}, t_{k \mp 1}, t_{k \pm 2}, t_{k \mp 2}, \dots$. Ясно, что длина змеи Z в этом случае равна $2p + |\sigma|$. Далее, будем говорить, что из точки $t_k \in M$ можно выпустить *росток змеи длины z* , если существует такое множество $S(t_k, p, \sigma)$, что $z = 2p + |\sigma|$, и множество $S(t_k, p, \sigma)$ затягивается ростком змеи с началом в t_k . Максимальное z , для которого из точки $t_k \in M$ можно выпустить росток змеи длины z , называется *жаловым submodule точки t_k* и обозначается через $\xi_s(t_k)$. Наконец, *жаловым submodule множества M* называется максимум жаловых submodule $\xi_s(t_k)$ по всем $t_k \in M$.

Предложение 5.17. Пусть M — множество вершин выпуклого многоугольника. Тогда $\xi(M) \leq \xi_s(M)$.

Доказательство. Действительно, если паркет D имеет минимальную реализацию на множестве M , то каждое его жало порождает росток змеи той же длины, поэтому длина этого жала не превосходит $\xi_s(M)$. Теперь требуемое неравенство вытекает непосредственно из определения жалового модуля $\xi(M)$. ■

5.1.13. Квазиправильные границы, которые нельзя затянуть ни одним локально минимальным бинарным деревом

В настоящем разделе мы построим серию примеров квазиправильных n -угольников, вершины которых нельзя затянуть ни одним локально минимальным бинарным деревом. Сформулируем основную теорему настоящего раздела.

Пусть $P = \{p_i\}$ — правильный n -угольник и ε — положительное число, меньшее чем $\alpha/2$, где $\alpha = \pi/n$. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ — произвольная последовательность из ± 1 . Обозначим через t_i точку, полученную из p_i поворотом на угол $s_i 2\varepsilon$, и пусть $M = \{t_i\}$. Пусть P' — правильный n -угольник, составленный из середин дуг окружности S^1 , на которые многоугольник P ее делит. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 5.2. *Множество M , построенное выше, является квазиравильным n -угольником, соответствующим правильному n -угольнику P' .*

Определение. Квазиравильный многоугольник M , построенный выше, называется ε -квазиравильным многоугольником типа s .

Теорема 5.10. *Пусть s — периодическая последовательность длины $n = 10k$ с периодом $(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1)$ и ε — произвольное положительное число, такое, что $\alpha/4 \leq \varepsilon < \alpha/2$, где $\alpha = \pi/n$. Тогда при $k \geq 7$ множество M вершин ε -квазиравильного n -угольника типа s не затягивается ни одним локально минимальным бинарным деревом.*

Один из таких ε -квазиравильных 70-угольников изображен на рис. 5.19.

Из следствия 5.26 вытекает, что при $n \geq 70$ жаловый модуль произвольного квазиравильного n -угольника больше или равен 10. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, см. предложение 5.17, что из произвольной точки $m_k \in M$ нельзя выпустить росток змеи длины 10, т.е. $\xi_s(M) < 10$. Соответствующие неравенства и оценки можно найти в [89]. (В работе [89] в теореме 5.10 стоит более слабое неравенство $k \geq 8$.)

Замечание. Найденные нами ε -квазиравильные многоугольники в некотором смысле оптимальны. А именно, оказывается, росток минимальной змеи длины $z \leq 9$ всегда можно выпустить из некоторой вершины t любого ε -квазиравильного n -угольника, $n \geq z + 1$.

Этот факт был обнаружен как результат вычислительного эксперимента, выполненного в пакете Mathematica®. Идея использованного алгоритма состоит в следующем. Выберем сначала все $(z+1)$ -мерные векторы γ , состоящие из ± 1 , для которых

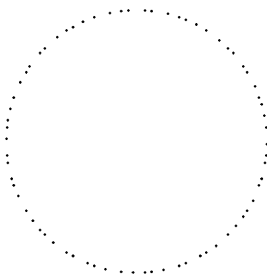


Рис. 5.19. Пример квазиправильного 70-угольника, который нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом.

выполняются неравенства, гарантирующие невозможность выпустить змею длины z . Затем строится ориентированный граф G , вершины которого — отобранные блоки, и вершина γ_p соединяется с вершиной γ_q ориентированной дугой с началом в γ_p , если и только если блок γ_p с выброшенным первым элементом совпадает с блоком γ_q с выброшенным последним элементом. Все замкнутые маршруты ориентированного графа G соответствуют всем ε -квазиправильным n -угольникам, из каждой вершины которых нельзя выпустить росток змеи длины z . Оказалось, что при $z \leq 9$ полученные ориентированные графы ациклически. При $z = 10$ граф G имеет ровно два непересекающихся цикла, причем ε -квазиправильные n -угольники, соответствующие этим циклам, получают друг из друга движением плоскости, меняющим ориентацию.

5.1.14. Невырожденные локально минимальные сети с выпуклой границей. Циклический случай

В настоящем разделе мы обобщим теоремы классификации локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей на случай невырожденных локально минимальных сетей с циклами. Доказательства основных теорем можно найти в [78] и [74].

Мы начнем с того, что отметим существенное различие случая деревьев от случая сетей с циклами. Будем говорить, что локально минимальная сеть-след Γ имеет тип G , если G — параметризующий граф некоторого ее канонического представителя. Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5.4. Пусть G — произвольное дерево Штейнера. Тогда существует плоская локально минимальная сеть типа G .

Для случая сетей с циклами аналог утверждения 5.4 места не имеет. Например, рассмотрим граф Штейнера, состоящий из шести ребер, три

из которых образуют цикл, а три других выходят из вершин этого цикла, рис. 5.20. Так как, в силу теорем о локальной структуре, см. выше, углы между смежными ребрами не меньше 120° , у плоской минимальной реализации такого графа имеется треугольник, все углы которого не меньше 120° , что невозможно.

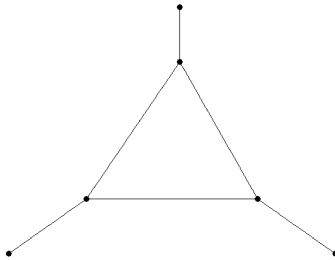


Рис. 5.20. Этот граф Штейнера не имеет плоской минимальной реализации.

В следующем разделе мы приведем необходимое условие существования плоской локально минимальной сети с циклами.

5.1.14.1. Плоская минимальная реализация невырожденных сетей Штейнера

Ограничимся для простоты случаем невырожденных сетей Штейнера. Пусть Γ — произвольная невырожденная сеть Штейнера. Напомним, что у такой сети отсутствуют вершины степени 2. Обозначим через U'_i ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus \text{im } \Gamma$, а через U_i — открытое множество $\text{int}(\text{cl}(U'_i))$, где cl обозначает замыкание, а int — взятие внутренности. Легко видеть, что граница каждого U_i — это объединение некоторого количества простых циклов в Γ . Так полученные простые циклы называются *фундаментальными циклами*.

Вершина P фундаментального цикла γ из G называется *внешней*, если единственное ребро из Γ , инцидентное P и не принадлежащее γ , лежит вне области, ограниченной циклом γ . В противном случае вершина P называется *внутренней*. Разность количеств внешних и внутренних вершин фундаментального цикла γ называется *индексом цикла* γ и обозначается через $\text{ind}(\gamma)$. Ясно, что планарно эквивалентные невырожденные сети Штейнера имеют одинаковые структуры фундаментальных циклов. Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 5.18. *Индекс каждого фундаментального цикла произвольной локально минимальной невырожденной сети Штейнера равен 6. Иными словами, равенство шести индекса каждого фундаментального цикла невырожденной сети Штейнера является необходимым условием существования минимальной реализации этой сети.*

Гипотеза 5.1. *Условие предложения 5.18 является также и достаточным. А именно, если индекс каждого фундаментального цикла невырожденной сети Штейнера равен 6, то эта сеть обладает минимальной реализацией.*

Замечание. Отметим, что в случае, когда любые два фундаментальных цикла невырожденной сети Штейнера не пересекаются, сформулированная только что гипотеза может быть сравнительно легко доказана. В общем случае доказательство этой гипотезы авторам не известно.

Замечание. Предложение 5.18 может быть легко обобщено на случай произвольных сетей Штейнера, см. [78], [74].

Оказывается, фундаментальные циклы невырожденных сетей Штейнера, имеющих выпуклую минимальную реализацию, устроены максимально просто. Кроме того, имеется возможность обобщить понятие числа вращения на случай невырожденных сетей Штейнера, все фундаментальные циклы которых устроены именно так.

5.1.14.2. Фундаментальные циклы невырожденных локально минимальных сетей с выпуклой границей.

Тривиальные сети

Пусть Γ — плоская невырожденная сеть Штейнера и γ — ее фундаментальный цикл. Предположим, что $\text{ind } \gamma = 6$. Тогда, очевидно, γ состоит не менее чем из 6 ребер, причем число ребер равно 6, если и только если все вершины цикла γ — внешние.

Определение. Фундаментальный цикл индекса 6, состоящий ровно из шести ребер, назовем *тривиальным*. Плоскую невырожденную сеть Штейнера Γ , все фундаментальные циклы которой тривиальны, назовем *тривиальной сетью*.

Следующее предложение немедленно вытекает из определений.

Предложение 5.19. *Пусть Γ — плоская невырожденная сеть Штейнера, имеющая выпуклую минимальную реализацию. Тогда Γ — тривиальная сеть.*

Из предложения 5.19 следует, что при изучении топологии невырожденных локально минимальных сетей с выпуклой границей можно

ограничиться рассмотрением тривиальных сетей. В дальнейшем нам будет полезно следующее утверждение, вытекающее непосредственно из предложения 5.18.

Утверждение 5.5. *Индекс произвольного цикла тривиальной сети равен 6.*

Приведем еще одно важное свойство тривиальных сетей, доказательство которого представляет собой несложное упражнение по теории графов.

Утверждение 5.6. *У каждой тривиальной сети есть вершина степени 1.*

5.1.14.3. Число вращения тривиальной сети

Оказывается, для тривиальных сетей, несмотря на наличие циклов, также можно корректно определить число вращения.

Пусть Γ — тривиальная сеть и пусть a и b — пара ее граничных ребер. Предположим, что γ_1 и γ_2 — пути в Γ , каждый из которых соединяет ребро a с ребром b . Так же, как и выше, *числом вращения* $\text{tw}_{\gamma_i}(a, b)$ пары ребер (a, b) вдоль пути γ_i назовем разность количеств поворотов “налево” и “направо” во внутренних вершинах пути γ_i при движении по γ_i от a к b .

Утверждение 5.7. *Число вращения пары (a, b) граничных ребер тривиальной сети Γ не зависит от пути, их соединяющего:*

$$\text{tw}_{\gamma_1}(a, b) = \text{tw}_{\gamma_2}(a, b),$$

для любых путей γ_1 и γ_2 , каждый из которых соединяет a с b .

Утверждение 5.7 обосновывает корректность следующего определения.

Определение. *Числом вращения $\text{tw}(a, b)$ пары (a, b) граничных ребер тривиальной сети Γ назовем число вращения между этими ребрами вдоль любого пути, их соединяющего. Числом вращения $\text{tw} \Gamma$ тривиальной сети Γ назовем максимум чисел вращения по всевозможным парам граничных ребер сети Γ :*

$$\text{tw} \Gamma = \max_{(a, b)} \text{tw}(a, b).$$

Теперь справедливость следующего предложения вытекает непосредственно из общих результатов о числе вращения ломаных.

Предложение 5.20. *Плоская невырожденная локально минимальная сеть с выпуклой границей тривиальна. Ее число вращения не превосходит пяти.*

Используя предыдущее предложение, мы обобщим теорему 5.3 о паркетной реализации на случай невырожденных сетей с циклами. Последнее позволит нам применить язык паркетов для описания невырожденных локально минимальных сетей, имеющих выпуклую минимальную реализацию.

5.1.14.4. Паркетная реализация тривиальных сетей с числом вращения не более пяти

Для тривиальных сетей имеет место следующий аналог теоремы 5.3 о паркетной реализации.

Теорема 5.11. *Для каждой тривиальной сети Γ с числом вращения, не превосходящим пяти, существует односвязный (как подмножества плоскости) паркет, двойственная сеть которого планарно эквивалентна Γ , а контур представляет собой вложенную ломаную.*

Итак, из теоремы 5.11 следует, что для изучения тривиальных сетей, имеющих выпуклую минимальную реализацию, достаточно исследовать односвязные (как подмножества плоскости) паркеты, число вращения которых не превосходит пяти. Множество всех односвязных паркетов с числом вращения, не превосходящим 5, будем обозначать через \mathcal{P}_5 .

5.1.14.5. Описание паркетов общего вида

Цель настоящего пункта состоит в описании устройства паркетов общего вида. Как мы увидим, многие конструкции, разработанные нами выше для паркетов из \mathcal{WP}_5 , применимы и в общем случае. Как и выше, мы представим каждый паркет в виде объединения некоторых “элементарных кирпичей” и опишем устройство этих “кирпичей”. Все паркеты на протяжении настоящего пункта будут предполагаться связными.

Скелет и наросты. Пусть D — произвольный паркет. Напомним, что в разделе 5.1.4 было построено разложение произвольного паркета на его *скелет* и *наросты*: $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$. Такое разложение пригодится нам и при изучении паркетов общего вида.

Главное отличие паркетов общего вида от деревянных паркетов состоит в том, что, вообще говоря, не все вершины ячеек произвольного

паркета лежат на его контуре. Чтобы описать возникающие здесь новые эффекты, нам понадобятся понятия паркетной оболочки и ядра, к определению которых мы и переходим.

Паркетные оболочки и ядра паркета. Пусть M — произвольное множество вершин паркета плоскости. Путь γ , составленный из ребер ячеек, будем называть *путем во множестве M* , если все вершины пути γ принадлежат M . Множество M назовем *связным*, если каждые две вершины из M могут быть соединены путем во множестве M . Максимальные по включению связные подмножества множества M будем называть *связными компонентами множества M* .

Определение. Паркетной оболочкой множества M называется симплициальная оболочка множества M в паркете плоскости, т.е. множество всех ячеек паркета плоскости, содержащих точки из M .

Пусть D — произвольный паркет и K — его контур. Как уже говорилось выше, вершины паркетов общего вида, в отличие от вершин деревянных паркетов, могут и не лежать на контуре паркета, т.е. находиться внутри паркета.

Определение. Вершину паркета D назовем *граничной*, если она лежит на контуре K паркета D . Все остальные вершины паркета D будем называть *внутренними*.

Рассмотрим множество всех внутренних вершин паркета D и разобьем его на связные компоненты в смысле данного только что определения.

Определение. Паркетные оболочки связных компонент множества внутренних вершин паркета D называются *ядрами паркета D* (рис. 5.21).

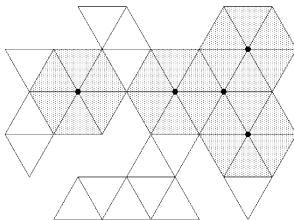


Рис. 5.21. Ядра паркета.

Ядра паркетов обладают следующими свойствами, непосредственно вытекающими из определений.

Утверждение 5.8. Пусть D — произвольный паркет. Тогда

- каждое ядро паркета D содержится в D ;
- если два ядра паркета D имеют общую ячейку, то они совпадают;
- среди всех ядер паркета плоскости, содержащихся в D , ядра паркета D являются максимальными по включению.

Итак, мы выделили в паркетах общего вида “элементарные кирпичи” — ядра, наличие которых отличает такие паркетные от деревянных. Перейдем теперь к изучению скелетов произвольных паркетов.

Узлы ветвления. Пусть S — произвольный скелет.

Определение. Внутреннюю ячейку скелета S , не входящую ни в какое ядро этого скелета, назовем *ячейкой ветвления скелета S* . Максимальные связные подпаркеты в S , составленные из его ячеек ветвления, назовем *узлами ветвления скелета S* .

Отметим, что свойство данной ячейки произвольного паркета D быть ячейкой ветвления некоторого его скелета не зависит от разложения паркета D на скелет и наросты. Поэтому можно говорить о ячейках ветвления и узлах ветвления паркета (а не скелета). Оказывается, узлы ветвления произвольного паркета устроены точно так же, как узлы ветвления деревянных паркетов. А именно, получаем следующее предложение.

Предложение 5.21. Узлы ветвления произвольных паркетов могут быть лишь тех же пяти типов, что и узлы ветвления деревянных паркетов, см. рис. 5.6.

Линейные участки. Пусть, как и выше, S — произвольный скелет.

Определение. Связные компоненты паркета, который получается после выбрасывания из S всех ядер и узлов ветвления, называются *линейными участками скелета S* (см. рис. 5.22).

Имеет место следующее несложное утверждение.

Утверждение 5.9. Если линейный участок L скелета S не совпадает со всем S , то L является линейным деревянным скелетом.

Замечание. Несложно построить пример нелинейного паркета (в частности, не деревянного), совпадающего со своим единственным линейным участком.

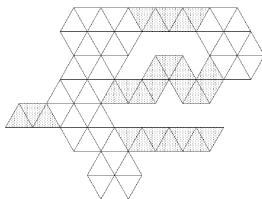


Рис. 5.22. Линейные участки.

Структурные элементы. Подведем некоторые итоги. В предыдущих разделах было построено разложение произвольного скелета S в объединение его ядер, узлов ветвления и линейных участков.

Определение. Структурными элементами скелета S будем называть его ядра, узлы ветвления и линейные участки.

Полезно разбить множество всех структурных элементов, отнеся их к следующим трем типам, в зависимости от того, как данный структурный элемент соединяется с другими структурными элементами. Назовем ребро скелета S , по которому пересекаются два различных структурных элемента этого скелета, *ребром крепления*.

Определение. Структурный элемент скелета S назовем *концевым*, если он содержит ровно одно ребро крепления, *соединительным*, если он содержит ровно два ребра крепления, и, наконец, *элементом ветвления*, если он содержит три и более ребер крепления (см. рис. 5.23).

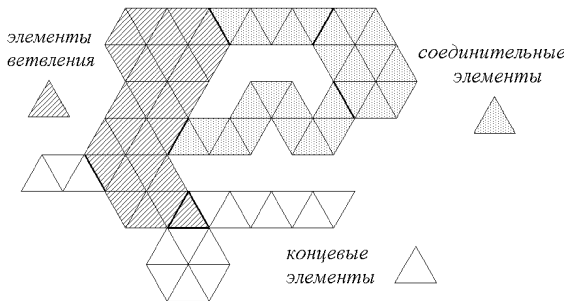


Рис. 5.23. Структурные элементы.

Отметим, что узел ветвления всегда является элементом ветвления. Линейный участок, напротив, не может быть элементом ветвления и

всегда является или концевым, или соединительным элементом. Ядра скелета могут попасть в любой из этих трех классов. Ядра, являющиеся элементами ветвления, будем называть *ядрами ветвления*.

Макроэлементы. Для многих наших дальнейших целей разбиение скелета на структурные элементы оказывается слишком мелким. Поэтому мы построим разбиение скелета на более крупные компоненты, объединив воедино смежные структурные элементы одного типа.

Пусть, как и выше, S — произвольный скелет.

Определение. Связные компоненты, на которые распадается скелет S после выбрасывания из него всех элементов ветвления, назовем *линейными макроэлементами* скелета S . Связные компоненты паркета, составленного из элементов ветвления скелета S , назовем *макроэлементами ветвления* скелета S . *Контуром макроэлемента* скелета S назовем пересечение контура скелета S с этим макроэлементом.

Таким образом, каждый скелет S может быть представлен в виде объединения своих линейных макроэлементов и макроэлементов ветвления.

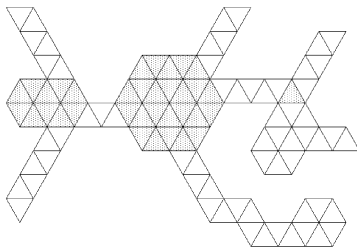


Рис. 5.24. Линейные макроэлементы и макроэлементы ветвления.

Построенное представление скелета в виде объединения его макроэлементов позволяет обобщить на случай произвольного скелета понятие концевой линейного участка, которое оказалось очень полезным для нас при изучении деревянных скелетов.

Определение. Линейный макроэлемент скелета S , содержащий некоторый концевой структурный элемент этого скелета, назовем *концевым макроэлементом* скелета S . Все остальные линейные макроэлементы из S будем называть *перемычками*.

Мы закончили описание “элементарных кирпичей”, из которых состоит произвольный скелет. Перейдем теперь к более подробному изуче-

нию паркетов из \mathcal{P}_j . Как и в случае \mathcal{WP}_j , мы сначала опишем устройство скелетов паркетов из \mathcal{P}_j , а затем — возможные расположения наростов паркетов из \mathcal{P}_j на их скелетах.

5.1.14.6. Скелеты из \mathcal{P}_j

Цель настоящего пункта — описать более подробно устройство скелетов паркетов из \mathcal{P}_j . Односвязность этих паркетов, а также условие на число вращения двойственной сети оказываются весьма существенными ограничениями, что приводит к появлению у паркетов из \mathcal{P}_j многих свойств, сходных со свойствами ранее изученных паркетов из \mathcal{WP}_j . На протяжении настоящего пункта все паркеты предполагаются связными.

Структурные элементы. Пусть S — произвольный скелет из \mathcal{P}_j . Тогда, поскольку S односвязен, несложно показать, что каждый его подпаркет, составленный из структурных элементов, также односвязен. Более того, оказывается, структурные элементы скелета S могут стыковаться друг с другом лишь простейшим образом, а именно, имеет место следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [78].

Утверждение 5.10. *Любые два структурных элемента скелета S из \mathcal{P}_j пересекаются не более чем по одному ребру.*

Следствие 5.27. *Или скелет S не содержит элементов ветвления, или он имеет не менее трех концевых макроэлементов.*

Направления концевых макроэлементов скелетов из \mathcal{P}_j .

В настоящем разделе мы обобщим понятие направлений концевого линейного участка скелета на случай скелетов из \mathcal{P}_j и сформулируем аналог предложения 5.4 для случая скелетов из \mathcal{P}_j .

Пусть S — скелет из \mathcal{P}_j и L — некоторый его концевой макроэлемент. Обозначим через e единственное ребро крепления, входящее в L . Пусть K — контур скелета S , ориентированный по часовой стрелке, и пусть a и b — последовательные ребра из K , пересекающиеся с e и лежащие на контуре концевого линейного участка L , см. рис. 5.25. Обозначим через x и y такие ребра контура концевого макроэлемента L , что число вращения между a и x , а также между y и b — максимально, т.е. выполнены следующие соотношения:

$$\text{tw}_K(a, x) = \max_z \text{tw}_K(a, z), \quad \text{tw}_K(y, b) = \max_z \text{tw}_K(z, b),$$

где максимумы берутся по всевозможным ребрам z контура концевого макроэлемента L скелета S . Отметим, что $\text{tw}_K(x_1, x_2)$ понимается здесь

как число вращения между ребрами x_1 и x_2 подломаной $K(x_1, x_2)$ ломаной K , начинающейся ребром x_1 , заканчивающейся ребром x_2 , и такой, что движение по ней от x_1 к x_2 происходит в соответствии с ориентацией ломаной K , т.е. по часовой стрелке.

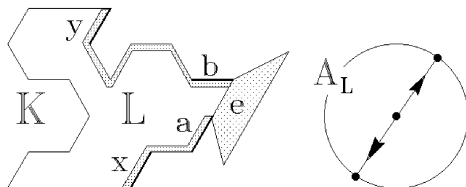


Рис. 5.25. Направления концевго линейного участка.

Рассмотрим на плоскости единичную окружность S^1 , которую будем называть *окружностью направлений*. Каждая точка этой окружности соответствует, очевидно, некоторому направлению. Направлениям паркета плоскости соответствуют вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность направлений. Ориентируем S^1 по часовой стрелке. Обозначим через A_L замкнутую дугу окружности направлений, начальная точка которой соответствует направлению ребра x , а конечная — направлению, противоположному направлению ребра y .

Определение. Направления паркета плоскости, попавшие на замкнутую дугу A_L , будем называть *направлениями концевго макроэлемента L скелета S* .

Следующее предложение является непосредственным обобщением предложения 5.4.

Предложение 5.22. Пусть S — скелет из \mathcal{P}_3 , имеющий хотя бы один элемент ветвления. Тогда среди направлений любых двух его концевых макроэлементов нет двух одинаковых.

Коды скелетов из \mathcal{P}_3 . Пусть, как и выше, S — произвольный скелет из \mathcal{P}_3 . Из предложения 5.22 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 5.28. Скелет S из \mathcal{P}_3 имеет не более 6 концевых макроэлементов, не более 4 макроэлементов ветвления и не более 3 перемычек.

По аналогии с тем, как это было сделано для скелетов из \mathcal{WP}_3 , построим по каждому скелету S из \mathcal{P}_3 плоский граф $\mathcal{C}(S)$, называемый ко-

дом скелета S , объявив ребрами графа $\mathcal{C}(S)$ линейные макроэлементы скелета S , а внутренними вершинами $\mathcal{C}(S)$ — макроэлементы ветвления. Тогда имеет место следующий аналог следствия 5.2.

Следствие 5.29. *Коды скелетов из \mathcal{P}_3 представляют собой всевозможные плоские деревья с не более чем шестью вершинами степени 1.*

Полинаросты. Оказывается, каждый линейный макроэлемент скелета из \mathcal{P}_3 можно представить в виде объединения некоторого линейного скелета L из \mathcal{WP}_3 и некоторого числа ячеек паркета плоскости, которые, вместе с ячейками из L , формируют ядра, входящие в этот макроэлемент.

Пусть D — произвольный паркет из \mathcal{P}_3 и пусть a и b — два произвольных ребра его контура. Рассмотрим связный подпаркет L в D , содержащий ребра a и b и состоящий из наименьшего возможного числа ячеек. Имеет место следующее техническое утверждение.

Утверждение 5.11. *Паркет L является линейным скелетом из \mathcal{WP}_3 .*

Пусть P — линейный макроэлемент скелета D из \mathcal{P}_3 . Если P — перемычка, то обозначим через a и b ее ребра крепления.

Пусть теперь P — некоторый концевой макроэлемент из D и a — его единственное ребро крепления. Если концевой структурный элемент Q , входящий в P , линейен, то возьмем его концевое ребро b и соединим a и b связным паркетом L , состоящим из наименьшего возможного числа ячеек, входящих в P . Если Q — концевое ядро и c — его ребро крепления, то в качестве b выберем произвольное ребро контура элемента Q , не смежное с ребром c .

Из утверждения 5.11 вытекает, что линейный макроэлемент P может быть представлен в виде линейного скелета из \mathcal{WP}_3 , соединяющего a и b , к которому добавлено некоторое число ячеек паркета плоскости, формирующих, вместе с ячейками этого линейного скелета, рассматриваемый макроэлемент. Ясно, что все добавленные ячейки входят в ядра скелета D , и образованные ими связные компоненты в дальнейшем будут называться *полинаростами*⁴.

Следствие 5.30. *Каждый линейный макроэлемент произвольного скелета из \mathcal{P}_3 представляет собой змею, лестницу или ломаную змею, на которую посажено некоторое число полинаростов.*

⁴В поисках более удачной терминологии мы вводим здесь термин “полинаросты”, заменяя использовавшийся нами ранее термин “полипы”.

Может возникнуть искушение представить в целом произвольный скелет из \mathcal{P}_3 в виде объединения скелета из \mathcal{WP}_3 и некоторого числа полинаристов. Однако, к сожалению, это представление в общем случае невозможно, как видно из примера, приведенного на рис. 5.26. Основное препятствие к существованию такого представления заключается в наличии ядер ветвления.

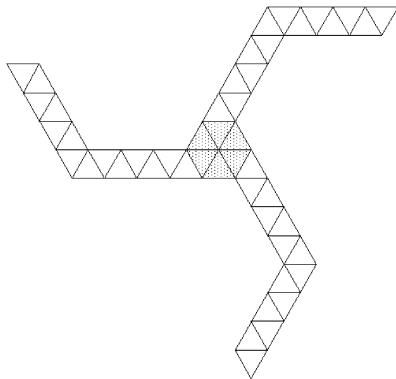


Рис. 5.26. Этот скелет из \mathcal{P}_3 нельзя представить в виде скелета из \mathcal{WP}_3 с полинаристами.

5.1.14.7. Расположение наростов в паркетах из \mathcal{P}_3 на их скелетах

Для завершения описания паркетов из \mathcal{P}_3 осталось описать возможные расположения наростов паркетов из \mathcal{P}_3 на их скелетах. Это описание во многом аналогично описанию для случая \mathcal{WP}_3 и подробно изложено в [78], а также в [74]. Здесь мы его опускаем. Отметим только, что для паркетов из \mathcal{P}_3 так же, как и для случая \mathcal{WP}_3 , можно определить аналог понятия боковины, доказать аналог утверждения о независимости этих боковин (предложение 5.6) и описать расположение наростов на боковинах каждого из возникающих типов. Это описание во многом аналогичное теореме 5.5.

5.1.14.8. Заключительное замечание

Тем самым, полностью описаны паркеты из \mathcal{P}_3 . К сожалению, в случае паркетов из \mathcal{P}_3 пока не удалось доказать аналог теоремы 5.6 о реализации, тем не менее, она, по-видимому, имеет место.

Гипотеза 5.2. *Двойственная сеть произвольного паркета из \mathcal{P} планарно эквивалентна некоторой плоской локально минимальной сети с выпуклой границей.*

5.2. Замкнутые локально минимальные сети на замкнутых поверхностях постоянной кривизны

Настоящий раздел посвящен изучению замкнутых локально минимальных сетей на замкнутых двумерных поверхностях постоянной кривизны. Эта задача явилась естественным обобщением проблемы Штейнера на стандартной двумерной сфере, возникающей, в частности, при доказательстве знаменитых принципов Плато, которые, напомним, описывают особенности мыльных пленок. Хеплес [60] получил полную классификацию замкнутых локально минимальных сетей на сфере. Задача описания замкнутых локально минимальных сетей на двумерных замкнутых поверхностях рода g , $g \geq 1$, впервые была поставлена А. Т. Фоменко [41], [42], высказавшим гипотезу, что на двумерных поверхностях постоянной кривизны эта задача может оказаться существенно проще, чем классическая задача описания локально минимальных сетей на плоскости. Первые результаты в этом направлении были получены А. L. Edmonds'ом, J. H. Ewing'ом и R. S. Kulkarni [38]. Они изучали разбиения таких поверхностей, порожденные треугольными группами, и обнаружили ряд примеров замкнутых локально минимальных сетей.

Позднее И. В. Птицына (Шклянка) [139] анонсировала теорему классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах, однако полное доказательство этой теоремы тогда найдено не было. Авторами настоящей монографии было завершено начатое в [139] исследование и найдено более простое геометрическое описание таких сетей, см. [76].

В настоящем разделе мы опишем все замкнутые локально минимальные сети на замкнутых двумерных поверхностях постоянной неотрицательной кривизны, а в случае, когда кривизна объемлющего пространства постоянна и отрицательна, мы расскажем о некоторых свойствах таких сетей и приведем несколько серий примеров.

Начнем с описания всех замкнутых двумерных поверхностей постоянной кривизны. В качестве первого примера рассмотрим сферу $S^2(r)$ радиуса r , стандартно вложенную в \mathbb{R}^3 . Напомним, что (скалярная) кривизна сферы $S^2(r)$ равна ее удвоенной гауссовой кривизне и равна $2/r^2$.

В качестве второго примера рассмотрим проективную плоскость \mathbb{RP}^2 .

Реализуем \mathbb{RP}^2 в виде фактор-пространства $S^2(r)/\mathbb{Z}_2$. Для этого отождествим на $S^2(r)$ точки, симметричные относительно центра сферы $S^2(r)$. Ясно, что кривизна такого \mathbb{RP}^2 равна кривизне сферы $S^2(r)$ и, значит, равна $2/r^2$. Такое проективное пространство будем обозначать $\mathbb{RP}^2(r)$. Хорошо известен следующий результат, см., например, [37].

Предложение 5.23. *Пусть W — замкнутое двумерное риманово многообразие постоянной положительной кривизны $2/r^2$. Тогда W изометрично или сфере $S^2(r)$, или двумерному проективному пространству $\mathbb{RP}^2(r)$.*

Далее, рассмотрим параллелограмм, натянутый на пару векторов e и f , и склеим из него замкнутую двумерную поверхность по слову $aba^{-1}b^{-1}$. Напомним, что последовательные буквы слова соответствуют последовательным сторонам рассматриваемого параллелограмма, причем одинаковые буквы соответствуют склеиваемым сторонам. При этом буква возводится в минус первую степень, если ориентация соответствующей стороны противоположна заданной заранее ориентации контура параллелограмма (ясно, что каждую пару сторон можно склеить ровно двумя способами, причем выбор конкретного способа можно осуществить, задав ориентации этих сторон). Полученная в результате поверхность является двумерным плоским тором, который мы будем обозначать $T^2(e, f)$. Если склеить параллелограмм по слову $aba^{-1}b$, то получится плоская бутылка Клейна, которую мы обозначим $K^2(e, f)$. Имеет место следующий результат, см., например, [37].

Предложение 5.24. *Пусть W — замкнутое двумерное риманово многообразие нулевой кривизны. Тогда W изометрично или двумерному тору $T^2(e, f)$, или бутылке Клейна $K^2(e, f)$ для некоторых векторов e и f .*

Пусть теперь P_g — некоторый $4g$ -угольник для некоторого $g > 1$. Расположим его на плоскости Лобачевского кривизны $k < 0$ так, чтобы стороны его были отрезками прямых в смысле Лобачевского, а сумма углов равнялась 2π (отметим, что это можно сделать многими способами). Выпишем слово $w = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ и предположим, что стороны многоугольника P_g , соответствующие одинаковым буквам, равны между собой. Склеив двумерную поверхность по слову w , получим поверхность рода g , являющуюся гладким римановым многообразием постоянной отрицательной кривизны k . Такие поверхности будем обозначать через $M_g^2(k)$. Имеет место следующий результат, см., например, [37].

Предложение 5.25. Пусть W — замкнутое двумерное ориентируемое риманово многообразие постоянной отрицательной кривизны k . Тогда W изометрично некоторой поверхности $M_g^2(k)$, $g > 1$.

В следующих разделах мы разберем отдельно каждый из случаев и приведем полную классификацию замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях положительной и нулевой кривизны.

5.2.1. Локально минимальные сети на поверхностях постоянной положительной кривизны

В настоящем разделе мы полностью опишем все замкнутые локально минимальные сети на замкнутых поверхностях постоянной положительной кривизны. Как уже отмечалось выше, все такие поверхности суть или сферы $S^2(r)$, или проективные плоскости $\mathbb{RP}^2(r)$. Заметим, что на сферах, отличающихся величиной кривизны, множество всех локально минимальных сетей имеет одну и ту же структуру: а именно, каждая локально минимальная сеть на сфере $S^2(r_1)$ превращается в локально минимальную сеть на сфере $S^2(r_2)$ под действием растяжения пространства \mathbb{R}^3 в r_2/r_1 раз. Аналогичный результат, очевидно, имеет место и для локально минимальных сетей на проективных плоскостях. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемые локально минимальные сети находятся или на сфере $S^2(1)$ единичного радиуса, которую будем обозначать просто S^2 , или на проективном пространстве $\mathbb{RP}^2(1) = \mathbb{RP}^2$, полученном факторизацией сферы единичного радиуса.

Начнем с описания классификации замкнутых локально минимальных сетей на S^2 .

5.2.1.1. Замкнутые локально минимальные сети на сфере

Локально минимальные сети на сфере S^2 были полностью описаны Хеппесом в его работе [60]. Сам Хеппес не пользуется в [60] термином “локально минимальная сеть”. Он изучал геодезические сети с “одинаково устроенными” вершинами. Из теорем о локальной структуре локально минимальных сетей, см. главу 2, вытекает, что каждая замкнутая локально минимальная сеть на любом многообразии представляет собой или замкнутую геодезическую, или геодезическую сеть, степени вершин которой равны трем, причем угол между стыкующимися в вершине ребрами сети равен 120° (поэтому все вершины такой сети “устроены одинаково”). Таким образом, задача описания замкнутых ло-

кально минимальных сетей на сфере — это частный случай решенной Хепесом задачи.

В качестве первого шага при описании замкнутых локально минимальных сетей на сфере можно воспользоваться теоремой Гаусса–Бонне, из которой вытекает, что сумма углов геодезического n -угольника на сфере больше, чем $\pi(n - 2)$ на площадь этого многоугольника. Отсюда легко вывести, что многоугольники, на которые локально минимальная сеть разбивает сферу, не могут иметь более пяти вершин.

Далее, пользуясь формулой Эйлера для сферических графов, можно получить конечный список возможных топологических типов замкнутых локально минимальных сетей на сфере (оказывается, имеется ровно 12 типов таких сетей).

Наконец, пользуясь изящными приемами сферической геометрии, предложенными Хепесом [60], можно доказать следующую нетривиальную теорему.

Теорема 5.12. *На стандартной двумерной сфере существует ровно 10, с точностью до изометрии, замкнутых локально минимальных сетей. Типы этих сетей приведены на рис. 5.27.*

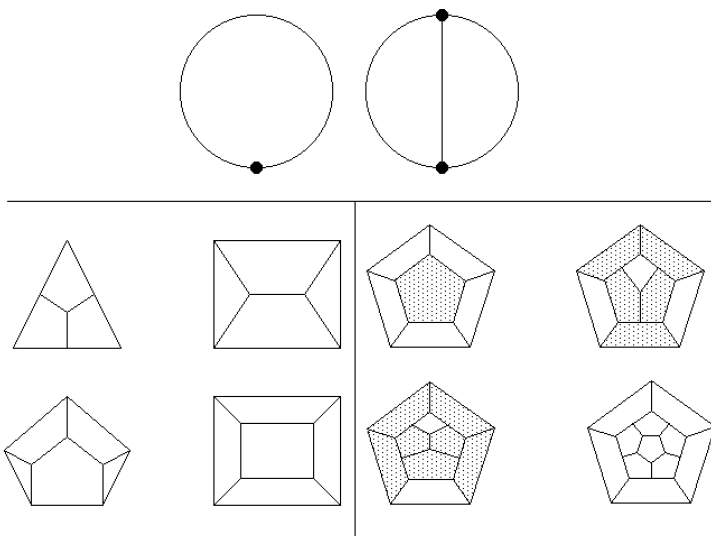


Рис. 5.27. Типы замкнутых локально минимальных сетей на стандартной сфере.

5.2.1.2. Замкнутые локально минимальные сети на \mathbb{RP}^2

Опишем теперь замкнутые локально минимальные сети на проективных пространствах постоянной положительной кривизны k . Как уже отмечалось выше, можно считать, что кривизна k равна 1.

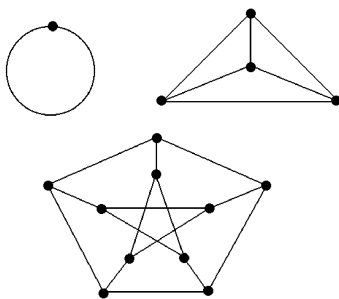
Пусть $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ — стандартная проекция, склеивающая диаметрально противоположные точки сферы S^2 . Очевидно, отображение π является локальной изометрией. Если Γ — замкнутая локально минимальная сеть на \mathbb{RP}^2 , то $\pi^{-1}(\Gamma)$ — замкнутая локально минимальная сеть⁵ на S^2 , переходящая в себя при центральной симметрии относительно центра сферы S^2 . Обратно, если Γ' — замкнутая локально минимальная сеть на S^2 , переходящая в себя при центральной симметрии относительно центра сферы S^2 , то $\pi(\Gamma')$ — замкнутая локально минимальная сеть⁶ на \mathbb{RP}^2 . Итак, для того чтобы описать все замкнутые локально минимальные сети на проективной плоскости \mathbb{RP}^2 , достаточно описать все замкнутые локально минимальные сети на S^2 , переходящие в себя при центральной симметрии относительно центра сферы S^2 . Получаем следующий результат.

Теорема 5.13. *На проективной плоскости \mathbb{RP}^2 существует ровно 3, с точностью до изометрии, замкнутых локально минимальных сети, см. 5.28. Эти сети являются образами при стандартной проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ следующих сетей на сфере: сети, образ которой — замкнутая геодезическая, сети, параметризованной одномерным остовом куба, и сети, параметризованной одномерным остовом додекаэдра.*

В следующих двух разделах мы изучим замкнутые локально минимальные сети на замкнутых двумерных поверхностях нулевой кривизны. Как было отмечено выше, такие поверхности могут быть либо торами, либо бутылками Клейна. Начнем со случая торов.

⁵Более формально, пусть $\pi: M \rightarrow N$ — произвольное накрытие, $\Gamma: G \rightarrow N$ — связная вложенная сеть и V — множество вершин графа G . Построим (обобщенный) граф G' с множеством вершин $V' = \pi^{-1}(\Gamma(V))$, соединив вершины $x, y \in V'$ ребром тогда и только тогда, когда $\pi(x)$ и $\pi(y)$ соединяются ребром γ сети Γ , а поднятие γ' кривой γ , начинающееся в x , приходит в y . Поднятия γ' и задают ребра сети $\pi^{-1}(\Gamma): G' \rightarrow M$.

⁶Пусть $\pi: M \rightarrow N$ — произвольное накрытие, порожденное группой Δ , действующей на M , и $\Gamma': G' \rightarrow M$ — связная вложенная (обобщенная) сеть, инвариантная относительно действия группы Δ . Условие инвариантности сети позволяет определить действие группы Δ на графе G' , согласованное с действием на M . Фактор-граф G'/Δ обозначим через G . Если $\nu: G' \rightarrow G$ — каноническая проекция, то, как легко видеть, однозначно определена (обобщенная) сеть $\Gamma: G \rightarrow N$, такая, что $\Gamma \circ \nu = \pi \circ \Gamma'$. Такую сеть Γ мы и обозначили через $\pi(\Gamma')$.

Рис. 5.28. Типы замкнутых локально минимальных сетей на \mathbb{RP}^2 .

5.2.2. Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских торах

В случае сфер и проективных плоскостей постоянной кривизны существует ровно один класс подобия таких римановых многообразий. Так как подобие не меняет структуры множества всех локально минимальных сетей, то естественно классификацию проводить с точностью до подобия. В результате мы приходим к задаче описания всех замкнутых локально минимальных сетей на стандартной сфере единичного радиуса (проективном пространстве, полученном факторизацией такой сферы).

В случае плоских торов также определено подобие, и оно также переводит локально минимальные сети в локально минимальные. Однако на торе существует уже двупараметрическое семейство классов подобия плоских римановых метрик. Это приводит к тому, что ситуация на торе оказывается намного богаче, чем на сфере или проективной плоскости. Оказывается, на неподобных торах встречаются, вообще говоря, локально минимальные сети разного топологического типа.

Отметим, что в случае сфер мы определили подобие как преобразование, индуцированное на сфере сохраняющим ориентацию сжатием/растяжением евклидова пространства, в котором наша сфера расположена. Во внутренних терминах это определение можно дать так.

Определение. Две римановых метрики на данном многообразии назовем *подобными*, если после умножения одной из них на константу найдется гомотопный тождественному отображению диффеоморфизм этого многообразия на себя, являющийся изометрией полученных метрик.

5.2.2.1. Описание плоских метрик на двумерных торах

Напомним, что метрика на римановом двумерном многообразии W называется *плоской*, если в окрестности каждой точки $P \in W$ существует такая система координат, что в ней метрика на W становится постоянной и евклидовой.

Пусть T^2 — некоторый тор. Опишем классы подобных плоских метрик на торе T^2 . Фиксируем в группе одномерных гомологий тора некоторый базис (h_1, h_2) . Тогда если на торе T^2 фиксирована плоская метрика, то в классах h_i можно выбрать ориентированные замкнутые геодезические, разрезая тор по которым мы получим ориентированный параллелограмм (ориентация параллелограмма задается порядком элементов базиса (h_1, h_2)). Этот параллелограмм называется *каноническим параллелограммом*.

Предложение 5.26. *Две плоских метрики на торе T^2 подобны, если и только если их канонические параллелограммы ориентируемо подобны (т.е. существует сохраняющее ориентацию подобие, переводящее один из них в другой). Таким образом, с точностью до подобия, плоские метрики на торе T^2 могут быть заданы ориентированным параллелограммом, порожденным парой векторов (e_1, f) на стандартной евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , снабженной декартовыми координатами, где $e_1 = (1, 0)$, а f — произвольный вектор из верхней полуплоскости.*

В дальнейшем мы будем обозначать плоский тор, канонический параллелограмм которого порожден векторами e_1 и f , через $T^2(f)$. Так как, в соответствии с вышесказанным, на подобных торах замкнутые локально минимальные сети устроены одинаково, мы ограничимся рассмотрением только плоских торов вида $T^2(f)$.

5.2.2.2. Группа сдвигов, решетка и универсальное накрытие плоского тора

Построим теперь важные объекты, соответствующие плоскому тору $T^2(f)$, называемые решеткой и группой сдвигов этого тора. Определим *группу сдвигов G_f тора $T^2(f)$* как группу сдвигов на целочисленные линейные комбинации векторов e_1 и f . Очевидно, $G_f \approx \mathbb{Z}^2$. Пару e_1, f сдвигов на векторы e_1 и f , соответственно, назовем *каноническим базисом группы G_f* .

Множество точек плоскости \mathbb{R}^2 вида $\alpha e_1 + \beta f$, где α и β — произвольные целые числа, т.е. орбиту начала координат под действием

группы G_f , назовем *решеткой тора* $T^2(f)$ и будем обозначать через L_f . Очевидно, разным торам $T^2(f)$ соответствуют разные группы сдвигов и разные решетки. Так же, как и в случае группы G_f , пару $e_1 f$ назовем *каноническим базисом решетки* L_f .

Группа сдвигов тора $T^2(f)$ позволяет построить локально изометричное накрытие $\pi_f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2(f)$ этого тора евклидовой плоскостью, называемое *универсальным накрытием*. А именно, пусть $x' \in \mathbb{R}^2$ — произвольная точка плоскости. Тогда существуют такие числа a' и b' , что $x' = a'e_1 + b'f$. Положим $a = \{a'\}$ и $b = \{b'\}$, где $\{c\}$ обозначает дробную часть вещественного числа c (напомним, что дробная часть $\{c\}$, по определению, положительна). Ясно, что точка $x = ae_1 + bf$ лежит в каноническом параллелограмме тора $T^2(f)$, т.е., фактически, в самом торе. Точка x , рассматриваемая как точка тора $T^2(f)$, и является образом точки x' при отображении π_f . Легко видеть, что полный прообраз точки x при построенном отображении π_f состоит из всех точек плоскости \mathbb{R}^2 , отличающихся от точки x' (и друг от друга) на вектор из решетки L_f : если y и z — две произвольные точки из $\pi_f^{-1}(x)$, то существует $h \in L_f$, такой, что $z = y + h$. Обратно, для любого $h \in L_f$ и любой точки $y \in \pi_f^{-1}(x)$ точка $z = y + h$ лежит в $\pi_f^{-1}(x)$. Таким образом, полный прообраз $\pi_f^{-1}(x)$ произвольной точки x тора $T^2(f)$ получается сдвигом решетки L_f на вектор x .

Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на плоском торе $T^2(f)$, а $\pi_f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2(f)$ — локально изометричное универсальное накрытие. Пусть $\Gamma' = \pi_f^{-1}(\Gamma)$. Из теоремы о локальной структуре локально минимальных следов, см. главу 2, вытекает, что Γ' представляет собой обобщенную сеть, состоящую из бесконечного числа ребер-отрезков, стыкующихся в вершинах этой сети под равными 120° углами. Поэтому сеть Γ' разбивает плоскость \mathbb{R}^2 на шестиугольники с углами по 120° , которые так же, как и их π_f -образы на торе, мы будем называть *ячейками*. Ясно, что обобщенная сеть Γ' может быть названа замкнутой (так как степени всех ее вершин равны трем) локально минимальной (в силу выполнения условий теоремы о локальном устройстве локально минимальных следов) сетью. Мы не будем развивать теорию бесконечных локально минимальных сетей, так как это выходит за рамки настоящей монографии. Однако в дальнейшем, лишь для удобства изложения, мы будем называть сеть, разбивающую плоскость (так же, как и сеть Γ') в объединение шестиугольников с углами по 120° , *бесконечной замкнутой локально минимальной сетью на плоскости*. При этом разбиение плоскости сетью Γ' будем называть разбиением, *порожденным замкнутой локально минимальной сетью* Γ из $T^2(f)$.

Сеть Γ' , очевидно, обладает следующим свойством “периодичности”: она инвариантна относительно сдвигов на элементы группы сдвигов G_f тора $T^2(f)$. Обратно, если некоторая бесконечная замкнутая локально минимальная сеть Γ' на плоскости \mathbb{R}^2 инвариантна относительно сдвигов на элементы из G_f , то образ Γ сети Γ' при проекции π_f является замкнутой локально минимальной сетью на $T^2(f)$. Таким образом, задача описания замкнутых локально минимальных сетей на торе $T^2(f)$ сводится к описанию “периодичных” (по отношению к G_f) бесконечных замкнутых локально минимальных сетей на плоскости \mathbb{R}^2 .

5.2.2.3. Сетевые геодезические

Так же, как и в случае сферы S^2 , на торе имеются замкнутые локально минимальные сети, состоящие из одной вершины и одного инцидентного ей ребра. Такие сети на $T^2(f)$ легко описать: их классы деформационной эквивалентности классифицируются парами взаимно простых целых чисел (p, q) , $q > 0$. При этом каждой такой паре ставится в соответствие класс деформационной эквивалентности сети, образ которой — замкнутая геодезическая, получающаяся при проекции π_f из прямой, параллельной вектору $pe_1 + qf$.

В дальнейшем все рассматриваемые замкнутые локально минимальные сети на плоских торах предполагаются отличными от замкнутых геодезических.

Удобным понятием для классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах является понятие сетевой геодезической. Напомним, что тор $T^2(f)$ предполагается ориентированным. Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на $T^2(f)$. Выберем произвольное ребро I сети Γ и ориентируем его. Будем двигаться по I в положительном направлении до тех пор, пока не придем в инцидентную I вершину V . Из вершины V выходят еще два ребра сети Γ , которые мы обозначим через I_l и I_r в зависимости от того, в какую сторону мы повернем, направо или налево, при переходе с ребра I на одно из этих ребер (сравните с определением числа вращения плоского 2-дерева). Предположим, что мы свернули налево. Тогда, продолжив движение по ребру I_l , мы дойдем до вершины сети Γ , в которой из двух инцидентных ей ребер I'_l и I'_r , отличных от I_l , выберем ребро I'_r и, повернув направо, будем продолжать движение по I'_r . В следующей вершине мы вновь свернем налево. Итак, будем двигаться по сети Γ , попеременно сворачивая то направо, то налево, до тех пор, пока не попадем в одну из уже пройденных вершин сети Γ . В действительности, как легко прове-

речь, мы вернемся в начальную вершину (ориентированного) ребра I . Полученную ломаную, составленную из ребер сети Γ , назовем *замкнутой сетевой геодезической* на торе $T^2(f)$, а произвольную ее связную часть — просто *сетевой геодезической*.

Пусть $\pi_f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2(f)$ — локально изометричное универсальное накрытие, Γ' — поднятие сети Γ на плоскость \mathbb{R}^2 с помощью проекции π_f и γ — замкнутая сетевая геодезическая в Γ . Прообраз $\pi_f^{-1}(\gamma)$ сетевой геодезической γ при отображении π_f состоит из объединения бесконечных ломаных (ломаных, имеющих бесконечное число звеньев), каждая из которых может быть рассмотрена как сетевая геодезическая в Γ' . Действительно, легко видеть, что при движении по каждой такой ломаной мы попеременно сворачиваем в ее вершинах то налево, то направо. Полученные сетевые геодезические в сети Γ' мы будем называть *сетевыми прямыми*, а каждую связную подломаную в сетевой прямой — просто *сетевой геодезической*.

Сетевые геодезические можно определить и немного по-другому. Для этого разобьем множество ребер сети Γ' на три класса параллельности, отнеся к каждому из них взаимно параллельные ребра. Легко видеть, что ребра сети Γ' , относящиеся к разным классам параллельности, переводятся проекцией π_f в разные ребра сети Γ . Назовем *классом параллельности* ребер сети Γ образ класса параллельности ребер сети Γ' при проекции π_f . Таким образом, мы также разбили ребра сети Γ на три класса параллельности.

Напомним, что *путем в графе* называется связный подграф, степени вершин которого не превосходят 2.

Определение. Путь γ в сети Γ (сети Γ') назовем *сетевой геодезической*, если его ребра принадлежат не более чем двум классам параллельности. Максимальные по включению сетевые геодезические в Γ назовем *замкнутыми*, а в Γ' — *сетевыми прямыми*.

Очевидно, замкнутые сетевые геодезические и сетевые прямые в Γ и Γ' , соответственно, не имеют самопересечений. Более того, образ при проекции π_f каждой сетевой прямой сети Γ' есть некоторая замкнутая сетевая геодезическая в Γ .

Чтобы полностью охарактеризовать класс деформационной эквивалентности замкнутой локально минимальной сети Γ на $T^2(f)$, достаточно, оказывается, иметь информацию о двух произвольных пересекающихся замкнутых сетевых геодезических из Γ . Этим объясняется введенное ниже определение.

Рассмотрим произвольное ребро I сети Γ . Ясно, что через ребро I

проходит ровно две замкнутых сетевых геодезических, которые мы обозначим через γ_1 и γ_2 . Ориентируем ребро I , что задаст нам ориентацию сетевых геодезических γ_i . Пару $\gamma_1\gamma_2$ замкнутых ориентированных сетевых геодезических назовем *базисом сети* Γ .

Определим соответствующий объект для сети Γ' . Пусть A и B — пара вершин сети Γ' , а G_f — группа сдвигов тора $T^2(f)$. Вершины A и B называются G_f -эквивалентными, если существует сдвиг τ из G_f , переводящий A в B . Сетевую геодезическую в Γ' назовем *периодической*, если ее концевые вершины G_f -эквивалентны. Периодическую сетевую геодезическую в Γ' назовем *неприводимой*, если среди ее внутренних вершин нет G_f -эквивалентных ее концевым вершинам. В противном случае будем называть периодическую сетевую геодезическую *приводимой*.

Пусть V — конечная вершина ориентированного ребра I , а O — произвольная точка из \mathbb{R}^2 , такая, что $\pi_f(O) = V$. Без ограничения общности можно считать, что O совпадает с началом координат, чего всегда можно добиться с помощью некоторого сдвига на торе $T^2(f)$ ⁷.

Пусть I' — единственное ребро сети Γ' , приходящее в O и такое, что $\pi_f(I') = I$. Пусть $\tilde{\gamma}'_1$ и $\tilde{\gamma}'_2$ — сетевые прямые, проходящие через I' . Точка O является вершиной обеих этих сетевых геодезических. Ориентируем $\tilde{\gamma}'_1$ и $\tilde{\gamma}'_2$ так, чтобы O была конечной точкой ребра I' . Часть сетевой геодезической $\tilde{\gamma}'_i$, начинающуюся в O и идущую в положительном направлении, назовем *сетевым лучом с началом в O* и обозначим через $\tilde{\gamma}'_i$.

Пусть A_i — первая, отличная от O , вершина сетевого луча $\tilde{\gamma}'_i$ среди тех его вершин, которые G_f -эквивалентны O . Так как $O \in L_f$, то A_i — ближайшая к O на $\tilde{\gamma}'_i$ точка решетки L_f . Обозначим через γ'_i неприводимую сетевую геодезическую, зажатую между O и A_i . Ясно, что $\pi_f(\gamma'_i) = \gamma_i$. Ориентация замкнутой сетевой геодезической γ_i порождает ориентацию на γ'_i . Ориентированную неприводимую сетевую геодезическую в Γ' назовем *базисной сетевой геодезической* в Γ' , *соответствующей γ_i* . При этом точку A_i будем называть *концом базисной геодезической γ'_i* , а точку O — *началом γ'_i* . Пару $\gamma'_1\gamma'_2$ ориентированных базисных сетевых геодезических сети Γ' назовем *базисом сети Γ' , соответствующим базису $\gamma_1\gamma_2$ сети Γ* .

⁷Сдвиг на торе может быть определен так. Если τ' — произвольный сдвиг на \mathbb{R}^2 , то единственная изометрия τ тора $T^2(f)$, порожденная τ' , называется *сдвигом на торе*. В явном виде изометрия τ задается так: $\tau(x) = \pi_f(\tau'(\pi_f^{-1}(x)))$, где x — произвольная точка из $T^2(f)$.

5.2.2.4. Тип сети

В настоящем пункте мы определим важную алгебраическую характеристику сети Γ , так называемый тип, в терминах которого мы и будем проводить классификацию.

Пусть γ' — произвольная периодическая ориентированная сетевая геодезическая сети Γ' , точка A — ее начало, а B — ее конец. Пусть τ — сдвиг из G_f , переводящий A в B . Разложим τ по каноническому базису e_1f : $\tau = pe_1 + qf$.

Определение. Пару (p, q) назовем *типом ориентированной периодической сетевой геодезической* γ' .

Отметим, что каждая периодическая сетевая геодезическая состоит из четного числа ребер.

Определение. Число пар ребер, составляющих периодическую сетевую геодезическую, назовем *длиной* этой сетевой геодезической.

Имеет место следующее техническое утверждение.

Утверждение 5.12. Пусть γ' — ориентированная периодическая сетевая геодезическая сети Γ' и (p, q) — тип γ' . Тогда γ' обладает следующими свойствами.

- Сетевая геодезическая γ' неприводима тогда и только тогда, когда (p, q) — пара взаимно простых чисел.
- Сонаправленные неприводимые сетевые геодезические имеют одну и ту же длину и один и тот же тип.
- Две вершины неприводимой сетевой геодезической γ' являются G_f -эквивалентными тогда и только тогда, когда они — концевые вершины в γ' .
- Тип и длина периодической сетевой геодезической кратны с одним и тем же положительным коэффициентом соответственно типу и длине неприводимой сетевой геодезической того же направления. Точнее, если $\bar{\gamma}'$ — периодическая сетевая геодезическая типа (\bar{p}, \bar{q}) и длины \bar{m} , а γ' — сонаправленная с $\bar{\gamma}'$ неприводимая сетевая геодезическая типа (p, q) и длины m , то существует такое положительное целое число k , что $\bar{p} = kp$, $\bar{q} = kq$ и $\bar{m} = km$.

Из утверждения 5.12 вытекает следующий важный результат. Пусть $\gamma'_1\gamma'_2$ — базис сети Γ' , а (p_i, q_i) — тип базисной сетевой геодезической γ'_i .

Отметим, что если A_i — конец ориентированной сетевой геодезической γ'_i , то $A_i = p_i e_1 + q_i f$, т.е. тип (p_i, q_i) в данном случае совпадает с координатами точки A_i в каноническом базисе решетки L_f тора $T^2(f)$.

Утверждение 5.13. *Наибольший общий делитель чисел (p_i, q_i) равен 1.*

Запишем полученные числа (p_i, q_i) в матрицу $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ и обозначим через $m_1 = m$ и $m_2 = n$ длины базисных геодезических γ'_1 и γ'_2 соответственно.

Определение. Тройку (\mathcal{M}, m, n) назовем *типом замкнутой локально минимальной сети* Γ в базисе $\gamma_1 \gamma_2$. При этом матрицу \mathcal{M} будем называть *матрицей типа*, а числа m и n — соответственно, *горизонтальным* и *вертикальным периодами*. Ту же терминологию мы будем часто распространять и на сеть Γ' с базисом $\gamma'_1 \gamma'_2$, соответствующим $\gamma_1 \gamma_2$.

Следующее предложение является ключевым в теории типов замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах.

Предложение 5.27. *Типы базисных сетевых геодезических являются парами взаимно простых чисел. Матрица типа, по столбцам которой стоят типы базисных сетевых геодезических, невырождена. Горизонтальный и вертикальный периоды делятся на определитель матрицы типа.*

Свойства, сформулированные в предложении 5.27, легли в основу следующего определения.

Определение. Тройку (\mathcal{M}, m, n) назовем *допустимой*, если

- $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ — целочисленная матрица с ненулевым определителем Δ , такая, что пары (p, q) и (r, s) состоят из взаимно простых чисел;
- m и n — целые положительные числа, кратные Δ .

Таким образом, тип каждой замкнутой локально минимальной сети на плоском торе $T^2(f)$ (в каждом базисе сети) является допустимой тройкой. Мы покажем, что верно и обратное утверждение, а именно: каждая допустимая тройка реализуется как тип некоторой замкнутой

локально минимальной сети на некотором плоском торе в некотором базисе этой сети. Более того, типы являются инвариантами замкнутых локально минимальных сетей: деформационно эквивалентные сети имеют одинаковые типы (опять же, в некоторых базисах этих сетей). Поэтому допустимые тройки можно было бы использовать для классификации. Однако сначала мы избавимся от зависимости типа сети от ее базиса.

Для этого, первое, что мы сделаем, — это упорядочим базисные сетевые геодезические $\gamma_1 \gamma_2$ так, чтобы определитель матрицы типа был положителен. В дальнейшем мы всегда будем считать, что условие положительности определителя матрицы типа выполнено. Поэтому *переопределим понятие типа сети и допустимой тройки, добавив условие положительности определителя матрицы \mathcal{M} .*

Теперь, с учетом сделанного соглашения, выясним, как меняется тип сети при переходе к новому базису сети.

Предложение 5.28. Пусть (\mathcal{M}, m, n) — тип замкнутой локально минимальной сети Γ на плоском торе $T^2(f)$ в некотором базисе сети. Положим $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$, $\Delta = \det(\mathcal{M}) > 0$, $m = u\Delta$, $n = v\Delta$. Тогда полный список различных типов сети Γ во всевозможных ее базисах состоит из следующих шести элементов:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, m, n \right), \left(\begin{pmatrix} -p & -r \\ -q & -s \end{pmatrix}, m, n \right), \\ & \left(\begin{pmatrix} r & \frac{ur - vp}{d} \\ s & \frac{us - vq}{d} \end{pmatrix}, n, \frac{uv\Delta}{d} \right), \left(\begin{pmatrix} -r & -\frac{ur - vp}{d} \\ -s & -\frac{us - vq}{d} \end{pmatrix}, n, \frac{uv\Delta}{d} \right), \\ & \left(\begin{pmatrix} \frac{ur - vp}{d} & -p \\ \frac{us - vq}{d} & -q \end{pmatrix}, \frac{uv\Delta}{d}, m \right), \left(\begin{pmatrix} -\frac{ur - vp}{d} & p \\ -\frac{us - vq}{d} & q \end{pmatrix}, \frac{uv\Delta}{d}, m \right). \end{aligned}$$

Здесь d — наибольший общий делитель чисел $ur - vp$ и $us - vq$.

Формулы из предложения 5.28 можно сделать намного менее громоздкими. Для этого мы заметим, что множество всех допустимых троек хорошо моделируется целочисленными 2×2 матрицами с положительным определителем (множество таких матриц обозначим через $M_2^+(\mathbb{Z})$). А именно, пусть $(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, m, n)$ — допустимая тройка, $\Delta = \det(\mathcal{M}) > 0$. Поставим в соответствие этой тройке матрицу

$g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ следующим образом. Положим $u = m/\Delta$, $v = n/\Delta$. Тогда

$$g = \begin{pmatrix} vp & ur \\ vq & us \end{pmatrix}.$$

Обратно, пусть $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ — произвольная матрица, $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$. Обозначим через v наибольший общий делитель чисел P и Q , а через u — наибольший общий делитель чисел R и S . Положим $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} P/v & R/u \\ Q/v & S/u \end{pmatrix}$. Пусть $\Delta = \det(\mathcal{M})$. Положим $m = u\Delta$ и $n = v\Delta$. Ясно, что тройка (\mathcal{M}, m, n) допустимая. Легко показывается, что построенные два отображения (из множества допустимых троек во множество $M_2^+(\mathbb{Z})$ и обратно) являются взаимно обратными. Таким образом, между множеством допустимых троек и множеством матриц из $M_2^+(\mathbb{Z})$ существует естественное взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем матрицы из $M_2^+(\mathbb{Z})$ мы также будем называть *типами* замкнутых локально минимальных сетей (опять же в соответствующих базисах этих сетей). Иногда, чтобы отличать эти типы от типов, заданных допустимыми тройками, мы будем называть их *M-типами*.

На языке *M-типов* предложение 5.28, после непосредственных вычислений, может быть переформулировано так.

Предложение 5.29. Пусть $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ — тип замкнутой локально минимальной сети Γ на плоском торе $T^2(f)$ в некотором базисе сети. Тогда полный список различных типов сети Γ во всевозможных ее базисах состоит из следующих шести элементов:

$$\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -P & -R \\ -Q & -S \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} R & R-P \\ S & S-Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -R & P-R \\ -S & Q-S \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} R-P & -P \\ S-Q & -Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P-R & P \\ Q-S & Q \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу J из $M_2^+(\mathbb{Z})$, положив $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица J порождает циклическую (по умножению) группу $\langle J \rangle$ шестого порядка. Рассмотрим действие группы $\langle J \rangle$ на $M_2^+(\mathbb{Z})$ умножениями справа. Если

$g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix} \in M_2^+(\mathbb{Z})$ — тип сети Γ , то множество $[g] = \{gJ^k\}_{k=0}^5$ состоит из шести различных матриц, являющихся типами сети Γ во всевозможных базисах этой сети. Поэтому под *типами замкнутых локально минимальных сетей* на плоских торах естественно понимать элементы однородного пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$, что мы и будем делать. Так переопределенный тип уже не зависит от базиса сети.

Замечание. В терминах типа легко вычисляются количества вершин, ребер и граней (ячеек) сети этого типа. А именно, если v , ϵ и f — количества вершин, ребер и граней замкнутой локально минимальной сети Γ типа (\mathcal{M}, m, n) , $\Delta = \det(\mathcal{M})$, то

$$v = 2mn/\Delta, \quad \epsilon = 3mn/\Delta, \quad f = mn/\Delta.$$

Если $m = u\Delta$, $n = v\Delta$, то

$$v = 2uv\Delta, \quad \epsilon = 3uv\Delta, \quad f = uv\Delta.$$

Если $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ — один из M -типов, а $\overline{\Delta}$ — определитель матрицы g , то

$$v = 2\overline{\Delta}, \quad \epsilon = 3\overline{\Delta}, \quad f = \overline{\Delta}.$$

5.2.2.5. Характеристический треугольник

Пусть $T^2(f)$ — плоский тор, а $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ — некоторая матрица из $M_2^+(\mathbb{Z})$. Положим $A = Pe_1 + Qf$, $B = Re_1 + Sf$.

Определение. Построенный треугольник OAB называется *характеристическим треугольником типа $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ для тора $T^2(f)$* .

Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на $T^2(f)$ и $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ — ее M -тип.

Определение. Характеристический треугольник типа g тора $T^2(f)$ называется *характеристическим треугольником замкнутой локально минимальной сети Γ* в том базисе сети Γ , в котором g является M -типом этой сети.

Следующее утверждение непосредственно получается из предложения 5.29.

Утверждение 5.14. *Характеристические треугольники, соответствующие разным базисам сети Γ , конгруэнтны между собой.*

Итак, с точностью до конгруэнтности, существует ровно один характеристический треугольник для данной сети на данном торе. В дальнейшем под *характеристическим треугольником замкнутой локально*

минимальной сети Γ (независимо от базиса этой сети) мы будем понимать любой из возможных характеристических треугольников. Оправданием этого может служить то обстоятельство, что нас будут интересовать лишь свойства характеристического треугольника, не зависящие от его расположения на плоскости.

Оказывается, свойства характеристического треугольника тесно связаны с существованием на данном плоском торе замкнутых локально минимальных сетей заданного типа. Начнем со следующего утверждения.

Утверждение 5.15. *Пусть OAB — характеристический треугольник замкнутой локально минимальной сети Γ на плоском торе $T^2(f)$. Тогда все углы треугольника OAB меньше 120° , т.е. вершины O , A и B можно затянуть невырожденной локально минимальной сетью Штейнера Γ_χ . Более того, ребра сети Γ_χ параллельны соответствующим ребрам сети Γ' .*

Определение. Сеть Γ_χ из утверждения 5.15 назовем *характеристической сетью*, соответствующей сети Γ .

5.2.2.6. Классификационные теоремы

В настоящем пункте мы приведем основные результаты классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских двумерных торах. Основную роль в нашей классификации будут играть определенные выше типы сетей.

Отметим, что замкнутые локально минимальные сети на плоских торах можно деформировать, получая при этом неизометричные локально минимальные сети. Чтобы представить возможные деформации, рассмотрим произвольную ячейку такой сети и будем сжимать ее, двигая равномерно с одинаковыми скоростями ее вершины по биссектрисам внутренних углов этой ячейки. Ясно, что мы можем таким образом деформировать каждую ячейку локально минимальной сети. При таких деформациях сеть остается в том же классе деформационной эквивалентности. Естественно, хотелось бы выбрать в каждом таком классе локально минимальную сеть, устроенную наиболее регулярно. Оказывается, это действительно можно сделать. При этом, благодаря своей регулярности, такие сети могут быть легко описаны.

Определение. Замкнутую локально минимальную сеть на торе назовем *правильной*, если все ее ячейки могут быть получены из фиксированной ячейки некоторыми сдвигами.

Замечание. Определение правильной сети и идея использовать эти сети при классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах принадлежат И. В. Птицыной, см. [139].

Следующая теорема позволяет свести классификацию замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах к классификации правильных сетей.

Теорема 5.14. *Для каждой замкнутой локально минимальной сети Γ на данном плоском двумерном торе $T^2(f)$ существует единственная (с точностью до сдвига) деформационно эквивалентная ей правильная локально минимальная сеть Γ_r . Длины сетей Γ и Γ_r равны, поэтому деформационно эквивалентные локально минимальные сети имеют одинаковые длины.*

Более того, каждая локально минимальная сеть на $T^2(f)$ может быть продеформирована в произвольную деформационно эквивалентную ей локально минимальную сеть в классе локально минимальных сетей.

Выше мы ввели понятие типа локально минимальной сети, в частности, понятие M -типа. Следующая теорема показывает, что тип можно использовать для классификации (с точностью до деформационной эквивалентности) замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах. Более того, оказывается, каждый тип реализуется некоторой замкнутой локально минимальной сетью на некотором плоском торе.

Теорема 5.15. *Деформационно эквивалентным замкнутым локально минимальным сетям соответствуют одинаковые типы из пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$. Для каждого элемента $[g] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ существуют такая плоская метрика на T^2 и такая замкнутая локально минимальная в этой метрике сеть Γ , что $[g]$ является типом сети Γ .*

Таким образом, замкнутые локально минимальные сети на плоских торах классифицируются, с точностью до деформационной эквивалентности, элементами однородного пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$.

Теорема 5.15, однако, не позволяет ответить на вопрос, существует ли на данном конкретном плоском торе замкнутая локально минимальная сеть заранее заданного типа. В следующей теореме описывается конструктивный критерий существования таких сетей.

Теорема 5.16. *На фиксированном плоском торе $T^2(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть данного M -типа $[g]$ в том*

и только том случае, когда все углы характеристического треугольника типа g для тора $T^2(f)$ меньше 120° .

Таким образом, чтобы понять, существует ли на данном плоском торе замкнутая локально минимальная сеть типа $[g]$, достаточно построить для этого тора характеристический треугольник типа g и измерить у него углы.

Замечание. Пусть $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ — матрица из $M_2^+(\mathbb{Z})$ и OAB — характеристический треугольник типа g для тора $T^2(f)$. Пусть (a, b) — координаты вектора f в стандартном ортонормированном базисе e_1e_2 и пусть в этом же базисе координаты вершин A и B треугольника OAB равны (A_1, A_2) и (B_1, B_2) соответственно. Положим $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}g.$$

Замечание. Характеристический треугольник удобно также описывать в комплексной форме. Пусть, в обозначениях предыдущего замечания, $z = a + ib$ — соответствующее вектору f комплексное число. Тогда

$$A = P + Qz, \quad B = R + Sz.$$

Напомним, что, в соответствии с теоремой 5.14, деформационно эквивалентные замкнутые локально минимальные сети имеют одинаковые длины. В следующей теореме мы покажем, что длину замкнутой локально минимальной сети можно вычислить, зная длину соответствующей характеристической сети.

Теорема 5.17. Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на плоском торе $T^2(f)$. Пусть Γ_χ — характеристическая сеть, соответствующая Γ . Тогда длины сетей Γ и Γ_χ равны между собой.

Пусть $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix} \in M_2^+(\mathbb{Z})$ — тип сети Γ , (a, b) — координаты вектора f в стандартном базисе e_1e_2 и $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{F}g = \begin{pmatrix} K & M \\ L & N \end{pmatrix}$ — матрица, по столбцам которой стоят координаты (в базисе e_1e_2) вершин A и B характеристического треугольника OAB сети Γ для тора $T^2(f)$.

Теорема 5.18. Длина ℓ сети Γ может быть вычислена так:

$$\ell^2 = K^2 - KM + M^2 + L^2 - LN + N^2 + \sqrt{3} \det(\mathcal{E}).$$

Пусть $z = a + ib$. Теорему 5.18 можно переписать в комплексной форме так.

Теорема 5.19. *Длина ℓ сети Γ может быть вычислена так:*

$$\ell = |(P - Re^{i\pi/3}) + (Q - Se^{i\pi/3})z|.$$

В следующих теоремах для каждого фиксированного плоского тора $T^2(f)$ определяются все элементы $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$, для которых на таком торе существуют замкнутые локально минимальные сети типов $[g]$, и, обратно, для каждой матрицы $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ описываются множества тех плоских торов $T^2(f)$, для которых существуют замкнутые локально минимальные сети типа $[g]$.

Пусть Ω — лежащее в верхней полуплоскости открытое подмножество плоскости, определенное так. Пусть OE — отрезок, соединяющий начало координат O с точкой $E = (1, 0)$. Построим на отрезке OE правильный треугольник, третья вершина которого лежит в нижней полуплоскости. Опишем вокруг этого треугольника окружность, и пусть K — круг, ограниченный этой окружностью. Пусть l_O и l_E — лучи, выходящие, соответственно, из точек O и E и направленные в верхнюю полуплоскость, причем l_O составляет с положительным направлением оси абсцисс угол в 120° , а l_E — в 60° . Множество Ω — это область между лучами l_O и l_E , лежащая вне круга K (рис. 5.29). Отметим, что Ω — это множество всех точек X открытой верхней полуплоскости, таких, что все углы треугольника OXE строго меньше 120° .

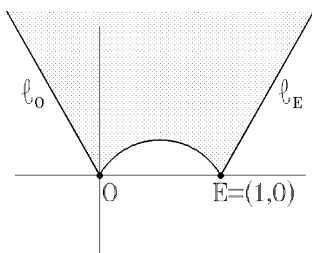


Рис. 5.29. Область минимальности.

Определение. Только что построенное открытое множество Ω назовем *областью минимальности*.

Построим отображение $\alpha_f : M_2^+(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, поставив в соответствие каждой матрице $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ комплексное число $\alpha_f(g)$ вида $\frac{R + Sz}{P + Qz}$, где, напомним, z — комплексное представление вектора f .

Отображение α_f не постоянно на орбитах действия группы $\langle J \rangle$, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Образ произвольной орбиты группы $\langle J \rangle$ при отображении α_f или целиком лежит в области минимальности, или целиком лежит вне ее.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.20. *На плоском торе $T^2(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть типа $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда $\alpha_f(g)$ лежит в области минимальности Ω . Иными словами, множество всех типов, для которых существуют замкнутые локально минимальные сети на торе $T^2(f)$, равно*

$$\alpha_f^{-1}(\Omega \cap I_f),$$

где I_f — образ отображения α_f . Более того, если пространство $M_2^+(\mathbb{Z})$ рассматривать как множество целочисленных точек в \mathbb{R}^4 , то множество всех $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$, являющихся типами замкнутых локально минимальных сетей на данном плоском торе, совпадает с множеством целочисленных точек из некоторого открытого подмножества в \mathbb{R}^4 , ограниченного поверхностями второго порядка.

Пусть теперь фиксирована матрица $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$.

Определение. Множество всех f из открытой верхней полуплоскости, для которых на плоском торе $T^2(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть M -типа g , назовем областью устойчивости типа g .

Теорема 5.21. *Область устойчивости типа g является образом области минимальности Ω при дробно линейном отображении*

$$z \mapsto w(z) = \frac{Pz - R}{-Qz + S},$$

где z и w — стандартные комплексные координаты на $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. В частности, если g — единичная матрица (или, более общо, скалярная), то область устойчивости типа g совпадает с областью минимальности.

Пусть $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$. Построим отображение $\beta_g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида. Если $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$, то

$$\beta_g(z) = \frac{R + Sz}{P + Qz}.$$

Теорема 5.22. *Область устойчивости типа g переходит в область устойчивости типа g' при дробно линейном отображении $\beta_{g'}^{-1} \circ \beta_g$.*

Приведенные выше простые геометрические критерии существования замкнутой локально минимальной сети данного типа дают возможность получить ряд нетривиальных следствий.

Следствие 5.31. *Если на данном плоском торе $T^2(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть типа (M, t, n) , то на этом торе также существуют замкнутые локально минимальные сети типов (M, kt, kn) , где k — любое положительное целое число.*

В терминах типов из $M_2^+(\mathbb{Z})$ следствие 5.31 может быть сформулировано так.

Следствие 5.32. *Если на данном плоском торе $T^2(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть Γ типа $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$, то на этом торе существуют замкнутые локально минимальные сети типов*

$$\begin{pmatrix} kP & kR \\ kQ & kS \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} P/l & R/l \\ Q/l & S/l \end{pmatrix},$$

где k — любое положительное целое число, а l — любой общий положительный делитель чисел P, Q, R и S . Иными словами, для всех матриц из $M_2^+(\mathbb{Z})$, входящих в данный класс проективного пространства $MP_2^+(\mathbb{Z})$, локально минимальные сети этих типов либо одновременно существуют, либо одновременно не существуют.

Следствие 5.33. *На каждом плоском торе существует бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей.*

Следствие 5.34. *Малые шевеления плоского тора в классе плоских торов (точнее, плоской метрики на торе в классе плоских метрик) не разрушают замкнутую локально минимальную сеть.*

5.2.3. Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских бутылках Клейна

В настоящем параграфе мы приведем классификацию замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна. Результаты данного раздела были получены авторами совместно с И. В. Птицыной. Подробности можно найти в [78] и [130].

Так же, как и в случае торов, будем проводить классификацию с точностью до подобия объемлющего многообразия. Начнем с описания плоских метрик на бутылке Клейна.

5.2.3.1. Описание плоских метрик на бутылке Клейна

Итак, пусть K^2 — гладкая бутылка Клейна. Напомним, что, с топологической точки зрения, бутылка Клейна может быть получена из квадрата Q склеиванием его противоположных сторон по слову $aba^{-1}b$. Здесь, как всегда, мы предполагаем, что квадрат Q ориентирован так, что положительный обход по его контуру происходит против часовой стрелки, при этом a, b, a, b обозначают последовательные стороны квадрата Q с индуцированной на них ориентацией. Если на стороне, скажем a , сменить ориентацию на противоположную, то эта сторона будет записываться как a^{-1} .

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5.16. *Каждая плоская бутылка Клейна может быть получена стандартной склейкой из некоторого однозначно определенного плоского прямоугольника. Плоские бутылки Клейна подобны тогда и только тогда, когда соответствующие прямоугольники подобны.*

Прямоугольник из утверждения 5.16 назовем *каноническим прямоугольником*, из которого склеена плоская бутылка Клейна.

Из утверждения 5.16 непосредственно вытекает, что в каждом классе подобия плоских бутылок Клейна можно выбрать единственного представителя, для которого соответствующий ему канонический прямоугольник натянут на векторы $OA_1 = e_1$ и $OA_2 = \alpha e_2$, где α — положительное вещественное число. Поэтому классы подобия плоских бутылок Клейна можно описывать точками положительной полупрямой. В дальнейшем через $K^2(\alpha)$ мы будем обозначать плоскую бутылку Клейна, чей канонический прямоугольник P_α натянут на векторы $OA_1 = e_1$ и $OA_2 = \alpha e_2$. Так как на подобных плоских бутылках Клейна замкнутые локально минимальные сети устроены одинаково, мы ограничимся рассмотрением только плоских бутылок Клейна вида $K^2(\alpha)$.

5.2.3.2. Универсальное накрытие плоской бутылки Клейна

Построим теперь важные объекты, соответствующие плоской бутылке Клейна $K^2(\alpha)$, называемые решеткой и группой накрывающих изометрий.

Пусть $\Pi_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ — канонический прямоугольник, из которого склеена $K^2(\alpha)$. Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 прямую l , перпендикулярную оси абсцисс и проходящую через точку с координатами $(1/2, 0)$. Ясно, что Π_α симметричен относительно прямой l . Отражение плоскости относительно этой прямой будем также обозначать через l . Пусть $\tau = \alpha e_2$ — сдвиг на вектор αe_2 . Рассмотрим скользящую симметрию $\lambda = \tau \circ l$, являющуюся композицией отражения l и сдвига τ . Пусть G_α обозначает дискретную группу движений плоскости \mathbb{R}^2 , порожденную сдвигом на e_1 и скользящей симметрией λ : $G_\alpha = \langle e_1, \lambda \rangle$.

Определение. Группу G_α назовем *группой накрывающих изометрий для $K^2(\alpha)$* . Пару $e_1\lambda$ назовем *каноническим базисом группы G_α* .

Орбиту начала координат при действии группы G_α , т.е. множество точек вида $\mu(O)$, $\mu \in G_\alpha$, назовем *решеткой для $K^2(\alpha)$* и будем обозначать через L_α . Очевидно, разным $K^2(\alpha)$ соответствуют разные группы G_α и разные решетки L_α .

Действие группы G_α позволяет построить локально изометричное накрытие $\pi_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow K^2(\alpha)$ плоской бутылки Клейна $K^2(\alpha)$ евклидовой плоскостью, называемое *универсальным накрытием*. А именно, пусть $x' \in \mathbb{R}^2$ — произвольная точка плоскости. Тогда с помощью кратного применения сдвига $\pm e_1$ добьемся того, чтобы абсцисса полученной в результате точки x'' лежала между 0 и 1. Далее, кратным применением преобразования $\lambda^{\pm 1}$ к полученной точке x'' переместим x'' в такую точку x , у которой ордината находится в пределах между 0 и α . Последнего всегда можно добиться, так как преобразования $\lambda^{\pm 1}$ переводят полосу между осью ординат и параллельной ей прямой, проходящей через $(1, 0)$, в себя, сдвигая при этом рассматриваемую полосу вдоль оси ординат на $\pm\alpha$. Фактически, $x \in K^2(\alpha)$. Мы положим $\pi_\alpha(x') = x$.

Отметим, что, в отличие от случая тора, орбита внутренней точки канонического прямоугольника Π_α , не лежащей на прямой l , не изометрична решетке L_α .

Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на плоской бутылке Клейна $K^2(\alpha)$, а $\pi_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow K^2(\alpha)$ — построенное только что локально изометричное универсальное накрытие. Пусть $\Gamma' = \pi_\alpha^{-1}(\Gamma)$. Из теоремы о локальном устройстве локально минимальных следов вытекает, что Γ' так же, как и для тора, представляет собой бесконечную сеть, ребра которой — отрезки, стыкующиеся в вершинах этой сети под равными 120° углами. Поэтому сеть Γ' также разбивает плоскость \mathbb{R}^2 на шестиугольники с углами по 120° , которые, вместе с их образами на $K^2(\alpha)$, мы будем называть *ячейками*. Опять же, сеть Γ' будем называть *бесконеч-*

ной замкнутой локально минимальной сетью, а разбиение плоскости этой сетью на шестиугольники с углами по 120° — разбиением, порожденным замкнутой локально минимальной сетью $\Gamma \subset K^2(\alpha)$.

Сеть Γ' , очевидно, обладает свойством “периодичности”: она инвариантна относительно накрывающих изометрий из G_α . Обратно, если некоторая бесконечная замкнутая локально минимальная сеть Γ' на плоскости \mathbb{R}^2 инвариантна относительно накрывающих изометрий из G_α , то образ Γ сети Γ' при проекции π_α является замкнутой локально минимальной сетью на $K^2(\alpha)$. Таким образом, задача описания замкнутых локально минимальных сетей на $K^2(\alpha)$ сводится к описанию “периодичных” (по отношению к G_α) бесконечных замкнутых локально минимальных сетей на плоскости \mathbb{R}^2 .

5.2.3.3. Накрытие плоской бутылки Клейна плоским тором

Оказывается, задачу классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна можно свести к задаче, которую мы уже решили в предыдущем разделе, а именно, к классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах. Для этого мы построим локально изометричное двулистное накрытие бутылки Клейна $K^2(\alpha)$ плоским тором $T^2(f)$, где $f = 2\alpha e_2$.

Чтобы построить это накрытие, заметим, что группа G_f только что описанного тора является подгруппой в G_α . Действительно, преобразование плоскости λ^2 является сдвигом на вектор $2\alpha e_2$.

Пусть Π_f — канонический параллелограмм тора $T^2(f)$. Тогда орбита каждой точки из Π_f под действием группы G_f входит в орбиту этой же точки под действием группы G_α , и поэтому обе эти орбиты переводятся проекцией π_α в одну и ту же точку из $K^2(\alpha)$. Таким образом, корректно определено отображение ψ из $T^2(f)$ в $K^2(\alpha)$. Легко видеть, что прообраз каждой точки бутылки Клейна при отображении ψ состоит ровно из двух точек.

Отметим, что параллелограмм Π_f в действительности является прямоугольником, одна сторона которого, параллельная оси абсцисс, совпадает с соответствующей стороной прямоугольника Π_α , а другая сторона — в два раза больше соответствующей стороны из Π_α .

Пусть Υ — замкнутая локально минимальная сеть на $K^2(\alpha)$ и $\Upsilon' = \Gamma'$ — ее поднятие на плоскость \mathbb{R}^2 проекцией π_α . Тогда сеть Γ' инвариантна относительно группы сдвигов G_f тора $T^2(f)$ и поэтому порождает на $T^2(f)$ некоторую замкнутую локально минимальную сеть Γ . Таким образом, каждая замкнутая локально минимальная сеть на $K^2(\alpha)$ полу-

чается из некоторой замкнутой локально минимальной сети на плоском торе, накрывающем $K^2(\alpha)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Следующее предложение устанавливает, когда замкнутую локально минимальную сеть на торе $T^2(f)$ можно спроектировать в некоторую замкнутую локально минимальную сеть на $K^2(\alpha)$.

Предложение 5.30. *Рассмотрим замкнутую локально минимальную сеть Γ на плоском торе $T^2(f)$, где $f = 2\alpha e_2$, и $\psi: T^2(f) \rightarrow K^2(\alpha)$ — построенное выше двулистное накрытие. Пусть $\pi_f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2(f)$ — универсальное накрытие и Γ' — поднятие сети Γ на \mathbb{R}^2 с помощью проекции π_f . Пусть l , как и выше, — отражение относительно прямой, параллельной e_2 и проходящей через точку с координатами $(1/2, 0)$, τ — сдвиг на вектор αe_2 и $\lambda = \tau \circ l$ — скользящая симметрия. Тогда $\psi(\Gamma)$ является замкнутой локально минимальной сетью на $K^2(\alpha)$, если и только если сеть Γ' инвариантна относительно преобразования λ .*

Таким образом, чтобы описать замкнутые локально минимальные сети на плоских бутылках Клейна, достаточно описать те замкнутые локально минимальные сети на плоских торах, склеенных из прямоугольников, которые при естественной проекции на соответствующие бутылки Клейна переводятся в замкнутые локально минимальные сети. Пусть $T^2(f)$ — плоский тор, склеенный из прямоугольника, и $f = 2\alpha e_2$, и пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на нем, а Γ' — ее поднятие на плоскость \mathbb{R}^2 с помощью проекции π_f . Пусть λ — скользящая симметрия, построенная выше.

Утверждение 5.17. *Если сеть Γ' инвариантна относительно скользящей симметрии λ , то тип сети Γ может быть одного из двух видов (в подходящем базисе сети Γ'):*

$$(1) \left(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & s \end{pmatrix}, m, n \right) \text{ или}$$

$$(2) \left(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & s \end{pmatrix}, m, n \right).$$

Определение. Замкнутые локально минимальные сети на $T^2(f)$, тип которых в некотором базисе сети имеет вид $\left(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & s \end{pmatrix}, m, n \right)$, назовем сетями *I-го дискретного типа*. Аналогично, замкнутые локально

минимальные сети на $T^2(f)$, тип которых в некотором базисе сети имеет вид $\left(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}, m, n\right)$, назовем сетями *II-го дискретного типа*.

Эти же названия сохраним и за поднятиями таких сетей на плоскость.

Можно показать, что матрицы M -типов, соответствующие определенным нами только что дискретным типам, имеют следующий вид: $\begin{pmatrix} 2h & h \\ 0 & m \end{pmatrix}$ для I-го типа и $\begin{pmatrix} n & 0 \\ w/2 & w \end{pmatrix}$ для II-го типа.

5.2.3.4. Правильные сети

Напомним, что замкнутую локально минимальную сеть на торе мы называли правильной, если все ее ячейки могут быть получены из фиксированной ячейки некоторыми сдвигами. Существенным моментом, обеспечивающим содержательность такого определения, является то обстоятельство, что группа сдвигов тора действует на торе транзитивно, т.е. для любой пары точек из тора одна из них может быть всегда переведена в другую с помощью некоторого сдвига. На плоских бутылках Клейна группа движений действует уже не транзитивно. Поэтому мы не можем дословно перенести определение правильных сетей на случай бутылок Клейна. Тем не менее, используя построенное выше двулистное накрытие плоской бутылки Клейна соответствующим плоским тором, мы при определении правильных сетей можем воспользоваться соответствующим определением на накрывающем торе.

Определение. Замкнутая локально минимальная сеть Υ на плоской бутылке Клейна называется *правильной*, если ее поднятие на накрывающий плоский тор является правильной сетью.

Оказывается, что так же, как и в случае торов, каждая замкнутая локально минимальная сеть на $K^2(\alpha)$ может быть продеформирована в классе локально минимальных сетей в некоторую правильную сеть на $K^2(\alpha)$.

Теорема 5.23. *Для каждой замкнутой локально минимальной сети Υ на данной плоской бутылке Клейна $K^2(\alpha)$ существует единственная (с точностью до сдвига) деформационно эквивалентная ей правильная локально минимальная сеть Υ_r . Длины сетей Υ и Υ_r равны, поэтому деформационно эквивалентные локально минимальные сети имеют одинаковые длины.*

Более того, каждая локально минимальная сеть на $K^2(\alpha)$ может быть продеформирована в произвольную деформационно эквивалент-

ную ей локально минимальную сеть в классе локально минимальных сетей.

5.2.3.5. Теоремы классификации

В предыдущем параграфе мы ввели понятие типа замкнутой локально минимальной сети на плоском торе, которое оказалось полезным для классификации таких сетей. В случае плоских бутылок Клейна мы могли бы перенести понятие типа с накрывающего тора. Однако такой классификатор, как легко видеть, обладает рядом излишней информации, не влияющей на классификацию. Поэтому мы поступим немного иначе и будем характеризовать исследуемые сети тремя числами: (t, a, b) , где t принимает значения 1 или 2 и является идентификатором одного из двух дискретных типов замкнутых локально минимальных сетей на $K^2(\alpha)$, введенных выше. Числа a и b являются целыми положительными, равными, для сетей I-го дискретного типа ($t = 1$), m и h , а для сетей II-го дискретного типа — соответственно, $w/2$ и n (см. выше).

Определение. Тройку (t, a, b) назовем (полным) *типом* замкнутой локально минимальной сети Υ на $K^2(\alpha)$, числа a и b — соответственно, *горизонтальным* и *вертикальным* периодами для Υ , а число t , как и выше, *дискретным типом*.

Определение. Тройку (t, a, b) назовем *допустимой*, если t равно 1 или 2 и a, b — целые положительные числа.

Пусть $K^2(\alpha)$, как всегда, — плоская бутылка Клейна, а (t, a, b) — допустимая тройка. Построим треугольник OAB , где O — начало координат, а координаты точек A и B зависят от типа (t, a, b) так:

- если $t = 1$, то $A = 2be_1$, $B = be_1 + 2a\alpha e_2$;
- если $t = 2$, то $A = be_1 + 2a\alpha e_2$, $B = 4a\alpha e_2$.

Определение. Построенный треугольник OAB называется *характеристическим треугольником типа (t, a, b)* для плоской бутылки Клейна на $K^2(\alpha)$. Если у треугольника OAB все углы меньше 120° , то единственная невырожденная локально минимальная сеть, затягивающая вершины этого треугольника, называется *характеристической сетью типа (t, a, b) для $K^2(\alpha)$* и обозначается через Υ_χ .

Ясно, что если Υ — замкнутая локально минимальная сеть типа (t, a, b) на $K^2(\alpha)$, то характеристический треугольник этого типа

для $K^2(\alpha)$ конгруэнтен характеристическому треугольнику соответствующей сети на накрывающем торе.

Так же, как и в случае торов, имеет место следующая теорема реализации.

Теорема 5.24. *Деформационно эквивалентным замкнутым локально минимальным сетям на $K^2(\alpha)$ соответствуют одинаковые типы. Для каждой допустимой тройки (t, a, b) существуют такая плоская метрика на K^2 и такая замкнутая локально минимальная в этой метрике сеть Υ , что (t, a, b) является типом сети Υ .*

Таким образом, замкнутые локально минимальные сети на плоских бутылках Клейна классифицируются, с точностью до деформационной эквивалентности, множеством всех допустимых троек (t, a, b) .

Теорема 5.25. *На фиксированной плоской бутылке Клейна $K^2(\alpha)$ замкнутая локально минимальная сеть данного типа (t, a, b) существует в том и только в том случае, когда*

$$\frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \quad \text{при } t = 1 \text{ и } \frac{b}{a} > \frac{\alpha}{\sqrt{3}/2} \quad \text{при } t = 2.$$

Теорема 5.26. *Сети типа (t, a, b) существуют на тех и только тех плоских бутылках Клейна $K^2(\alpha)$, для которых*

$$\alpha > \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{a} \quad \text{при } t = 1 \text{ и } \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{b}{a} \quad \text{при } t = 2.$$

Как и в предыдущем разделе, можно вычислить длину локально минимальной сети в терминах ее типа, см. [78]. В заключение приведем несколько интересных нетривиальных следствий.

Следствие 5.35. *Если на данной плоской бутылке Клейна $K^2(\alpha)$ существует замкнутая локально минимальная сеть Υ типа (t, a, b) , то на $K^2(\alpha)$ существуют замкнутые локально минимальные сети типов (t, ka, kb) и $(t, a/l, b/l)$, где k — любое положительное целое число, а l — любой положительный общий делитель чисел a и b .*

Следствие 5.36. *На каждой плоской бутылке Клейна существует бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей.*

Следствие 5.37. *Малые шевеления плоской бутылки Клейна в классе плоских бутылок Клейна (точнее, плоской метрики в классе плоских метрик) не разрушают замкнутую локально минимальную сеть.*

5.2.4. Замкнутые сети на двумерных поверхностях отрицательной кривизны

В настоящем разделе мы рассмотрим задачу Штейнера на двумерных поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Напомним, что двумерная замкнутая поверхность обладает метрикой постоянной отрицательной кривизны тогда и только тогда, когда она отлична от сферы, проективной плоскости, тора и бутылки Клейна. Так как теория замкнутых локально минимальных сетей в рассматриваемом случае в настоящее время еще не завершена (по крайней мере, она не известна авторам), мы ограничимся описанием лишь отдельных свойств таких сетей, а также приведем серию примеров. В разделе 5.4 также содержится ряд результатов о локально минимальных сетях на многообразиях отрицательной кривизны. Доказательства мы опускаем (см. [78]).

5.2.4.1. Метрические ограничения на устройство замкнутых сетей

Пусть M_g^2 — ориентируемая поверхность постоянной отрицательной кривизны -1 , $g > 1$, и Γ — замкнутая локально минимальная сеть на ней. Тогда Γ разбивает поверхность M_g^2 на некоторые геодезические многоугольники, которые мы будем называть *ячейками* сети Γ . Здесь, как и выше, мы ограничимся рассмотрением сетей, отличных от замкнутых геодезических.

Хорошо известен следующий результат.

Предложение 5.31. *Площадь поверхности M_g^2 равна $4\pi(g-1)$.*

Если P — геодезический n -угольник на M_g^2 и α_i — его внутренние углы, а S — его площадь, то сумма углов α_i меньше чем $\pi(n-2)$ на площадь S :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n-2) - S.$$

Из предложения 5.31 вытекает следующий результат.

Предложение 5.32. *Рассмотрим замкнутую локально минимальную сеть Γ на M_g^2 , и пусть P — некоторая ее ячейка, ограниченная $n \geq 2$ ребрами сети Γ (т.е. являющаяся n -угольником). Тогда площадь ячейки P равна $(n-6)\pi/3$ и, значит, $n \geq 7$, т.е. все ячейки сети Γ — не менее чем семиугольники.*

Далее, пусть k_i — количество ячеек в Γ , являющихся i -угольниками. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\sum (i - 6)k_i = 12(g - 1).$$

Из предложения 5.32 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.38. *Сеть Γ на M_g^2 не может иметь ячеек, ограниченных более чем $12g - 6$ ребрами. Поэтому существует лишь конечное число топологий замкнутых локально минимальных сетей на M_g^2 .*

Замечание. Из следствия 5.38 не вытекает, что на M_g^2 имеется лишь конечное число деформационно неэквивалентных локально минимальных сетей. Дело в том, что граф G одной и той же топологии может быть по-разному вложен в одну и ту же поверхность.

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях M_g^2 .

5.2.4.2. Примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях отрицательной кривизны

(1.) Пусть Δ — правильный треугольник на плоскости Лобачевского L^2 и пусть $g > 1$ фиксировано. Рассмотрим $4g - 2$ треугольника на L^2 , конгруэнтных Δ , и склеим из них некоторый многоугольник P так, чтобы у полученной триангуляции не было внутренних вершин, точнее, чтобы каждая вершина треугольников, входящих в P , лежала бы на границе многоугольника P . Легко видеть, что двойственная сеть такой триангуляции представляет собой невырожденное дерево Штейнера, а сама эта триангуляция диагональна, поэтому число сторон многоугольника P равно $4g$.

Подберем теперь угол α треугольника Δ так, чтобы сумма всех углов многоугольника P равнялась 2π . Легко видеть, что $\alpha = 2\pi/(12g - 6)$. Более того, ясно, что если выбрать α равным $2\pi/(12g - 6)$, то ни одна склейка из $4g - 2$ треугольников, конгруэнтных Δ , не может иметь внутренней вершины и представляет собой многоугольник с углами, меньшими π , т.е. выпуклый многоугольник. Таким образом, следующее утверждение имеет место.

Утверждение 5.18. *Произвольная диагональная триангуляция плоского выпуклого $4g$ -угольника может быть реализована на плоскости Лобачевского L^2 в виде некоторой, единственной с точностью до движения, диагональной триангуляции выпуклого $4g$ -угольника $P \subset L^2$, такой, что*

- *противоположные стороны многоугольника P равны между собой,*
- *сумма углов многоугольника P равна 2π ,*
- *все треугольники построенной триангуляции являются правильными и попарно конгруэнтны.*

Рассмотрим описанную в утверждении 5.18 триангуляцию выпуклого многоугольника $P \subset L^2$ и впишем в каждый треугольник этой триангуляции локально минимальную сеть, соединив середины его сторон с его центром. Легко видеть, что ребра сети в каждом треугольнике ортогональны сторонам этого треугольника, из середин которых они выходят. Поэтому объединение этих сетей во всех треугольниках является некоторой локально минимальной сетью Γ , затягивающей середины сторон многоугольника P . При этом, очевидно, ребра сети Γ подходят к сторонам из P перпендикулярно.

Так как длины всех сторон $4g$ -угольника P равны между собой, а сумма всех углов из P равна 2π , то, склеивая стороны многоугольника P по слову $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, мы получим замкнутую ориентированную поверхность M_g^2 постоянной кривизны -1 , причем сеть Γ , очевидно, перейдет в некоторую замкнутую локально минимальную сеть на M_g^2 . Легко видеть, что полученная локально минимальная сеть состоит из одной грани (ячейки), являющейся правильным $(12g - 6)$ -угольником, из $6g - 3$ ребер и $4g - 2$ вершин. Таким образом, мы представили поверхность M_g^2 в виде склейки из правильного $(12g - 6)$ -угольника, углы которого равны $2\pi/3$.

(2.) Приведенный метод построения локально минимальных сетей на M_g^2 может быть обобщен заменой правильных треугольников на треугольники более общего вида и перехода к так называемым треугольным группам. Читателя, заинтересовавшегося дальнейшим развитием этих идей, мы отсылаем к [38].

(3.) Другой способ обобщения состоит в переходе к так называемым p -ангуляциям, т.е. разбиениям многоугольника на p -угольники. Более подробно, рассмотрим правильный p -угольник Q на плоскости Лобачевского и склеим из конгруэнтных многоугольнику Q многоугольников $4g$ -угольник P так, чтобы все вершины p -угольников лежали на границе многоугольника P . Подберем угол α в Q так, чтобы сумма углов многоугольника P равнялась 2π . Ясно, что P состоит из $(4g - 2)/(p - 2)$ таких p -угольников и что α обязан равняться $\frac{\pi}{2g-1}(1 - \frac{2}{p})$. При $p \geq 3$ мы, очевидно, вновь получим выпуклый многоугольник P .

Пусть q — центр многоугольника Q (например, центр вписанной в него окружности). Соединим середины сторон из Q с точкой q отрезками s_i и будем равномерно сжимать многоугольник Q' с вершинами в этих серединах, двигая его вершины по s_i с одинаковыми скоростями. Семейство полученных многоугольников обозначим через Q'_t . Так как площадь деформируемого многоугольника Q' уменьшается и стремится к нулю при приближении к точке q , то величины его углов увеличиваются и стремятся к углам правильного p -угольника на евклидовой плоскости.

Пусть $p \geq 7$. Простые вычисления, использующие соотношения на стороны и углы треугольников на плоскости Лобачевского, показывают, что в этом случае $\alpha < 2\pi/3$. С другой стороны, величина угла правильного p -угольника при $p \geq 7$ больше, чем $2\pi/3$, поэтому существует такое t , при котором Q'_t — правильный многоугольник с углами в $2\pi/3$. Такой Q'_t , вместе с фрагментами отрезков s_i , соединяющими вершины из Q'_t с вершинами из Q' (середины сторон многоугольника Q), образует локально минимальную сеть, растягивающую вершины из Q' . Ясно, что граничные ребра этой сети подходят ортогонально к сторонам многоугольника Q .

Вписав в каждый из p -угольников, формирующих p -ангуляцию $4g$ -угольника P , локально минимальную сеть только что описанным способом, получим локально минимальную сеть Γ уже на всем P . Сеть Γ растягивает середины сторон многоугольника P и подходит к этим сторонам ортогонально. Теперь, склеив стороны $4g$ -угольника по слову $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, мы получим замкнутую ориентированную поверхность M_g^2 постоянной кривизны -1 , причем сеть Γ , очевидно, перейдет в некоторую замкнутую локально минимальную сеть на M_g^2 . Легко видеть, что количество граней (ячеек) полученной локально минимальной сети равно $1 + (4g - 2)/(p - 2)$, причем $(4g - 2)/(p - 2)$ граней являются правильными p -угольниками, а одна грань — правильным $2p(4g - 2)/(p - 2)$ -угольником.

5.2.4.3. Перечисление замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны с точностью до топологической эквивалентности

В данном разделе мы приведем ряд результатов А. А. Вдовиной и Е. Н. Селивановой, см. [151].

Определение. Две замкнутые локально минимальные сети на поверхности M_g^2 называются *топологически эквивалентными*, если существу-

ет гомеоморфизм поверхностей, сохраняющий ориентацию, переводящий одну сеть в другую.

Замкнутая сеть Γ на поверхности называется *одноклеточной*, если количество ячеек сети Γ равно 1. А. А. Вдовиной и Е. Н. Селивановой было построено естественное взаимно однозначное соответствие между классами топологической эквивалентности замкнутых одноклеточных локально минимальных сетей на ориентируемых поверхностях M_g^2 , $g > 1$, и классами топологической эквивалентности вложений кубических графов в поверхность M_g^2 . Это позволило им получить следующий результат.

Теорема 5.27. *Существует эффективный алгоритм, перечисляющий все классы топологически эквивалентных замкнутых одноклеточных локально минимальных сетей на двумерных компактных ориентируемых поверхностях рода $g > 1$, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны.*

Пусть $N(1, g)$ — число классов топологической эквивалентности таких сетей на поверхностях рода g . Тогда

$$\log(N(1, g)) = (2g \log(g) + 2g \log 12 + 2g)(1 + o(1)).$$

Следствие 5.39. *На замкнутых ориентируемых поверхностях рода 2, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны, существует девять классов топологической эквивалентности замкнутых локально минимальных сетей.*

Аналогичные результаты получены и для так называемых *правильных* замкнутых локально минимальных сетей, т.е. замкнутых локально минимальных сетей, все ячейки которых попарно конгруэнтны.

Теорема 5.28. *Существует эффективный алгоритм, перечисляющий все замкнутые правильные локально минимальные сети на M_g^2 , $g > 1$, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны.*

Длина L произвольной замкнутой правильной локально минимальной сети на M_g^2 , $g > 1$, снабженных метрикой кривизны -1 , удовлетворяет неравенству:

$$2\sqrt{g(g-1)}\pi < L < 42(g-1)a, \quad \text{ch } a = \frac{4 \cos \alpha + 1}{3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6g-3}.$$

Пусть $N(g)$ — число замкнутых правильных локально минимальных сетей на всех компактных ориентируемых поверхностях рода $g > 1$,

снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны. Тогда

$$2g \log(g) \leq \log(N(g)) \leq 14g \log(g)(1 + o(1)).$$

В частности, получено следующее важное утверждение.

Следствие 5.40. *Для каждого $g > 1$ существует конечное число поверхностей M_g^2 (с точностью до изометрии), на которых можно реализовать правильную замкнутую локально минимальную сеть данной топологии.*

5.3. Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях многогранников

В настоящем разделе мы приведем результаты исследования локально минимальных сетей на поверхностях пространственных многогранников. Поверхность многогранника естественно рассматривать как плоское двумерное многообразие с простейшими точечными особенностями — вершинами многогранников. Геодезические и локально минимальные сети на многогранниках часто встречаются в приложениях. Дело в том, что в задачах, связанных с проектированием реальных коммуникационных сетей, приходится иметь дело с такими поверхностями, как, например, поверхности зданий, машин и других конструкций, которые естественно представлять себе как многогранники. Кроме того, при компьютерном моделировании произвольная гладкая поверхность обычно подменяется многогранником. Все это делает исследование геодезических и локально минимальных сетей на многогранниках весьма актуальным.

В данном разделе мы опишем локальную структуру локально минимальных сетей на поверхностях многогранников, приведем аналог теоремы Гаусса–Бонне для таких поверхностей, позволяющий легко вычислять суммы углов геодезических многоугольников, приведем примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях платоновых тел, полностью опишем замкнутые геодезические на поверхности куба, опишем замкнутые локально минимальные сети на поверхности тетраэдра и приведем также несколько общих теорем неединственности и несуществования замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях многогранников. Часть излагаемых нами результатов получена авторами совместно с И. В. Птицыной (см. [131] и [78]). Мы также приведем здесь несколько результатов Т. В. Павлюкевич (Аникеевой) [3].

5.3.1. Общие свойства локально минимальных сетей на многогранниках

В настоящем разделе описывается локальная структура локально минимальных сетей на поверхностях многогранников. Ниже, для краткости, поверхности многогранников мы будем называть просто многогранниками. А именно, дадим следующее определение.

Замкнутым двумерным *многогранником* K называется топологическое пространство, склеенное из конечного числа плоских многоугольников (*граней многогранника* K) таким образом, чтобы

- топологическое пространство K было гомеоморфно замкнутой двумерной поверхности M^2 ,
- точки, принадлежащие одной и той же грани, не склеивались, и
- каждые две грани, имеющие общие точки, склеивались или по одной стороне, или по одной вершине.

Таким образом, если $\{K_i\}$ — семейство многоугольников, из которых склеен многогранник K , то имеем естественное отображение проекции $\pi: K_i \rightarrow K$. Образы сторон и вершин многоугольников K_i при проекции π называются, соответственно, *ребрами* и *вершинами* многогранника K , а сама проекция π — *склеивающим отображением*. Подчеркнем, что каждая грань многогранника — это плоский многоугольник, в частности, на каждой грани задана евклидова метрика.

Замечание. Первое требование в определении многогранника можно заменить на условие гомеоморфности какой-нибудь фиксированной замкнутой поверхности, например сфере. Многогранники, гомеоморфные сфере, будем называть *сферическими*.

Замечание. Если поверхность M^2 ориентируема, то, выбрав одну из ее ориентаций, можно задать ориентации всех граней. Последнее позволяет определить положительное направление обхода контура каждой грани и, тем самым, всех ребер многогранника, принадлежащих данной грани. Ясно, что ориентации ребра, заданные содержащими его гранями, противоположны. В дальнейшем, говоря про *ориентацию многогранника* (для случая ориентируемой M^2), мы будем иметь в виду именно такую ориентацию его граней и ребер.

В дальнейшем все многогранники предполагаются ориентируемыми.

Частным случаем многогранников являются выпуклые многогранники в \mathbb{R}^3 . Чтобы получить выпуклый многогранник, рассмотрим пересечение V конечного числа полупространств Π_i в \mathbb{R}^3 . Предположим, что множество V ограничено. Тогда граница K множества V называется *выпуклым многогранником*, порожденным полупространствами Π_i .

Пусть γ — кривая на многограннике K . Тогда мы можем определить длину этой кривой следующим образом: разобьем кривую γ на части, каждая из которых целиком лежит или во внутренности одной грани, или на одном ребре. Тогда *длиной* $\ell(\gamma)$ *кривой* γ будем называть сумму длин полученных фрагментов.

На случай многогранников очевидным образом можно перенести понятия параметрических сетей и следов, а также понятия локальной и абсолютной минимальности таких сетей.

Отметим, что многогранник K с выброшенными вершинами наделяется естественным образом структурой гладкого риманова многообразия с плоской метрикой. При этом если кривая γ не проходит через вершины из K , то определенная выше длина $\ell(\gamma)$ кривой γ равна, очевидно, длине этой кривой в этой плоской метрике.

Однако эта евклидова метрика, вообще говоря, не продолжается до римановой метрики в вершины многогранника, поэтому многогранники можно рассматривать как плоские римановы многообразия с особенностями. Наличие этих особенностей приводит к тому, что локально минимальная сеть на многограннике, проходящая через его вершину, может иметь более сложную локальную структуру, чем сеть на гладком римановом многообразии.

Мы начнем с введения некоторых полезных понятий, характерных для многогранников, которые позволят во многих случаях свести задачу к плоской.

5.3.1.1. Развертки

Пусть e — произвольное ребро многогранника K , а F и G — грани, которые крепятся к e . Обозначим через e_F и e_G стороны многоугольников F и G , склеивающиеся в многограннике K в ребро e , т.е. прообразы ребра e при склеивающем отображении π . Ориентируем многогранник K , тогда многоугольники F и G получают некоторую ориентацию. Вложим F и G в одну плоскость \mathbb{R}^2 так, чтобы их ориентации были одинаковы. С помощью движения переместим G так, чтобы начало стороны e_G совпало с концом стороны e_F , а конец стороны e_G — с началом стороны e_F (в индуцированных из G и F ориентациях). Такое вложение граней F и G в плоскость \mathbb{R}^2 назовем *разверткой вдоль ребра e* . Вновь обозначим через e отрезок $e_F = e_G$. Ясно, что для любой внутренней точки P этого ребра e существует круговая окрестность U точки P , целиком лежащая в объединении F и G и разбивающаяся ребром e на два полукруга, один из которых лежит в F , а другой — в G . Такую окрестность U мы будем называть *локальной окрестностью точки P ребра e*

на развертке вдоль e , а ее прообраз на многограннике K — *локальной окрестностью точки P* .

Ориентация многогранника K задает положительное направление обхода вокруг каждой вершины из K . Пусть P — произвольная вершина многогранника K . Рассмотрим множество всех ребер, выходящих из P . Упорядочим эти ребра в соответствии с обходом вокруг вершины P в положительном направлении, и пусть e_i — i -е из этих ребер. Если n_P — количество ребер e_i , выходящих из вершины P , то будем считать, что нумерация ребер начинается с 0, а номер i меняется по модулю n_P (т.е. нумерация циклическая).

Пусть F_i — грань многогранника K , одновременно содержащая ребра e_i и e_{i+1} . В дальнейшем так занумерованные грани F_i будут называться *последовательными гранями вокруг P* . Обозначим через α_i угол при вершине P в грани F_i . Выберем последовательные грани $F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+p}$ и вложим F_k в плоскость \mathbb{R}^2 . Будем последовательно вкладывать в эту же плоскость \mathbb{R}^2 грани F_{k+1}, \dots, F_{k+p} так, чтобы на каждом шаге, когда вкладывается грань F_{i+1} , получалась развертка вдоль ребра e_i . Такое вложение граней F_k, \dots, F_{k+p} в фиксированную плоскость \mathbb{R}^2 назовем *разверткой в вершине P граней F_k, \dots, F_{k+p}* . Образ вершины P в плоскости \mathbb{R}^2 размещения развертки обозначим также через P . Легко видеть, что существует такая круговая окрестность точки $P \in \mathbb{R}^2$, что пересечение ее с каждой гранью F_i представляет собой некоторый сектор круга U . Такую окрестность назовем *локальной окрестностью вершины P на построенной развертке в этой вершине*, а ее прообраз на многограннике K — *локальной окрестностью вершины P* . Ясно, что каждая локальная окрестность произвольной вершины многогранника является, с метрической точки зрения, кругом некоторого радиуса на многограннике K с центром в P .

Пусть a и b — два отрезка, выходящих из P , каждый из которых лежит в некоторой грани. Рассмотрим такую локальную окрестность вершины P , чтобы a и b пересекали ее границу. Часть окрестности U , заключенную между a , b и частью границы ∂U окрестности U , движение по которой от a к b происходит в положительном направлении, назовем *сектором от a к b* и обозначим через $S(a, b)$.

Пусть F_a и F_b — грани, содержащие a и b соответственно. Рассмотрим последовательные грани вокруг P , такие, что F_a — первая, а F_b — последняя из этих граней. Построим соответствующую развертку, в ней — локальную окрестность U вершины P . Тогда определен сектор $S(a, b)$. Подмножество в U , соответствующее сектору $S(a, b)$, назовем *разверткой сектора $S(a, b)$* .

Рассмотрим последовательность ребер $e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+k}$, встретившихся при обходе вершины P при движении от a к b . Обозначим через α_a угол между a и e_i , а через α_b — угол между e_{i+k} и b . Сумму

$$\alpha_a + \sum_{j=i}^{i+k-1} \alpha_j + \alpha_b$$

назовем *положительным углом между a и b* или *величиной сектора $S(a, b)$* и обозначим через $\alpha_+(a, b)$. Величину сектора $S(b, a)$ назовем *отрицательным углом между a и b* и обозначим через $\alpha_-(a, b)$.

Определение. Сумму положительного и отрицательного углов $\alpha_+(a, b)$ и $\alpha_-(a, b)$ назовем *полным углом при вершине P* .

Несложно проверить, что полный угол не зависит от выбора отрезков a и b , выходящих из вершины P .

Легко видеть, что развертка сектора $S(a, b)$ является вложенной, если и только если величина этого сектора меньше 2π .

Предположим, что полный угол в вершине P больше чем π . Пусть a — радиус окрестности U . Обозначим через b_+ и b_- такие радиусы окрестности U , что положительный угол между a и b_+ и отрицательный угол между a и b_- равны $\pi/2$. Сектор $S(b_-, b_+)$ величины π назовем *локальным полукругом с осью a* и обозначим через $H(a)$. Объединение радиусов b_- и b_+ назовем *локальным перпендикуляром к a в P* . Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.4. Пусть a и b — пара радиусов окрестности U , таких, что положительный и отрицательный углы между ними не меньше, чем π . Тогда локальные полукруги $H(a)$ и $H(b)$ пересекаются не более, чем по своей границе.

5.3.1.2. Локальные геодезические

Пусть A и B — произвольная пара точек многогранника K . Кривую, соединяющую A и B и имеющую наименьшую длину среди всех кривых с теми же концами, назовем *кратчайшей геодезической* или просто *кратчайшей*. Кривая γ на многограннике K называется *геодезической*, если для любой пары достаточно близких точек на γ часть кривой γ , соединяющая их, является кратчайшей геодезической.

Пусть P — произвольная точка на многограннике K и U — некоторая ее окрестность. Если для каждой пары точек из U существует кратчайшая геодезическая, их соединяющая и лежащая в U , то окрестность U называется *выпуклой*. Цель настоящего пункта — показать, что

достаточно малая круговая окрестность каждой точки $P \in K$ является выпуклой, и описать все кратчайшие геодезические, соединяющие точки из этой окрестности.

Пусть P не является вершиной многогранника K . Выберем круговую окрестность U' с центром в P , не содержащую вершин из K , и пусть U — круговая окрестность для P вдвое меньшего диаметра, чем U' . Тогда каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая точки из U , целиком содержится в U' .

Если P лежит внутри некоторой грани, то выберем U' также целиком содержащейся в этой грани. Если P лежит внутри некоторого ребра, то в качестве U' выберем некоторую ее локальную окрестность. Так как на развертке области U' и U представляют собой пару концентрических кругов, то любая кратчайшая геодезическая, соединяющая точки из U , является отрезком, и потому лежит в U . Более того, в этом случае кратчайшая геодезическая единственна.

Итак, для каждой точки P многогранника K , отличной от вершины, построена выпуклая круговая окрестность. Кратчайшие геодезические, соединяющие точки из этой окрестности, единственны (для каждой пары точек) и на соответствующей развертке представляют собой отрезки.

Пусть теперь P — вершина многогранника K . Пусть, опять же, U' — круговая окрестность для P , не содержащая других вершин многогранника K , кроме P , а $U \subset U'$ — круговая окрестность для P вдвое меньшего диаметра, чем U' . Тогда каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая точки из U , снова лежит в U' .

Рассмотрим произвольную пару точек A и B из U . Обозначим через a и b радиусы окрестности U , проходящие через A и B соответственно. Пусть α_+ и α_- — соответственно, положительный и отрицательный углы между a и b .

Предложение 5.33. *У любой точки P многогранника K существует выпуклая шаровая окрестность U , такая, что каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая произвольную пару точек A и B из этой окрестности, целиком содержится в U . Более того, если P не является вершиной многогранника K , то точки A и B соединяются единственной кратчайшей геодезической. Если же P — вершина для K , то такая кратчайшая геодезическая также единственна, за исключением случая, когда положительный и отрицательный углы между PA и PB равны между собой и меньше π . В последнем случае точки A и B соединяются двумя кратчайшими геодезическими.*

Более точно, пусть P — вершина для K и α_{\pm} — положительный и отрицательный углы между PA и PB .

- Если $\alpha_{\pm} \geq \pi$, то единственная кратчайшая геодезическая, соединяющая A с B , — это ломаная APB .
- Если углы α_{\pm} не равны между собой и один из них меньше π , то кратчайшая геодезическая из A в B лежит в секторе, величина которого равна наименьшему из α_{\pm} . При этом на развертке этого сектора эта геодезическая представляет собой отрезок AB , длина которого меньше длины ломаной APB .
- Если углы α_{\pm} равны между собой и меньше π , то существует ровно две кратчайшие геодезические, соединяющие A и B , являющиеся на развертках содержащих их секторов отрезками AB , причем длины этих геодезических меньше длины ломаной APB .

Кроме того, мы опишем локальное устройство геодезических на многогранниках.

Теорема 5.29. *Кривая γ на многограннике K является геодезической тогда и только тогда, когда каждый достаточно малый фрагмент кривой γ , не проходящий через вершины многогранника K , представляет собой отрезок (в подходящей развертке), а проходящий через некоторую вершину P из K делится этой вершиной на два отрезка, положительный и отрицательный углы между которыми не меньше π .*

В следующем пункте мы используем разработанную технику для исследования локального устройства локально минимальных сетей на многогранниках.

5.3.1.3. Локальная структура локально минимальных сетей на многогранниках

В силу вышесказанного локальная структура локально минимальной сети Γ на многограннике K в точке $X \in \Gamma$, отличной от вершины из K , — такая же, как и в случае плоского риманова многообразия.

Сформулируем следующий критерий локальной минимальности сети на многограннике. Так же, как и в случае многообразий, мы предполагаем, что сеть Γ не содержит фиктивных вершин и не совпадает с замкнутой геодезической.

Теорема 5.30. *Сеть Γ на многограннике K , затягивающая конечное множество M точек из K , является локально минимальной*

тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- (1) все ребра сети Γ являются геодезическими,
- (2) вершины степени 1 и 2 — граничные,
- (3) углы между произвольной парой ребер, стыкующихся в вершине сети Γ , не меньше 120° .

Из теоремы 5.30 и сделанных выше замечаний получаем следующий результат.

Следствие 5.41. *Замкнутая локально минимальная сеть на выпуклом многограннике K не проходит через вершины многогранника K . Степень каждой вершины такой сети равна трем.*

Замечание. Отметим, что в случае общих многогранников локально минимальные сети уже не обязаны быть сетями Штейнера, т.е. степени некоторых вершин локально минимальных сетей могут быть больше чем 3. В соответствии с предложением 5.33 такие вершины обязаны совпадать с вершинами многогранника, имеющими достаточно большой полный угол (по крайней мере, не меньший чем $8\pi/3$).

5.3.1.4. Теорема Гаусса–Бонне для многогранников

Всюду ниже в данном разделе все многогранники предполагаются сферическими. Пусть P — вершина многогранника K , а α — полный угол при этой вершине.

Определение. Величина $\tau_P = 2\pi - \alpha$ называется *гауссовой кривизной* в вершине P .

Отметим, что гауссова кривизна в любой вершине выпуклого многогранника положительна.

Пусть γ — замкнутая ломаная на многограннике K . Ломаная γ разбивает K на две области (тут мы пользуемся сферичностью многогранника). Пусть Ω — одна из них и P_1, \dots, P_k — вершины из K , попавшие внутрь Ω .

Определение. Сумма гауссовых кривизн по всем вершинам P_i называется *полной кривизной области Ω* . Если в Ω нет вершин из K , то полную кривизну такой области Ω будем считать равной нулю.

Область Ω можно рассматривать как многоугольник, лежащий на многограннике K . Пусть n — количество углов в многоугольнике Ω , а β_i — величины его внутренних углов. Имеет место аналог *теоремы Гаусса–Бонне*, см. [78].

Теорема 5.31. *Сумма внутренних углов n -угольника Ω на сферическом многограннике отличается от $\pi(n - 2)$ (суммы внутренних углов плоского n -угольника) на полную кривизну $\tau(\Omega)$ области Ω :*

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = \pi(n - 2) + \tau(\Omega).$$

В частности, сумма углов любого n -угольника на выпуклом многограннике K , содержащего хотя бы одну вершину из K , больше, чем сумма углов плоского n -угольника, т.е. чем $\pi(n - 2)$.

5.3.2. Метрические и топологические ограничения на устройство замкнутых локально минимальных сетей

Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на сферическом многограннике K . Сеть Γ разбивает многогранник на области — ячейки или грани сети Γ . Каждая область является многоугольником, все внутренние углы которого равны $2\pi/3$. Пусть Ω — произвольная ячейка сети Γ , являющаяся n -угольником, причем на границе этой ячейки нет вершин многогранника K . Обозначим через $\tau(\Omega)$ полную кривизну области Ω . Из теоремы 5.31 вытекает следующий результат.

Предложение 5.34. *Полная кривизна $\tau(\Omega)$ равна $\pi(6 - n)/3$. В частности, если Ω не содержит вершин из K , то ячейка Ω является шестиугольником. Более того, если K — выпуклый многогранник, то все ячейки сети Γ являются не более чем шестиугольниками, причем ячейка Ω — шестиугольник тогда и только тогда, когда она не содержит вершин многогранника K .*

Оказывается, теорема 5.31 накладывает существенные ограничения на класс многогранников, на поверхности которых существует хотя бы одна замкнутая локально минимальная сеть. Ниже мы приведем результат Т. В. Павлюкевич (Аникеевой) на эту тему.

5.3.2.1. Т. В. Павлюкевич. Существование замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках

Напомним историю вопроса.

Классическая теорема Люстерника—Шнирельмана о замкнутых геодезических (простейших замкнутых локально минимальных сетях) утверждает, что на любой выпуклой гладкой компактной поверхности W

в \mathbb{R}^3 , гомеоморфной двумерной сфере, существует не менее трех замкнутых несамопересекающихся геодезических, см. [109]. Такие геодезические, делящие двумерную поверхность M на две части, каждая из которых гомеоморфна двумерному диску, называются *простыми*.

Далее, в работах [2] и [121] было показано, что теорема Люстерника–Шнирельмана остается справедливой в классе простых квазигеодезических на многограннике W . Напомним, что кривая γ на выпуклой поверхности называется *квазигеодезической*, если у нее правый и левый поворот на любом отрезке неотрицательны. Квазигеодезические на выпуклом многограннике W — это в точности геодезические ломаные с вершинами, лежащими в вершинах многогранника (см. [121]).

В случае простых геодезических на многограннике W теорема Люстерника–Шнирельмана, как показал Г. А. Гальперин [46], теряет силу, и имеет место следующий результат.

Теорема 5.32. *В классе \mathcal{A} многогранников, гомеоморфных сфере, существует открытое множество \mathcal{B} многогранников, на каждом из которых нет ни одной простой замкнутой геодезической.*

Более точно этот результат можно сформулировать так, см. [46].

Теорема 5.33. *Рассмотрим многогранник W , для любого собственного подмножества вершин которого гауссовы кривизны этих вершин и число π рационально независимы, т.е.*

$$\sum_{v \in W} n_v \tau_v + \pi n = 0, \quad n_v, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad n_v = n = 0$$

(здесь, как и выше, τ_v — гауссова кривизна многогранника W в вершине v). Тогда на W не существует ни одной простой замкнутой геодезической.

Оказывается, как показала Т. В. Павлюкевич, аналогичная теорема выполняется и в случае замкнутых локально минимальных сетей.

Теорема 5.34. *Пусть W — выпуклый многогранник, для любого собственного подмножества вершин которого гауссовы кривизны этих вершин и число π рационально независимы. Тогда на W не существует ни одной замкнутой локально минимальной сети.*

Соотношения $\sum \tau_v \neq \pi(2 - \frac{N}{3})$, $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ для всех поднаборов вершин многогранника W задают открытое подмножество в классе выпуклых многогранников. Поэтому для выпуклых многогранников справедлив аналог теоремы Гальперина.

Теорема 5.35. *В классе \mathcal{A} выпуклых многогранников, гомеоморфных сфере, существует открытое подмножество многогранников, на каждом из которых нет ни одной замкнутой локально минимальной сети.*

5.3.2.2. Ячейки сетей на выпуклых многогранниках

Пусть K — выпуклый сферический многогранник и Γ — замкнутая локально минимальная сеть на нем. Пусть f , e и v — число граней, ребер и вершин сети Γ . Обозначим через k_i число граней сети Γ , являющихся i -угольниками. Так как степень каждой вершины сети Γ равна 3 в силу выпуклости K , то, очевидно, $f = \sum k_i$, $e = (1/2) \sum ik_i$, а $v = (1/3) \sum ik_i$. Поэтому, применяя формулу Эйлера, получаем .

Утверждение 5.19.

$$\sum (6 - i)k_i = 12.$$

Легко понять, что 1-угольники могут быть только замкнутыми геодезическими (угол при единственной вершине степени 2 равен π). Если есть двуугольник, то сеть Γ состоит из двух вершин, соединенных тремя ребрами (сравните со случаем сферы). В этом случае множество вершин многогранника K разбивается на три класса так, чтобы сумма гауссовых кривизн вершин каждого класса равнялась $4\pi/3$. Примером такого K может служить правильная треугольная призма, сеть Γ на которой устроена так: вершины сети Γ — центры оснований призмы Γ , соединенные между собой тремя отрезками (см. рис. 5.30).

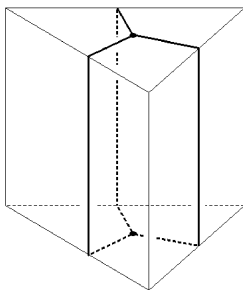


Рис. 5.30. Локально минимальная сеть на призме.

Пусть теперь сеть Γ не содержит 2-угольников. Из утверждения 5.19 и теоремы 5.30 немедленно получаем

Следствие 5.42. Если Γ — замкнутая локально минимальная сеть на выпуклом сферическом многограннике, то количества i -угольников, из которых составлена сеть Γ , при $2 < i < 6$ описываются следующей таблицей.

$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
4	0	0	1	4	1	0	5	2
3	1	1	1	3	3	0	4	4
2	3	0	1	2	5	0	3	6
2	2	2	1	1	7	0	2	8
2	1	4	1	0	9	0	1	10
2	0	6	0	6	0	0	0	12

Напомним, что замкнутая локально минимальная сеть на стандартной сфере S^2 не может содержать шестиугольников. Это приводит к конечности числа топологий таких сетей на S^2 . На выпуклых многогранниках, в отличие от сферы S^2 , возможность наличия шестиугольников приводит к существованию бесконечных серий замкнутых локально минимальных сетей. Отметим, что каждая такая сеть состоит из некоторого числа, указанного в таблице, i -угольников ($2 < i < 6$), соединенных между собой “пенной” из шестиугольников. При этом каждый i -угольник ($2 < i < 6$) обязательно содержит некоторые вершины многогранника K , а количество шестиугольников из пены может быть сколь угодно велико, см. ниже. В дальнейшем мы не будем больше разбирать общий случай выпуклых многогранников, а остановимся более подробно на замкнутых локально минимальных сетях, лежащих на правильных многогранниках, являющихся границами так называемых платоновых тел.

5.3.2.3. Случай правильных многогранников

В настоящем пункте, если не оговорено противное, K будет обозначать правильный многогранник, а Γ — замкнутую локально минимальную сеть на нем.

Хорошо известно, что правильные многогранники могут быть лишь следующих пяти типов: тетраэдр, состоящий из 4 правильных треугольников, стыкующихся в вершинах тетраэдра по 3; октаэдр, содержащий 8 правильных треугольников, стыкующихся по 4; куб, склеенный из 6 квадратов, стыкующихся по 3; додекаэдр, составленный из 12 правильных пятиугольников, стыкующихся по 3; и, наконец, икосаэдр, состоящий из 20 правильных треугольников, стыкующихся по 5.

Ясно, что гауссовы кривизны всех вершин данного правильного многогранника равны между собой. Вычислим эти гауссовы кривизны.

Утверждение 5.20. *Гауссовы кривизны вершин правильных многогранников имеют следующий вид:*

- π для тетраэдра,
- $2\pi/3$ для октаэдра,
- $\pi/2$ для куба,
- $\pi/5$ для додекаэдра и
- $\pi/3$ для икосаэдра.

По следствию 5.41, сеть Γ не проходит через вершины из K . Из теоремы 5.30 получаем, что ячейки сети Γ , содержащие вершины из K , являются на более чем пятиугольниками, а все остальные ячейки — шестиугольниками. Посмотрим теперь, для каждого из правильных многогранников K , какие ячейки может содержать замкнутая локально минимальная сеть Γ на K .

Утверждение 5.21. *Пусть K — правильный многогранник, а Ω — n -угольник на K , граница которого γ не проходит через вершины из K . Пусть все внутренние углы в Ω равны $2\pi/3$. Тогда*

- Область Ω является шестиугольником тогда и только тогда, когда Ω не содержит вершин из K .
- Если γ является 1-угольником, то γ — замкнутая геодезическая, причем Ω содержит ровно половину всех имеющихся на K вершин. Таким образом, каждый 1-угольник γ делит множество всех вершин из K на два множества, состоящих из одинакового числа элементов.
- Если K — тетраэдр, куб или додекаэдр и Ω не является ни шестиугольником, ни 1-угольником, то Ω — треугольник, содержащий на тетраэдре одну вершину из K , на кубе — две вершины и на додекаэдре — пять вершин.
- Если K — октаэдр, то, помимо шестиугольника и 1-угольника, Ω может быть 2-угольником, содержащим две вершины из K , и 4-угольником, содержащим одну вершину из K .
- Если K — икосаэдр, то на нем могут реализоваться все возможные n -угольники, $0 \leq n \leq 6$, при этом n -угольник Ω содержит $6 - n$ вершин из K .

В заключение настоящего пункта приведем примеры бесконечных серий замкнутых локально минимальных сетей на всех правильных многогранниках, см. рис 5.31. Отметим, что на всех многогранниках, кроме додекаэдра, построить пример нетривиальной замкнутой локально минимальной сети довольно просто. На додекаэдре это существенно сложнее. Соответствующий пример был построен студенткой механико-математического факультета МГУ Т. В. Павлюкевич (Аникеевой), см. ниже.

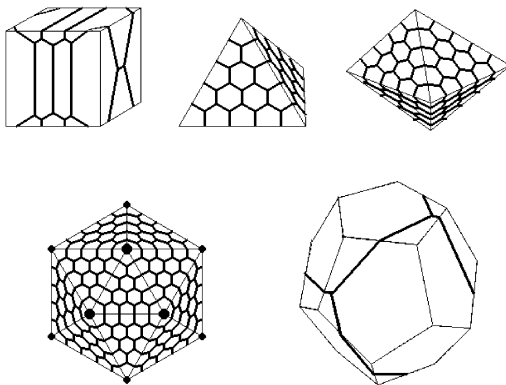


Рис. 5.31. Бесконечные серии сетей на платоновых телах.

5.3.3. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на правильном тетраэдре

В настоящем разделе мы приведем полное описание замкнутых локально минимальных сетей на правильном тетраэдре. Это описание было получено И. В. Птицыной совместно с авторами как следствие классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах. Подробности можно найти в [78] и [131].

5.3.3.1. Разветвленные накрытия тетраэдра плоскостью и плоским тором

Пусть K — правильный тетраэдр. Рассмотрим паркет T плоскости \mathbb{R}^2 (см. раздел 5.1.3), состоящий из треугольников, конгруэнтных грани тетраэдра K . Определим отображение плоскости \mathbb{R}^2 на K следующим образом.

Разрежем тетраэдр K по трем его ребрам, выходящим из одной вершины. Мы получим правильный треугольник Δ , разбитый на четыре более мелких правильных треугольника Δ_i . Пусть ψ — вложение треугольника Δ в плоскость \mathbb{R}^2 , при котором треугольники Δ_i отображаются на ячейки паркета T . Построим паркет T' плоскости \mathbb{R}^2 , порожденный ячейкой $\Delta' = \psi(\Delta)$. Пусть λ — отражение относительно середины одной из сторон треугольника Δ' (т.е. центральная симметрия) и $\Delta'' = \lambda(\Delta')$. Обозначим через Π ромб $\Delta' \cup \Delta''$.

Пусть $\varphi': \Delta' \rightarrow K$ — отображение, обратное к ψ . Построим отображение $\varphi: \Pi \rightarrow K$, определив его на ячейке $\delta \in \Delta'$ равным φ' , а на ячейке $\delta \in \Delta''$ — равным $\varphi' \circ \lambda$. Легко видеть, что отображение φ корректно определено на пересечении Δ' и Δ'' и, значит, на всем ромбе Π . Более того, непосредственно проверяется, что отображение φ “одинаково” на противоположных сторонах ромба Π . Более формально, если τ — сдвиг, переводящий сторону l ромба Π в противоположную его сторону l' , то вдоль стороны l имеем $\varphi|_l = \varphi|_{l'} \circ \tau$. Поэтому отображение φ порождает отображение $\phi: T^2 \rightarrow K$ двумерного плоского тора, склеенного из параллелограмма Π , на тетраэдр K . Композиция накрытия $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ плоского тора T^2 плоскостью \mathbb{R}^2 и отображения $\phi: T^2 \rightarrow K$ порождает отображение $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow K$.

Отметим, что отображения ϕ и Φ являются разветвленными накрытиями: прообраз при отображении ϕ каждой точки из K , отличной от вершины, состоит из двух точек, а прообраз каждой вершины — из одной точки.

Пусть Υ — замкнутая локально минимальная сеть на K . Как было отмечено выше, сеть Υ не проходит через вершины тетраэдра K . Поэтому прообраз Γ сети Υ при отображении ϕ является, в силу теорем о локальной структуре, замкнутой локально минимальной сетью на торе T^2 . Обратное, вообще говоря, неверно.

Выясним, когда замкнутая локально минимальная сеть на T^2 порождает замкнутую локально минимальную сеть на K . Пусть C — центр ромба Π , из которого склеен тор T^2 , а λ — отражение относительно C . Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на торе T^2 . Обозначим через Γ' ее поднятие на плоскость с помощью проекции π . Пусть L — множество всех вершин ячеек паркета плоскости T , т.е. прообраз при отображении Φ вершин тетраэдра K . Множество L назовем *решеткой паркета T* .

Предложение 5.35. *Сеть Γ на торе порождает замкнутую локально минимальную сеть на тетраэдре K тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие два условия:*

- сеть Γ' инвариантна относительно центральной симметрии λ , и
- сеть Γ' не содержит точек решетки L паркета T .

Следствие 5.43. *Сеть Γ' на плоскости, порожденная замкнутой локально минимальной сетью на тетраэдре, переходит в себя при отражении относительно произвольной вершины из решетки L паркета T .*

Таким образом, чтобы описать замкнутые локально минимальные сети на тетраэдре, достаточно описать все замкнутые локально минимальные сети на плоском торе T^2 , склеенном из ромба Π , поднятия которых на плоскость \mathbb{R}^2 переходят в себя при симметрии относительно центра ромба Π и не содержат точек решетки паркета T .

Сделаем несколько необходимых замечаний относительно локально минимальных сетей на плоских торах.

Замечание. Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на $T^2(f)$ и $\Gamma' \subset \mathbb{R}^2$, как всегда, — ее поднятие на плоскость \mathbb{R}^2 . В предыдущем разделе, при определении типа сети Γ , мы, для удобства изложения, сдвигали сеть Γ так, чтобы одна из вершин соответствующей ей сети Γ' совпала с началом координат. В нашем случае, в силу предложения 5.35, сеть Γ' не может проходить через начало координат. Возникшую трудность можно легко преодолеть, выбрав, например, в качестве канонического ромба, из которого склеен тор $T^2(f)$, ромб, получающийся из Π сдвигом, переводящим одну из вершин ромба Π в вершину сети Γ' . Другая возможность состоит в определении базиса сети Γ' как произвольной пары неприводимых сетевых геодезических, выходящих из одного ребра сети Γ' , и в определении базиса разбиения, порожденного Γ' , как произвольной пары непараллельных прямых этого разбиения. При этом нам пришлось бы обсуждать соответствие между сетевыми базисами и базисами разбиения. Как бы то ни было, несложные рассуждения показывают, что конструкция, использованная нами при определении типов локально минимальных сетей на плоских торах, в действительности может быть сформулирована на инвариантном языке, т.е. не зависимо от взаимного расположения точек решетки тора и вершин сети Γ' (подробности см. в [131]).

Напомним, что, в силу утверждения 5.12, все неприводимые параллельные сетевые геодезические сети Γ' имеют одинаковую длину. Если выбран базис сети Γ' , состоящий, по определению, из двух непараллельных неприводимых сетевых геодезических, то длины этих базисных геодезических мы называли горизонтальным и вертикальным периодами сети Γ' . Напомним также, что существует три класса параллельности сетевых геодезических. Все вышесказанное является мотивацией следующего определения.

Определение. Упорядочим классы параллельности сетевых геодезических сети Γ' . Длину неприводимой сетевой геодезической, лежащей в i -м классе параллельности, назовем i -м периодом сети Γ' . Аналогичные

определения даются и для сети Γ , где вместо неприводимых рассматриваются замкнутые сетевые геодезические.

Оказывается, инвариантность сети Γ' относительно отражений в вершинах решетки L паркета T приводит к некоторым ограничениям на периоды сетей.

Пусть Υ — замкнутая локально минимальная сеть на тетраэдре K , Γ — ее поднятие на накрывающий тор T^2 и Γ' — поднятие сети Υ и Γ на плоскость \mathbb{R}^2 . Пусть паркет T и ромб Π выбраны так, что тор T^2 может быть записан как $T^2(f)$, где $f = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

Предложение 5.36. *Все периоды сети Γ' четны.*

Определение. Допустимая тройка $(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, m, n)$ называется *четной*, если числа m, n и $uv\Delta/d$ — четны, где Δ — определитель матрицы \mathcal{M} , $m = u\Delta$, $n = v\Delta$ и d — наибольший общий делитель чисел $ur - vr$ и $us - vq$ (см. предложение 5.28).

Во введенных терминах предложение 5.36 может быть переформулировано так.

Предложение 5.37. *Каждая допустимая тройка, являющаяся типом для поднятия Γ замкнутой локально минимальной сети $\Upsilon \subset K$ на плоский тор $T^2(f)$, накрывающий тетраэдр K , в произвольном базисе сети Γ , — четная.*

В следующем пункте мы определим правильные сети на тетраэдре и покажем, что верно обратное утверждение к предложению 5.36.

5.3.3.2. Правильные сети

Пусть Υ — замкнутая локально минимальная сеть на тетраэдре K и $\phi: T^2(f) \rightarrow K$ — построенное выше разветвленное накрытие тетраэдра K плоским тором $T^2(f)$, $f = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Пусть Γ — поднятие сети Υ на $T^2(f)$.

Определение. Сеть Υ на тетраэдре K называется *правильной*, если ее поднятие Γ на тор $T^2(f)$ является правильной сетью на этом торе.

Предложение 5.38. *Пусть $(\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, m, n)$ — четная допустимая тройка, для которой на плоском торе $T^2(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть Γ этого типа. Тогда правильная сеть $\Gamma_\tau \subset T^2(f)$, деформационно эквивалентная Γ , проектируется отображением ϕ , после некоторого сдвига на торе $T^2(f)$, в правильную замкнутую локально минимальную сеть на тетраэдре K .*

Следствие 5.44. *Для каждой четной допустимой тройки \mathcal{T} , задающей тип некоторой замкнутой локально минимальной сети на торе $T^2(f)$, существует замкнутая локально минимальная сеть Υ на тетраэдре K , такая, что поднятие сети Υ на тор $T^2(f)$ имеет тип \mathcal{T} .*

Теорема 5.36. *Для каждой замкнутой локально минимальной сети Υ на тетраэдре K существует единственная деформационно эквивалентная ей правильная локально минимальная сеть Υ_r . Длины сетей Υ и Υ_r равны, поэтому деформационно эквивалентные локально минимальные сети имеют одинаковые длины.*

Более того, каждая локально минимальная сеть на K может быть продеформирована в произвольную деформационно эквивалентную ей локально минимальную сеть в классе локально минимальных сетей.

Замечание. На самом деле, рассуждения, приведенные в настоящем разделе, позволяют получить полную классификацию замкнутых локально минимальных сетей на более широком классе многогранников — на так называемых *квазиправильных тетраэдрах*, т.е. тетраэдрах, все грани которых конгруэнтны между собой. Каждый такой тетраэдр, с точностью до подобия, может быть задан плоским треугольником, одна сторона которого — вектор $e_1 = (0, 1)$, а другая — вектор f из верхней полуплоскости, см. рис. 5.32. Такой тетраэдр обозначим через $K(f)$. Легко понять, что тетраэдр $K(f)$ накрывается тором $T^2(f)$, и поэтому все описанные выше построения, проведенные для случая правильного тетраэдра, применимы и к квазиправильному тетраэдру $K(f)$. Отметим, что И. В. Птицына в [131] изучает сети именно на квазиправильных тетраэдрах. В следующем разделе мы приведем общие классификационные теоремы для замкнутых локально минимальных сетей на квазиправильных тетраэдрах.

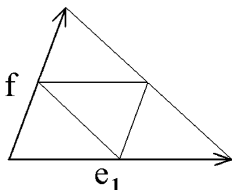


Рис. 5.32. Квазиправильный тетраэдр.

5.3.3.3. Теоремы классификации

Пусть Υ — замкнутая локально минимальная сеть на квазиправильном тетраэдре $K(f)$ (см. замечание выше) и Γ — поднятие этой сети

на плоский тор $T^2(f)$ при помощи разветвленного накрытия ϕ . Пусть $[g] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ — тип сети Γ . При этом, напомним, если $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$, то числа P , Q , R и S обязаны быть четными. Положим

$$P' = P/2, \quad Q' = Q/2, \quad R' = R/2, \quad \text{и} \quad S' = S/2.$$

Матрицу $\begin{pmatrix} P' & R' \\ Q' & S' \end{pmatrix}$ обозначим через g' .

Определение. Элемент $[g'] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ назовем *типом* сети Υ .

Теорема 5.37. *На квазиравильном тетраэдре деформационно эквивалентные замкнутые локально минимальные сети имеют одинаковые типы. Для каждого элемента $[g]$ из $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ найдется квазиравильный тетраэдр $K(f)$ и замкнутая локально минимальная сеть Υ на нем, такие, что $[g]$ является типом сети Υ на $K(f)$.*

Таким образом, замкнутые локально минимальные сети на квазиравильных тетраэдрах классифицируются, с точностью до деформационной эквивалентности, элементами однородного пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$.

Как и в случае плоских поверхностей, можно определить *характеристический треугольник* OAB типа $[g] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ для тетраэдра $K(f)$ так: если $\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix} \in [g]$, то $A = Pe_1 + Qf$, и $B = Re_1 + Sf$.

Теорема 5.38. *На квазиравильном тетраэдре $K(f)$ существует замкнутая локально минимальная сеть данного типа $[g]$, если и только если все углы характеристического треугольника типа $[g]$ для $K(f)$ меньше 120° , т.е. если вершины характеристического треугольника можно затянуть невырожденной локально минимальной сетью Γ_χ , которая называется характеристической сетью.*

Читатель без труда сформулирует аналоги теорем 5.17–5.22 для случая квазиравильных тетраэдров, а также аналог следствия 5.32. Мы приведем здесь лишь следующие два геометрических утверждения.

Следствие 5.45. *На каждом квазиравильном тетраэдре существует бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей.*

Следствие 5.46. *Малые деформации квазиравильного тетраэдра в классе квазиравильных тетраэдров не разрушают замкнутых локально минимальных сетей на нем.*

5.3.4. Алгоритм “размножения” замкнутых локально минимальных сетей на многогранниках

В данном разделе мы изложим результаты, полученные Т. В. Павлюкевич (Аникеевой). Цель данного раздела — доказать, что если на некотором многограннике K имеется одна замкнутая локально минимальная сеть, отличная от замкнутой геодезической и не проходящая через вершины многогранника, то на K имеется бесконечно много топологически различных замкнутых локально минимальных сетей. Мы предъядим конструктивный алгоритм “размножения” локально минимальной сети. Кроме того, мы построим замкнутую локально минимальную сеть на додекаэдре, отличную от замкнутой геодезической. Таким образом, в частности, будет доказана следующая теорема.

Теорема 5.39. *На поверхности каждого платонова тела существует бесконечное число топологически различных замкнутых локально минимальных сетей.*

Замечание. Для тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра бесконечные серии замкнутых локально минимальных сетей были построены в [78]. Серия таких сетей на додекаэдре построена Т. В. Павлюкевич.

Центральным результатом данного раздела является следующая теорема, полученная Т. В. Павлюкевич.

Теорема 5.40. *Если на некотором многограннике K существует замкнутая локально минимальная сеть, отличная от замкнутой геодезической и не проходящая через вершины многогранника K , то на K существует бесконечная серия топологически различных замкнутых локально минимальных сетей.*

Доказательство. Пусть на многограннике K существует замкнутая локально минимальная сеть Γ_0 , отличная от замкнутой геодезической и не проходящая через вершины из K . Мы построим бесконечную серию локально минимальных сетей, которая получается из сети Γ_0 путем добавления некоторого числа шестиугольников. Мы предъядим перестройки сети Γ_0 в некоторой достаточно малой окрестности этой сети, позволяющие строить новые сети более сложной топологии.

“Тройником” назовем сеть, являющуюся решением задачи Штейнера на плоскости для правильного треугольника. Мы опишем несколько возможных перестроек сети.

I. К исходной сети Γ_0 подклеим “тройник” таким образом, чтобы вершина степени 3 “тройника” совпала с вершиной V сети Γ_0 , а его

ребра лежали бы на продолжениях ребер сети Γ_0 за вершину V . Описанную процедуру произведем в каждой вершине V_i сети Γ_0 , после чего соединим вершины степени 1 “тройника” отрезками геодезических, “параллельных ребрам” исходной сети, см. рис. 5.33, а. (Заметим, что из каждой вершины степени 1 “тройника” нужно провести ровно два отрезка. Третий же отрезок является уже построенным ребром “тройника” и соединяет эту вершину с его вершиной степени 3.) Эти отрезки и ребра “тройника” будут ребрами новой сети. Вершинами сети будут вершины всех “тройников”.

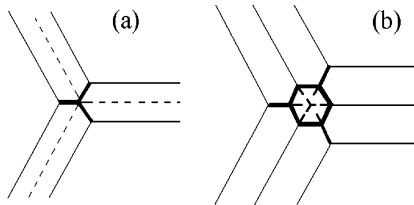


Рис. 5.33. Перестройки сети: вклейка тройника и шестиугольника.

II. Возьмем теперь правильный шестиугольник. Подклеим его к сети таким образом, чтобы его центр совпал с вершиной сети Γ_0 , а три его вершины лежали бы на ребрах сети. На биссектрисах внешних углов, выходящих из тех вершин шестиугольника, которые не лежат на ребрах сети, отложим отрезки длины, равной стороне шестиугольника, см. рис. 5.33, б. Описанную процедуру произведем в каждой вершине V_i сети Γ_0 . Концы отрезков, не принадлежащие вершинам шестиугольника, соединим между собой аналогично тому, как это делалось в I. Ребрами новой сети будут ребра старой сети, из которых выкинута отрезки, попавшие внутрь шестиугольников, а также стороны шестиугольника и отрезки, построение которых было описано выше. Вершинами новой сети будут все вершины всех шестиугольников и концы тех отрезков, которые строились на биссектрисах.

III.— ... К каждой вершине V_i сети Γ_0 подклеим “гроздь шестиугольников” и перестроим сеть по аналогии с уже разобранными случаями, см. рис. 5.34.

Каждая из описанных процедур может быть применена к произвольной сети, отличной от замкнутой геодезической и не проходящей через вершины многогранника. Доказательство закончено. ■

Как было показано выше, локально минимальная сеть на выпуклом многограннике не может проходить через вершины многогранника.

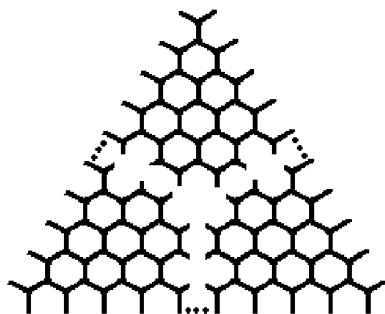


Рис. 5.34. Вклейка “грозди шестиугольников”.

Поэтому из теоремы 5.40 получаем следующий результат (Т. В. Павлюкевич).

Следствие 5.47. *На произвольном выпуклом многограннике либо не существует замкнутых локально минимальных сетей, отличных от замкнутых геодезических, либо существует бесконечная серия топологически различных замкнутых локально минимальных сетей.*

Используем теперь теорему 5.40 для построения бесконечной серии замкнутых локально минимальных сетей на поверхности додекаэдра. Пусть W — додекаэдр. В этом случае полная кривизна во всех его вершинах одинакова и равна $\pi/5$. Поэтому, как уже отмечалось в предыдущем разделе, если Γ — произвольная замкнутая локально минимальная сеть на W , отличная от замкнутой геодезической, то множество ячеек сети Γ состоит из четырех геодезических треугольников, каждый из которых ограничивает ровно 5 вершин додекаэдра, и некоторого количества геодезических шестиугольников, внутри каждого из которых не содержится вершин додекаэдра.

Мы построим пример замкнутой локально минимальной сети на додекаэдре, которая состоит только из треугольников, см. рис. 5.35. В дальнейшем такую сеть будем называть *тетраэдроподобной*.

Покажем, что сеть, представленная на рис. 5.35, действительно является замкнутой локально минимальной сетью на додекаэдре. Рассмотрим развертку \widehat{W} додекаэдра W , см. рис. 5.36. Заметим, что развертка \widehat{W} может быть получена из ее фрагмента w_0 (на рис. этот фрагмент заштрихован) отражениями. Для этого отразим фрагмент w_0 центрально симметрично относительно точки A — середины ребра a додекаэдра W .

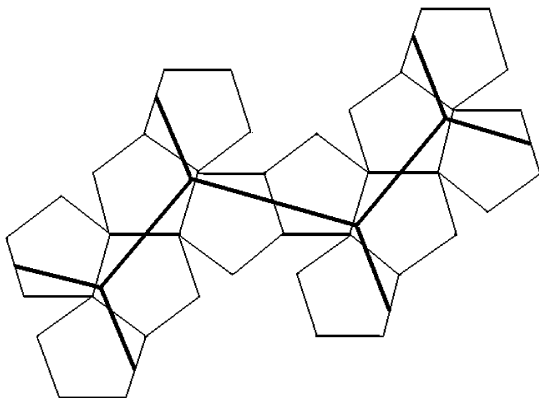


Рис. 5.35. Тетраэдроподобная сеть на додекаэдре (развертка).

Получим фрагмент w_1 . Затем отразим фрагмент w_1 центрально симметрично относительно точки B — середины ребра b . Полученный новый фрагмент обозначим через w_2 и отразим его относительно точки D — середины ребра d додекаэдра W . Полученные фрагменты w_i , $i = 0, 1, 2, 3$, образуют полную развертку додекаэдра⁸.

Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$, см. рис. 5.36. Для него решим задачу Штейнера, то есть найдем точку Штейнера S (поскольку все углы треугольника ABC меньше 120° , такая точка существует и лежит внутри треугольника).

Мы получим искомую сеть на додекаэдре из локально минимальной сети для треугольника ABC , отражая ее центрально-симметрично относительно точки A , затем B и D . При этом, очевидно, ребра сети гладко склеиваются на ребрах c , e , f додекаэдра W , см. рис. 5.36. Построенная сеть будет иметь четыре подвижных вершины и разобьет додекаэдр на четыре геодезических треугольника, каждый из которых охватывает ровно три вершины многогранника, см. рис. 5.37.

Для доказательства корректности описанного выше построения локально минимальной сети на додекаэдре W достаточно проверить, что имеет место следующая лемма.

Лемма 5.5. *В сделанных выше обозначениях точка Штейнера S лежит внутри четырехугольника $AC'NB'$.*

⁸Легко заметить, что фрагменты w_2 и w_3 могут быть получены сдвигом, соответственно, фрагментов w_0 и w_1 на вектор \vec{AD} .

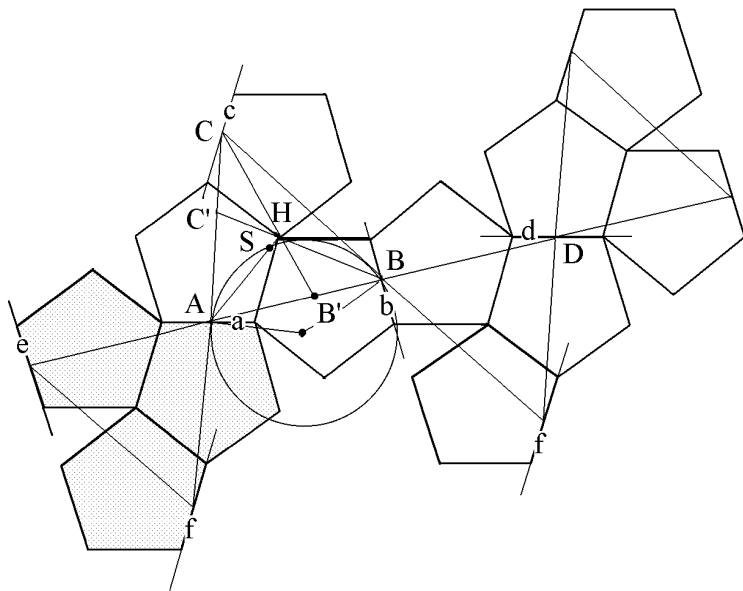


Рис. 5.36. Тетраэдроподобная сеть на додекаэдре (построение).

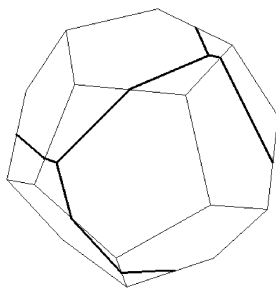


Рис. 5.37. Тетраэдроподобная сеть на додекаэдре.

Доказательство. Используем обозначения, сделанные на рис. 5.36. Для доказательства леммы достаточно проверить, что точка H лежит вне окружности. Но это очевидно, так как величина угла AHB равна углу правильного пятиугольника и, значит, меньше 120° . Лемма доказана. ■

Итак, мы построили тетраэдроподобную замкнутую локально минимальную сеть на додекаэдре. Воспользовавшись теоремой 5.40, получаем следующий результат (Т. В. Павлюкевич).

Теорема 5.41. *На додекаэдре существует бесконечная серия топологически различных локально минимальных сетей без границы.*

Последний результат завершает доказательство теоремы 5.39, см. также рис. 5.31.

5.3.5. Замкнутые геодезические на кубе

В этом разделе также излагаются результаты Т. В. Павлюкевич (Аникеевой).

Опишем все вложенные (т.е. без самопересечений) замкнутые геодезические на кубе. Из теоремы Гаусса–Бонне следует, что каждая замкнутая геодезическая делит куб на две части, каждая из которых содержит по четыре вершины. Оказывается, таких разбиений, с точностью до движения, существует ровно 6. При этом лишь трем из них соответствует вложенная замкнутая геодезическая. Анализ всевозможных таких разбиений вершин куба на четверки приводит к следующему результату.

Две геодезических на многограннике назовем *эквивалентными*, если, с точностью до движения многогранника, одна получается из другой непрерывной деформацией в классе геодезических.

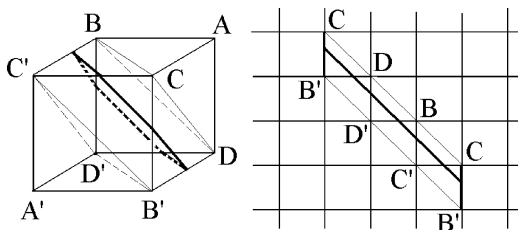


Рис. 5.38. Вложенная замкнутая геодезическая на кубе, 1.

Теорема 5.42. *На кубе существует ровно три неэквивалентных вложенных замкнутых геодезических, изображенных на рис. 5.38, 5.39 и 5.40.*

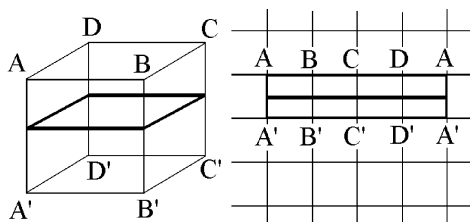


Рис. 5.39. Вложенная замкнутая геодезическая на кубе, 2.

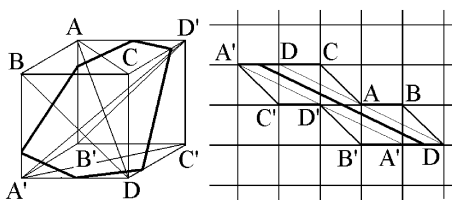


Рис. 5.40. Вложенная замкнутая геодезическая на кубе, 3.

5.4. М. В. Пронин.

Индексы Морса локально минимальных сетей

В данном параграфе содержатся результаты аспиранта механико-математического факультета МГУ М. В. Пронина. Фактически, мы приводим сокращенные версии статей М. В. Пронина [125] и [127], дающие представление о полученных им результатах. Некоторые определения и технические результаты данного параграфа повторяют данные в предыдущих разделах книги. Мы, однако, решили пойти на это, чтобы сохранить целостность изложения и обозначения.

5.4.1. Введение

Локально минимальные сети являются естественным обобщением геодезических на римановом многообразии. При изучении геодезических оказываются полезными понятия нуль-индекса (кратности сопряженной точки) и индекса. Напомним, что *индексом* (*нуль-индексом*) Морса геодезической называется индекс (соответственно, размерность ядра) второго дифференциала функционала длины. Второй дифференциал функционала длины называется *индексной формой* геодезической.

Оказалось, что понятия индексной формы, индекса и нуль-индекса могут быть перенесены на случай локально минимальных сетей. Ниже мы приведем основные результаты, касающиеся индексов Морса локально минимальных сетей.

5.4.2. Индексная форма

В этом разделе мы определим понятия индексной формы, индекса и нуль-индекса для так называемых *правильных критических* сетей, см. определение ниже.

Замечание. Ниже будет показано, что каждая локально минимальная сеть может быть параметризована правильной критической сетью.

Пространство кусочно-гладких кривых $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ на многообразии W обозначим через Ω . На пространстве Ω определен функционал длины $L: L(\gamma) = \int_a^b \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}(t) dt$, где через $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ обозначен вектор скорости кривой γ . *Вариацией* $\bar{\alpha}$ кривой $\gamma \in \Omega$ называется отображение $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ такое, что отображение $\alpha(s, t) = (\bar{\alpha}(s))(t)$ — кусочно-гладкое и $\bar{\alpha}(0) = \gamma$. *Полем вариации* $\bar{\alpha}$ называется векторное поле Y вдоль кривой γ , определенное формулой $Y(t) = \partial \alpha / \partial s(s, t)|_{s=0}$. Будем обозначать через $\Delta_t \dot{\gamma} / |\dot{\gamma}| = \dot{\gamma} / |\dot{\gamma}|(t^+) - \dot{\gamma} / |\dot{\gamma}|(t^-)$ разрыв векторного поля $\dot{\gamma} / |\dot{\gamma}|$ вдоль γ в точке t . Если γ — кусочно-регулярная кривая, то поле $\dot{\gamma} / |\dot{\gamma}|$ имеет конечное число точек разрыва.

Хорошо известна *формула первой вариации кривой* [116], [123], которую мы приведем в следующей, удобной для дальнейшего, форме.

Утверждение 5.22. Пусть $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ — вариация кусочно-регулярной кривой γ из Ω с параметром, пропорциональным длине дуги, Y — поле вариации $\bar{\alpha}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dL(\bar{\alpha}(s))}{ds} \Big|_{s=0} &= \\ &= - \sum_t \langle Y, \Delta_t \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle(t) - \int_a^b \langle Y, \nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle(t) dt + \langle Y, \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle(b) - \langle Y, \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle(a), \end{aligned}$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по всем точкам t , являющимися точками разрыва поля $\dot{\gamma} / |\dot{\gamma}|$.

Имеет место *формула второй вариации геодезической* [123, 56].

Утверждение 5.23. Пусть $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ — вариация регулярной геодезической γ из Ω , Y — поле вариации $\bar{\alpha}$, $Y^\perp = Y - \langle Y, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} / \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$

— ортогональная компонента поля Y , $\nabla_Y Y = (\nabla/\partial s)(\partial\alpha(s, t)/\partial s)|_{s=0}$, где $\alpha(s, t) = (\bar{\alpha}(s))(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L(\bar{\alpha}(s))}{ds^2} \Big|_{s=0} &= \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \int_a^b \left(\langle \nabla_{\dot{\gamma}} Y^\perp, \nabla_{\dot{\gamma}} Y^\perp \rangle - \langle R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y \rangle \right) (t) dt + \\ &+ \langle \nabla_Y Y, \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle (b) - \langle \nabla_Y Y, \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle (a), \end{aligned}$$

где R — тензор Римана.

Пусть G — (топологический) граф с границей ∂G и $\varphi: \partial G \rightarrow M$ — некоторое сюръективное отображение множества ∂G на конечное множество M точек в многообразии W . Будем говорить, что сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ имеет *топологию* (G, φ) , если отображения $\Gamma|_{\partial G}: \partial G \rightarrow W$ и $\varphi: \partial G \rightarrow M$ совпадают. Ясно, что в этом случае сеть Γ затягивает множество M . Обозначим через $\Omega[G, \varphi]$ *пространство кусочно-гладких сетей топологии* (G, φ) . На пространстве $\Omega[G, \varphi]$ рассмотрим функционал длины L . Отображение $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega[G, \varphi]$ назовем *вариацией* сети $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$, если $\bar{\alpha}(0) = \Gamma$ и для каждого ребра $[a, b]$ графа G отображение $\bar{\alpha}_{[a, b]} = \bar{\alpha}|_{[a, b]}: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow W$ является кусочно-гладким. Из определения следует, что вариация сети оставляет неподвижными граничные вершины сети. Назовем *полем вариации* $\bar{\alpha}$ векторное поле X вдоль сети, определенное на каждом ребре формулой $X_{[a, b]}(t) = \bar{\alpha}_s(0, t)$, где $\bar{\alpha}_s(s, t) = \partial \bar{\alpha}_{[a, b]}(s, t)/\partial s$. Заметим, что в каждой граничной вершине поле вариации сети равно нулю.

Сеть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ назовем *критической* сетью функционала длины L на $\Omega[G, \varphi]$, если для любой вариации $\bar{\alpha}$ сети выполнено неравенство: $\lim_{s \rightarrow 0+} (L(\bar{\alpha}(s)) - L(\Gamma))/s \geq 0$.

С помощью утверждения 5.22 легко получить *формулу первой вариации сети*.

Утверждение 5.24. Пусть $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega[G, \varphi]$ — вариация кусочно-регулярной сети Γ из $\Omega[G, \varphi]$, ребра $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ которой параметризованы пропорционально длине дуги, Y — поле вариации $\bar{\alpha}$, $Y_i = Y|_{\gamma_i}$ — ограничение Y на ребро γ_i . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dL(\bar{\alpha}(s))}{ds} \Big|_{s=0} &= \sum_{i=1}^n \left(- \sum_t \langle Y_i, \Delta_t \frac{\dot{\gamma}_i}{|\dot{\gamma}_i|} \rangle (t) - \int_{a_i}^{b_i} \langle Y_i, \nabla_{\dot{\gamma}_i} \frac{\dot{\gamma}_i}{|\dot{\gamma}_i|} \rangle (t) dt + \right. \\ &\left. + \langle Y_i, \frac{\dot{\gamma}_i}{|\dot{\gamma}_i|} \rangle (b_i) - \langle Y_i, \frac{\dot{\gamma}_i}{|\dot{\gamma}_i|} \rangle (a_i) \right), \end{aligned}$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по всем точкам t , являющимся точками разрыва поля $\dot{\gamma}_i/|\dot{\gamma}_i|$.

Следствие 5.48. *Кусочно-регулярная сеть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$, ребра которой параметризованы пропорционально длине, является критической тогда и только тогда, когда все ее ребра — отрезки регулярных геодезических и в каждой подвижной вершине v сети Γ сумма векторов длины 1, направленных вдоль ребер, инцидентных v , равна нулю.*

Кусочно-регулярную критическую сеть, каждое ребро которой параметризовано пропорционально длине, назовем *правильной критической сетью*.

Теоремы о локальной структуре локально минимальных сетей—следов утверждают, что ребра канонического представителя такой сети — регулярные геодезические и каждая его подвижная вершина имеет степень 3. Ребра, инцидентные такой вершине, стыкуются под углами в 120° . Всюду ниже в данном разделе мы будем рассматривать только такие топологии (G, φ) . В частности, в этих предположениях, следствие 5.48 гарантирует, что каждая локально минимальная сеть может быть параметризована правильной критической сетью.

С помощью формулы второй вариации геодезической легко вывести аналог этой формулы для случая правильной критической сети. *Ортогональной компонентой* Y^\perp поля вариации Y сети Γ назовем набор ортогональных относительно ребер сети компонент полей $Y_i = Y|_{\gamma_i}$, т.е. $Y^\perp = \{Y_i^\perp\}_{i=1}^n$, где $Y_i^\perp = Y_i - \langle Y_i, \dot{\gamma}_i \rangle \dot{\gamma}_i / \langle \dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i \rangle$.

Утверждение 5.25. *Пусть $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega[G, \varphi]$ — вариация правильной критической сети Γ из $\Omega[G, \varphi]$, Y — поле вариации $\bar{\alpha}$, Y^\perp — ортогональная компонента поля Y . Тогда*

$$\left. \frac{d^2 L(\bar{\alpha}(s))}{ds^2} \right|_{s=0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\dot{\gamma}_i|} \int_{a_i}^{b_i} \left(\langle \nabla_{\dot{\gamma}_i} Y_i^\perp, \nabla_{\dot{\gamma}_i} Y_i^\perp \rangle - \langle R(Y_i, \dot{\gamma}_i) \dot{\gamma}_i, Y_i \rangle \right) (t) dt.$$

Пусть Y — векторное поле вдоль кривой γ и $Y^\perp = Y - \langle Y, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} / \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ — ортогональная компонента поля Y . Тогда, по свойствам тензора Римана (см., например, [56]) $\langle R(Y, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y \rangle = \langle R(Y^\perp, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y^\perp \rangle$. С учетом этого замечания, формулу второй вариации правильной критической сети можно записать в виде

$$\left. \frac{d^2 L(\bar{\alpha}(s))}{ds^2} \right|_{s=0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\dot{\gamma}_i|} \int_{a_i}^{b_i} \left(\langle \nabla_{\dot{\gamma}_i} Y_i^\perp, \nabla_{\dot{\gamma}_i} Y_i^\perp \rangle - \langle R(Y_i^\perp, \dot{\gamma}_i) \dot{\gamma}_i, Y_i^\perp \rangle \right) (t) dt.$$

Обозначим через $T\Omega_\Gamma^\perp$ пространство ортогональных компонент полей вариаций правильной критической сети Γ . На этом пространстве можно определить квадратичную форму I по формуле: $I(X) = d^2 L(\bar{\alpha}(s))/ds^2|_{s=0}$, где $X \in T\Omega_\Gamma^\perp$, $\bar{\alpha}$ — некоторая вариация, ортогональная компонента поля которой совпадает с X . Из вида формулы второй вариации следует, что это определение корректно. По квадратичной форме I стандартным образом можно построить симметричную билинейную форму на пространстве $T\Omega_\Gamma^\perp$. Эту форму мы также будем обозначать через I и называть *индексной формой* правильной критической сети Γ . Пусть X, Y лежат в $T\Omega_\Gamma^\perp$, тогда

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\dot{\gamma}_i|} \int_{a_i}^{b_i} \left(\langle \nabla_{\dot{\gamma}_i} X_i, \nabla_{\dot{\gamma}_i} Y_i \rangle - \langle R(X_i, \dot{\gamma}_i) \dot{\gamma}_i, Y_i \rangle \right) (t) dt.$$

Размерность ядра индексной формы назовем *нуль-индексом* сети Γ . Максимальная размерность подпространства пространства $T\Omega_\Gamma^\perp$, ограничение на которое индексной формы I является отрицательно определенной формой, называется *индексом* сети Γ . Сумма индекса и нуль-индекса называется *квазииндексом*. *Нуль-индексом, индексом и квазииндексом локально минимальной сети* назовем, соответственно, нуль-индекс, индекс и квазииндекс любого канонического представителя. Нетрудно видеть, что это определение корректно (т.е. не зависит от выбора канонического представителя).

Условимся обозначать нуль-индекс, индекс и квазииндекс сети Γ через $\text{null } \Gamma$, $\text{ind } \Gamma$ и $\text{ind}_0 \Gamma$ соответственно.

При вычислении индексов и нуль-индексов удобно пользоваться следующим представлением пространства $T\Omega_\Gamma^\perp$. Известно, что каждая точка риманова многообразия лежит в некотором открытом множестве, в котором любые две точки могут быть соединены кратчайшей геодезической, гладко зависящей от этих точек. Выберем разбиение $\tau = \{t_{ij}\}$ ребер графа G таким образом, чтобы каждый отрезок $\gamma_i|_{[t_{i,j-1}, t_{i,j}]}$ любого ребра γ_i сети Γ лежал в некотором таком открытом множестве U_{ij} , зависящем от i и j . Такое разбиение существует, поскольку образ сети Γ компактен. Обозначим через $T\Omega_\Gamma^\perp(\tau)$ подпространство пространства $T\Omega_\Gamma^\perp$, элементы которого на каждом отрезке $[t_{i,j-1}, t_{i,j}]$ являются *якобиевыми полями*. Напомним, что поле J вдоль регулярной геодезической $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ называется *якобиевым*, если оно удовлетворяет *уравнению Якоби*: $\nabla_{\dot{\gamma}}^2 J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$, где $\nabla_{\dot{\gamma}}^2 J = \nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}} J)$. Если J является ортогональным полем Якоби, т.е. $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$, то, как известно, $\nabla_{\dot{\gamma}} J$

— также ортогональное поле вдоль γ . Обозначим через $T'(\tau)$ подпространство пространства $T\Omega_\Gamma^\perp$, элементы которого обращаются в нуль в точках разбиения τ .

Лемма 5.6. *Пусть Γ — правильная критическая сеть, тогда подпространства $T\Omega_\Gamma^\perp(\tau)$ и $T'(\tau)$ ортогональны в $T\Omega_\Gamma^\perp$ относительно индексной формы, $T\Omega_\Gamma^\perp$ есть прямая сумма подпространств $T\Omega_\Gamma^\perp(\tau)$ и $T'(\tau)$ и ограничение индексной формы на $T'(\tau)$ является положительно определенной формой.*

Из леммы и конечномерности пространства $T\Omega_\Gamma^\perp(\tau)$ непосредственно получаем следующий результат.

Следствие 5.49. *Индекс и нуль-индекс правильной критической сети Γ конечны и равны индексу и нуль-индексу ограничения индексной формы на пространство $T\Omega_\Gamma^\perp(\tau)$.*

Отметим, что если X и Y лежат в $T\Omega_\Gamma^\perp(\tau)$, то

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_j \left(\langle Y_i(t_{i,j}), \nabla_{\dot{\gamma}_i} X_i(t_{i,j}) \rangle - \langle Y_i(t_{i,j-1}), \nabla_{\dot{\gamma}_i} X_i(t_{i,j-1}) \rangle \right).$$

Следующая теорема описывает структуру элементов, лежащих в ядре индексной формы.

Теорема 5.43. *Пусть Γ — правильная критическая сеть, тогда $X \in T\Omega_\Gamma^\perp$ лежит в ядре индексной формы, если и только если вдоль каждого ребра γ_i сети Γ поле $X_i = X|_{\gamma_i}$ является полем Якоби, и в каждой подвижной вершине v сети Γ имеет место равенство:*

$$\sum_{j(v)} \langle \vec{e}_j, \dot{\gamma}_j \rangle / \langle \dot{\gamma}_j, \dot{\gamma}_j \rangle \nabla_{\dot{\gamma}_j} X_j(v) = 0,$$

где \vec{e}_j — вектор из $T_v W$ единичной длины, направленный вдоль ребра $\dot{\gamma}_j$, а суммирование ведется по всем ребрам, инцидентным вершине v .

Если вершина v является общим началом или общим концом всех инцидентных ей ребер, и каждое из этих ребер параметризовано натуральным параметром, то второе условие примет следующий вид: $\sum_{j(v)} \nabla_{\dot{\gamma}_j} X_j(v) = 0$.

Имеет место следующее утверждение, позволяющее в некоторых случаях оценить значение нуль-индекса.

Утверждение 5.26. Пусть $\bar{\alpha}$ — вариация правильной критической сети Γ , причем $\bar{\alpha}(u)$ — правильная критическая сеть при $u > 0$. Тогда набор ортогональных компонент векторного поля вариации $\bar{\alpha}$ лежит в ядре индексной формы сети.

Напомним, что каждую сеть можно представить в виде объединения ее невырожденных компонент (см. главу 1). Если $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть, то, ясно, и каждая ее невырожденная компонента является правильной критической сетью.

Утверждение 5.27. Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть на римановом многообразии W , тогда индекс (нуль-индекс) Γ равен сумме индексов (соответственно, нуль-индексов) ее невырожденных компонент.

5.4.3. Локально минимальные сети на многообразиях неположительной кривизны

В данном разделе рассматриваются локально минимальные сети на многообразиях строго отрицательной секционной кривизны и на евклидовых⁹ многообразиях.

Теорема 5.44. Пусть W — риманово многообразие строго отрицательной секционной кривизны, Γ — локально минимальная сеть. Тогда индекс и нуль-индекс сети Γ равны нулю.

Рассмотрим пару сетей Γ_0 и Γ_1 топологии (G, φ) на некотором многообразии W . Сети Γ_0 и Γ_1 назовем *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F: G \times [0, 1] \rightarrow W$, неподвижное на границе ∂G графа G , причем $F_{G \times \{0\}} = \Gamma_0$ и $F_{G \times \{1\}} = \Gamma_1$. Имеет место следующий результат, см. [125].

Теорема 5.45. Пусть W — полное риманово многообразие строго отрицательной секционной кривизны. Тогда в каждом классе гомотопных сетей W существует не более одной локально минимальной сети. Точнее, любые две гомотопные локально минимальные сети эквивалентны, т.е. отличаются на замену параметризации.

Если многообразие W евклидово, и каждая невырожденная компонента графа G с границей ∂G является *деревом* (т.е. не содержит циклов), то верны утверждения, аналогичные теоремам 5.44 и 5.45.

⁹Напомним, что риманово многообразие называется евклидовым, если его тензор Римана равен нулю.

Теорема 5.46. Пусть W — евклидово многообразие, Γ — локально минимальная сеть топологии (G, φ) , причем каждая невырожденная компонента графа $(G, \partial G)$ является деревом. Тогда индекс и нуль-индекс сети Γ равны нулю. Если, кроме того, W является полным многообразием, то в каждом классе гомотопных сетей на W существует не более одной локально минимальной сети.

Рассмотрим сети общего вида (т.е. сети, невырожденные компоненты которых могут содержать циклы). Назовем *цикломатическим числом* сети $\Gamma: G \rightarrow W$ цикломатическое число (первое число Бетти $b_1(G)$) графа G . Будем говорить, что сеть Γ *содержит неориентируемый цикл*, если в графе G имеется замкнутый путь s такой, что перенос ориентированного репера вдоль замкнутой кривой $\Gamma|_s$ на многообразии W приводит к изменению ориентации этого репера.

Теорема 5.47. Пусть W — двумерное евклидово многообразие, Γ — локально минимальная сеть на W . Тогда индекс сети Γ равен нулю, а нуль-индекс равен сумме цикломатических чисел невырожденных компонент сети Γ минус число невырожденных компонент Γ , содержащих неориентируемые циклы.

Отметим, что теорема 5.47 в случае, когда многообразие W есть евклидово пространство, следует из работ [84] и [88], см. также главу 4.

Сеть топологии (G, φ) называется *замкнутой*, если граница ∂G графа G является пустым множеством. В работах [76, 130] получено полное описание замкнутых локально минимальных сетей на плоских двумерных торах и плоских бутылках Клейна в терминах M -типов сети, являющихся элементами однородного пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$, см. раздел 5.2.

Вычислим нуль-индекс этих сетей. Заметим, что цикломатическое число c связного графа с v вершинами и e ребрами равно $1 + e - v$.

Пусть $\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ — тип замкнутой локально минимальной сети на плоском двумерном торе. Тогда $v = 2(PS - RQ)$, $e = 3(PS - RQ)$, см. раздел 5.2. Следовательно, цикломатическое число (равное по теореме 5.47 нуль-индексу) равно $1 + PS - RQ$.

Тип замкнутой локально минимальной сети на плоской бутылке Клейна может быть записан в одном из двух возможных видов, см. раздел 5.2: $\begin{pmatrix} 2h & h \\ 0 & m \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} n & 0 \\ w/2 & w \end{pmatrix}$. Отметим, что замкнутая локально минимальная сеть на плоской бутылке Клейна всегда содержит неори-

ентируемые циклы. Это следует из того, что замкнутая локально минимальная сеть на плоской бутылке Клейна определяет разбиение этой поверхности на области, являющиеся евклидовыми шестиугольниками. Число вершин и число ребер сети типа $\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ на плоской бутылке Клейна равны $v = (PS - RQ)$ и $e = 3(PS - RQ)/2$ соответственно [130].

Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 5.48. *Нуль-индекс замкнутой локально минимальной сети типа $\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ на плоском торе равен $1 + PS - RQ$. Нуль-индекс замкнутой локально минимальной сети типа $\begin{pmatrix} 2h & h \\ 0 & m \end{pmatrix}$ (соответственно, типа $\begin{pmatrix} n & 0 \\ w/2 & w \end{pmatrix}$) на плоской бутылке Клейна равен mh (соответственно, $nw/2$).*

5.4.4. Локально минимальные сети на сфере

В данном разделе указан способ вычисления индексов локально минимальных сетей на стандартной двумерной сфере S^2 , найдены индексы и нуль-индексы замкнутых локально минимальных сетей на S^2 и дана их геометрическая интерпретация. Известно, что на S^2 , с точностью до изометрии, имеется ровно девять замкнутых локально минимальных сетей, отличных от замкнутой геодезической, см. раздел 5.2 и [60], [21], [78]. В случае сфер большей размерности ситуация существенно сложнее. Мы построим бесконечную серию примеров замкнутых локально минимальных сетей на сфере S^3 . Основные результаты раздела заключаются в следующем.

Теорема 5.49. *Пусть Γ — замкнутая локально минимальная сеть на S^2 . Тогда индекс сети Γ равен цикломатическому числу (т.е. первому числу Бетти) сети, а ее нуль-индекс равен трем.*

Следующая теорема позволяет вычислять индекс и нуль-индекс простейшей сети с границей на сфере S^2 .

Теорема 5.50. *Пусть Γ — локально минимальная сеть на S^2 , состоящая из трех ребер длины a , b и c , исходящих из единственной подвижной вершины сети Γ . Пусть a , b и c меньше π . Тогда индекс (нуль-индекс) сети Γ равен индексу (соответственно, нуль-индексу)*

квадратичной формы на двумерном пространстве, имеющей следующий вид: $I(u, v) = u^2(\operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} a) + 2uv \operatorname{ctg} c + v^2(\operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} b)$.

В общем случае можно получить следующую оценку на индекс сети на сфере.

Теорема 5.51. Пусть $\Gamma: G \rightarrow S^2$ — локально минимальная сеть на S^2 , длина каждого ребра которой меньше π . Тогда индекс Γ не меньше, чем цикломатическое число графа \tilde{G} , полученного из G удалением граничных ребер.

Рассмотрим теперь сети на сферах большей размерности. Здесь ситуация существенно усложняется.

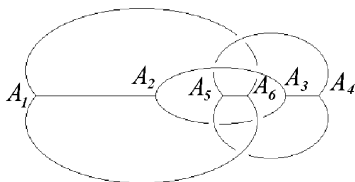
Теорема 5.52. На стандартной трехмерной сфере реализуется бесконечное число замкнутых локально минимальных сетей различной топологии. Существуют сети, допускающие неизометричные деформации в классе замкнутых локально минимальных сетей (причем возможны деформации, при которых изменяются длины ребер локально минимальной сети).

Доказательство. Рассмотрим трехмерную сферу S^3 радиуса R в \mathbb{R}^4 со стандартной метрикой. Она содержит в качестве вполне геодезических подмногообразий двумерные сферы S^2 радиуса R (будем называть эти сферы *большими*). Геодезическими сферы S^3 являются экваториальные окружности радиуса R (будем называть эти окружности *большими*). Существует бесконечное число различных больших 2-сфер, содержащих одну и ту же большую окружность.

Рассмотрим произвольную большую 2-сферу L , рассмотрим на ней произвольную большую окружность l . Фиксируем любое неотрицательное целое число k . Выберем на l точки A_1, \dots, A_{4k+2} следующим образом:

- (1) точки A_{2i} и A_{2i+1} для $i = \overline{1, 2k}$ и точки A_1 и A_{4k+2} диаметрально противоположны на L ;
- (2) точки A_{2i-1} и A_{2i+2} для $i = \overline{1, 2k}$ лежат на одной и той же полуокружности $A_{2i}A_{2i+1}$;
- (3) малые дуги $A_{2i-1}A_{2i}$ для $i = \overline{1, 2k+1}$ не пересекаются.

Как следствие, получаем, что точки A_{4k+1} и A_2 лежат на одной и той же полуокружности $A_{4k+2}A_1$. Выберем $2k+2$ различных больших 2-сфер L_1, \dots, L_{2k+2} , содержащих l . Построим, наконец, замкнутую локально минимальную сеть C_k . Ее вершинами будут точки A_i ,

Рис. 5.41. Пример сети при $k = 1$.

$i = \overline{1, 4k+2}$; ребрами — дуги $A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{4k+1}A_{4k+2}$, а также те пары больших полуокружностей, соединяющих $A_2A_3, \dots, A_{4k}A_{4k+1}, A_{4k+2}A_1$, которые лежат на L_1, \dots, L_{2k+2} соответственно и образуют углы по 120° с дугами A_1A_2 и A_3A_4, A_3A_4 и $A_5A_6, \dots, A_{4k+1}A_{4k+2}$ и A_1A_2 соответственно (легко видеть, что построить такие полуокружности, в силу свойств (1)–(3), можно). Полученное таким образом множество C_k — замкнутая локально минимальная сеть. В проверке нуждается лишь отсутствие пересечений и самопересечений ребер, что следует из выбора различных сфер L_1, \dots, L_{2k+2} . Заметим, что при построении мы могли выбирать произвольным образом углы между сферами L_1, \dots, L_{2k+2} (важно лишь, чтобы сферы были различными) и менять, в некоторых пределах, длины ребер $A_1A_2, \dots, A_{4k+1}A_{4k+2}$ (важно лишь, чтобы выполнялись свойства (1)–(3)). Таким образом, сети типа C_1, \dots, C_k, \dots — замкнутые локально минимальные сети различной топологии, каждая такая сеть допускает неизометричные деформации в классе замкнутых локально минимальных сетей. Тем самым, теорема 5.52 доказана. ■

5.4.5. Теорема об индексе

Целью данного раздела является обобщение на случай локально минимальных сетей известной теоремы Морса об индексе геодезической, см., например, [116, 56, 123], которая заключается в сведении задачи вычисления индекса геодезической к более простой задаче вычисления нуля-индекса.

Теорема 5.53. *Индекс геодезической $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ на римановом многообразии W равен числу сопряженных точек $\gamma(t)$, $a < t < b$, считая каждую точку столько раз, какова ее кратность.*

Пусть $(G, \partial G)$ — граф с границей. Назовем k -звездой с центром в подвижной вершине $v \in G$ набор граничных ребер T_1, \dots, T_k , каждое

из которых инцидентно вершине v и некоторой (своей для разных ребер) граничной вершине степени 1. Заметим, что 1-звезда представляет собой граничное ребро, инцидентное граничной вершине степени 1 и некоторой подвижной вершине, а 2-звезда представляет собой *усы*, т.е. пару ребер, инцидентных общей подвижной вершине и паре граничных вершин степени 1. Рассмотрим некоторую k -звезду T_1, \dots, T_k с центром в подвижной вершине $v \in G$. Пусть $\pi: \sqcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \rightarrow G$ — естественная проекция. Не ограничивая общности, будем считать, что $T_i = \pi([a_i, b_i])$, $v = \pi(a_i)$. Рассмотрим семейство графов с границей $(G(t), \partial G(t))$, $t \in [0, 1]$, определенное следующим образом. При $t = 0$ граф с границей $(G(0), \partial G(0))$ совпадает с $(G, \partial G)$, при $0 < t < 1$ граф $G(t)$ получен из отрезков $\sqcup_{i>k} [a_i, b_i]$, $\sqcup_{i \leq k} [a_i, b_i + t(a_i - b_i)]$ отождествлением тех же концов, что и граф G . Множество $\partial G(t)$ при $0 < t < 1$ получено из ∂G удалением вершин $\pi(b_i)$, $i \leq k$, и добавлением вершин $\pi(b_i + t(a_i - b_i))$. При $t = 1$ граф $G(1)$ получен из отрезков $\sqcup_{i>k} [a_i, b_i]$ отождествлением тех же концов, что и граф G , множество $\partial G(1)$ получено из ∂G удалением вершин $\pi(b_i)$, $i \leq k$, и добавлением вершины v . Семейство графов с границей $(G(t), \partial G(t))$ назовем *сжатием k -звезды T_1, \dots, T_k графа G* .

Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — некоторая сеть. Набор Π ребер сети $\gamma_i: T_i \rightarrow W$, $1 \leq i \leq k$, где T_1, \dots, T_k образуют k -звезду графа G , назовем *k -звездой сети Γ* . Через $\partial \Gamma(t)$ обозначим ограничение отображения Γ на $\partial G(t)$: $\partial \Gamma(t) = \Gamma|_{\partial G(t)}$, а через $\Gamma(t)$ — ограничение Γ на $G(t)$: $\Gamma(t) = \Gamma|_{G(t)}$. Ясно, что $\Gamma(t) \in \Omega[G(t), \partial \Gamma(t)]$. Семейство $\Gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, построенное таким образом по сжатию k -звезды графа G , назовем *сжатием k -звезды Π сети Γ* . Заметим, что если $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть, то при всех $t \in [0, 1]$ сеть $\Gamma(t) \in \Omega[G(t), \partial \Gamma(t)]$ является правильной критической сетью. Будем далее через $v_i(t)$ обозначать выражение $b_i + t(a_i - b_i)$. Набор точек $\{\gamma_i(v_i(t))\}_{1 \leq i \leq k}$ при $0 \leq t < 1$ назовем *Π -сопряженным набором* правильной критической сети Γ с k -звездой Π , образованной ребрами $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, если нуль-индекс сети $\Gamma(t)$ отличен от нуля, и существует элемент X из $T\Omega_{\Gamma(t)}^\perp$, лежащий в ядре индексной формы $I(t) = I(\Gamma(t))$, который не равен тождественно нулю на всех ребрах $\gamma_i: [a_i, v_i(t)] \rightarrow W$. Точку t , $0 \leq t < 1$, будем называть *Π -сопряженной точкой*, если набор точек $\{\gamma_i(v_i(t))\}_{1 \leq i \leq k}$ является Π -сопряженным.

Лемма 5.7. Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть на римановом многообразии W . Пусть Π — некоторая k -звезда сети. Тогда множество Π -сопряженных точек конечно.

Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — некоторая регулярная сеть. Назовем звезду

$\gamma_1, \dots, \gamma_k$ сети Γ с центром в подвижной вершине v звездой общего положения, если подпространство в касательном пространстве $T_v W$, натянутое на векторы скоростей ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ в точке v , имеет размерность, большую единицы. Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть, Π — некоторая ее звезда, $\Gamma(t)$ — сжатие этой звезды. *Кратностью Π -сопряженной точки t* , $0 \leq t < 1$, назовем разность $\text{null } \Gamma(t) - \Pi\text{-null } \Gamma$, где $\text{null } \Gamma(t)$ — нуль-индекс сети $\Gamma(t)$, $\Pi\text{-null } \Gamma$ — размерность подпространства в ядре индексной формы сети Γ , образованного элементами из $T\Omega_\Gamma^\perp$, которые равны нулю на Π (т.е. на каждом ребре из Π). Центр звезды Π — подвижную вершину v — назовем *Π -сопряженной вершиной* сети Γ , если число $\text{null } \Gamma(1) - \Pi\text{-null } \Gamma$ больше нуля. Это число назовем *кратностью вершины v и точки $t = 1$* , которую будем называть в этом случае *Π -сопряженной точкой*.

Теорема 5.54. Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть на римановом многообразии W , Π — некоторая звезда сети Γ , $\Gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — сжатие этой звезды, $0 < t_0 < 1$. Тогда индекс сети Γ равен сумме индекса сети $\Gamma(t_0)$ и числа Π -сопряженных точек t , $0 < t \leq t_0$, считая каждую сопряженную точку столько раз, какова ее кратность.

Теорема 5.55. Пусть $\Gamma \in \Omega[G, \varphi]$ — правильная критическая сеть на римановом многообразии W , Π — некоторая звезда общего положения, $\Gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — сжатие этой звезды. Предположим, что сеть Γ не имеет Π -сопряженных точек t , меньших 1. Тогда индекс сети Γ равен сумме индекса сети $\Gamma(1)$ и кратности центра звезды как Π -сопряженной вершины, учитывая, что эта кратность равна нулю, если центр звезды не является Π -сопряженной вершиной.

Если звезда Π не является звездой общего положения, то утверждение теоремы 5.55 может не выполняться. В качестве примера рассмотрим на стандартной двумерной сфере S^2 правильную критическую сеть Γ , состоящую из одной подвижной вершины степени 3, трех граничных вершин степени 1 и трех отрезков геодезических $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, каждая из которых соединяет подвижную вершину с одной из граничных вершин. Обозначим длины ребер $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ сети через a, b, c . Согласно теореме 5.50 индекс и нуль-индекс сети Γ равны индексу и нуль-индексу симметричной билинейной формы, заданной следующей матрицей:

$$B = \begin{pmatrix} \text{ctg } a + \text{ctg } c & \text{ctg } c \\ \text{ctg } c & \text{ctg } b + \text{ctg } c \end{pmatrix}.$$

Пусть $a = 3\pi/4$, $b = 3\pi/4$, $c = \pi/4$. Рассмотрим 1-звезду Π , состоящую из ребра γ_3 . Пусть $\Gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — сжатие звезды Π . Тогда при $t \in [0, 1]$ имеем: $\text{ind } \Gamma(t) = \text{ind } B(t) = 1$, $\text{null } \Gamma(t) = \text{null } B(t) = 0$, $\Pi\text{-null } \Gamma = 0$, где

$$B(t) = \begin{pmatrix} \text{ctg}(t\pi/4) - 1 & \text{ctg}(t\pi/4) \\ \text{ctg}(t\pi/4) & \text{ctg}(t\pi/4) - 1 \end{pmatrix}.$$

При $t = 1$ сеть $\Gamma(1)$ состоит из двух невырожденных компонент (геодезических γ_1 и γ_2), индекс и нуль-индекс каждой из которых равны нулю. Следовательно, $\text{ind } \Gamma(1) = 0$, $\text{null } \Gamma(1) = 0$. Итак, сеть Γ не имеет Π -сопряженных точек при $t \in [0, 1]$, но $\text{ind } \Gamma \neq \text{ind } \Gamma(1)$, так как $\text{ind } \Gamma = 1$, а $\text{ind } \Gamma(1) = 0$.

Пусть Γ — правильная критическая сеть. Назовем *правильным сжатием* сети Γ семейство правильных критических сетей $\Gamma(t)$, где $t \in [0, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, такое, что (1) каждая из сетей $\Gamma(t)$ состоит из единственной невырожденной компоненты, (2) $\Gamma(0) = \Gamma$, (3) $\Gamma_k(t') = \Gamma(t' + k)$, где $k \in \mathbb{N} \cup 0$, $k < n$, $t' \in [0, 1]$, — сжатие некоторой звезды общего положения сети $\Gamma(k)$, (4) сеть $\Gamma(t)$ при $t \in [n, n+1]$ является отрезком некоторой регулярной геодезической $\gamma: [n, n+1] \rightarrow W$.

Пусть $\Gamma(t)$, $t \in [0, n+1]$, — правильное сжатие правильной критической сети Γ . Определим функцию $\lambda: (0, n+1) \rightarrow \mathbb{N} \cup 0$. При $t \in (n, n+1)$ значение $\lambda(t)$ равно нуль-индексу геодезической $\Gamma(t)$. Пусть $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Пусть $\Gamma_k(t') = \Gamma(t' + k)$, $t' \in [0, 1]$, — сжатие некоторой звезды Π_k общего положения из сети $\Gamma(k)$. Положим значение $\lambda(t)$, $k < t \leq k+1$, равным кратности точки $t - k$ как Π_k -сопряженной точки, если $t - k$ является Π_k -сопряженной точкой, и равным нулю в противном случае.

Теорема 5.56. Пусть Γ — правильная критическая сеть. Предположим, что существует правильное сжатие сети Γ . Тогда функция $\lambda(t)$ отлична от нуля не более чем в конечном числе точек $\{t_s\}_{s=1}^m$ и имеет место равенство: $\text{ind } \Gamma = \sum_{s=1}^m \lambda(t_s)$.

Пусть Γ — параметризация локально минимальной сети, такая, что все ее ребра — геодезические, параметризованные пропорционально натуральному параметру, а все подвижные вершины имеют степень три. Такую сеть будем называть *регулярной геодезической параметризацией* локально минимальной сети. Можно показать, что если Γ — невырожденное дерево (т.е. не содержит циклов и вершин степени 2), то существует правильное сжатие сети Γ . Следующая теорема является простым следствием теоремы 5.56 и обобщением теоремы Морса об индексе геодезической.

Теорема 5.57. Пусть Γ — регулярная геодезическая параметризация невырожденной компоненты $\tilde{\Gamma}$ некоторой локально минимальной сети и пусть Γ является деревом. Тогда существует правильное сжатие $\Gamma(t)$ сети Γ , $t \in [0, (r+1)/2)$, где r — число ребер сети Γ . Функция $\lambda(t)$ отлична от нуля не более чем в конечном числе точек $\{t_s\}_{s=1}^m$, и имеет место равенство: $\text{ind } \tilde{\Gamma} = \text{ind } \Gamma = \sum_{s=1}^m \lambda(t_s)$.

5.5. Г. А. Карпунин.

Минимальные сети и комбинаторная теория Морса

5.5.1. Введение

Одним из методов решения задачи Штейнера — поиска абсолютно минимальной сети, затачивающей данную границу \mathcal{A} на евклидовой плоскости — является построение всех локально минимальных деревьев с границей \mathcal{A} , вычисление их длин и выбор из построенных сетей кратчайшей. Существует алгоритм Мелзака–Хванга [112, 65], который с линейной сложностью $O(|\mathcal{A}|)$ строит локально минимальное дерево с данным типом и границей. Таким образом, основная сложность этого метода заключается в большом переборе возможных типов локально минимальных сетей. В действительности, как показали Гэри, Грехэм и Джонсон [49], задача Штейнера является NP-трудной.

Возникает вопрос: насколько a priori мы можем ограничить перебор возможных типов локально минимальных сетей, затачивающих данную границу? В работах [71] и [148] А. О. Иванов и А. А. Тужилин изучали влияние геометрии границы на такие априорные ограничения¹⁰. Мы же далее будем изучать влияние не геометрии границы, а геометрии объемлющего пространства. Другими словами, поставленный вопрос можно сформулировать следующим образом: *какое максимальное количество локально минимальных сетей может затачивать данную (но с произвольной геометрией) границу?*

А. Т. Фоменко, А. О. Иванов и А. А. Тужилин предположили, что для ответа на этот вопрос мог бы быть полезен некий аналог теории Морса для минимальных сетей. Более развернуто их идея применения теории Морса для оценки количества локально минимальных сетей, затачивающих данную границу, изложена в следующей программе:

¹⁰См. также главу 3 и параграфы 4.4, 4.5, 5.1 настоящей монографии.

- (1) Построить конфигурационное пространство \mathcal{K} , точки которого можно было бы интерпретировать как сети с данной границей.
- (2) Задать на пространстве \mathcal{K} функцию f .
- (3) Определить критические точки и критические значения функции f . Причем сделать это так, чтобы некоторые из критических точек можно было бы интерпретировать как локально минимальные сети с данной границей.
- (4) Определить аналог индекса из классической теории Морса для критических точек функции f .
- (5) Найти связь между индексами критических точек функции f и некоторыми характеристиками (например, топологией) пространства \mathcal{K} .

Оценивая индексы критических точек, с помощью п. 5) вышеизложенной программы можно оценивать и количество некоторых критических точек, в частности, локально минимальных сетей с данной границей, которые, согласно п. 3), также являются критическими точками.

В разделе 5.5.2 мы изложим необходимые определения и результаты теории минимальных сетей, а также реализуем первые два пункта программы построения теории Морса для минимальных сетей. В разделе 5.5.3 с помощью подходов так называемой *комбинаторной теории Морса* будут реализованы оставшиеся три пункта этой программы и приведены примеры применения построенной теории для нахождения оценок количества локально минимальных сетей, затягивающих границу из 4 или 5 точек на плоскости.

5.5.2. Минимальные сети

5.5.1. Класс рассматриваемых сетей.

В данном параграфе мы, для простоты, будем рассматривать сети на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Большинство приведенных ниже конструкций и результатов могут быть обобщены и на другие метрические пространства, см. [99].

В рассмотренных выше задачах на минимизацию функционала длины минимальные сети на плоскости \mathbb{R}^2 оказываются линейными, т.е. состоящими из прямолинейных отрезков¹¹. Следовательно, при изучении минимальных сетей на плоскости \mathbb{R}^2 имеет смысл ограничиться

¹¹См. главу 2.

лишь классом линейных сетей. Причем из технических соображений их удобнее считать параметрическими.

Наконец, как было продекларировано во введении, строящаяся далее теория Морса минимальных сетей должна позволить получать оценки на количество локально минимальных сетей, затачивающих данную границу. Поэтому, в качестве границы рассматриваемых нами сетей зафиксируем некоторое конечное множество \mathcal{A} , состоящее из n точек плоскости.

Итак, объекты нашего внимания — это линейные параметрические Γ сети на плоскости \mathbb{R}^2 , затачивающие некоторую фиксированную границу \mathcal{A} . Чтобы явно указать параметризующий граф G для сети Γ , мы будем использовать обозначение $\Gamma[G]$.

5.5.2. Тип сети с границей.

Для сетей с границей следует различать два понятия: топология сети и тип сети. Такая необходимость возникает из-за того, что *топология* сети $\Gamma[G]$ — класс графов, изоморфных G , — не определяет полностью того, что естественно было бы называть комбинаторной структурой сети с границей. Например, две сети Γ_1 и Γ_2 , изображенные на рис. 5.42, имеют одну и ту же топологию и границу. Но эту границу они “по-разному затачивают”. Из приведенного примера мы видим, что для того, чтобы полностью определить комбинаторную структуру сети с границей, нужно задать соответствие φ точек из границы \mathcal{A} сети Γ граничным вершинам ее параметризующего графа G . Пара $(G, \varphi : \partial G \rightarrow \mathcal{A})$ называется *типом* сети Γ с границей \mathcal{A} . Таким образом, тип сети определяется с точностью до изоморфизма графов с помеченными граничными вершинами.

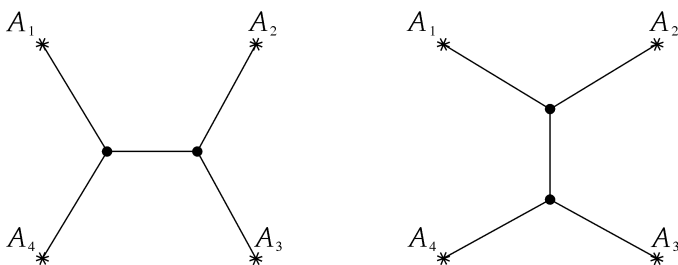


Рис. 5.42. Две сети одинаковой топологии, по-разному затачивающие одно и то же граничное множество.

Фиксируем также некоторую нумерацию точек из границы $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$. Тогда для определения типа каждой сети $\Gamma[G]$ с границей \mathcal{A} достаточно задать на граничных вершинах параметризующего графа G нумерацию и считать, что граничной вершине с пометкой i соответствует при граничном отображении точка A_i . Таким образом, типом сети с фиксированной границей можно считать граф с занумерованными граничными вершинами.

5.5.3. Параметризация локально минимальных сетей.

Напомним, что в начале этой главы локально минимальная сеть была определена как вложенная сеть—след Υ , экстремальная по отношению к функционалу длины. Обычно при необходимости параметризовать сеть—след выбирается ее канонический представитель Γ . У канонического представителя локально минимальной сети помимо граничных вершин степени 1 могут быть граничные вершины степени 2 и 3.¹² Однако, для наших целей неудобно рассматривать параметрические сети с граничными вершинами степени 2 и 3 в силу их более сложного комбинаторного описания.

Если в сети Γ есть граничная вершина степени 3, то из нее выходят три ребра под углом 120° друг к другу. Это случай не общего положения, поскольку немного пошевелив границу, можно добиться того, чтобы локально минимальная сеть такого типа уже не существовала. Поэтому далее мы эти типы рассматривать не будем.

Выберем теперь представителя Γ' (вообще говоря не канонического) локально минимальной сети Υ , у которого все граничные вершины имеют степень 1. Для этого перестроим канонический представитель Γ следующим образом. В каждую граничную вершину $v \in \Gamma$ степени 2 поместим дополнительную подвижную вершину w , соединим последнюю с граничной вершиной вырожденным ребром (v, w) , а все инцидентные граничной вершине v ребра переклеим к новой подвижной вершине w . Отметим, что полученная сеть Γ' не имеет вырожденных внутренних ребер, но, возможно, имеет некоторые вырожденные граничные ребра. В рамках этого параграфа сети, не имеющие вырожденных внутренних ребер мы будем называть *регулярными*, а сети вообще не имеющие вырожденных ребер — *невыврожденными*.

Таким образом, далее под локально минимальной сетью будем понимать представитель локально минимальной сети—следа, все граничные вершины которого имеют степень 1, а все подвижные — степень 3

¹²См. критерий экстремальности сетей—следов относительно функционала длины — следствие 2.7.

(другими словами, тип локально минимальных сетей будет считаться бинарным деревом).

5.5.4. Геометрические деревья.

Для построения теории Морса минимальных сетей нам также понадобятся сети, типы которых являются деревьями с граничными вершинами степени 1 и без подвижных вершин степени 2. Такие типы мы назовем *геометрическими деревьями*. Обозначим через \mathcal{G} множество всех геометрических деревьев с n занумерованными граничными вершинами, где параметр n , как правило, ясен из контекста, и мы его будем опускать. Через $\mathcal{G}_{(2)} \subset \mathcal{G}$ обозначим подмножество бинарных геометрических деревьев.

Множество бинарных геометрических деревьев $\mathcal{G}_{(2)}$ выделяется среди всех деревьев из класса \mathcal{G} тем, что бинарные деревья обладают максимальным количеством внутренних ребер, равным $n - 3$. Количество внутренних ребер произвольного параметризующего графа G будем называть *рангом* этого графа. В свою очередь, *ранг параметрической сети* $\Gamma[G]$, по определению, положим равным рангу G .

Любое геометрическое дерево можно задать набором его внутренних ребер следующим образом. Каждое ребро e (не обязательно внутреннее) дерева G (не обязательно геометрического) разбивает его на два непересекающихся поддерева G_1 и G_2 , которые мы назовем *ветками* дерева G , инцидентными ребру e . Ветка G_1 будет называться *дополнительной* к ветке G_2 , и наоборот. Все граничные вершины геометрического дерева G внутренним ребром e разбиваются на два множества U и V , лежащих в ветках G_1 и G_2 соответственно. Разбиение $\partial G = U \sqcup V$ определяет внутреннее ребро e однозначно. Заметим, что другое разбиение $\partial G = U' \sqcup V'$, определяющее внутреннее ребро e' , связано с парой (U, V) следующим условием сцепления: одно из множеств первого разбиения содержится в одном из множеств второго разбиения, а для дополнительных множеств выполнено обратное включение. Можно показать, см. [99], что по набору разбиений $(U_1, V_1), \dots, (U_s, V_s)$, любые два из которых связаны условием сцепления, геометрическое дерево G также восстанавливается однозначно.

С помощью такой кодировки сцеплениями мы можем сравнивать одно геометрическое дерево с другим. Будем говорить, что дерево $G' \in \mathcal{G}$ не больше дерева $G \in \mathcal{G}$, если дерево G' получается из дерева G добавлением внутренних ребер, т.е. кодировка сцеплениями дерева G' содержит кодировку сцеплениями дерева G .

5.5.5. Минимальные параметрические сети и критерий параметрической минимальности.

Обозначим через $[G, \varphi]$ множество всех параметрических сетей типа (G, φ) . Отметим, что каждая сеть из $[G, \varphi]$ задается лишь положениями своих подвижных вершин, поскольку положения граничных вершин уже заданы отображением φ .

Определение. Сеть Γ , имеющая наименьшую длину среди всех сетей из множества $[G, \varphi]$, называется *минимальной параметрической сетью* типа (G, φ) . О параметрических сетях, не являющихся минимальными, мы также будем говорить, что они *способны уменьшить свою длину*.

В отличие от локально минимальных сетей, которые не имеют вырожденных внутренних ребер, у минимальных параметрических сетей любое ребро может, вообще говоря, оказаться вырожденным. Поэтому нам понадобятся некоторые операции и понятия, связанные с вырожденными сетями.

Начнем мы с операции редукции сети по вырожденному ребру. Пусть $e = (v, w)$ — вырожденное ребро сети $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$, т.е. $\Gamma(v) = \Gamma(w)$. “Стянем” это ребро в графе G в точку. На вновь образовавшейся вершине u , склеенной из v и w , отображение Γ положим равным $\Gamma(v)$. На неизменившихся вершинах графа G отображение Γ оставим прежним. Такая операция называется *редукцией* сети Γ по вырожденному ребру (v, w) .

Обратная операция к редукции по вырожденному ребру называется *расщеплением вершины*. Рассмотрим какую-нибудь вершину u сети $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Обозначим через $E(u)$ совокупность ребер, ей инцидентных. Разделим эту совокупность на две $E(u) = E_1 \sqcup E_2$. “Вставим” вместо вершины u новое ребро (v, w) так, чтобы ребра из E_1 стали инцидентны вершине v , а ребра из E_2 — вершине w . Наконец, отображение Γ на новых вершинах v, w положим равным $\Gamma(u)$, а на остальных оставим прежним. Таким образом, к сети Γ добавилось одно вырожденное ребро. Также мы будем говорить, что сеть Γ' является *расщеплением сети* Γ , если Γ' получается из Γ несколькими расщеплениями вершин.

Очевидно, что операции редукции по вырожденному ребру и расщепление вершины не изменяют длины сети.

Снова рассмотрим сеть Γ . Проредуцируем ее по всем вырожденным ребрам. Полученную сеть $\tilde{\Gamma}$ будем называть *приведенной параметрической сетью* для сети Γ . Приведенная сеть уже не содержит вырожденных ребер.

Пусть Γ — параметрическая сеть с некоторой границей $\partial\Gamma : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\Gamma}$ — соответствующая приведенная сеть. Вершину приведенной сети

назовем *подвижной*, если ее прообраз при редукции содержит хотя бы одну подвижную вершину сети Γ ; вершину приведенной сети назовем *чисто подвижной*, если ее прообраз при редукции не содержит граничных вершин сети Γ . Остальные вершины сети $\tilde{\Gamma}$ будут считаться *граничными*.

Рассмотрим сеть $\Gamma[G]$. Связные компоненты множества всех вырожденных ребер графа G назовем *компонентами вырождения* параметризующего графа сети Γ . Из формальных соображений, каждую вершину графа G , все инцидентные ребра которой невырождены, также будем считать компонентой вырождения. Каждая компонента вырождения, очевидно, является подграфом в G , все вершины которого отображаются в одну и ту же точку. Ясно, что две различные компоненты вырождения графа G не пересекаются.

Пусть H_v равняется сумме единичных направляющих векторов невырожденных ребер, исходящих из подвижной вершины v сети Γ (если таких невырожденных ребер нет, то положим, по определению, $H_v = 0$).

Предположим, что параметризующий граф G сети Γ является деревом. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ приведенную сеть для сети Γ . Рассмотрим подвижную вершину V сети $\tilde{\Gamma}$ и ее компоненту вырождения G_d^V . Сформулируем теперь критерий минимальности параметрической сети Γ .

Утверждение 5.5.1. ¹³ *Для того чтобы Γ была минимальной параметрической сетью, необходимо и достаточно, чтобы для каждой подвижной вершины V ее приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ выполнялось следующее условие: для каждой ветки G_b дерева G_d^V , не содержащей граничной вершины дерева G , имеет место неравенство $|\sum_{v \in G_b} H_v| \leq 1$; если, к тому же, V — чисто подвижная вершина, то $\sum_{v \in G_d^V} H_v = 0$.*

5.5.6. Локально минимальная сеть является минимальной параметрической сетью.

Пусть Γ — локально минимальная сеть. Покажем, что она удовлетворяет критерию минимальности. Обозначим через v некоторую подвижную вершину сети Γ . Заметим, что в каждую подвижную вершину V приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ переходит ровно одна подвижная вершина v локально минимальной сети Γ . Если вершина v совпадает как точка на плоскости с одной из граничных вершин, то ей инцидентны два невырожденных ребра, которые образуют угол не меньше 120° . Следовательно,

¹³Этот критерий несложно выводится из теоремы 4.1 главы 4.

сумма H_v единичных направляющих векторов этих ребер по модулю не больше 1. Если же v не совпадает ни с одной из граничных вершин, то из нее выходят три невырожденных ребра под углом 120° друг к другу. Следовательно, соответствующая сумма H_v равна 0. Таким образом, любая локально минимальная сеть является регулярной минимальной параметрической сетью с типом бинарного дерева.

Обращение приведенных выше рассуждений позволяет утверждать, что верно и обратное, т.е. любая регулярная минимальная параметрическая сеть с типом бинарного дерева является локально минимальной сетью.

5.5.7. Построение конфигурационного пространства.

Напомним, что $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j=1}^n$ — фиксированная граница на плоскости \mathbb{R}^2 . Начиная с этого пункта, мы будем рассматривать сети с границей \mathcal{A} , тип которых определяется некоторым геометрическим деревом G из множества \mathcal{G} . Поэтому при фиксированной границе граничное отображение $\varphi : \partial G \rightarrow \mathcal{A}$ задается однозначно, и в обозначении $[G, \varphi]$ параметр φ далее будет опускаться.

Рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{T}}$, представляющее собой несвязную сумму $\tilde{\mathcal{T}} = \bigsqcup_{G \in \mathcal{G}} [G]$. Пространства $[G]$ будем рассматривать как подмножества этой суммы. Зададим теперь на пространстве $\tilde{\mathcal{T}}$ отношение эквивалентности следующим образом.

Определение. Две точки (сети) $\Gamma_1 \in [G_1]$ и $\Gamma_2 \in [G_2]$ будем считать *эквивалентными*, если и только если, проредуцировав их по всем внутренним вырожденным ребрам, мы получим одну и ту же сеть¹⁴.

Построим теперь фактор-пространство $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}/\sim$, где \sim — описанная выше эквивалентность. Через π обозначим стандартную проекцию $\tilde{\mathcal{T}}$ на фактор-пространство \mathcal{T} .

Пространство \mathcal{T} состоит из всех классов эквивалентности по отношению \sim . Опишем теперь, как устроены эти классы. Пусть Υ — класс эквивалентности сети Γ , тогда Υ состоит из всех сетей, получающихся из сети Γ некоторой комбинацией расщеплений ее подвижных вершин и редукций по ее вырожденным внутренним ребрам. Любую сеть из класса эквивалентности Υ назовем *представителем* данного класса. Заметим, что поскольку операции редукции и расщепления сохраняют

¹⁴ Другими словами, эквивалентные сети суть представители одной и той же сети—следа Υ .

длину сети, то все сети из одного класса эквивалентности имеют одинаковую длину. Следовательно, на пространстве \mathcal{T} корректно определена функция длины ℓ .

В каждом классе эквивалентности существует и единственна сеть (представитель), которая является регулярной сетью. Такую сеть мы назовем *регулярным представителем* данного класса. Очевидно, что любая регулярная сеть с границей \mathcal{A} является регулярным представителем некоторого класса эквивалентности. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между регулярными сетями с границей \mathcal{A} и классами эквивалентности. Это соответствие мотивирует следующее определение.

Определение. Пространство \mathcal{T} назовем *конфигурационным пространством всех регулярных сетей с данной границей*.

В дальнейшем, если не оговорено противное, элементы (классы эквивалентности) пространства \mathcal{T} будут рассматриваться как регулярные сети с данной границей.

Пространство $[G]$ сетей фиксированного типа можно считать подпространством пространства \mathcal{T} , поскольку никакие две сети из пространства $[G]$ не являются эквивалентными по отношению \sim . Любое подпространство $[G]$ назовем *стратом* пространства \mathcal{T} .

Заметим также, что любая сеть $\Gamma \in [G]$ эквивалентна некоторой сети $\Gamma' \in [G']$ бинарного типа $G' \in \mathcal{G}_{(2)}$, которая получается из Γ расщеплением всех подвижных вершин. Поэтому пространство \mathcal{T} покрывается набором пространств $\{[G] : G \in \mathcal{G}_{(2)}\}$. Любое подпространство $[G] \in \mathcal{G}_{(2)}$ будем называть *листом* пространства \mathcal{T} . Несложно показать, что любое пересечение листов пространства \mathcal{T} совпадает с некоторым стратом; и обратно, любой страт пространства \mathcal{T} можно представить как пересечение некоторых листов.

Пример: $n = 4$.

При $n = 4$ имеется 1 геометрическое дерево G_0 ранга нуль и 3 геометрических дерева G'_0, G''_0, G'''_0 ранга один, полученных из дерева G_0 добавлением одного внутреннего ребра, см. рис. 5.43. Страт $[G_0]$ равен пересечению листов $[G'_0], [G''_0], [G'''_0]$, т.е. $[G_0] = [G'_0] \cap [G''_0] \cap [G'''_0]$. Пространство \mathcal{T} , соответствующее случаю $n = 4$, условно изображено на рис. 5.44.

Построив пространство \mathcal{T} с функцией ℓ , мы реализовали первые два пункта программы построения теории Морса минимальных сетей.

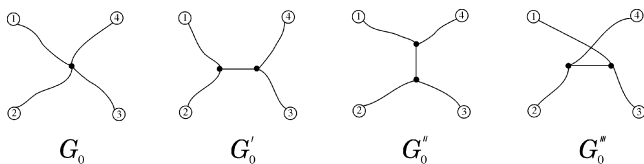


Рис. 5.43. Геометрические деревья ранга 1, полученные из геометрического дерева G_0 ранга 0 добавлением одного внутреннего ребра.

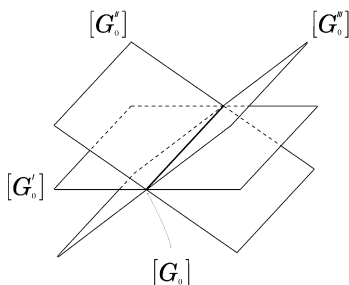


Рис. 5.44. Устройство пространства \mathcal{T} при $n = 4$.

5.5.3. Комбинаторная теория Морса

В этом разделе мы изложим основные идеи так называемой комбинаторной теории Морса. Параллельно с изложением комбинаторной теории Морса как в качестве примера, так и в качестве мотивации строится базирующаяся на ней теория Морса минимальных сетей. Текст, посвященный теории Морса минимальных сетей, будет начинаться с аббревиатуры **ТММС**, а заканчиваться символом ★.

5.5.1. Общая концепция теории Морса.

Перед тем как рассматривать конкретные теории Морса, кратко сформулируем, следуя монографии [53], общую концепцию построения теории Морса:

Пусть K — некоторое множество, f — вещественнозначная функция на K и c — вещественное число. Обозначим через $K_{\leq c}$ подмножество множества K , состоящее из всех точек x , в которых $f(x) \leq c$. Основная задача теории Морса — изучить, как меняется множество $K_{\leq c}$ с изменением числа c .

5.5.2. Классическая теория Морса.

Сначала коротко рассмотрим классическую теорию Морса. В классической теории Морса, см., например, [116], в качестве множества \mathcal{K} выступает гладкое замкнутое многообразие. Наилучшим образом ее иллюстрирует следующий стандартный пример: двумерный тор T , вложенный в трехмерное евклидово пространство, см. рис. 5.45.

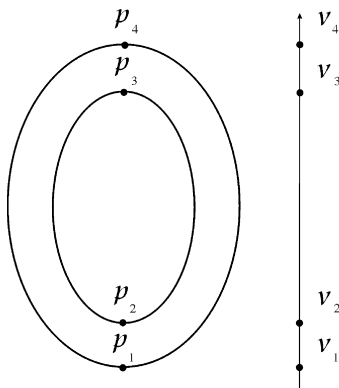


Рис. 5.45. Функция высоты на двумерном торе.

Пусть f — проекция на вертикальную координатную ось, так что $f(x)$ есть высота точки x . Будем медленно увеличивать c и наблюдать за изменениями пространства $T_{\leq c} = \{x : f(x) \leq c\}$. В классической теории Морса под *изменением* пространства $T_{\leq c}$ понимают изменение его гомотопического типа. Мы обнаружим, что он меняется лишь тогда, когда c проходит через одно из четырех критических значений v_1, v_2, v_3, v_4 , соответствующих критическим точкам p_1, p_2, p_3, p_4 . (*Критические точки* гладкой функции f на гладком многообразии \mathcal{K} — это точки, в которых ее дифференциал df обращается в 0. *Критические значения* функции f — это ее значения в критических точках.) Эти наблюдения за тором T иллюстрируют первую часть основного результата классической теории Морса:

Теорема С1 . Пусть f — гладкая функция на гладком замкнутом многообразии \mathcal{K} . Пока число c меняется в пределах открытого интервала между двумя соседними критическими значениями функции f , гомотопический тип пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ остается постоянным.

Посмотрим теперь, что происходит с гомотопическим типом пространства $T_{\leq c}$, когда c минует одно из критических значений, см. рис. 5.46. Если c меньше, чем v_1 , то $T_{\leq c}$ пусто. Как только c проходит через v_1 , пространство $T_{\leq c}$ изменяется: происходит добавление двумерного диска (имеющего форму чашки). При прохождении числа c через v_2 пространство $T_{\leq c}$ преобразуется посредством приклеивания прямоугольника вдоль двух его противоположных сторон. Когда c минует v_3 , приклеивается вдоль двух противоположных сторон другой прямоугольник. Наконец, при прохождении числа c через v_4 приклеивается вдоль своего края двумерный диск (имеющий форму шапки), в результате чего получается весь тор T .

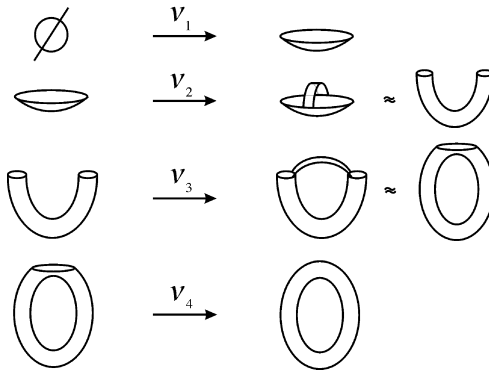


Рис. 5.46. Перестройки Морса.

Определим *пару Морса* для функции f в критической точке $p \in \mathcal{K}$ как пару топологических пространств (A, B) , где $B \subset A$, обладающую следующим свойством: изменение, происходящее с пространством $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении числа c через критическое значение $v = f(p)$, может быть описано как приклеивание пространства A вдоль B . Приведенные выше описания преобразований пространства $T_{\leq c}$ можно теперь объединить в следующую таблицу пар Морса для тора T :

Критическая точка	Пара Морса
p_1	$(\bullet, \emptyset) = (D^0 \times D^2, \partial D^0 \times D^2)$
p_2 или p_3	$(\blacksquare, \mid) = (D^1 \times D^1, \partial D^1 \times D^1)$
p_4	$(\bullet, \circ) = (D^2 \times D^0, \partial D^2 \times D^0)$

Здесь через D^i обозначен замкнутый i -мерный диск, а через ∂D^i — ограничивающая его $(i - 1)$ -мерная сфера. (Отметим, что нульмерный диск представляет собой точку и его край пуст.)

Эта таблица пар Морса иллюстрирует вторую часть основного результата классической теории Морса.

Перед тем как сформулировать соответствующую теорему, напомним, что в классической теории Морса из всех гладких собственных функций (гладкая функция называется *собственной*, если прообраз любого замкнутого отрезка компактен) на гладком многообразии выделяются *функции Морса*, обладающие двумя условиями:

- все критические значения функции Морса различны;
- каждая критическая точка функции Морса невырождена, т.е. матрица Гессе, состоящая из вторых частных производных функции в этой точке, имеет ненулевой определитель.

Из приведенного выше определения вытекает, что критические точки функции Морса изолированы друг от друга в гладком многообразии \mathcal{K} , а ее критические значения изолированы в \mathbb{R} .

Сформулируем теперь вторую часть основного результата классической теории Морса:

Теорема С2 . Пусть f — функция Морса на гладком многообразии \mathcal{K} размерности N . Пара Морса, измеряющая топологические изменения пространства $\mathcal{K}_{\leq c}$ при прохождении с через критическое значение $v = f(p)$, является “ручкой” $(D^\lambda \times D^{N-\lambda}, (\partial D)^\lambda \times D^{N-\lambda})$, где λ — индекс Морса функции f в критической точке p , т.е. число отрицательных собственных значений матрицы Гессе функции f в p .

Неформально говоря, индекс Морса функции f в критической точке p равен количеству направлений в специальном базисе касательного пространства TK_p , по которым функция f уменьшается. В случае тора T индекс Морса равен нулю в точке p_1 , единице в p_2 и p_3 и двум в p_4 .

Из предыдущей теоремы выводится количественная связь между индексами критических точек и топологией многообразия \mathcal{K} , например его эйлеровой характеристикой $\chi(\mathcal{K})$. Для того чтобы посчитать эйлерову характеристику многообразия \mathcal{K} , его надо триангулировать, т.е. разбить на N -мерные симплексы, и взять альтернированную сумму: количество 0-мерных симплексов — количество 1-мерных симплексов + количество

2-мерных симплексов и т.д. Для двумерного тора T эйлерова характеристика равна 0.

Итак, в классической теории Морса доказывается следующая теорема.

Теорема С3 . *Обозначим через C_λ число критических точек с индексом λ у функции Морса f на гладком замкнутом многообразии K . Тогда имеет место равенство Морса:*

$$\sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} C_{\lambda} = \chi(K),$$

где $\chi(\cdot)$ — эйлерова характеристика.

Для приведенного выше примера двумерного тора с функцией высоты выполнение равенства Морса легко проверить непосредственно.

5.5.3. Симплициальная теория Морса.

Пусть \mathcal{M} — конечный симплициальный комплекс. Рассмотрим теперь в качестве множества K множество вершин $V(\mathcal{M})$ комплекса \mathcal{M} , а также рассмотрим некоторую вещественнозначную функцию f на $V(\mathcal{M})$. Обозначим через c_i значение функции f в вершине $v_i \in V(\mathcal{M})$. Мы, вообще говоря, не предполагаем, что все числа c_i различны.

Изучим теперь изменение множества $K_{\leq c}$. В отличие от классического случая, здесь *изменение* мы понимаем буквально: множества $K_{\leq c'}$ и $K_{\leq c''}$ отличны друг от друга, если $K_{\leq c'} \neq K_{\leq c''}$. С каждым множеством $K_{\leq c}$ связан подкомплекс $\mathcal{M}_{\leq c}$, состоящий из всех симплексов комплекса \mathcal{M} с вершинами из $K_{\leq c}$. Очевидно, что множество $K_{\leq c}$ изменяется тогда и только тогда, когда изменяется комбинаторная структура комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$. По определению, каждое число c_i будет считаться *критическим значением* функции f , а каждая вершина v_i — *критической точкой*. Тогда аналогом первой части основного результата классической теории Морса (теорема С1) является следующий, в данном случае очевидный, результат.

Теорема S1 . *Пусть f — вещественнозначная функция на множестве вершин конечного симплициального комплекса \mathcal{M} . Пока число c меняется в пределах открытого интервала между двумя соседними критическими значениями функции f , комбинаторная структура комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$ остается постоянной.*

Функцию Морса в симплицальном случае мы определим следующим образом. Функция f называется *симплициальной функцией Морса*, если для любого одномерного симплекса $(v_i, v_j) \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство $f(v_i) \neq f(v_j)$. Симплициальные функции Морса удобны тем, что изменение комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$ при прохождении через критическое значение c_i описывается с помощью информации о поведении функции f в окрестности критических точек, отвечающих критическому значению c_i . (Окрестностью вершины v симплицального комплекса называется звезда этой вершины, которую мы обозначим через $St(v)$.)

Далее будем предполагать, что функция f является симплициальной функцией Морса. Определим для каждой вершины v_i два подкомплекса V_-^i и V_{0-}^i в звезде $St(v_i)$:

- V_-^i — множество симплексов из $St(v_i)$, в вершинах которых функция f строго меньше $c_i = f(v_i)$ (возможно, что V_-^i пусто);
- V_{0-}^i — множество симплексов из $St(v_i)$, в вершинах которых функция f меньше или равна $c_i = f(v_i)$.

Заметим, что для симплициальной функции Морса f комплекс V_{0-}^i является “конусом” над комплексом V_-^i с вершиной в точке v_i .

Аналогом второй части основного результата классической теории Морса (теорема С2) в симплицальном случае является следующая теорема.

Теорема S2 . Пусть f — симплициальная функция Морса на вершинах симплицального комплекса \mathcal{M} . Пара Морса, измеряющая изменения комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{M}_{\leq c}$ при прохождении c через критическое значение \bar{c} , является объединением “ручек”

$$\bigcup_{f(v_i)=\bar{c}} (V_{0-}^i, V_-^i).$$

О. Р. Мусин в работе [119] нашел связь между поведением функции f в окрестности критических точек и комбинаторной структурой комплекса \mathcal{M} . Для этого он определил индекс вершины v_i равенством $\text{ind } v_i := 1 - \chi(V_-^i)$, где $\chi(V_-^i)$ — эйлерова характеристика комплекса V_-^i . Напомним определение эйлеровой характеристики симплицального комплекса. Пусть N — симплицальный комплекс размерности n .

Обозначим через N_i совокупность симплексов этого комплекса размерности i . Тогда эйлерова характеристика комплекса N определяется равенством

$$\chi(N) = \sum_{i=0}^n (-1)^i |N_i|.$$

Несложно подсчитать эйлерову характеристику обычного симплекса (взятого вместе со всеми своими гранями), она равна 1.

Аналогом классического равенства Морса (теорема С3) является следующая теорема, доказанная в [119].

Теорема S3 (О. Р. Мусин). Пусть v_i — критические точки симплициальной функции Морса f на конечном симплициальном комплексе M . Имеет место равенство Морса:

$$\sum_i \text{ind } v_i = \chi(M).$$

Вышеизложенная конструкция используется в компьютерной геометрии для распознавания некоторых свойств многообразий, которые дискретно представлены в памяти ЭВМ, подробнее см. работу [119].

5.5.4. Определение к-топологического пространства.

Начиная с этого пункта, мы будем развивать так называемую *комбинаторную теорию Морса*, на идеях которой основывается теория Морса минимальных сетей.

Пусть \mathcal{K} — некоторое множество. Возьмем какое-нибудь конечное покрытие $\Sigma = \{K_i\}$ множества \mathcal{K} его подмножествами K_i , $\mathcal{K} = \cup_i K_i$. Покрытие $\Sigma = \{K_i\}$ будем называть *комбинаторной топологией* или, сокращенно, *к-топологией* на множестве \mathcal{K} . Множество, снабженное комбинаторной топологией, назовем *комбинаторным топологическим пространством* или, сокращенно, *к-топологическим пространством*. Любое подмножество V к-топологического пространства \mathcal{K} можно также считать к-топологическим пространством, на котором к-топология индуцирована к-топологией пространства \mathcal{K} следующим образом: $V = \cup_i (V \cap K_i)$.

Произвольное пересечение $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_s}$ элементов к-топологии пространства \mathcal{K} назовем *стратом* пространства \mathcal{K} .

ТММС: Зададим на пространстве \mathcal{T} (напомним, что пространство \mathcal{T} — это конфигурационное пространство всех регулярных сетей с

данной границей) k -топологию Σ , взяв в качестве элементов покрытия листы пространства \mathcal{T} . Только что введенное понятие страта k -топологического пространства для пространства \mathcal{T} совпадает с определением, данным выше в п. 5.5.7.

В случае 4 граничных точек k -топология Σ состоит из 3 листов $[G'_0]$, $[G''_0]$, $[G'''_0]$, а единственным нетривиальным, т.е. отличным от этих листов, стратом является страт $[G_0]$ (см. рис. 5.44). ★

Определим теперь для k -топологического пространства \mathcal{K} его *комбинаторный топологический тип* $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. Перед тем как дать соответствующее определение, напомним понятие нерва конечного покрытия.

Нервом $\mathcal{N}(\Sigma)$ конечного покрытия $\Sigma = \{K_i\}$ называется симплициальный комплекс, образуемый следующим образом. Вершинами симплициального комплекса $\mathcal{N}(\Sigma)$, по определению, считаются множества K_i . Симплекс $\Delta = (K_{i_1}, \dots, K_{i_s})$ считается принадлежащим комплексу $\mathcal{N}(\Sigma)$, если соответствующий страт $S(\Delta) = K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_s}$ не пуст, в противном случае такой симплекс в комплексе $\mathcal{N}(\Sigma)$ отсутствует.

Введем попутно понятие существенного симплекса для комплекса $\mathcal{N}(\Sigma)$. Мы будем говорить, что симплекс Δ задает страт $S(= S(\Delta))$ пространства \mathcal{K} , если $S = K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_s}$. Часто оказывается, что страт S может быть задан несколькими симплексами. Максимальный по включению симплекс, задающий данный страт S , мы назовем *существенным* симплексом комплекса $\mathcal{N}(\Sigma)$. Между существенными симплексами комплекса $\mathcal{N}(\Sigma)$ и стратами пространства \mathcal{K} имеется естественное взаимно однозначное соответствие.

Наконец, *комбинаторным топологическим типом* $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ (или, сокращенно, *k -топологическим типом*) пространства \mathcal{K} назовем нерв $\mathcal{N}(\Sigma)$.

ТММС: Поскольку все листы пространства \mathcal{T} имеют общее пересечение — страт, соответствующий типу звезда, то k -топологический тип $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ пространства \mathcal{T} представляет собой симплекс вместе со всеми своими гранями. Размерность этого симплекса равна количеству бинарных геометрических деревьев с данным числом n граничных вершин минус 1. В случае $n = 4$ комплекс $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ является треугольником.

Отметим здесь также, что взаимно однозначное соответствие между геометрическими деревьями, стратами пространства \mathcal{T} и существенными симплексами комплекса $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ сохраняет соответствующие отношения \leq , \supset и \subset , имеющиеся на этих множествах, в следующем смысле.

$$G' \leq G \iff [G'] \supset [G] \iff \Delta' \subset \Delta,$$

где \triangle и \triangle' — существенные симплексы, отвечающие стратам $[G]$ и $[G']$ соответственно. ★

5.5.5. Понятие критического значения и критической точки.

Пусть теперь на k -топологическом пространстве \mathcal{K} задана действительнoзначная функция $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$. Согласно общей концепции построения теории Морса для пары (\mathcal{K}, f) необходимо изучить, как меняется множество $\mathcal{K}_{\leq c} = \{x \in \mathcal{K} : f(x) \leq c\}$.

Множество $\mathcal{K}_{\leq c}$ снабжается естественным покрытием $\{\mathcal{K}_{\leq c} \cap K_i\}$, унаследованным от множества \mathcal{K} . Далее нерв этого покрытия для краткости будем обозначать $\mathcal{N}_{\leq c}$, а нерв $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ — через \mathcal{N} . Будем теперь, по определению, под изменением множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ понимать изменение нерва $\mathcal{N}_{\leq c}$.

Заметим, что если выполняется неравенство $c_1 \leq c_2$, то комплекс $\mathcal{N}_{\leq c_1}$ можно считать подкомплексом комплекса $\mathcal{N}_{\leq c_2}$. Для этого нужно отождествить симплекс $(\mathcal{K}_{\leq c_1} \cap K_{i_1}, \dots, \mathcal{K}_{\leq c_1} \cap K_{i_s})$ комплекса $\mathcal{N}_{\leq c_1}$ с симплексом $(\mathcal{K}_{\leq c_2} \cap K_{i_1}, \dots, \mathcal{K}_{\leq c_2} \cap K_{i_s})$ комплекса $\mathcal{N}_{\leq c_2}$. Таким образом, любой комплекс $\mathcal{N}_{\leq c}$ является подкомплексом комплекса \mathcal{N} .

Определение. *Критическим значением* функции f на пространстве \mathcal{K} назовем такое значение параметра \tilde{c} , при котором происходит изменение комбинаторной структуры комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$, т.е. для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ комплексы $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-\varepsilon}$ и $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+\varepsilon}$ различны.

В силу конечности рассматриваемых комплексов можно корректно определить приращение $d\mathcal{N}_{\tilde{c}}$ комплекса $\mathcal{N}_{\leq c}$ в критическом значении \tilde{c} как наименьший по включению симплициальный комплекс, содержащий совокупность симплексов $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}+\varepsilon} \setminus \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Утверждение 5.5.2. *Число \tilde{c} является критическим значением функции f тогда и только тогда, когда существует страт S , на котором абсолютный минимум функции f равен \tilde{c} , т.е.*

$$\tilde{c} = \inf_{x \in S} f(x).$$

Естественно теперь дать такое определение критической точки:

Определение. Точка x называется *критической точкой* для функции f , если она является точкой абсолютного минимума функции f на каком-либо страте S , содержащем эту точку, т.е.

$$f(x) = \inf_{x' \in S} f(x'), \quad \text{где } S \ni x.$$

ТММС: Поскольку стратами пространства \mathcal{T} являются пространства $[G]$, то критическими точками функции длины ℓ являются в точности все регулярные минимальные параметрические сети и только они. В свою очередь, критические значения — это длины минимальных параметрических сетей. ★

5.5.6. Индекс точки.

Определим для произвольной точки $x \in \mathcal{K}$ *комбинаторный потенциал* $V_-(x)$ или, сокращенно, *κ -потенциал* $V_-(x)$.

Определение. Симплекс Δ принадлежит комбинаторному потенциалу $V_-(x)$ тогда и только тогда, когда значение функции f в точке x не является точной нижней гранью функции f в страте $S(\Delta)$, т.е.

$$f(x) > \inf_{x' \in S(\Delta)} f(x').$$

Мы будем говорить, что *для точки x по страту $S(\Delta)$ можно уменьшить функцию f* .

Утверждение 5.5.3. *κ -потенциал некритической точки x представляет собой симплекс.*

Определение. *Индексом* произвольной точки x из пространства \mathcal{K} назовем следующую разность:

$$\text{ind}_f x := 1 - \chi(V_-(x)).$$

Из этого определения и утверждения 5.5.3 вытекает, что индекс некритической точки равен 0. Как будет видно из дальнейшего, обратное, вообще говоря, неверно.

ТММС: В случае минимальных сетей (т.е. пространства \mathcal{T} и функции ℓ) неудобно пользоваться определением индекса точки непосредственно. Переведем это определение на язык теории минимальных сетей.

Одним из эффективных технических средств, позволяющих работать с параметрическими сетями, является критерий минимальности (утверждение 5.5.1). С помощью этого критерия по данной параметрической сети можно сказать, будет ли она минимальной или нет. Таким образом, по данному расщеплению Γ' сети Γ можно определить, способно ли оно уменьшить свою длину, а значит, и длину сети Γ . Расщепления сети Γ , способные уменьшить ее длину, мы будем называть

укорачивающими расщеплениями. Сведем теперь вычисление индекса сети Γ к подсчету ее укорачивающих расщеплений. Будем действовать по следующей схеме:

1) Поставим в соответствие каждому укорачивающему расщеплению некоторый симплекс в k -потенциале $V_-(\Gamma)$.

Каждое расщепление $\Gamma'[G']$ сети $\Gamma[G]$ определяется типом G' , который имеет несколько дополнительных по отношению к G внутренних ребер. Существенный симплекс $\Delta' \in \mathcal{N}$, отвечающий типу G' , мы и поставим в соответствие расщеплению Γ' . Если расщепление Γ' является укорачивающим, то симплекс Δ' будет принадлежать k -потенциалу $V_-(\Gamma)$. Обратным путем любому существенному симплексу из $V_-(\Gamma)$ можно однозначно сопоставить некоторое укорачивающее расщепление.

2) Несложно показать, что пересечение любых двух существенных симплексов комплекса \mathcal{N} также будет существенным симплексом.

3) Рассмотрим максимальные симплексы k -потенциала $V_-(\Gamma)$. Они являются существенными. В самом деле, пусть Δ — максимальный симплекс комплекса $V_-(\Gamma)$. Тогда если бы Δ не был существенным симплексом, то существовал бы симплекс $\tilde{\Delta} \supset \Delta$, задающий тот же страт, что и симплекс Δ . Следовательно, $\tilde{\Delta}$ также принадлежал бы k -потенциалу $V_-(\Gamma)$ и поэтому Δ не был бы максимальным симплексом.

4) Возьмем нерв покрытия максимальными симплексами k -потенциала $V_-(\Gamma)$, обозначим этот нерв через $V_-^*(\Gamma)$ и назовем *ко-потенциалом* сети Γ . Из 2) вытекает, что любой симплекс ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ соответствует некоторому существенному симплексу k -потенциала $V_-(\Gamma)$ и, таким образом, согласно 1) соответствует некоторому укорачивающему расщеплению сети Γ . Верно и обратное.

Осталось описать укорачивающие расщепления сети Γ , соответствующие симплексам ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$.

5) Назовем *элементарным* расщепление, отличающееся от исходной сети Γ одним дополнительным (вырожденным) внутренним ребром.

Лемма 5.5.1. Пусть Γ — минимальная параметрическая сеть. Тогда вершины ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ (максимальные симплексы k -потенциала $V_-(\Gamma)$) соответствуют элементарным укорачивающим расщеплениям сети Γ .

6) В п.5) были описаны расщепления сети $\Gamma[G]$, соответствующие вершинам ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$. Здесь мы опишем расщепления, соответствующие симплексам в $V_-^*(\Gamma)$.

Пусть симплекс $\Delta^* \in V_-^*(\Gamma)$ задается максимальными симплексами $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_s)$ k -потенциала $V_-(\Gamma)$. Обозначим через Δ симплекс, обра-

зуемый пересечением $\Delta'_1 \cap \dots \cap \Delta'_s$, а через $\Gamma'_1[G'_1], \dots, \Gamma'_s[G'_s]$ — элементарные укорачивающие расщепления, соответствующие симплексам $\Delta'_1, \dots, \Delta'_s$. Тип G'_i каждого расщепления Γ'_i отличается от G только одним дополнительными внутренним ребром e_i . Тогда то укорачивающее расщепление Γ' , которое отвечает симплексу Δ , будет отличаться от Γ лишь дополнительными внутренними ребрами e_1, \dots, e_s . Укорачивающее расщепление сети Γ , образованное дополнительными внутренними ребрами, каждое из которых приводит к элементарному укорачивающему расщеплению, мы назовем *мощным* расщеплением сети Γ .

Обозначим через $PS_j(\Gamma)$ набор мощных расщеплений сети Γ , ранг которых равен j . Тогда эйлерова характеристика ко-потенциала $V_-^*(\Gamma)$ минимальной параметрической сети Γ ранга i выражается следующим образом:

$$\chi(V_-^*(\Gamma)) = \sum_k (-1)^{k-1} \#PS_{i+k}(\Gamma).$$

Из теоремы Картана (см., например, [140]) следует, что $\chi(V_-(\Gamma)) = \chi(V_-^*(\Gamma))$. Таким образом, мы получаем утверждение.

Утверждение 5.5.4. Пусть $\Gamma \in \mathcal{T}$ — минимальная параметрическая сеть ранга i . Тогда

$$\text{ind}_\ell \Gamma = 1 - \sum_k (-1)^{k-1} \#PS_{i+k}(\Gamma).$$

Продemonстрируем применение полученной формулы для подсчета индексов минимальных параметрических сетей в случае $n = 4$ граничных точек. Регулярная минимальная параметрическая сеть Γ максимального (равного $n - 3$) ранга, как было показано в п. 5.5.6, является локально минимальной сетью. Одновременно эта сеть является локальным минимумом функции ℓ на пространстве \mathcal{T} , поскольку не существует страта, по которому можно было бы уменьшить длину сети Γ , или, другими словами, не существует укорачивающего расщепления сети Γ . Следовательно, индекс сети Γ равен 1.

Для случая 4 граничных точек регулярные минимальные параметрические сети могут иметь ранг равный либо 1 — локально минимальные сети, индекс которых 1, — либо 0. Вычислим индекс минимальной параметрической сети Γ_0 ранга 0. Индекс сети Γ_0 , согласно утверждению 5.5.4, выражается формулой $\text{ind}_\ell \Gamma_0 = 1 - \#PS_1(\Gamma_0)$. В рассматриваемом случае ($n = 4$) совокупность $PS_1(\Gamma_0)$ представляет собой все укорачивающие расщепления сети Γ_0 сетями бинарного типа. Подсчитаем их количество.

У сети Γ_0 всего одна подвижная вершина V . Рассмотрим сначала случай, когда вершина V не совпадает ни с какой граничной вершиной A_i . Тогда, согласно критерию минимальности 5.5.1, сумма единичных направляющих векторов e_i невырожденных ребер (VA_i) , выходящих из V , равна 0. Поэтому ребра (VA_i) разбиваются на пары противоположно направленных ребер, скажем, так, что $e_1 = -e_3$ и $e_2 = -e_4$. Теперь нужно рассмотреть два варианта:

- (1) Существует пара векторов, угол между которыми не больше 60° , например, $(\widehat{e_1, e_2}) \leq 60^\circ$. Тогда, согласно критерию 5.5.1, расщепление, тип G'_0 которого изображен на рис. 5.43, является укорачивающим для сети Γ_0 , а два остальных — нет.
- (2) Все углы между различными векторами e_i строго больше 60° . Это означает, что все углы между соседними векторами строго меньше 120° . Снова воспользовавшись критерием 5.5.1, получаем, что расщепления с типами G'_0 и G''_0 являются укорачивающими для сети Γ_0 , а расщепление типа G'''_0 — нет.

Таким образом, в случае, если подвижная вершина V не совпадает ни с какой граничной вершиной, количество укорачивающих расщеплений сети Γ_0 равно либо 1, либо 2. Другой случай разбирается аналогично и приводит к тому же результату. Следовательно, индекс $\text{ind}_\ell \Gamma_0$ равен либо 0, либо -1 . ★

5.5.7. Комбинаторная функция Морса.

Напомним, что при рассмотрении в пп. 5.5.2 и 5.5.3 классической и симплицальной теорий Морса мы ограничились специальным классом функций, называемых функциями Морса. Основное определяющее свойство функций Морса состоит в том, что их критические точки “изолированы” друг от друга. Изолированность критических точек позволяет в локальных терминах описать перестройки множества $\mathcal{K}_{\leq c}$ и вывести равенство Морса. Для тех же целей в комбинаторном случае также необходимо выделить класс функций с изолированными критическими точками.

Определение. *Комбинаторной функцией Морса* на k -топологическом пространстве \mathcal{K} называется функция, для которой выполнено следующее условие: для каждого страта S существует и единственна точка $x \in S$, в которой функция $f|_S$ достигает своей точной нижней грани.

Предложение 5.5.1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_m — критические точки комбинаторной функции Морса f , отвечающие критическому значению \tilde{c} ; а $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ — существенные симплексы, задающие минимальные по включению страты $S(\Delta_1), S(\Delta_2), \dots, S(\Delta_m)$, содержащие соответствующие критические точки. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (1) симплексы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ являются максимальными симплексами совокупности $dN_{\tilde{c}} \setminus N_{<\tilde{c}}$;
- (2) пересечение любых двух симплексов Δ_i и Δ_j принадлежит комплексу $N_{<\tilde{c}}$;
- (3) выполняется равенство $V_-(x_i) = \Delta_i \cap N_{<\tilde{c}}$.

Таким образом, изменение комплекса $N_{\leq c}$ при прохождении через критическое значение \tilde{c} комбинаторной функции Морса может быть описано как приклейка к комплексу $N_{<\tilde{c}}$ симплексов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, пересекающихся только в комплексе $N_{<\tilde{c}}$, см. рис. 5.47.

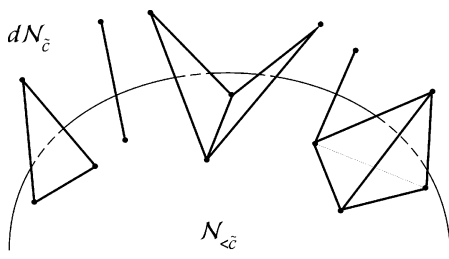


Рис. 5.47. Перестройки комплекса $N_{<\tilde{c}}$.

ТММС: В работе [97] выделен класс граничных множеств \mathcal{A} , который открыт и всюду плотен в \mathbb{R}^{2n} , таких, что любая минимальная параметрическая сеть $\Gamma[G]$, затягивающая \mathcal{A} , является единственной минимальной параметрической сетью типа G . Границы из этого класса названы *типичными границами*. Таким образом, почти для всех граничных множеств функция длины ℓ является комбинаторной функцией Морса на пространстве \mathcal{T} . ★

5.5.8. Равенство Морса.

Заканчивая построение комбинаторной теории Морса, докажем теорему, являющуюся аналогом равенств Морса из классической и симплицальной теорий Морса (теоремы С3 и S3 соответственно).

Теорема 5.5.1. Пусть f — комбинаторная функция Морса на k -топологическом пространстве \mathcal{K} . Обозначим через x_α ее критические точки. Тогда имеет место равенство

$$\sum_{\alpha} \text{ind}_f x_\alpha = \chi(\mathcal{N}(\mathcal{K})),$$

которое мы назовем равенством Морса.

Доказательство. Основной факт, используемый при доказательстве этой теоремы, — это хорошо известная в алгебраической топологии аддитивность эйлеровой характеристики. Более точно, для произвольных симплициальных комплексов N_1 и N_2 имеет место равенство

$$\chi(N_1 \cup N_2) = \chi(N_1) + \chi(N_2) - \chi(N_1 \cap N_2).$$

Это свойство эйлеровой характеристики несложно вытекает из ее определения.

Упорядочим все критические значения функции f : $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_2 < \dots < \tilde{c}_t$. Рассмотрим исчерпание комплекса \mathcal{N} его подкомплексами $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_i}$: $\emptyset \subset \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_1} \subset \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_2} \subset \dots \subset \mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_t} = \mathcal{N}$. Заметим также, что $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_{i-1}} = \mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}$ и $\emptyset = \mathcal{N}_{< \tilde{c}_1}$.

Пусть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{m_i}^{(i)}$ — критические точки, отвечающие критическому значению \tilde{c}_i . Тогда, в обозначениях предложения 5.5.1, переход от комплекса $\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}$ к комплексу $\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_i}$ получается как последовательное “приклеивание” симплексов $\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}, \dots, \Delta_{m_i}^{(i)}$. Поскольку $V_-(x_1^{(i)}) = \Delta_1^{(i)} \cap \mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}$, см. п. 3 предложения 5.5.1, то мы можем записать

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_i} \cup \Delta_1^{(i)}) &= \chi(\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}) + \chi(\Delta_1^{(i)}) - \chi(\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i} \cap \Delta_1^{(i)}) = \\ &= \chi(\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}) + 1 - \chi(V_-(x_1^{(i)})) = \chi(\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}) + \text{ind}_f x_1^{(i)}. \end{aligned}$$

Приклеив остальные симплексы $\Delta_2^{(i)}, \dots, \Delta_{m_i}^{(i)}$, будем иметь

$$\chi(\mathcal{N}_{\leq \tilde{c}_i}) = \chi(\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i} \cup \Delta_1^{(i)} \cup \dots \cup \Delta_{m_i}^{(i)}) = \chi(\mathcal{N}_{< \tilde{c}_i}) + \sum_j \text{ind}_f x_j^{(i)}.$$

Учитывая, что $\chi(\emptyset) = 0$, проделаем последовательно эту процедуру для всех критических значений функции f , начиная с \tilde{c}_1 , и получим утверждение теоремы. ■

ТММС: Оказывается, что для пространства \mathcal{T} — пространства регулярных сетей, затягивающих фиксированную типичную границу, — и функции длины ℓ можно в определенном смысле написать несколько равенств Морса, см. ниже доказательство теоремы 5.5.2. Эти равенства позволяют получить полезную для приложений формулу, выражающую количество регулярных минимальных параметрических сетей ранга k (обозначим множество таких сетей через C_k) через мощные расщепления регулярных минимальных параметрических сетей меньшего ранга.

Теорема 5.5.2. *Количество регулярных минимальных параметрических сетей ранга k , затягивающих фиксированную типичную границу, выражается следующей формулой:*

$$|C_k| = \sum_{\Gamma_\alpha: k_\alpha < k} (-1)^{k-k_\alpha-1} \#PS_k(\Gamma_\alpha),$$

где суммирование ведется по всем регулярным минимальным параметрическим сетям Γ_α ранга $k_\alpha < k$.

Доказательство. Воспользуемся равенством Морса в общей форме, см. теорему 5.5.1. Для этого напомним, что нерв \mathcal{N} пространства \mathcal{T} всех регулярных сетей с данной границей представляет собой симплекс, и, следовательно, $\chi(\mathcal{N}(\mathcal{T})) = 1$. Напомним также, что индекс регулярной минимальной параметрической сети Γ_α ранга k_α — критической точки функции длины ℓ на \mathcal{T} — выражается, согласно утверждению 5.5.4, следующим образом:

$$\text{ind}_\ell \Gamma_\alpha = 1 - \sum_{s: k_\alpha < s \leq n-3} (-1)^{s-k_\alpha-1} \#PS_s(\Gamma_\alpha).$$

Подставив это выражение в равенство Морса и сгруппировав сети с одинаковым рангом, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-3} \left(|C_i| - \sum_{\Gamma_\alpha: k_\alpha=i} \sum_{s: i < s \leq n-3} (-1)^{s-i-1} \#PS_s(\Gamma_\alpha) \right) = 1.$$

Рассмотрим теперь подпространства $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}$, образованные всеми сетями ранга не выше k . Очевидно, имеется цепочка включений $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \dots \subset \mathcal{T}_{n-3} = \mathcal{T}$. Каждое из пространств \mathcal{T}_k естественным образом превращается в k -топологическое пространство с помощью покрытия его подмножествами $\{[G] : \text{rk } G = k\}$. Поэтому можно к

каждому \mathcal{T}_k применить результаты комбинаторной теории Морса. По-прежнему, критические точки функции длины ℓ на \mathcal{T}_k — это регулярные минимальные параметрические сети, их индексы выражаются как

$$\text{ind}_\ell \Gamma_\alpha = 1 - \sum_{s: k_\alpha < s \leq k} (-1)^{s-k_\alpha-1} \#PS_s(\Gamma_\alpha),$$

а соответствующее равенство Морса выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=0}^k \left(|C_i| - \sum_{\Gamma_\alpha: k_\alpha=i} \sum_{s: i < s \leq k} (-1)^{s-i-1} \#PS_s(\Gamma_\alpha) \right) = 1.$$

Вычитая теперь из равенства Морса для пространства \mathcal{T}_k равенство Морса для пространства \mathcal{T}_{k-1} , получим доказываемую формулу. ■

Применим вышедоказанную формулу для оценки количества локально минимальных сетей, затягивающих типичную границу из небольшого числа точек.

Утверждение 5.5.5. *Количество локально минимальных сетей, затягивающих типичную границу из 4 точек на евклидовой плоскости, может быть равно либо 1, либо 2.*

Доказательство. В п. 5.5.6 было показано, что локально минимальные сети являются регулярными минимальными параметрическими сетями ранга $n - 3$. Для случая 4 граничных точек это сети из множества C_1 . Мощность $|C_1|$ этого множества, согласно теореме 5.5.2, выражается как

$$|C_1| = \#PS_1(\Gamma_0),$$

где Γ_0 — единственная минимальная параметрическая сеть ранга 0. Согласно п. 5.5.6 количество мощных расщеплений $\#PS_1(\Gamma_0)$ сети Γ_0 равно либо 1, либо 2. Откуда следует доказываемое утверждение. ■

Сформулируем аналогичное утверждение и для случая $n = 5$.

Утверждение 5.5.6. *Количество локально минимальных сетей, затягивающих типичную границу из 5 точек на евклидовой плоскости, не превосходит 8.*

Доказательство этого утверждения, которое можно найти в [99], проводится теми же методами, что и доказательство утверждения 5.5.5. Однако оно довольно длинно, и поэтому мы его здесь не приводим. ★

ГЛАВА 6

Экстремали функционалов, заданных нормами

Настоящая глава посвящена изучению функционалов на нормированных пространствах, порожденных нормами этих пространств. Важным частным случаем функционалов данного типа является функционал манхеттенской длины. Напомним, что *манхеттенской длиной вектора в \mathbb{R}^n* называется сумма длин его проекций на координатные оси. Здесь предполагается, что в \mathbb{R}^n фиксирован стандартный базис. Если в качестве лагранжиана рассмотреть манхеттенскую длину векторов скоростей, то мы и получим *функционал манхеттенской длины*. Отметим, что общая теория, развитая в предыдущих главах, не распространяется на функционалы манхеттенской длины, так как лагранжиан имеет особенности не только на нулевом сечении касательного расслоения к \mathbb{R}^n , но и на координатных плоскостях касательных пространств. Это обстоятельство приводит к появлению новых эффектов. А именно, оказывается, что условие экстремальности сети-следа перестает носить локальный характер, как это было в теореме 2.3. В частности, локальная минимальность сети теперь не эквивалентна ее экстремальности, как это было, например, в случае функционала римановой длины. Ниже, чтобы продемонстрировать этот феномен, мы приведем критерий экстремальности плоской сети по отношению к функционалу манхеттенской длины, см. теорему 6.14.

Экстремали манхеттенской длины являются важным классом экстремальных сетей. Первые работы, посвященные изучению кратчайших сетей в смысле манхеттенской длины, появились в 60-е годы (см., например, [44]) в связи с бурным развитием электроники и робототехники. Интерес к манхеттенской длине возник в связи с тем, что проводники на печатных платах имеют, как правило, вид ломаных линий, составленных из горизонтальных и вертикальных отрезков, поэтому их манхеттенская и евклидова длина одинаковы. Аналогичная ситуация

имеет место и в робототехнике. По-видимому, первое систематическое исследование кратчайших сетей в смысле манхеттенской длины (так называемых *кратчайших прямоугольных деревьев*) было предпринято в 1966 году Хананом [59], который описал несколько важных общих геометрических свойств таких сетей. В частности, Ханан показал, что всегда существует кратчайшее прямоугольное дерево, которое является подмножеством так называемой *решетки Ханана* — множества всех вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через граничные точки. Отметим, что ребра кратчайшего прямоугольного дерева можно, вообще говоря, выбирать многими способами, не меняя, конечно, длину дерева. Однако, начиная с работы Ханана [59], традиционно ребра таких деревьев выбирают в виде ломаных, звенья которых параллельны координатным осям.

Спустя 10 лет Хванг [64] описал возможную структуру кратчайших прямоугольных деревьев в предположении, что данное множество затягивается хотя бы одним *невырожденным* кратчайшим деревом G_0 . Последнее означает, что степень всех граничных вершин в дереве G_0 равна 1. В частности, дерево G_0 не имеет вершин степени 2. Хванг показал, что в этом случае кратчайшее дерево имеет одну из двух возможных структур, показанных на рис. 6.1.

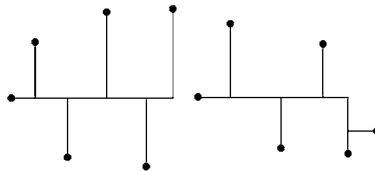


Рис. 6.1. Два типа полных кратчайших сетей.

Однако эффективный алгоритм, строящий кратчайшее прямоугольное дерево, найти не удалось. Объяснение этому было дано в 1977 году Гэри и Джонсоном [48], которые показали, что задача поиска кратчайшего прямоугольного дерева является NP -полной, т.е., скорее всего, не существует полиномиального алгоритма решения этой задачи. Этот факт делает изучение ограничений на структуру кратчайших сетей еще более актуальным.

Идея рассмотрения *локально-кратчайших* сетей впервые, по-видимому, появилась при изучении кратчайших сетей в случае евклидовой длины. А именно, описав локальное устройство кратчайших сетей (для этого достаточно решить задачу с не более чем одной дополнительной

вершиной), мы естественным образом приходим к задаче описания всех сетей, удовлетворяющих полученным ограничениям. Такие сети образуют более широкий класс, и их, обычно, называют *локально минимальными* сетями¹. Отметим, что первые реальные алгоритмы построения кратчайшего евклидова дерева, основанные на алгоритме Мелзака [112], перебирали все возможные локально минимальные деревья и искали среди них кратчайшее.

В действительности, иногда найти кратчайшую сеть оказывается существенно проще, чем перечислить все локально минимальные сети. Напомним, см. выше, что если множество граничных точек представляет собой множество вершин правильного n -угольника, $n \geq 6$, то, как показали Ярник и Кесслер [95] для $n \geq 13$ и Ду, Хванг и Венг [33] для $6 \leq n \leq 12$, кратчайшая сеть представляет собой n -угольник без любой его стороны. Множество же локально минимальных сетей в этом случае существенно богаче, см. выше, а также [81], [147]. В случае кратчайших манхеттенских сетей с так называемой прямоугольно-выпуклой границей известны полиномиальные алгоритмы построения таких сетей, см., например, работу Ричардс и Салове [132].

Отметим, что в перечисленных выше работах изучаются, в основном, алгоритмические аспекты проблемы. В частности, не было замечено отличие локально минимальных сетей (т.е., в данном контексте, сетей, имеющих ту же локальную структуру, что и кратчайшая сеть) от экстремальных сетей. Также не изучалась геометрия и топология локально минимальных и экстремальных сетей.

Интерес к изучению экстремалей в смысле евклидовой и манхеттенской длины, с точки зрения геометрии, обусловлен тем, что эти два функционала представляют собой, в некотором смысле, предельные случаи функционалов, порожденных метриками Банаха–Минковского: евклидова длина порождена наиболее симметричной строго выпуклой нормой, а манхеттенская длина — не строго выпуклой нормой с максимальной длиной единичной окружности. Именно отсутствие строгой выпуклости приводит к тому, что в случае манхеттенской длины, в отличие от евклидовой, классы экстремальных и локально минимальных сетей не совпадают [72]. Аналогичные эффекты имеют место и для других норм Банаха–Минковского, например для случая так называемой λ -геометрии, см. ниже.

¹ Отметим еще раз, что в случае римановых многообразий сеть является локально кратчайшей тогда и только тогда, когда она является экстремальной, поэтому в предыдущих главах мы часто использовали термин “локально минимальная сеть” для экстремальных сетей.

6.1. Нормы общего вида

В данном разделе мы напомним некоторые стандартные определения, необходимые для дальнейшего. Кроме того, мы изучим общие вариационные свойства параметрических сетей и сетей-следов в нормированных пространствах.

6.1.1. Локально минимальные и экстремальные сети

Определения, приведенные в данном пункте, можно перенести на существенно более общий случай. Для простоты изложения **мы ограничиваемся здесь случаем кусочно-гладких сетей в линейных нормированных пространствах.**

Пусть X — конечномерное линейное пространство с некоторой нормой $\|\cdot\|$ и $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *измеримой*, если существует предел $\ell(\gamma)$ длин ломаных, вписанных в эту кривую. Число $\ell(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой* γ . Отметим, что если кривая γ — кусочно-гладкая, то она измерима и

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Таким образом, длина кривой в нормированном пространстве — это функционал лагранжева типа с лагранжианом, равным норме.

Пусть Γ — произвольная кусочно-гладкая сеть на X . Тогда, как и выше, *длиной* $\ell(\Gamma)$ *сети* Γ назовем сумму длин ее ребер. Связная сеть Γ , стягивающая множество $M \subset X$, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой связной сети, стягивающей M .

Определение. Сеть Γ называется *локально минимальной*, если каждая ее точка содержится в некоторой кратчайшей локальной сети (по отношению к канонической границе).

Определение. Сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой деформации Γ_t , $t \in [0, 1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(\Gamma_t) \geq 0.$$

Можно показать, что для случая стандартной евклидовой нормы в n -мерном векторном пространстве множества локально минимальных и экстремальных сетей совпадают. Однако, оказывается, бывают нормы,

в которых это не так. Примером такой нормы является так называемая манхеттенская норма, или ℓ_1 -норма.

Пусть в \mathbb{R}^n фиксированы стандартные координаты (x^1, \dots, x^n) . Напомним, что *манхеттенской нормой* вектора $y = (y^1, \dots, y^n)$ называется следующее число:

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y^i|.$$

Соответствующее нормированное пространство будем называть *n -мерным манхеттенским пространством*. Ниже мы покажем, что класс локально минимальных сетей в манхеттенском пространстве существенно шире класса экстремальных сетей.

6.1.2. Формула первой вариации длины отрезка в нормированном пространстве

Чтобы описать локальную структуру локально минимальных и экстремальных сетей, мы начнем с вывода формулы первой вариации длины отрезка в нормированном пространстве. Пусть ρ — некоторая норма на векторах пространства \mathbb{R}^n и $\Sigma = \Sigma^{n-1}$ — единичная сфера по отношению к этой норме, т.е.

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x) = 1\}.$$

Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную евклидову норму в \mathbb{R}^n , а через $S = S^{n-1}$ — стандартную евклидову сферу.

Следующий результат хорошо известен.

Предложение 6.1. *Пусть ρ — произвольная норма на \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$ — некоторая точка и $\eta \in T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда норма ρ дифференцируема по направлению η , т.е. существует предел*

$$\rho_\eta = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\rho(x + t\eta) - \rho(x)}{t}.$$

Пусть $x \neq 0$ — произвольная точка из \mathbb{R}^n и η — некоторый вектор из $T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Предположим, что векторы x и η линейно независимы, и обозначим через Π двумерное подпространство, натянутое на эти векторы. Прямая, проходящая через начало координат и точку x , разбивает плоскость Π на две полуплоскости, одна из которых содержит вектор η . Эту последнюю полуплоскость обозначим через $\Pi_+(\eta)$, а оставшуюся полуплоскость — через $\Pi_-(\eta)$.

Предложение 6.2. Ограничение функции $g(\eta) = \rho_\eta$ на каждую из плоскостей $\Pi_\pm(\eta)$ — линейная функция.

Доказательство. Введем следующие обозначения. Пусть $S^1(\eta)$ — пересечение плоскости Π со сферой S^{n-1} . Ясно, что $S^1(\eta)$ — большая окружность этой сферы, проходящая через точку $n = x/\|x\|$. Более того, общая граничная прямая полуплоскостей $\Pi_\pm(\eta)$ содержит точку n . Обозначим через $S^1_\pm(\eta)$ дугу $S^1(\eta) \cap \Pi_\pm(\eta)$. Параметризуем дугу $S^1_+(\eta)$ натуральным параметром φ от точки n так, чтобы n соответствовала $\varphi = 0$, и пусть $\tau(\eta)$ — единичный вектор скорости этой дуги в начальный момент $\varphi = 0$. Таким образом, дуга $S^1_+(\eta)$ задается радиус-вектором $n(\varphi)$ своих точек, причем $n(0) = n$ и $n_\varphi(0) = \tau(\eta)$. Более того, каждая точка P из полуплоскости $\Pi_+(\eta)$ задается своими полярными координатами (r, φ) : $P = r n(\varphi)$.

Ясно, что пара $(n, \tau(\eta))$ образует ортонормированный базис в плоскости Π . Разложим вектор η по этому базису: $\eta = \alpha n + \beta \tau(\eta)$. Отметим, что $\beta > 0$ по построению. Положим $f(\varphi) = \rho(n(\varphi))$. Если $P = r n(\varphi)$ — произвольная точка из полуплоскости $\Pi_+(\eta)$, то из однородности нормы заключаем, что $\rho(P) = r f(\varphi)$.

Пусть $x(t) = r(t)n(t)$ — параметрическое задание луча, идущего из x в направлении η , такое, что $x(0) = x$ и $x_t(0) = \eta$. Имеем $\rho(x(t)) = r(t)f(t)$. Из предложения 6.1 и гладкости кривых $n(t)$ и $x(t)$ вытекает, что функция $f(t)$, а значит, и функция $r(t)$ дифференцируемы в начальный момент $t = 0$ (на множестве $t \in [0, +\infty)$).

Имеем

$$\eta = x_t(0) = r_t(0)n + r(0)n_\varphi(0)\varphi_t(0) = r_t(0)n + \|x\|\tau(\eta)\varphi_t(0).$$

Поэтому $\alpha = r_t(0)$, а $\beta = \|x\|\varphi_t(0)$. С другой стороны,

$$\rho_\eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (r(t)f(t)) = r_t(0)f(0) + r(0)f_\varphi(0)\varphi_t = \alpha f(0) + \beta f_\varphi(0).$$

Так как $f(0)$ и $f_\varphi(0)$ не зависят от выбора η из полуплоскости $\Pi_+(\eta)$, заключаем, что r_η линейно зависит от η . Доказательство предложения 6.2 закончено. ■

Напомним ряд понятий, необходимых для дальнейшего изложения, см. подробности, например, в [114]. *Субградиентом* выпуклой вниз функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T_x^* \mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y - x) \leq F(y) - F(x) \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}^n.$$

Далее, если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая поверхность и $x \in X$ — произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности X в точке x , если X лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π . Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с X , назовем *внешней нормалью* к поверхности X в точке x . Множество $N_x X$ всех внешних нормалей к поверхности X в точке x называется *нормальным конусом*.

Наконец, *конормой* ρ^* , соответствующей норме ρ , называется следующая функция на ковекторах:

$$\rho^*(\xi) = \max\{\xi(\nu) \mid \nu \in \Sigma\}.$$

Хорошо известно, что, при стандартном отождествлении пространств $T_x^* \mathbb{R}^n$ и $T_x \mathbb{R}^n$, *субградиентное множество* $S_F(x)$ функции F в точке x , т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x , является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x . При этом функция F дифференцируема в x , если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одной точки, совпадающей в этом случае с градиентом функции F . Если $F = \rho$ — некоторая норма, то легко доказывается следующий результат.

Предложение 6.3. Пусть ρ — некоторая норма и Σ_x — поверхность уровня нормы ρ , проходящая через $x \neq 0$. Тогда субградиентное множество $S_\rho(x)$ в точке x совпадает с множеством всех внешних нормалей единичной конормы к Σ_x в точке x .

С помощью субградиентного множества легко вычисляется производная по направлению от выпуклой функции F . А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 6.4. Пусть F — выпуклая вниз функция и η — произвольный вектор, касательный к \mathbb{R}^n в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$F_\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{F(x + \varepsilon \eta) - F(x)}{\varepsilon} = \max_{\xi \in S_F(x)} \langle \xi, \eta \rangle.$$

Это предложение будет интересоваться нас в случае, когда $F = \rho$ — некоторая норма. Ниже мы приведем непосредственный вывод формулы из предложения 6.4 для нормы $F = \rho$ и дадим геометрическую интерпретацию полученного результата.

Напомним, что выше через $f(\varphi)$ мы обозначали функцию $f(\varphi) = \rho(n(\varphi))$. Определим теперь ковектор $\xi \in T_x^*\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$, положив $\xi = f(0)n + \dot{f}(0)\tau(\eta)$. Отметим, что ковектор ξ , вообще говоря, зависит от η . Более точно, ξ однозначно определяется полуплоскостью $\Pi_+(\eta)$, т.е. если η_1 и η_2 из $T_x\mathbb{R}^n$ порождают одну и ту же полуплоскость $\Pi_+(\eta_1) = \Pi_+(\eta_2)$, то соответствующие ковекторы ξ_1 и ξ_2 из $T_x^*\mathbb{R}^n$ совпадают. Заметим, что, по определению, $\rho_\eta = \xi(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$.

Опишем некоторые свойства ковектора ξ . Для этого центрально спроектируем кривую $n(\varphi)$ на сферу Σ и обозначим полученную кривую через $e(\varphi)$. Таким образом, $e(\varphi) = n(\varphi)/\rho(n(\varphi))$. Легко видеть, что у кривой $e(\varphi)$ в начальный момент $\varphi = 0$ определен вектор скорости, который, учитывая, что $\rho(n(\varphi)) = f(\varphi)$, можно записать так:

$$\dot{e}(0) = \frac{f(0)\tau(\eta) - \dot{f}(0)n}{f^2(0)}.$$

Поэтому имеет место следующий результат.

Предложение 6.5. *Векторы ξ и $\dot{e}(0)$ ортогональны. Поэтому вектор ξ — это внешняя нормаль в точке $e(0)$ к выпуклой кривой $\Sigma \cap \Pi$.*

Рассмотрим в точке $e(0)$ произвольную опорную плоскость к сфере Σ , содержащую вектор $\dot{e}(0)$, и пусть N — внешняя нормаль к Σ в точке $e(0)$, перпендикулярная этой опорной плоскости. Легко видеть, что $\langle N, n \rangle > 0$. Поэтому корректно определен следующий вектор:

$$m = \frac{f(0)}{\langle N, n \rangle} N - \xi.$$

Предложение 6.6. *Вектор m перпендикулярен плоскости Π . Поэтому значения ковекторов $\xi + m$ и ξ на векторах из плоскости Π совпадают.*

Доказательство. Действительно, плоскость Π натянута на векторы $\dot{e}(0)$ и n . Векторы ξ и N перпендикулярны вектору $\dot{e}(0)$, поэтому m тоже перпендикулярен $\dot{e}(0)$. Наконец,

$$\langle m, n \rangle = \left\langle \frac{f(0)}{\langle N, n \rangle} N - \xi, n \right\rangle = f(0) - f(0) = 0,$$

что и требовалось. ■

Таким образом, имеет место следующий результат.

Предложение 6.7. *Существует такой вектор m , перпендикулярный плоскости Π , что ковектор $\xi + m$ является субградиентом функции ρ в точке x . Другими словами, вектор $\xi + m$ принадлежит нормальному конусу к сфере $\|x\|\Sigma$ в точке x , и его конорма равна 1. Более того, каждый такой вектор m однозначно строится по содержащей вектор $\dot{e}(0)$ опорной плоскости к сфере Σ в точке $e(0)$. В частности, вектор m единственен тогда и только тогда, когда такая плоскость единственна.*

Доказательство. Существование вектора m вытекает из предложения 6.6. Вычислим конорму ковектора $\xi + m$. Так как вектор $\xi + m$ принадлежит нормальному конусу $N_{e(0)}\Sigma$, то

$$\max\{\langle \xi + m, \nu \rangle \mid \nu \in \Sigma\} = \langle \xi + m, e(0) \rangle = \left\langle \frac{f(0)}{\langle N, n \rangle} N, \frac{n}{f(0)} \right\rangle = 1.$$

Однозначная определенность вектора m по соответствующей опорной плоскости непосредственно следует из построения. Предложение доказано. \blacksquare

Замечание. Если размерность объемлющего пространства равна 2, то, как легко видеть, вектор m равен нулю, т.е. ковектор ξ сам является субградиентом функции ρ в точке x .

Напомним, что мы предполагали линейную независимость векторов x и η . Пусть теперь векторы x и η линейно зависимы. Тогда, очевидно, $\rho_\eta = \pm\rho(\eta)$, где знак совпадает со знаком скалярного произведения $\langle x, \eta \rangle$. С другой стороны, для любого субградиента ψ функции ρ в точке x , выполнено:

$$\langle \psi, \eta \rangle = \left\langle \psi, \pm\|\eta\| \frac{x}{\|x\|} \right\rangle.$$

Положим $n = x/\|x\|$, и $e = n/\rho(n)$. Тогда

$$\langle \psi, \eta \rangle = \langle \psi, \pm\|\eta\|\rho(n)e \rangle = \pm\rho(\eta) = \rho_\eta.$$

Наконец, пусть $x = 0$. Тогда, очевидно, $\rho_\eta = \rho(\eta)$. Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть ρ — некоторая норма, заданная на векторах пространства \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка и $\eta \in T_x\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ — любой вектор. Тогда существует производная ρ_η функции ρ в точке x по направлению η , и ее значение равно*

$$\rho_\eta = \begin{cases} \rho(\eta), & \text{если } x = 0, \\ \langle p(\eta), \eta \rangle, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $p(\eta)$ — субградиент функции ρ в точке x , причем если η и $x \neq 0$ — коллинеарны, то $p(\eta)$ — любой такой ковектор, а если η и $x \neq 0$ — линейно независимы, то $p(\eta)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: вектор $p(\eta)$ ортогонален радиальной проекции луча $x + t\eta$, $t \geq 0$, на сферу $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \rho(z) = 1\}$.

Замечание. Легко видеть, что на $p(\eta)$ функция $h(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle$, определенная на множестве $S_\rho(x)$, принимает свое максимальное значение, что согласуется с предложением 6.4. В дальнейшем субградиент $p(\eta)$ будем называть *соответствующим* вектору η .

Введем следующие обозначения. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Пусть $n_i = (-1)^i(x_2 - x_1)/\|x_2 - x_1\|$ — внешняя нормаль к отрезку $[x_1, x_2]$ в точке x_i . Обозначим через $p_i(\eta)$ субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $x = n_i$, как в теореме 6.1. Отметим, что для любого вектора η имеет место следующее равенство:

$$p_1(\eta) = -p_2(-\eta).$$

Следствие 6.1. Пусть ρ — некоторая норма, заданная на векторах пространства \mathbb{R}^n , x_1 и x_2 — произвольные точки в \mathbb{R}^n , а η_i , $i = 1, 2$, — произвольный вектор из $T_{x_i}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Рассмотрим деформацию $[x_1, x_2]_t = [x_1 + t\eta_1, x_2 + t\eta_2]$, $t \geq 0$, отрезка $[x_1, x_2]$. Пусть $\ell(t)$ — длина отрезка $[x_1, x_2]_t$ в нормированном пространстве. Тогда функции $\ell(t)$ дифференцируема в начальный момент $t = 0$. Если при этом $x_1 = x_2$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \rho(\eta_1 - \eta_2),$$

а если $x_1 \neq x_2$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_1(\eta_1 - \eta_2), \eta_1 - \eta_2 \rangle = \langle p_2(\eta_2 - \eta_1), \eta_2 - \eta_1 \rangle.$$

Более того, если ковектор $p_1(\eta_1 - \eta_2)$, а значит, и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены однозначно, то $p_1(\eta_1 - \eta_2) = -p_2(\eta_2 - \eta_1)$ и

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_1(\eta_1 - \eta_2), \eta_1 \rangle + \langle p_2(\eta_2 - \eta_1), \eta_2 \rangle.$$

Если же ковекторы $p_1(\eta_1 - \eta_2)$ и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены не однозначно, то последнее равенство имеет место для произвольного выбора этих ковекторов, при котором $p_1(\eta_1 - \eta_2) = -p_2(\eta_2 - \eta_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$p_{x_1x_2}(\eta_1, \eta_2) = p_1(\eta_1 - \eta_2), \quad p_{x_2x_1}(\eta_2, \eta_1) = p_2(\eta_2 - \eta_1).$$

При этом если ковекторы $p_1(\eta_1 - \eta_2)$ и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены не однозначно, то всегда будем предполагать их выбранными таким образом, что $p_{x_1x_2}(\eta_1, \eta_2) = -p_{x_2x_1}(\eta_2, \eta_1)$. Отметим, что если ковекторы $p_1(\eta_1 - \eta_2)$ и $p_2(\eta_2 - \eta_1)$ определены однозначно, то равенство $p_{x_1x_2}(\eta_1, \eta_2) = -p_{x_2x_1}(\eta_2, \eta_1)$ имеет место автоматически. Кроме того, $p_{x_1x_2}(\eta_1, 0) = p_1(\eta_1)$.

Ковектор $p_{x_1x_2}(\eta_1, \eta_2)$ назовем ρ -импульсом отрезка $[x_1, x_2]$ в конечной точке x_1 по отношению к векторам $\eta_i \in T_{x_i}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Отметим, что если направление отрезка $[x_1, x_2]$ соответствует точке гладкости сферы Σ , т. е. в соответствующей точке сферы нормальный конус состоит из одного луча, то ρ -импульс отрезка $[x_1, x_2]$ не зависит от выбора векторов η_i и однозначно определен в каждой из концевых точек x_i . В этом случае, очевидно, $p_{x_1x_2}(\eta_1, \eta_2)$ совпадает с градиентом функции ρ в точке $x_1 - x_2$.

Отметим, что в новых обозначениях формула из следствия 6.1 записывается в виде

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} \ell(t) = \langle p_{x_1x_2}(\eta_1, \eta_2), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2x_1}(\eta_2, \eta_1), \eta_2 \rangle.$$

6.1.3. Устройство экстремальных кривых

Пусть Σ — единичная сфера в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) . Участком уплощения назовем пересечение сферы Σ с некоторой ее опорной гиперплоскостью. Максимальные по включению участки уплощения назовем *компонентами уплощения*. Ясно, что множество всех компонент уплощения образует замкнутое покрытие сферы Σ , инвариантное относительно центральной симметрии. Центральнo-симметричные компоненты уплощения назовем *противоположными*. Будем говорить, что вектор $x \neq 0$ лежит в участке уплощения, если в этом участке лежит вектор $x/\rho(x)$.

Теорема 6.2. *Кривая γ , соединяющая точки A и B в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) , является кратчайшей тогда и только тогда, когда все векторы скорости кривой γ лежат в одной и той же компоненте уплощения. В частности, любой прямолинейный отрезок является кратчайшей кривой.*

Далее, кривая является экстремалью функционала нормированной длины тогда и только тогда, когда она — кратчайшая. Кривая является локально кратчайшей тогда и только тогда, когда ее можно покрыть конечным числом кратчайших кривых так, чтобы каждая

внутренняя точка кривой γ являлась внутренней точкой некоторой кривой этого покрытия.

6.1.4. Локальная структура экстремальных линейных параметрических сетей

Пусть, как и выше, ρ — некоторая норма на пространстве \mathbb{R}^n . В данном разделе мы приведем необходимое и достаточное условие экстремальности параметрической сети в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) .

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная квазирегулярная линейная параметрическая сеть. Напомним обозначения из главы 2.

Для каждой приведенной компоненты $H \subset \Gamma$ обозначим через E_H и V_H множества ребер и вершин сети H . Через ∂H обозначим множество вершин из H , являющихся граничными в сети Γ . Через $\bar{\partial} H$ обозначим множество вершин из H , инцидентных регулярным ребрам сети Γ . Далее, для каждой вершины $x \in \bar{\partial} H$ обозначим $N_H(x)$ множество регулярных ребер сети Γ , инцидентных x .

Если γ — произвольное ребро, то обозначим через $\partial\gamma$ пару его концевых вершин. Положим $\rho(\{A, B\}) = \rho(B - A)$.

Наконец, для произвольного регулярного ребра $\gamma = [x, y]$ и произвольных векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ положим $p_x(\gamma, \eta_1, \eta_2)$ равным ρ -импульсу $p_{xy}(\eta_1, \eta_2)$. Напомним, что если ρ -импульс $p_{xy}(\eta_1, \eta_2)$ однозначно не определен, то мы дополнительно предполагаем выполнение условия

$$p_x(\gamma, \eta_1, \eta_2) = -p_y(\gamma, \eta_2, \eta_1).$$

Если ρ -импульс не зависит от векторов η_i (что имеет место, если $\dot{\gamma}$ в вершине x соответствует точке гладкости сферы Σ), то будем обозначать его через $p_x(\gamma)$.

Из следствия 6.1 легко получается следующая *теорема о локальной структуре*.

Теорема 6.3. Пусть (\mathbb{R}^n, ρ) — нормированное пространство. Квазирегулярная параметрическая линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для каждого отображения $\eta: V_G \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующая сумма по всем приведенным компонентам H сети Γ неотрицательна:

$$\sum_H \left\{ \sum_{x \in \bar{\partial} H} \left\langle \sum_{\substack{\gamma \in N_H(x) \\ \gamma = [x, y]}} p_x(\gamma, \eta(x), \eta(y)), \eta(x) \right\rangle + \sum_{\gamma \in E_H} \rho(\eta|_{\partial\gamma}) \right\} \geq 0.$$

Следствие 6.2. В предположениях теоремы 6.3, регулярная линейная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей β является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для каждого отображения $\eta: V_G \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\sum_x \left\langle \sum_{\gamma=[x,y]} p_x(\gamma, \eta(x), \eta(y)), \eta(x) \right\rangle \geq 0,$$

где сумма берется по всем подвижным вершинам x .

Следствие 6.3. Если регулярная линейная параметрическая сеть Γ в \mathbb{R}^n с границей β является экстремалью функционала нормированной длины, то для каждой подвижной вершины x сети Γ и каждого вектора η имеет место неравенство:

$$\left\langle \sum_{\gamma=[x,y]} p_x(\gamma, \eta, 0), \eta \right\rangle = \left\langle \sum_{\gamma=[x,y]} \xi_y(\eta), \eta \right\rangle \geq 0,$$

где $\xi_y(\eta)$ — это субградиент нормы ρ в точке $x-y$, соответствующий вектору η .

Рассмотрим теперь частный случай: пусть функция ρ является гладкой всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$. Это равносильно гладкости единичной сферы Σ . Тогда для каждого вектора $x \neq 0$ субградиентное множество $S_\rho(x)$ состоит из одного элемента — градиента функции ρ в точке x , который совпадает с внешней нормалью p к сфере $\rho(x)\Sigma$ в точке x , такой, что $\rho^*(x) = 1$. В частности, ρ -импульс произвольного невырожденного ребра не зависит от поля вариации.

Следствие 6.4. Пусть, в предположениях теоремы 6.3, сфера Σ является гладкой. Квазирегулярная параметрическая линейная сеть Γ в \mathbb{R}^n с границей β экстремальна для функционала нормированной длины, если и только если для каждой приведенной компоненты H и каждого отображения $\eta: V_H \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\eta(\partial H) = 0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\sum_{x \in \partial H} \langle P(x), \eta(x) \rangle + \sum_{\gamma \in E_H} \rho(\eta|_{\partial \gamma}) \geq 0,$$

где $P(x) = \sum_{\gamma \in N_H(x)} p_x(\gamma)$ — суммарный ρ -импульс невырожденных ребер, инцидентных x , вычисленный в точке x .

Если дополнительно потребовать, чтобы все ребра сети Γ были невырожденными, то критерий еще более упростится.

Следствие 6.5. Пусть, в предположениях теоремы 6.3, сфера Σ является гладкой. Тогда регулярная линейная параметрическая сеть Γ в \mathbb{R}^n с границей β является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для каждой подвижной вершины x сети Γ имеет место равенство:

$$\sum_{\gamma} p_x(\gamma) = 0,$$

где сумма берется по всем ребрам γ , инцидентным вершине x .

Пример. Пусть M — конечное подмножество единичной сферы Σ , такое, что любой участок уплощения $D \subset \Sigma$ содержит столько же точек из M , сколько и центрально-симметричный ему участок $-D$. Тогда сеть с границей M , все ребра которой — отрезки, соединяющие начало координат с точками из M , является экстремальной параметрической сетью (по отношению к нормированной длине).

Действительно, для доказательства достаточно проверить, что для любого вектора η имеет место неравенство:

$$\left\langle \sum_{\gamma=[0,y]} \xi_y(\eta), \eta \right\rangle \geq 0,$$

где y пробегает все точки из M , а $\xi_y(\eta)$ — это субградиент нормы ρ в точке $-y$, соответствующий вектору η (см. следствие 6.2). Легко видеть, что во всех точках y из M можно так выбрать субградиенты s_y функции ρ , что их сумма будет равна нулю. С другой стороны, в силу предложения 6.4,

$$\left\langle \sum_{\gamma=[0,y]} \xi_y(\eta), \eta \right\rangle \geq \left\langle \sum_{\gamma=[0,y]} s_y, \eta \right\rangle = 0,$$

что и завершает доказательство.

Приведем еще один полезный критерий экстремальности линейной квазирегулярной параметрической сети Γ , обобщающий теорему о локальной структуре локально минимальных параметрических сетей, см. теорему 4.1 главы 4. Для этого каждой паре (e, v) , состоящей из подвижной вершины v сети Γ и инцидентного этой вершине ребра e , припишем вещественную n -мерную переменную $x_{e,v}$ и рассмотрим линейную систему, состоящую из всех уравнений следующих двух типов:

$$\begin{cases} \sum_{e \ni v} x_{e,v} = 0, & \text{где } v \text{ — подвижная вершина сети } \Gamma, \\ x_{e,v} + x_{e,w} = 0, & \text{где } e = [v, w] \text{ — ребро сети } \Gamma, v \text{ и } w \text{ —} \\ & \text{движные вершины.} \end{cases}$$

Эту систему так же, как и в главе 4, назовем *характеристической системой* сети Γ . Отметим, что эта характеристическая система в действительности полностью определяется параметризующим графом G сети Γ .

Далее, по каждому ребру e сети Γ и инцидентной e вершине v построим вектор $n(e, v)$, равный для регулярного ребра e направлению отрезка e , ориентированного в сторону вершины v , и равный нулю для точечного ребра e . Пусть $S_\rho(e, v)$ — субградиентное множество функции ρ в точке $n(e, v)$.

Теорема 6.4. *Квазирегулярная линейная сеть Γ является экстремальной параметрической сетью для функционала ρ -нормированной длины, если и только если существует решение $\{x_{e,v}^0\}$ характеристической системы этой сети, такое, что для каждого ребра из Γ и инцидентной ему вершины v выполняется $x_{e,v}^0 \in S_\rho(e, v)$.*

Доказательство. Нам понадобится следующий хорошо известный результат, см., например, [114].

Предложение 6.8. *Внутренняя точка x области определения выпуклой вниз функции F является точкой минимума для F , если и только если субградиентное множество $S_F(x)$ функции F в точке x содержит 0. Множество всех минимумов выпуклой вниз функции F связно, выпукло, и на нем функция F принимает одно и то же значение.*

Предложение 6.9. *Сумма выпуклых вниз функций является выпуклой функцией. Субградиентное множество суммы выпуклых вниз функций в любой внутренней точке области определения равно сумме субградиентных множеств этих функций.*

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — квазирегулярная линейная сеть и $x_v \in \mathbb{R}^n$ — координата ее подвижной вершины v . Обозначим через $V_M(G)$ множество подвижных вершин из G , и пусть m — количество элементов множества $V_M(G)$. Тогда конфигурационное пространство $[G, \partial\Gamma] = \prod_{v \in V_M(G)} \mathbb{R}^n$ всех линейных сетей топологии G с тем же граничным отображением, что и у Γ , изоморфно \mathbb{R}^{mn} . Для удобства, точки из $[G, \partial\Gamma]$ будем обозначать через $x = (x_v)$, понимая под x_v проекцию вектора $x \in \mathbb{R}^{mn}$ на то \mathbb{R}^n , которое соответствует подвижной вершине v . Кроме того, для каждой точки $x \in [G, \partial\Gamma]$ обозначим через $\Gamma_x: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ соответствующую линейную сеть.

Нормированная длина сети Γ задает функцию $\rho^c: [G, \partial\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую каждому вектору $x \in [G, \partial\Gamma]$ нормированную длину соответствующей линейной сети Γ_x :

$$\rho^c(x) = \sum_{e=[v,w] \in E(G)} \rho(\Gamma_x(v), \Gamma_x(w)).$$

Поскольку каждая функция $\rho_{vw}^c(x) = \rho(\Gamma_x(v), \Gamma_x(w))$ выпукла на $[G, \partial\Gamma]$, то функция ρ^c также выпукла. Кроме того, легко видеть, что сеть Γ является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если вектор x координат подвижных вершин сети Γ представляет собой точку минимума для функции ρ^c . С другой стороны, по предложению 6.8, сеть Γ_x экстремальна, если и только если субградиентное множество $S_{\rho^c}(x)$ содержит 0. В свою очередь, множество $S_{\rho^c}(x)$ является суммой множеств $S_{\rho_{vw}^c}(x)$.

Выясним, как выглядит множество $S_{\rho_{vw}^c}(x)$. По определению, если v и w — подвижные вершины, то функция $\rho_{vw}^c(x)$ зависит лишь от x_v и x_w и не зависит от остальных x_u , $u \neq v, w$; если одна из этих вершин, скажем v , — подвижная, а другая, w , — граничная, то $\rho_{vw}^c(x)$ зависит только от x_v ; наконец, если обе вершины v и w граничные, то функция $\rho_{vw}^c(x)$ постоянна. Отсюда вытекает, что при подвижных v и w каждый субградиент из $S_{\rho_{vw}^c}(x)$ лежит в линейном подпространстве $V = \mathbb{R}^{2n}(vw) \subset \mathbb{R}^{mn}$, являющемся конфигурационным пространством вершин v и w ; при подвижной v и неподвижной w каждый субградиент из $S_{\rho_{vw}^c}(x)$ лежит в линейном подпространстве $V = \mathbb{R}^n(v) \subset \mathbb{R}^{mn}$, являющемся конфигурационным пространством вершины v ; если же обе v и w неподвижны, то $S_{\rho_{vw}^c}(x) = \{0\}$. В связи с вышесказанным для описания субградиентного множества функции ρ_{vw}^c достаточно изучить ее ограничение на соответствующее пространство V . Это ограничение мы будем обозначать тем же символом.

Если вершина v подвижна, а w — неподвижна, то, как было выяснено выше, субградиентное множество $S_{\rho_{vw}^c}(x) \subset V = \mathbb{R}^n(v) \approx \mathbb{R}^n$ представляет собой множество всех единичных по конорме внешних нормалей к сфере $\{y \in V \mid \rho(y) = \rho(x_v)\}$ в точке $x_w - x_v$, если $x_v \neq x_w$ (здесь после соответствующих отождествлений мы рассматриваем обе точки x_v и x_w как точки пространства V), и множество всех векторов в точке 0, конорма которых не превосходит 1, если $x_v = x_w$.

Таким образом, осталось выяснить, как выглядит множество

$$S_{\rho_{vw}^c}(x) \subset V = \mathbb{R}^{2n}(vw) \approx \mathbb{R}^{2n},$$

когда обе точки v и w подвижны. В этом случае функция $\rho_{vw}^c(a, b)$ на V равна $\rho(a - b)$. Ясно, что множество $\rho_{vw}^c = 0$ представляет собой диагональ $\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{2n} \mid a = b\}$, и для любого $(a, b) \in V$ ограничение функции ρ_{vw}^c на аффинное пространство $(a, b) + \Delta$ постоянно.

Пусть Δ^\perp обозначает ортогональное дополнение к Δ (относительно стандартного евклидова скалярного произведения), тогда, очевидно,

$$\Delta^\perp = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}^n\}.$$

Так как для каждой точки (a, b) множество $(a, b) + \Delta$ лежит во множестве уровня $\rho_{vw}^c = \rho_{vw}^c(a, b)$, то нормальный конус к этой множеству уровня, а значит, и субградиентное множество $S_{\rho_{vw}^c}(a, b)$ лежат в Δ^\perp . Более того, множество $S_{\rho_{vw}^c}(a, b)$ совпадает с субградиентным множеством S' ограничения функции ρ_{vw}^c на $(a, b) + \Delta^\perp = \{(a + c, b - c) \mid c \in \mathbb{R}^n\}$. По определению, это ограничение равно $\rho(a - b + 2c)$, поэтому S' равно субградиентному множеству $S_\rho(a - b)$. Отсюда заключаем, что субградиентное множество $S_{\rho_{vw}^c}(a, b)$ имеет вид:

$$S_{\rho_{vw}^c}(a, b) = \{(\xi, -\xi) \mid \xi \in S_\rho(a - b)\}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.1. *Пусть v и w — подвижные вершины графа G . Субградиентное множество функции $\rho_{vw}^c: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x имеет вид:*

$$\{(\xi_u) \mid \xi_u = 0 \text{ при } u \neq v, w; \xi_v = -\xi_w; \xi_v \in S_\rho(x_v - x_w)\}.$$

Теперь теорема 6.4 вытекает из предложения 6.9, которое дает возможность вычислить субградиентное множество функции ρ^c , и предложения 6.8. ■

В качестве первого приложения, выясним, когда экстремальное дерево, затягивающее три произвольные точки нормированного пространства (\mathbb{R}^n, ρ) , является бинарным деревом, т.е. имеет внутреннюю вершину (аналог точки Торричелли–Штейнера).

Утверждение 6.2. *Пусть $A_0A_1A_2$ — произвольный треугольник в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) . Тогда множество \mathcal{T} всех точек T , для которых выражение $\sum_i \rho(T - A_i)$ принимает наименьшее значение, является выпуклым компактом. Множество \mathcal{T} содержит вершину A_i , если и только если в субградиентных множествах*

$S_\rho(A_i - A_j)$, $j \neq i$, найдутся такие ковекторы, что конорма их суммы не превосходит 1.

Доказательство. Обозначим через $f(T)$ функцию $\sum_i \rho(T - A_i)$. Так как f — выпуклая функция, неограниченно возрастающая при стремлении T к бесконечности по любому направлению, множество \mathcal{T} ее минимумов непусто, ограничено, замкнуто и выпукло, тем самым первая часть утверждения доказана.

Далее предположим, что A_0 принадлежит \mathcal{T} , т.е. параметрическая сеть Γ , состоящая из трех ребер $e_i = A_i T$, соединяющих подвижную вершину T с граничными вершинами A_i , является экстремальной для $T = A_0$. По теореме 6.4, это равносильно тому, что характеристическая система сети Γ , состоящая в данном случае из одного уравнения $X_{e_0, T} + X_{e_1, T} + X_{e_2, T} = 0$, имеет решение $X_{e_j, T} = p_j$, такое, что $p_j \in S_\rho(e_j, T) = S_\rho(T - A_j)$. Осталось заметить, что $S_\rho(e_0, T) = S_\rho(0) = \{p \in T_{A_0}^*(\mathbb{R}^n) \mid \rho^*(p) \leq 1\}$. Доказательство закончено. ■

Замечание. Легко построить пример, показывающий, что при $n > 2$ множество \mathcal{T} не обязано лежать в треугольнике $A_0 A_1 A_2$ (достаточно рассмотреть треугольник в манхеттенском трехмерном пространстве, натянутый на единичные базисные векторы). Однако при $n = 2$ несложно проверить, что \mathcal{T} содержится в треугольнике $A_0 A_1 A_2$ (сделайте это).

Следствие 6.6. Пусть норма ρ строго выпукла. Тогда для произвольного равностороннего треугольника $A_0 A_1 A_2$ в пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) множество \mathcal{T} всех точек T , для которых выражение $\sum_i \rho(T - A_i)$ принимает наименьшее значение, не содержит вершин A_i треугольника.

Доказательство. Очевидно, точки A_i не лежат на одной прямой. Рассмотрим двумерную плоскость Π , проходящую через A_i . Хотя множество \mathcal{T} и не обязано лежать в Π , для доказательства следствия нам достаточно рассмотреть множество $\mathcal{T} \cap \Pi$, потому можно сразу предполагать, что $n = 2$. Кроме того, без ограничения общности можно предполагать, что $\rho(A_i, A_j) = 1$ при $i \neq j$, а $A_0 = 0$ — начало координат.

Предположим, что точка $A_0 = 0$ попала во множество \mathcal{T} . По утверждению 6.2, это равносильно тому, что для некоторых субградиентов из $S_\rho(-A_j)$, $j \neq 0$, конорма их суммы не превосходит 1. Последнее, в силу центральной симметричности единичной окружности, равносильно тому, что для некоторых субградиентов p_j из $S_\rho(A_j)$, $j \neq 0$, конорма их суммы не превосходит 1.

Легко видеть, что точки A_1, A_2 , а также $-A_1, -A_2$, и $\pm(A_1 - A_2)$ лежат на единичной окружности Σ и образуют равносторонний, в смысле

нормы ρ , шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны и, значит, равны также и относительно евклидовой нормы.

Оценим снизу величину $\rho^*(p_1 + p_2)$. По определению,

$$\rho^*(p_1 + p_2) \geq (p_1 + p_2)(A_1) = \rho_{A_1}(A_1) + \rho_{A_1}(A_2) = 1 + \rho_{A_1}(A_2),$$

где $\rho_\eta(A)$ — производная нормы ρ по направлению η , вычисленная в точке A . Мы покажем, что $\rho_{A_1}(A_2) > 0$, получив тем самым противоречие и закончив доказательство следствия.

Ясно, что условие $\rho_{A_1}(A_2) > 0$ равносильно тому, что вектор A_1 составляет с каждым субградиентом из $S_\rho(A_2)$ острый в евклидовом смысле угол. Последнее равносильно тому, что вектор A_1 направлен внутрь полуплоскости, ограниченной каждой опорной прямой к окружности Σ в точке A_2 , а это, в свою очередь, равносильно тому, что прямая ℓ , проходящая через точку A_2 в направлении вектора A_1 , не является опорной для окружности Σ . Заметим, что $\ell = (A_2 - A_1, A_2)$. В силу строгой выпуклости нормы ρ интервал $(A_2 - A_1, A_2)$ лежит внутри единичного круга, ограниченного окружностью Σ . Поэтому прямая ℓ не является опорной. Следствие доказано. ■

Замечание. Если отказаться от условия строгой выпуклости нормы, то следствие 6.6 перестает быть верным. В качестве примера рассмотрим плоскость с нормой, порожденной единичной окружностью, представляющей собой правильный шестиугольник, две вершины которого лежат на оси абсцисс. Положим $A_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$ и $A_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Легко проверяется, что множество \mathcal{T} совпадает с треугольником $A_0 A_1 A_2$.

Если функция ρ , задающая норму, является гладкой всюду, кроме точки 0, т.е. единичная сфера Σ не имеет особых точек, то характеристическая система выглядит более просто. Действительно, для каждого регулярного ребра $e = [v, w]$ сети Γ субградиентные множества $S_\rho(e, v)$ и $S_\rho(e, w)$ определены однозначно, поэтому однозначно определены значения переменных $x_{e,v}$. Подставляя их в характеристическую систему, мы получаем следующий набор условий: для каждой невырожденной вершины x сети Γ сумма субградиентов $S_\rho(e, x)$ равна нулю, а для каждой вырожденной вершины возникает своя линейная система уравнений — аналог характеристической системы из главы 4. Отметим, что эти системы независимы для разных вырожденных вершин. Точная формулировка соответствующего утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.

Замечание. Для краткости, в дальнейшем функционал длины в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) мы будем называть ρ -нормированной длиной или ρ -длиной.

6.1.5. Критерий экстремальности линейных сетей-следов

По определению, сеть-след экстремальна, если и только если любой ее представитель является экстремальной параметрической сетью. Поэтому проверка экстремальности сети-следа может быть сведена к проверке, с помощью теоремы 6.4, экстремальности бесконечного числа параметрических сетей. Тем не менее, оказывается, эту проверку достаточно провести лишь для конечного числа представителей исходной сети-следа. Напомним, что в случае стандартной евклидовой нормы достаточно рассматривать лишь тех представителей, каждый из которых задает расщепление ровно одной вершины на две, причем одна из полученных вершин имеет степень 3. В случае нормы общего вида последнее не имеет места, более того, недостаточной оказывается даже проверка всевозможных расщеплений каждой вершины на две. Приведем пример.

Пример. Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 норму ρ , единичная окружность Σ для которой совпадает с правильным шестиугольником

$$\{P_k = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{3}(k-1)}\}_{k=1}^6,$$

описанным вокруг евклидовой единичной окружности S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс. Легко видеть, что единичная окружность относительно конормы ρ^* представляет собой правильный шестиугольник с вершинами в серединах сторон шестиугольника Σ .

Рассмотрим сеть Υ , канонический представитель Γ которой состоит из 5 ребер $\gamma_k = OP_k$, $k = 1, \dots, 5$. Сеть-след Υ не является экстремальной сетью для ρ -нормированной длины. Действительно, рассмотрим представителя $\Gamma' \in \Upsilon$, единственная вырожденная компонента которого представляет собой путь x_1x_2, x_2x_3 , причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_4 и γ_5 , вершина x_2 инцидентна ребру γ_3 , а вершина x_3 — ребрам γ_1 и γ_2 , см. рис. 6.2. Рассмотрим линейную деформацию сети Γ' , при которой вершина x_1 движется со скоростью $\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1, 0)$, вершина x_2 — со скоростью $\eta_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ и вершина x_3 — со скоростью $\eta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. Так как выражение

$$\begin{aligned} & \langle p_{x_1}(\gamma_5, \eta_1, 0) + p_{x_1}(\gamma_4, \eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta_2, 0), \eta_2 \rangle + \\ & + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta_3, 0) + p_{x_3}(\gamma_1, \eta_3, 0), \eta_3 \rangle + \rho(\eta_1 - \eta_2) + \rho(\eta_2 - \eta_3) = \\ & = 0 - 1 - 1 - 1 + 0 + 1 + 1 = -1 \end{aligned}$$

отрицательно, по теореме 6.3, параметрическая сеть Γ' , а значит, и сеть-след Υ не являются экстремальными.

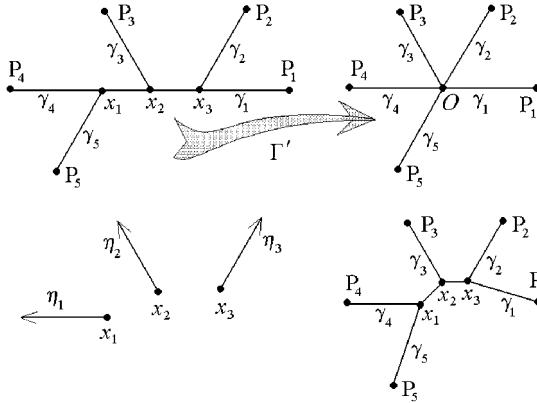


Рис. 6.2. Расщепление вершины степени 5.

Рассмотрим теперь всевозможные расщепления вершины степени 5 сети Υ на две вершины x_1 и x_2 так, чтобы каждая из x_i имела бы в полученной сети Γ' степень не меньше 3. Единственное точечное ребро сети Γ' обозначим через γ . Нетрудно понять, что, с точностью до симметрии, имеется шесть таких различных расщеплений. Рассмотрим каждое из них и, с помощью теоремы 6.4, покажем, что соответствующий представитель Γ' является экстремальной сетью.

1. Вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_4 , а вершина x_2 — ребрам γ_1 , γ_2 и γ_3 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' . Для $i = 1, \dots, 5$ положим $y_i = x_{\gamma_i, x_j}$, где x_j — подвижная вершина, инцидентная ребру γ_i (отметим, что x_j однозначно определяется ребром γ_i); также положим $y = x_{\gamma, x_1}$, а $y' = x_{\gamma, x_2}$. Характеристическая система имеет вид:

$$\begin{cases} y_5 + y_4 + y &= 0, \\ y_3 + y_2 + y_1 + y' &= 0, \\ y + y' &= 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4:

$$y_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, y_2 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, y_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, y_4 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, y_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}, y = -y' = e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна.

2. Вершина x_1 инцидентна ребрам γ_4 и γ_3 , а вершина x_2 — ребрам γ_5 , γ_2 и γ_1 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' , воспользовавшись введенными

выше обозначениями:

$$\begin{cases} y_4 + y_3 + y &= 0, \\ y_5 + y_2 + y_1 + y' &= 0, \\ y + y' &= 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4:

$$y_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, y_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}, y_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}, y = -y' = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна.

3. Вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_1 , а вершина x_2 — ребрам γ_2 , γ_3 и γ_4 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' , воспользовавшись введенными выше обозначениями:

$$\begin{cases} y_5 + y_1 + y &= 0, \\ y_4 + y_3 + y_2 + y' &= 0, \\ y + y' &= 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4:

$$y_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, y_2 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, y_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}, y_5 = e^{i\frac{\pi}{6}}, y = -y' = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна.

4. Вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_3 , а вершина x_2 — ребрам γ_4 , γ_2 и γ_1 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' , воспользовавшись введенными выше обозначениями:

$$\begin{cases} y_5 + y_3 + y &= 0, \\ y_4 + y_2 + y_1 + y' &= 0, \\ y + y' &= 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4:

$$y_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, y_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}, y_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}, y = -y' = 0.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна.

5. Вершина x_1 инцидентна ребрам γ_4 и γ_2 , а вершина x_2 — ребрам γ_5 , γ_3 и γ_1 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' , воспользовавшись введенными выше обозначениями:

$$\begin{cases} y_4 + y_2 + y &= 0, \\ y_5 + y_3 + y_1 + y' &= 0, \\ y + y' &= 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4:

$$y_1 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, y_2 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, y_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}, y_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}, y = -y' = 0.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна.

6. Вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_2 , а вершина x_2 — ребрам γ_4 , γ_3 и γ_1 . Запишем характеристическую систему для сети Γ' , воспользовавшись введенными выше обозначениями:

$$\begin{cases} y_5 + y_2 + y &= 0, \\ y_4 + y_3 + y_1 + y' &= 0, \\ y + y' &= 0. \end{cases}$$

Предъявим решение этой системы, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4:

$$y_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, y_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, y_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}, y_5 = e^{i\frac{\pi}{2}}, y = -y' = 0.$$

Таким образом, сеть Γ' экстремальна.

Итак, мы показали, что хотя след Υ не является экстремалью нормированной длины, тем не менее это чувствует лишь деформация, расщепляющая вершину степени 5 на три вершины; деформации, расщепляющие эту вершину на две вершины, неэкстремальность не обнаруживают.

Следующий пример показывает, что при изучении экстремальности сети с экстремальным каноническим представителем недостаточно проверить “устойчивость” всех вершин по отдельности, т.е. экстремальность всех представителей, каждый из которых имеет лишь одну вырожденную компоненту.

Пример. Рассмотрим норму ρ из предыдущего примера. Пусть Υ — сеть, канонический представитель Γ которой является линейной сетью, имеет 6 граничных вершин $P_1 = 1 + e^{-i\pi/3}$, $P_2 = 2$, $P_3 = 1 + e^{i\pi/3}$, $P_4 = -1 + e^{i2\pi/3}$, $P_5 = -2$, $P_6 = -1 + e^{-i2\pi/3}$, две подвижных вершины $Q_1 = 1$ и $Q_2 = -1$ и следующие ребра: $\gamma_i = Q_1 P_i$, $i = 1, 2, 3$; $\gamma_i = Q_2 P_i$, $i = 4, 5, 6$; $\gamma = Q_1 Q_2$.

Сеть-след Υ не является экстремальной сетью для ρ -нормированной длины. Действительно, рассмотрим представителя $\Gamma' \in \Upsilon$, имеющего две вырожденные компоненты: первая совпадает с ребром $x_1 x_2$, которое отображается в точку Q_1 , причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_1 и γ_2 , а вершина x_2 — ребрам γ_3 и γ ; вторая компонента совпадает с ребром $x_3 x_4$, которое отображается в точку Q_2 , причем вершина x_3 инцидентна ребрам γ и γ_4 , вершина x_4 — ребрам γ_5 и γ_6 , см. рис. 6.3. Рассмотрим линейную деформацию сети Γ' , при которой вершина x_1 движется со скоростью $\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(1, 0)$, вершина x_2 — со скоростью $\eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, вершина x_3 — со скоростью $\eta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, а вершина x_4 — со скоростью $\eta_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1, 0)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 6.3, если сеть Γ' экстремальна, то следующее выражение неотрицательно:

$$\begin{aligned} & \langle p_{x_1}(\gamma_1, \eta_1, 0) + p_{x_1}(\gamma_2, \eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta_2, 0) + p_{x_2}(\gamma, \eta_2, \eta_3), \eta_2 \rangle + \\ & + \langle p_{x_3}(\gamma_4, \eta_3, 0) + p_{x_3}(\gamma, \eta_3, \eta_2), \eta_3 \rangle + \langle p_{x_4}(\gamma_5, \eta_4, 0) + p_{x_4}(\gamma_6, \eta_4, 0), \eta_4 \rangle + \\ & + \rho(\eta_1 - \eta_2) + \rho(\eta_4 - \eta_3) = \\ & = 0 - 1 - 1 + \langle p_{x_2}(\gamma, \eta_2, \eta_3), \eta_2 \rangle - 1 + \langle p_{x_3}(\gamma, \eta_3, \eta_2), \eta_3 \rangle - 1 + 0 + 1 + 1 = \\ & = -2 + \langle p_{x_2}(\gamma, \eta_2, \eta_3), \eta_2 - \eta_3 \rangle = -2 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, параметрическая сеть Γ' , а значит, и сеть-след Υ не являются экстремальными.

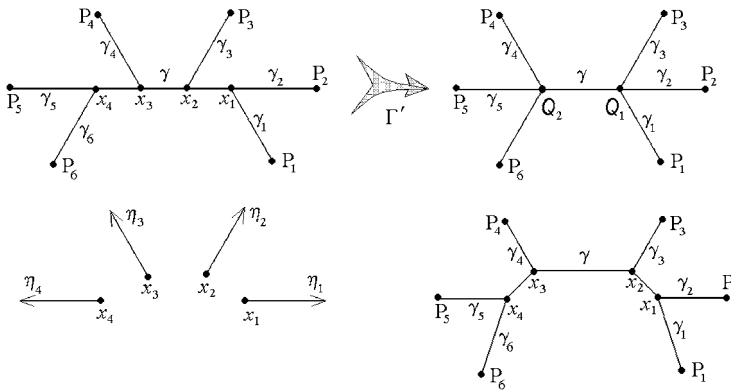


Рис. 6.3. Сеть, длина которой уменьшается лишь при расщеплении сразу двух ее вершин.

Проверка того факта, что каждый представитель следа Υ , содержащий ровно одну компоненту вырождения, является экстремальным, оставляется читателю в качестве упражнения. Необходимая техника продемонстрирована нами в предыдущем примере.

Построим набор представителей, из экстремальности которых вытекает экстремальность следа. Для этого нам понадобится понятие сильно локальной сети, определенное в [78]. Пусть Γ — параметрическая сеть, H — некоторая ее приведенная компонента и $\Gamma' = \Gamma|H$ — сеть, полученная из Γ слабой факторизацией по H (совпадающей в данном случае с обычной факторизацией). Обозначим через $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ каноническую проекцию, и пусть $x = \pi(H)$. Прообраз произвольной локальной сети $\Gamma'_{\text{loc}}(x) \subset \Gamma'$ для Γ' с центром в x при отображении π назовем *сильно локальной сетью* приведенной компоненты H . Отметим, что если приведенная компонента H состоит из одной вершины, т.е. не является вырожденной компонентой, то ее сильно локальная сеть является просто локальной сетью.

Определение. Представитель Γ следа Υ назовем *базовым*, если сильно локальная сеть T каждой его вырожденной компоненты H является бинарным деревом. При этом если H соответствует внутренней вершине сети Υ , то все вершины степени 1 дерева T не принадлежат H . Если же H соответствует граничной вершине сети Υ , то H содержит ровно одну вершину v дерева T степени 1, причем в этом случае $\partial H = \{v\}$.

Отметим, что каждая сеть-след Υ имеет конечное число базовых представителей.

Теорема 6.5. *Линейная сеть-след Υ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины в пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) , если и только если каждый базовый представитель $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ следа Υ является экстремальной параметрической сетью.*

Доказательство. Необходимость экстремальности базовых представителей очевидна из определения экстремальности сети. Перейдем к доказательству достаточности.

Пусть $\Gamma \in \Upsilon$ — произвольный представитель сети Υ . Так как вклад любого вырожденного ребра в формулу первой вариации нормированной длины сети неотрицателен, то из экстремальности всех представителей, вырожденные компоненты которых являются деревьями, вытекает экстремальность вообще всех представителей, т.е. экстремальность сети Υ . Таким образом, можно предполагать, что все приведенные компоненты представителя Γ — деревья.

Далее, из тех же соображений, можно предполагать без ограничения общности, что все вершины степени 1 представителя Γ являются граничными.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.1. *Пусть f и g — непрерывные функции на прямой, причем $f(0) = g(0)$, $f(t) \geq g(t)$ при $t \geq 0$, и обе функции имеют производные $D_+f(0)$ и $D_+g(0)$ по множеству $[0, +\infty)$ при $t = 0$. Тогда $D_+f(0) \geq D_+g(0)$.*

Из леммы 6.1 вытекает следующий результат.

Лемма 6.2. *Если любой представитель Γ следа Υ , такой, что каждая вершина любой его вырожденной компоненты имеет в Γ степень, отличную от 2, экстремален, то сеть Υ — экстремальна.*

Доказательство. Действительно, если пару ребер сети, стыкующуюся в вершине степени 2, заменить на прямолинейный отрезок, то длина сети не увеличится в силу неравенства треугольника. Остается воспользоваться леммой 6.1. Доказательство закончено. ■

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 6.3. *Предположим, что параметрическая сеть Γ' проектируется на параметрическую сеть Γ'' . Тогда экстремальность сети Γ' влечет экстремальность сети Γ'' .*

Лемма 6.4. *Пусть Γ — представитель следа Υ , такой, что*

- *каждая вырожденная компонента сети Γ представляет собой дерево,*

- каждая вершина степени 1 сети Γ является граничной,
- каждая вершина любой вырожденной компоненты сети Γ имеет в Γ отличную от 2 степень.

Тогда существует базовый представитель Γ' , проектирующийся на Γ .

Теперь утверждение теоремы вытекает из лемм 6.3 и 6.4. Доказательство закончено. \blacksquare

В качестве простейшего приложения, выясним, когда экстремальное дерево—след, затягивающее произвольные три точки в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) , имеет внутреннюю вершину. Из теоремы 6.5 и утверждения 6.2 вытекает следующий результат.

Следствие 6.7. *Экстремальное дерево—след, затягивающее произвольные три точки A_i в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) , имеет внутреннюю вершину, если и только если в каждой точке A_i конорма суммы любого субградиента из $S_\rho(A_i - A_j)$ с любым субградиентом из $S_\rho(A_i - A_k)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, строго больше 1.*

Для случая строго выпуклых норм с помощью следствия 6.6 получаем

Следствие 6.8. *Пусть норма ρ строго выпукла. Тогда экстремальное дерево—след, затягивающее вершины произвольного равностороннего треугольника в нормированном пространстве (\mathbb{R}^n, ρ) , имеет внутреннюю вершину, т.е. является бинарным деревом.*

Как видно из замечания после следствия 6.6, отказаться от требования строгой выпуклости нормы в следствии 6.8 нельзя.

Если норма ρ — гладкая всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$, то из следствия 6.4 вытекает следующий результат.

Следствие 6.9. *Пусть (\mathbb{R}^n, ρ) — нормированное пространство и $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Линейная сеть—след Υ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины, если и только если каждый базовый представитель $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ следа Υ , имеющий не более одной вырожденной компоненты, является экстремальной параметрической сетью.*

На самом деле, случай нормы ρ , гладкой всюду, кроме нуля, обслуживается теоремой 2.3 главы 2. А именно, имеет место следующий результат.

Следствие 6.10. *Сеть-след Υ является экстремалью функционала ρ -нормированной длины для нормы ρ , гладкой всюду вне нуля, если и только если выполняются следующие условия.*

- (1) *Каждое ребро γ сети Υ является кратчайшей кривой (устройство таких кривых описано в теореме 6.2).*
- (2) *В каждой вершине x сети Υ для любых инцидентных x ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ конорма суммы ρ -импульсов $p_x(\gamma_i)$ не превосходит 1.*
- (3) *В каждой подвижной вершине сети Υ сумма ρ -импульсов инцидентных этой вершине ребер равна нулю.*

Замечание. Как видно из следствия 6.10, для нормы, гладкой всюду, кроме нуля, условия экстремальности носят локальный характер. Последнее означает, что для проверки экстремальности сети, составленной из кратчайших кривых, достаточно проверить, что эти кривые стыкуются в вершинах по определенному правилу.

6.2. Устойчивость экстремального бинарного дерева при деформациях граничного множества

В данном разделе мы будем предполагать, что норма ρ дифференцируема всюду вне $0 \in \mathbb{R}^n$, и что сфера Σ является строго выпуклой.

Пусть $Y = \{y_i\}_{i=1}^p$ — конечное подмножество пространства (\mathbb{R}^n, ρ) . Будем говорить, что множество $Y' = \{y'_i\}_{i=1}^p$ точек пространства получено из Y с помощью некоторой ε -деформации, если $\rho(y_i, y'_i) < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, p$.

Теорема 6.6. *Пусть ρ — гладкая вне нуля норма в \mathbb{R}^n со строго выпуклой сферой и Υ_0 — бинарное дерево, экстремальное относительно функционала ρ -нормированной длины, и пусть граничное множество $\partial\Upsilon_0$ совпадает с множеством вершин дерева Υ_0 степени 1. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что каждое множество, полученное из $\partial\Upsilon_0$ произвольной ε -деформацией, может быть затянута единственной экстремальной сетью того же типа, что и Υ_0 .*

Доказательство. Пусть Υ — произвольное линейное дерево типа Υ_0 . Обозначим через y_1, \dots, y_p граничные вершины дерева Υ , а через x_1, \dots, x_k — его подвижные вершины. Рассмотрим отображение Φ из конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{n(p+k)}$ всех вершин линейных сетей типа Υ_0 в пространство \mathbb{R}^{nk} , ставящее в соответствие каждой точке

$$(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^{n(p+k)}$$

набор (p_1, \dots, p_k) ковекторов $p_i \in \mathbb{R}^n$, где p_i равен сумме ρ -импульсов в вершине x_i ребер γ_{ji} , инцидентных x_i :

$$\Phi: (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p) \mapsto \left(\sum_j p_{x_1}(\gamma_{j1}), \dots, \sum_j p_{x_k}(\gamma_{jk}) \right).$$

В силу следствия 6.5 регулярные линейные сети топологии Υ_0 , экстремальные по отношению к функционалу ρ -нормированной длины, соответствуют нулям отображения Φ . Если обозначить через $(X_0, Y_0) = (x_1^0, \dots, x_k^0, y_1^0, \dots, y_p^0)$ вектор, соответствующий вершинам дерева Υ_0 , то по условию $\Phi(X_0, Y_0) = 0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение $\Phi(X, Y) = 0$ разрешимо для $Y \in \mathbb{R}^{np}$, достаточно близких к Y_0 , и для каждого такого Y решение единственно. Для этого мы воспользуемся теоремой о неявной функции.

Норма ρ предполагается гладкой вне нуля, поэтому если положить $\gamma_{ji} = x_i z_j$, где z_j — соответствующая вершина линейной сети, то ρ -импульс $p_{x_i}(\gamma_{ji})$ — это обычный дифференциал функции ρ в соответствующей точке: $p_{x_i}(\gamma_{ji}) = d\rho(x_i - z_j)$. Обозначим через $N(x_i)$ множество вершин сети Υ , смежных с x_i . Тогда отображение Φ можно переписать в виде:

$$\Phi: (X, Y) \mapsto \left(\sum_{z_j \in N(x_1)} d\rho(x_1 - z_j), \dots, \sum_{z_j \in N(x_k)} d\rho(x_k - z_j) \right).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что квадратная матрица $\partial\Phi/\partial X$ невырождена в точке (X_0, Y_0) . Пусть $\ell(X)$ обозначает ρ -длину сети Υ , такой, что $Y = Y_0$, т.е. линейной сети типа Υ_0 , положения подвижных вершин которой задаются вектором X , а граница совпадает с границей сети Υ_0 . Тогда $\Phi(X, Y) = d\ell(X)$. Поэтому $\partial\Phi/\partial X = d^2\ell(X)$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить положительную определенность второго дифференциала $d^2\ell(X)$, т.е. что квадратичная форма $d^2\ell(X)(\eta, \eta)$ неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $\eta = 0$.

Так как ρ -длина сети равна сумме ρ -длин ее ребер, квадратичная форма $d^2\ell(X)(\eta, \eta)$ распадается в сумму квадратичных форм, каждая из которых отвечает длине соответствующего ребра:

$$d^2\ell(X)(\eta, \eta) = \sum d^2\rho(x_i - x_j)(\eta_i - \eta_j, \eta_i - \eta_j) + \sum d^2\rho(x_i - y_j)(\eta_i, \eta_i),$$

где η_i — это значение поля деформации η в вершине x_i , а суммирование в первой сумме берется по всем ребрам вида $x_i x_j$, а во второй — по всем ребрам вида $x_i y_j$.

Лемма 6.5. В предположениях теоремы, пусть $[a, b]$ — произвольный невырожденный отрезок в (\mathbb{R}^n, ρ) , а ξ и η — произвольные векторы. Рассмотрим деформацию отрезка $[a, b]$ следующего вида: $[a_t, b_t] = [a + t\xi, b + t\eta]$. Тогда

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \rho(b_t - a_t) \geq 0,$$

причем равенство достигается, если и только если вектор $\xi - \eta$ коллинеарен $b - a$.

Доказательство. Из выпуклости нормы ρ вытекает, что второй дифференциал $d^2\rho$ в ненулевой точке $b - a$ неотрицательно определен. Из строгой выпуклости единичной сферы Σ вытекает, что ядро этого второго дифференциала одномерно, поэтому оно совпадает с подпространством, натянутым на вектор $b - a$. Наконец,

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \rho(b_t - a_t) = d^2\rho(\eta - \xi, \eta - \xi),$$

где билинейная форма $d^2\rho$ вычисляется в точке $b - a$, поэтому равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда $\eta - \xi$ лежит в ядре для $d^2\rho$, т. е. в подпространстве, натянутом на $b - a$. Доказательство закончено. ■

Из леммы 6.5 вытекает, что форма $d^2\ell(X)(\eta, \eta)$ неотрицательно определена, и равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда для каждого ребра вида $x_i x_j$ выполняется

$$d^2\rho(x_i - x_j)(\eta_i - \eta_j, \eta_i - \eta_j) = 0,$$

и для каждого ребра вида $x_i y_j$ выполняется

$$d^2\rho(x_i - y_j)(\eta_i, \eta_i) = 0.$$

Последнее, в силу леммы 6.5, равносильно тому, что для каждого ребра $x_i x_j$ вектор $\eta_i - \eta_j$ коллинеарен вектору $x_i - x_j$, а для каждого ребра $x_i y_j$ вектор η_i коллинеарен вектору $x_i - y_j$. Так как в каждой подвижной вершине сети Υ_0 сумма ρ -импульсов инцидентных этой вершине ребер равна нулю, а степень каждой такой вершины равна 3, то среди этих ребер нет параллельных. Отсюда легко получить, что вектор η , для которого все выражения

$$d^2\rho(x_i - x_j)(\eta_i - \eta_j, \eta_i - \eta_j) \text{ и } d^2\rho(x_i - y_j)(\eta_i, \eta_i)$$

равны нулю, сам равен нулю. Подробности можно найти в [84]. Теорема доказана. ■

6.3. Плоские нормы со строго выпуклыми гладкими окружностями

Пусть (\mathbb{R}^n, ρ) — нормированное пространство, для которого функция ρ является гладкой всюду, кроме $0 \in \mathbb{R}^n$. Как мы уже видели, в этом случае критерии экстремальности, полученные в разделе 6.1 для произвольных норм, сильно упрощаются, см. следствие 6.10. Однако, оказывается, этот критерий можно сформулировать на более геометрическом языке, явно описав правила стыковки ребер в вершинах экстремальной сети. Для простоты мы будем предполагать, что $n = 2$, а норма ρ — строго выпукла, хотя аналогичные результаты могут быть получены как для произвольной размерности, так и без предположения строгой выпуклости.

6.3.1. Критерий экстремальности сетей-следов

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 6.7. *Пусть (\mathbb{R}^2, ρ) — нормированная плоскость, такая, что норма ρ — гладкая всюду вне нуля, и окружность Σ строго выпукла. Сеть-след Υ является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для Υ одновременно выполнены следующие условия:*

- *сеть Υ — линейна,*
- *степень каждой вершины не превосходит трех,*
- *в каждой вершине степени 3 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер равна нулю,*
- *в каждой подвижной вершине степени 2 угол между инцидентными ей ребрами равен 180° ,*
- *в каждой граничной вершине степени 2 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер имеет конорму, не превосходящую 1,*
- *каждая вершина степени 1 является граничной.*

Доказательство. Пусть Υ — экстремальная сеть-след. Так как норма ρ строго выпукла, все экстремальные кривые для этой нормы — отрезки прямых, поэтому Υ — линейная сеть.

Далее рассмотрим представителя Γ сети Υ , содержащего ровно одну вырожденную компоненту H , соответствующую вершине x степени не меньше 2. Будем предполагать, что H состоит из одного ребра, соединяющего в Γ две вершины v и v' , причем вершина v подвижна, и ее степень в Γ равна 3. Пусть γ_1 и γ_2 — невырожденные ребра сети Γ , инцидентные v . Воспользуемся следствием 6.4. Выберем поле деформации η равным нулю в v' и η_0 в v . Тогда

$$\langle p_x(\gamma_1) + p_x(\gamma_2), \eta_0 \rangle + \rho(\eta_0) \geq 0,$$

поэтому, в силу произвольности выбора η_0 , имеем

$$\rho^*(p_x(\gamma_1) + p_x(\gamma_2)) \leq 1.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 6.6. *В сделанных предположениях для любой вершины x сети Υ , имеющей в Υ степень не меньше 2, и любых двух инцидентных x ребер γ_1 и γ_2 сумма импульсов $p_x(\gamma_1) + p_x(\gamma_2)$ лежит в единичном относительно конормы ρ^* круге $\{\xi \mid \rho^*(\xi) \leq 1\}$.*

Напомним, что ρ -импульсы имеют единичную конорму, т.е. лежат на окружности $\Sigma^* = \{\xi \mid \rho^*(\xi) = 1\}$. Поэтому, используя лемму 6.6, заключаем, что если α — угол между ковекторами $p_1 = p_x(\gamma_1)$ и $p_2 = p_x(\gamma_2)$, а $n_x(\gamma_i)$ — внешняя нормаль к Σ^* в точке $p_x(\gamma_i)$, то угол β между $n_x(\gamma_1)$ и $n_x(\gamma_2)$ строго больше $\pi - \alpha$. Действительно, так как сумма $p = p_1 + p_2$ лежит в круге, ограниченном окружностью Σ^* , и окружность Σ^* строго выпукла, то угол β строго больше угла между внешними нормальными к сторонам p_1p и p_2p параллелограмма Op_1pp_2 , где O — центр окружности Σ^* . Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 6.7. *В сделанных предположениях, для любой вершины x сети Υ , имеющей в Υ степень не меньше 2, и любых двух инцидентных x ребер γ_1 и γ_2 угол β между внешними нормальными к окружности Σ^* в точках $p_x(\gamma_1)$ и $p_x(\gamma_2)$ строго больше, чем $\pi - \alpha$, где α — угол между ковекторами $p_x(\gamma_1)$ и $p_x(\gamma_2)$.*

Пусть $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ — ребра сети Υ , инцидентные x , занумерованные в соответствии с обходом вокруг вершины x . Обозначим через α_i угол между $p_x(\gamma_i)$ и $p_x(\gamma_{i+1})$, где сложение в индексах понимается по модулю k . Тогда $\sum_i \alpha_i = 2\pi$. Далее, пусть β_i обозначает угол между внешними нормальными $n_x(\gamma_i)$ и $n_x(\gamma_{i+1})$ к окружности Σ^* в точках $p_x(\gamma_i)$

и $p_x(\gamma_{i+1})$. Тогда $\sum_i \beta_i = 2\pi$. С другой стороны, в силу леммы 6.7,

$$2\pi = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i > \sum_{i=0}^{k-1} (\pi - \alpha_i) = k\pi - 2\pi,$$

поэтому $k < 4$. Таким образом, мы доказали, что степень любой вершины сети Υ не превосходит 3.

Далее, из экстремальности канонического представителя сети Υ и следствия 6.5 вытекает, что в каждой подвижной вершине сети сумма ρ -импульсов всех инцидентных ей ребер равна нулю. В частности, в каждой подвижной вершине степени два ρ -импульсы инцидентных такой вершине ребер противонаправлены. Поэтому, так как окружность Σ — гладкая строго выпуклая центрально-симметричная кривая, угол между этими ребрами равен 180° .

Покажем теперь, что в каждой неподвижной вершине степени 3 сумма ρ -импульсов всех инцидентных ей ребер равна нулю. Из леммы 6.6 вытекает, что конорма суммы любых двух из этих ρ -импульсов не превосходит 1. Обозначим эти ρ -импульсы через p_1 , p_2 и p_3 . Напомним, что как p_i , так и $-p_i$ лежат на единичной окружности Σ^* .

Предположим сначала, что ковекторы p_i попарно линейно независимы и не лежат ни в одной полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начало координат. Тогда $-p_1 = \alpha p_2 + \beta p_3$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. По условию, $p = p_2 + p_3$ лежит в круге, ограниченном Σ^* . Поэтому, в силу строгой выпуклости окружности Σ^* , если $-p_1$ лежит в параллелограмме Op_2pp_3 , то $-p_1 = p$, что и требуется. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $-p_1$ лежит вне указанного параллелограмма, т.е. когда по крайней мере одно из чисел α и β строго больше 1. Рассуждая точно так же для $-p_2$ и $-p_3$, получаем, что достаточно рассмотреть случай, когда в каждом из приведенных ниже трех равенств хотя бы один из коэффициентов в правой части строго больше 1:

$$\begin{aligned} -p_1 &= \alpha p_2 + \beta p_3, \\ -p_2 &= \frac{1}{\alpha} p_1 + \frac{\beta}{\alpha} p_3, \\ -p_3 &= \frac{1}{\beta} p_1 + \frac{\alpha}{\beta} p_2. \end{aligned}$$

Однако если $\alpha > 1$ и $\beta < 1$, то $1/\alpha < 1$ и $\beta/\alpha < 1$, т.е. коэффициенты во втором равенстве меньше 1, противоречие. Аналогично разбирается случай $\alpha < 1$ и $\beta > 1$. Если $\alpha > 1$, $\beta > 1$ и $\alpha \neq \beta$, скажем, $\alpha > \beta$, то снова

коэффициенты во втором равенстве меньше 1, противоречие. Наконец, если $\alpha = \beta > 1$, то во втором и в третьем равенствах коэффициенты не превосходят 1, противоречие. Таким образом, в рассматриваемом случае сумма ρ -импульсов p_i должна равняться нулю.

Пусть теперь ковекторы p_i попарно линейно независимы, но лежат в полуплоскости, ограниченной некоторой прямой ℓ , проходящей через начало координат. Предположим для определенности, что ковектор p_2 лежит в угле, образованном ковекторами p_1 и p_3 . Тогда точка p_2 лежит внутри треугольника, натянутого на точки $p_1 + p_2$, $p_2 + p_3$ и 0, поэтому p_2 — внутренняя точка круга, ограниченного окружностью Σ^* .

Наконец, если два ковектора, скажем p_1 и p_2 , коллинеарны, то или конорма их суммы равна 2, или $p_1 = -p_2$. В последнем случае точка p_3 является внутренней точкой отрезка, соединяющего точки $p_3 + p_1$ и $p_3 + p_2$, поэтому p_3 не может лежать на строго выпуклой окружности Σ^* , противоречие. Таким образом, и в неподвижной вершине степени 3 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер равна нулю.

Для завершения доказательства необходимости осталось заметить, что суммарный ρ -импульс в подвижной вершине степени 1 отличен от нуля, что противоречит экстремальности канонического представителя.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть Υ — сеть-след, удовлетворяющая всем условиям теоремы. В силу следствия 6.9 для доказательства экстремальности сети Υ достаточно проверить экстремальность каждого ее базового представителя, имеющего не более одной компоненты вырождения. Легко видеть, что, в силу следствия 6.5, канонический представитель сети Υ экстремален. Далее, пусть Γ — базовый представитель сети-следа Υ , имеющий одну компоненту вырождения H . Из определения базового представителя вытекает, что H не может соответствовать ни подвижной вершине, ни граничной вершине степени 1 сети Υ . Кроме того, компонента H , соответствующая граничной вершине степени 2, необходимо состоит из одного ребра, одна из вершин которого является граничной вершиной степени 1 сети Γ , а вторая — подвижной вершиной степени 3 в Γ (отметим, что, с точностью до эквивалентности, существует ровно один такой представитель). Если же компонента H соответствует граничной вершине степени 3, то H состоит из двух смежных ребер, причем ровно одна вершина из H является граничной в Γ и имеет в Γ степень 1, а две другие вершины из H являются в Γ подвижными вершинами степени 3 (с точностью до эквивалентности, существует ровно два таких представителя).

По условию, в каждой граничной вершине степени 2 сети Υ сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер имеет конорму, не превосходя-

щую 1. Поэтому если H соответствует граничной вершине степени 2, то, по следствию 6.4, сеть Γ экстремальна. Пусть теперь H соответствует граничной вершине x степени 3. Обозначим ρ -импульс единственного невырожденного ребра сети Γ , инцидентного вершине из H , имеющей в H степень 2, через p_1 (импульс берется в этой вершине), а ρ -импульсы оставшихся невырожденных ребер из Γ , инцидентных вершинам из H , — через p_2 и p_3 . В силу следствия 6.4 для проверки экстремальности сети Γ достаточно убедиться в неотрицательности следующего выражения:

$$\langle p_1, \eta_1 \rangle + \langle p_2 + p_3, \eta_2 \rangle + \rho(\eta_1) + \rho(\eta_2 - \eta_1),$$

где η_1 и η_2 — произвольные векторы. По предположению, $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, поэтому, так как $\rho^*(p_i) = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \langle p_1, \eta_1 \rangle + \langle p_2 + p_3, \eta_2 \rangle + \rho(\eta_2 - \eta_1) + \rho(\eta_1) = \\ = (\langle p_1, \eta_1 - \eta_2 \rangle + \rho(\eta_2 - \eta_1)) + \rho(\eta_1) \geq 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Доказательство закончено. \blacksquare

На самом деле, теорема 6.7 непосредственно обобщается и на случай гладких норм, без требования строгой выпуклости. Доказательство следующего результата оставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема 6.8. Пусть (\mathbb{R}^2, ρ) — нормированная плоскость и норма ρ — гладкая всюду вне нуля. Линейная сеть-след Υ является экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для Υ одновременно выполнены следующие условия:

- степень каждой вершины не превосходит трех,
- в каждой вершине степени 3 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер равна нулю,
- в каждой подвижной вершине степени 2 направления выходящих из нее ребер, ориентированных от этой вершины, лежат в противоположных компонентах уплощения,
- в каждой граничной вершине степени 2 сумма ρ -импульсов инцидентных ей ребер имеет конорму, не превосходящую 1,
- каждая вершина степени 1 является граничной.

6.3.2. Геометрия экстремальных сетей-следов

Оказывается, подавляющее число результатов, приведенных в главе 5, почти дословно переносится на случай нормированной плоскости со строго выпуклой нормой, гладкой вне нуля. Всюду ниже в данном разделе через ρ мы будем обозначать именно такую норму.

6.3.2.1. Связь со случаем евклидовой нормы

Предложение 6.10. Пусть Υ — экстремальная сеть-след для функционала ρ -нормированной длины, не имеющая граничных вершин степени 2. Тогда существует линейное преобразование плоскости, переводящее сеть Υ в сеть, экстремальную по отношению к функционалу евклидовой длины. В частности, ребра сети Υ разбиваются на три класса параллельности.

Доказательство. Без ограничения общности, будем предполагать, что сеть Υ не содержит подвижных вершин степени 2. По теореме 6.7, в каждой вершине x степени 3 сети Υ сумма ρ -импульсов p_i инцидентных ей ребер равна нулю. Рассмотрим на единичной окружности Σ^* шесть точек, соответствующих коекторам p_i и $-p_i$. Легко видеть, что эти 6 точек образуют равносторонний в смысле конормы ρ^* шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны и равны, как по конорме ρ^* , так и по евклидовой норме.

Из строгой выпуклости конормы ρ^* вытекает следующая лемма.

Лемма 6.8. Пусть p_1 — произвольная точка на единичной окружности Σ^* . Тогда существует и единственна неупорядоченная пара точек p_2 и p_3 окружности Σ^* , такая, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим одну из двух прямых, параллельных p_1 и касательных к окружности Σ^* . Обозначим эту прямую через ℓ . Будем двигать ℓ в сторону начала координат до тех пор, пока ρ^* -длина отсекаемого ей отрезка из круга, ограниченного Σ^* , не станет равна 1. Полученный отрезок обозначим через AB . Отметим, что, в силу строгой выпуклости конормы ρ^* , существует ровно два таких отрезка AB , причем они центрально-симметричны. Ясно, что отрезки AB и Op_1 параллельны и их евклидовы длины равны. Более того, треугольник OAB является равносторонним в смысле конормы ρ^* .

Рассмотрим следующие шесть точек на окружности Σ^* : $\pm p_1, \pm A, \pm B$. Легко видеть, что они образуют равносторонний в смысле ρ^* шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны и имеют одинаковую евклидову длину. Выберем в качестве p_2 и p_3 те вершины полученного шестиугольника, которые не являются соседними ни с p_1 , ни между собой. Очевидно, сумма полученных p_i равна нулю. Тем самым, доказано существование.

Для доказательства единственности заметим, что если p_2 и p_3 выбраны некоторым другим образом, то, построив шестиугольник с вершинами $\pm p_i$, мы получим шестиугольник с теми же свойствами, в частности,

$\pm p_2 \mp p_3$ параллельны отрезку Op_1 , и евклидовы длины этих трех отрезков равны. Доказательство леммы закончено. ■

Из леммы 6.8 и строгой выпуклости нормы ρ вытекает, что если ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 — направления ребер γ_1 , γ_2 и γ_3 , выходящих из произвольной вершины x сети Υ , то любое другое ребро этой сети параллельно одному из ξ_i . Без ограничения общности, будем считать, что ребра γ_i были ориентированы от вершины x . Тогда, как легко видеть, никакие два из ξ_i не коллинеарны, и для некоторых положительных чисел a и b имеет место равенство: $-\xi_3 = a\xi_1 + b\xi_2$.

Рассмотрим линейное преобразование A_ℓ , переводящее вектор ξ_1 в вектор $(1, 0)$, а вектор ξ_2 — в вектор $\ell \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$. Очевидно, существует такое $\ell > 0$, что $A_\ell(\xi_3)$ сонаправлен с вектором

$$\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \right).$$

Построенное линейное преобразование и есть искомое. Предложение доказано. ■

6.3.2.2. Геометрия граничного множества и число вращения

Итак, мы показали, что каждая сеть без граничных вершин степени 2, экстремальная для функционала ρ -нормированной длины в случае, когда норма ρ строго выпукла и гладка вне нуля, получается из некоторой локально минимальной сети (в евклидовом смысле) некоторым линейным преобразованием. Это мгновенно влечет справедливость следующих результатов.

Следующая теорема вытекает из теоремы 5.1.

Теорема 6.9. Пусть ρ — строго выпуклая норма на плоскости, гладкая всюду вне нуля и Υ — вложенное бинарное дерево, экстремальное по отношению к функционалу ρ -нормированной длины, растягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда $\text{tw } \Upsilon \leq 12(\kappa(M) - 1) + 5$, где через $\text{tw } \Upsilon$ обозначено число вращения Υ как плоского бинарного дерева.

В случае, когда граничное множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки, т.е. имеет один уровень выпуклости, теорема 5.2 может быть обобщена так.

Определение. Если для плоской вложенной сети-следа Υ существует планарно эквивалентная ей сеть-след Υ_m , экстремальная относительно

функционала ρ -нормированной длины, то мы будем говорить, что Υ имеет ρ -экстремальную реализацию. Если же среди таких Υ_m найдется сеть-след с выпуклой границей, то мы будем говорить, что Γ имеет выпуклую ρ -экстремальную реализацию.

Теорема 6.10. *Пусть ρ — строго выпуклая норма на плоскости, гладкая всюду вне нуля. Плоское бинарное дерево имеет выпуклую ρ -экстремальную реализацию, если и только если его число вращения не превосходит 5.*

Таким образом, все плоские бинарные деревья, имеющие выпуклую ρ -экстремальную реализацию, полностью описываются теоремами 5.4 и 5.5 на языке треугольных паркетов, т.е. каждая такая сеть планарно эквивалентна двойственной сети некоторого паркета из определенного в главе 5 класса \mathcal{WP}_5 .

Рассмотрим теперь случай вложенных сетей-следов без вершин степени 2, экстремальных относительно функционала нормированной ρ -длины. Из теоремы 6.7 вытекает, что степени вершин такой сети равны 1 или 3.

Из предложения 5.18 получается следующий результат.

Предложение 6.11. *В сделанных выше предположениях индекс каждого фундаментального цикла произвольной вложенной сети-следа без вершин степени 2, экстремальной относительно функционала ρ -нормированной длины, равен 6. Иными словами, равенство шести индекса каждого фундаментального цикла является необходимым условием ρ -экстремальной реализации.*

Напомним, что плоская вложенная сеть-след без вершин степени 2 называется тривиальной, если каждый ее фундаментальный цикл — шестиугольник, внутренность которого не содержит точек сети.

Предложение 6.12. *Пусть Υ — плоская сеть-след без вершин степени 2, имеющая выпуклую ρ -экстремальную реализацию. Тогда Υ — тривиальная сеть.*

Из предложения 6.12 и утверждения 5.7 вытекает, что корректно определено число вращения плоской сети-следа без вершин степени 2, имеющей выпуклую ρ -экстремальную реализацию.

Предложение 6.13. *Плоская сеть-след без вершин степени 2, имеющая выпуклую ρ -экстремальную реализацию, тривиальна. Ее число вращения не превосходит пяти.*

Таким образом, все плоские вложенные сети–следы без вершин степени 2, имеющие выпуклую ρ -экстремальную реализацию, полностью описываются в разделах 5.1.14.5, 5.1.14.6 и 5.1.14.7 главы 5 на языке треугольных паркетов, т.е. каждая такая сеть планарно эквивалентна двойственной сети некоторого паркета из определенного в главе 5 класса \mathcal{P}_5 .

6.3.2.3. Множество экстремальных сетей фиксированного типа

Опишем структуру всех следов, экстремальных относительно функционала ρ -нормированной длины, при условии, что у этих следов фиксированы тип и граница, т.е. получим аналог следствия 4.9 главы 4. Напомним, что для случая локально минимальных сетей этот результат основан на следующих двух фактах:

- Положительная определенность второй вариации длины отрезка при линейной деформации, где равенство нулю достигается, если и только если рассматриваемая деформация сохраняет направление отрезка. Этот результат имеет место и для r -нормированной длины, где ρ — строго выпуклая норма, гладкая вне нуля. Как и в случае евклидовой длины, отсюда вытекает параллельность экстремальных сетей одной топологии с общей границей, а значит, и применимость теоремы 3.1 главы 3. Таким образом, множество всех следов, экстремальных относительно функционала ρ -нормированной длины, при условии, что у этих следов фиксированы тип и граница, представляет собой многогранник в конфигурационном пространстве подвижных вершин, а размерность этого многогранника вычисляется в терминах ранга соответствующей характеристической системы.
- Устойчивость локально минимальных бинарных деревьев по отношению к малым деформациям граничного множества. Доказательство этого факта основывалось на алгоритме Мелзака. Хотя аналог алгоритма Мелзака в общем случае нам не известен (см. ниже), устойчивость экстремальных бинарных деревьев все же имеет место, см. теорему 6.6.

Теорема 6.11. Пусть Υ — погруженная сеть–след типа G с границей φ , экстремальная относительно функционала ρ -нормированной длины. Обозначим через k цикломатическое число подвижной подсети $\hat{\Upsilon}$ сети Υ , через f — количество подвижных вершин степени 2

сети Υ , через m — количество ребер сети Υ , а через X — конфигурационное пространство подвижных вершин сети Υ .

Тогда множество погруженных сетей-следов типа G с границей φ представляет собой внутренность выпуклого $(k + f)$ -мерного многогранника X_{\min} , являющегося множеством всех минимумов функции ρ -нормированной длины $\ell_\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$. Все экстремальные сети данной топологии и с данной границей параллельны между собой и имеют одинаковую ρ -нормированную длину.

Более того, многогранник X_{\min} содержит не более чем m граней максимальной размерности.

6.3.2.4. Поверхности

Пусть W — гладкое многообразие и TW — касательное расслоение. Будем говорить, что на многообразии W задана норма ρ , если $\rho: TW \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный лагранжиан, такой, что ограничение его на каждое касательное пространство $T_x W$ является нормой на $\mathbb{R}^n = T_x W$ в обычном смысле. Классический вариационный функционал, порожденный нормой ρ , будем называть функционалом ρ -нормированной длины, а экстремали этого функционала — ρ -экстремальными. В частности, так определяются ρ -экстремальные кривые и ρ -экстремальные сети.

Отметим, что если $f: W_1 \rightarrow W_2$ — погружение многообразия W_1 в многообразие W_2 и ρ — норма на W_2 , то на W_1 индуцируется норма $f^* \rho$ так: $f^* \rho(\xi) = \rho(df(\xi))$.

Простейший пример нормы на многообразии \mathbb{R}^n порождается произвольной нормой ρ на \mathbb{R}^n как на векторном пространстве: ρ порождает норму на каждом касательном пространстве $T_x \mathbb{R}^n$ с помощью изоморфизма между \mathbb{R}^n и $T_x \mathbb{R}^n$. Отметим, что норма ρ на многообразии \mathbb{R}^n порождена нормой на \mathbb{R}^n как на линейном пространстве, если и только если ρ инвариантна относительно всех сдвигов ν , т.е. $\nu^*(\rho) = \rho$.

Другим важным частным случаем многообразий с нормой являются группы Ли, на которых задана, скажем, левоинвариантная норма, получающаяся из произвольной нормы на соответствующей алгебре Ли левыми сдвигами. В качестве примера мы рассмотрим двумерный тор T^2 , на котором задана левоинвариантная норма ρ . Отметим, что если $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ — стандартное универсальное накрытие, т.е. $T^2 = \mathbb{R}^2/G$, где G — соответствующая дискретная подгруппа группы \mathbb{R}^2 , то отображение π индуцирует норму на многообразии \mathbb{R}^2 , инвариантную относительно сдвигов, т.е. эта последняя норма порождена некоторой нормой на \mathbb{R}^2 как на линейном пространстве. Обратно, каждая норма ρ на \mathbb{R}^2

как на линейном пространстве порождает норму на T^2 (отображение π является локальным диффеоморфизмом, и ρ инвариантна относительно группы накрытия π).

Если ρ — норма на \mathbb{R}^2 как на линейном пространстве, гладкая всюду, кроме нуля, то из локальности условий экстремальности сети (см. теорему 2.3 главы 2) вытекает, что локальная изометрия сохраняет свойство сети быть экстремальной. В частности, универсальное накрытие $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ обладает этим свойством: сеть Γ на торе экстремальна, если и только если каждая сеть, составленная из кривых, входящих в $\pi^{-1}(\Gamma)$, является экстремальной.

Пусть теперь ρ — гладкая вне нуля строго выпуклая норма на плоскости, $T^2 = \mathbb{R}^2/G$ — некоторый тор и Γ — ρ -экстремальная сеть на нем. Из предложения 6.10 вытекает, что существует линейное преобразование \mathcal{A} плоскости \mathbb{R}^2 , переводящее $\pi^{-1}(\Gamma)$ в прообраз некоторой локально минимальной сети на евклидовом торе $\mathbb{R}^2/\mathcal{A}(G)$. Поэтому многие результаты, изложенные в разделе 5.2.2 главы 5, переносятся на случай ρ -экстремальных сетей на торах с такими нормами.

Из теоремы 6.7 вытекает, что наличие подвижных вершин степени 2 не влияет на геометрию экстремальной сети. Поэтому, отбросив тривиальный случай замкнутых геодезических (они такие же, как и в случае евклидовых торов), не ограничивая общности, мы будем предполагать, что подвижных вершин степени 2 сети не имеют. Таким образом, по теореме 6.7, у замкнутой экстремальной сети имеются лишь вершины степени 3.

В приводимых ниже следствиях мы используем ряд понятий, определенных нами в разделе 5.2.2 главы 5 для случая локально минимальных сетей, применительно к ρ -экстремальным сетям. Соответствующие определения дословно повторяют определения из раздела 5.2.2 главы 5.

Следствие 6.11. *Для каждой замкнутой ρ -экстремальной сети Γ на данном нормированном двумерном торе $T^2(f)$ существует единственная (с точностью до сдвига) деформационно эквивалентная ей правильная ρ -экстремальная сеть Γ_r . Нормированные длины сетей Γ и Γ_r равны, поэтому деформационно эквивалентные ρ -экстремальные сети имеют одинаковые нормированные длины.*

Более того, каждая ρ -экстремальная сеть на $T^2(f)$ может быть продеформирована в произвольную деформационно эквивалентную ей ρ -экстремальную сеть в классе ρ -экстремальных сетей.

Следствие 6.12. *Деформационно эквивалентным замкнутым ρ -экстремальным сетям соответствуют одинаковые типы из $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$.*

Для каждого элемента $[g] \in M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$ существует такая дискретная подгруппа $G \subset \mathbb{R}^2$, что \mathbb{R}^2/G — некоторый тор, причем на этом торе существует замкнутая ρ -экстремальная сеть Γ типа $[g]$. Таким образом, замкнутые ρ -экстремальные сети на двумерных торах классифицируются, с точностью до деформационной эквивалентности, элементами однородного пространства $M_2^+(\mathbb{Z})/\langle J \rangle$.

Доказательство. Схема доказательства в точности повторяет доказательство соответствующего результата про замкнутые локально минимальные сети на плоских торах, см. подробности в [76] или [78]. Единственное отличие состоит в выборе такой группы G , для которой характеристический треугольник типа $[g]$ может быть затяннут минимальным бинарным деревом. Мы покажем, что группа G всегда может быть выбрана так, чтобы характеристический треугольник типа $[g]$ стал равносторонним в смысле нормы ρ , что, в силу следствия 6.8, и завершит доказательство существования ρ -экстремальной сети типа $[g]$ на торе \mathbb{R}^2/G .

Напомним, см. раздел 5.2.2 главы 5, что, в нашей модели, группа G должна задаваться парой векторов $e = (1, 0)$ и $f = (x_f, y_f)$, где $y_f > 0$. Пусть $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ — матрица типа, а $A = Pe + Qf$ и $B = Re + Sf$ — вершины характеристического треугольника OAB типа g .

Рассмотрим единичную окружность Σ , и пусть $r(\varphi)$ — радиус-вектор точки из окружности Σ , имеющей аргумент φ (в евклидовом смысле). Можно показать, что для любого φ существует единственная точка $r'(\varphi) \in \Sigma$, такая, что треугольник $Or(\varphi)r'(\varphi)$ — равносторонний, а репер $r(\varphi), r'(\varphi)$ положительно ориентирован. Заметим, что $r'(\varphi)$ непрерывно зависит от φ .

Обозначим через \mathcal{A}_φ единственное линейное преобразование плоскости, такое, что $\mathcal{A}_\varphi(A) = r(\varphi)$ и $\mathcal{A}_\varphi(B) = r'(\varphi)$. Воспользовавшись тем, что \mathcal{A}_φ непрерывно зависит от φ , несложно доказать следующую лемму.

Лемма 6.9. *Существует такое φ_0 , что $\mathcal{A}_{\varphi_0}(e) = \ell e$ для некоторого $\ell > 0$.*

В качестве G теперь можно взять группу, порожденную векторами e и $(1/\ell)\mathcal{A}(f)$. Следствие доказано. \blacksquare

Следствие 6.13. *На фиксированном торе $T^2(f)$ существует замкнутая ρ -экстремальная сеть данного типа $[g]$ в том и только том случае, когда вершины характеристического треугольника типа g для тора $T^2(f)$ можно затянуть ρ -экстремальным бинарным деревом (см. следствие 6.7).*

Следствие 6.14. *На каждом торе $T^2(f)$ существует некоторая замкнутая ρ -экстремальная сеть, отличная от замкнутой геодезической.*

Доказательство. Мы начнем с того, что несколько усилим утверждение следствия 6.8. А именно, из теоремы 6.6 вытекает, что ρ -экстремальное бинарное дерево затягивает множество вершин любого треугольника, достаточно близкого к равностороннему. С другой стороны, можно подобрать тип $\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$ так, что (после подходящего растяжения) соответствующий характеристический треугольник, став достаточно близким к равностороннему, может быть затянут ρ -экстремальным бинарным деревом. Следствие доказано. ■

Экстремальное бинарное дерево, затягивающее вершины характеристического треугольника, называется, напомним, *характеристической сетью*.

Следствие 6.15. *Пусть Γ — замкнутая ρ -экстремальная сеть на торе $T^2(f)$. Пусть Γ_χ — характеристическая сеть, соответствующая Γ . Тогда ρ -длины сетей Γ и Γ_χ равны между собой.*

Приведенные выше простые геометрические критерии существования замкнутой ρ -экстремальной сети данного типа дают возможность получить ряд нетривиальных следствий.

Следствие 6.16. *Если на данном торе $T^2(f)$ существует замкнутая ρ -экстремальная сеть Γ типа (M, t, n) , то на этом торе существуют замкнутые ρ -экстремальные сети типов (M, kt, kn) , где k — любое положительное целое число.*

В терминах типов из $M_2^+(\mathbb{Z})$ предыдущее следствие может быть сформулировано так.

Следствие 6.17. *Если на данном торе $T^2(f)$ существует замкнутая ρ -экстремальная сеть Γ типа $g = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$, то на этом торе существуют замкнутые ρ -экстремальные сети типов*

$$\begin{pmatrix} kP & kR \\ kQ & kS \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} P/l & R/l \\ Q/l & S/l \end{pmatrix},$$

где k — любое положительное целое число, а l — любой общий положительный делитель чисел P , Q , R и S . Иными словами, для всех

матриц из $M_2^+(\mathbb{Z})$, входящих в данный класс проективного пространства $MP_2^+(\mathbb{Z})$, ρ -экстремальные сети этих типов либо одновременно существуют, либо одновременно не существуют.

Следствие 6.18. *На каждом торе существует бесконечно много деформационно неэквивалентных замкнутых ρ -экстремальных сетей.*

Будем говорить, что гладкие вне нуля нормы ρ и ρ' близки в смысле C^k , если ограничения функций ρ и ρ' на единичную евклидову окружность близки в смысле C^k -нормы. Если C^k -расстояние между полученными функциями на окружности не превосходит ε , то скажем, что ρ и ρ' являются ε -близкими в смысле C^k .

Следствие 6.19. *Изменения нормы ρ на торе T^2 , малые в смысле C^2 , не разрушают замкнутую ρ -экстремальную сеть $\Gamma \subset T^2$: для каждой замкнутой ρ -экстремальной сети Γ на торе T^2 с гладкой вне нуля строго выпуклой нормой ρ существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждой ε -близкой в смысле C^2 нормы ρ' существует замкнутая ρ' -экстремальная сеть на торе T^2 , имеющая тот же тип, что и Γ .*

По этой же схеме можно перенести результаты из раздела 5.2.3 главы 5 на случай бутылки Клейна с некоторой гладкой вне нуля строго выпуклой нормой. Единственное отличие состоит в том, что соответствующая норма на накрывающей плоскости должна быть инвариантна относительно осевой симметрии из группы накрытия. Сформулировать и доказать соответствующие результаты предоставляется читателю.

6.3.2.5. Нормы с эллипсоидальной окружностью

Если предположить дополнительно, что единичная окружность нормы ρ является эллипсом, то, как легко понять, линейное преобразование, переводящее этот эллипс в евклидову окружность S^1 , устанавливает изометрию между плоскостью (\mathbb{R}^2, ρ) и евклидовой плоскостью. Эта изометрия, в частности, переводит сети, экстремальные относительно функционала ρ -нормированной длины, в локально минимальные сети на евклидовой плоскости. Таким образом, все результаты о плоских локально минимальных сетях, приведенные в предыдущих главах, почти дословно переносятся на случай таких экстремальных сетей.

Например, алгоритмы Мелзака и Хванга построения локально минимального бинарного дерева данной топологии с данной границей легко переносятся на случай нормы ρ с эллипсоидальной окружностью. При этом описанная выше линейная изометрия позволяет легко понять, в чем будут состоять отличия:

- вместо правильных треугольников в евклидовом смысле, рассматриваются равносторонние треугольники в смысле нормы ρ ;
- вместо евклидовых окружностей рассматриваются эллипсы, являющиеся окружностями в норме ρ ;
- величина угла определяется как ρ -нормированная длина соответствующей дуги единичной окружности Σ .

В случае произвольной строго выпуклой нормы на плоскости, гладкой всюду вне нуля, аналоги алгоритмов Мелзака и Хванга авторам не известны. Отметим, что, как мы показали выше, см. предложение 6.10, линейное преобразование, переводящее экстремальную сеть в локально минимальную, существует и в общем случае. Применяв это преобразование, можно выполнить построения Мелзака на евклидовой плоскости, а затем применить обратное преобразование. Однако это преобразование в общем случае зависит от сети и уже не является изометрией. В частности, не ясно, в какие именно треугольники и эллипсы перейдут правильные треугольники и окружности, построенные на евклидовой плоскости при реализации алгоритма Мелзака. Авторам также не известно, как в общем случае найти требуемое линейное преобразование, исходя из заданного граничного множества, или, что все равно, как по граничному множеству найти направление хотя бы одного ребра экстремальной сети заданной топологии.

В качестве другого примера переноса результатов на случай норм с эллипсоидальными окружностями возьмем теорему 5.7 о локально минимальных бинарных деревьях типа скелет с правильной границей, см. раздел 5.1.11 главы 5. Сформулировать соответствующий результат предоставляется читателю в качестве упражнения.

6.4. Манхеттенские локально минимальные и экстремальные сети

В данном разделе мы изучим более подробно случай так называемого манхеттенского нормированного пространства (\mathbb{R}^n, ρ) , т.е. пространства, в котором норма ρ равна сумме длин проекций вектора на координатные оси стандартной декартовой системы координат. Воспользовавшись общими теоремами, доказанными в разделе 6.1, мы явно опишем локальную структуру локально минимальных и экстремальных сетей в манхеттенском пространстве. Кроме того, для случая плоскости мы приведем наглядный геометрический критерий экстремальности локально минимальной сети. Напомним, что условия экстремальности в данном случае имеют нелокальный характер.

Результаты, приведенные в настоящем разделе, были получены авторами совместно с профессором Хонг Ван Ле во время совместной работы в MPI für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, в апреле–июне 1999.

6.4.1. Общие свойства

Кривую γ в манхеттенском линейном пространстве \mathbb{R}^n назовем *монотонной*, если каждая ее координатная функция (в стандартных декартовых координатах) является монотонной функцией.

Из теоремы 6.2 вытекает следующий результат.

Утверждение 6.3. *Кривая γ , соединяющая фиксированную пару точек, является экстремальной, если и только если она монотонна. Более того, каждая экстремальная кривая является кратчайшей.*

Кривая γ , соединяющая фиксированную пару точек, является локально минимальной, если и только если существует конечное открытое покрытие ее параметризующего отрезка, такое, что ограничение кривой γ на замыкание каждого элемента этого покрытия является монотонной кривой.

Перейдем к описанию локально минимальных сетей.

Пусть Υ — сеть-след в манхеттенском пространстве, все ребра которой — локально минимальные кривые, а v — произвольная ее вершина. Локальную сеть, составленную из максимальных содержащих v монотонных отрезков инцидентных v ребер, назовем *монотонной окрестностью вершины v* . Монотонная окрестность вершины v , из которой вершина v выброшена, называется *проколотой монотонной окрестностью вершины v* .

Теорема 6.12. *Сеть Υ с некоторой границей в манхеттенском пространстве является локально минимальной, если и только если выполнены следующие условия.*

- *Каждое ребро сети Υ является локально минимальной кривой, см. утверждение 6.3.*
- *Пусть v — произвольная вершина сети Υ . Тогда каждое открытое полупространство, ограниченное гиперплоскостью, проходящей через v и параллельной некоторой координатной гиперплоскости, целиком содержит не более одного ребра проколотой монотонной окрестности вершины v .*
- *Каждая вершина сети Υ степени 1 является граничной.*

Следствие 6.20. *Степень вершины локально минимальной сети в n -мерном манхеттенском пространстве не превосходит $2n$, причем любое целое число $1 \leq k \leq 2n$ реализуется как степень вершины некоторой локально минимальной сети.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.13. *Каждая экстремальная сеть в манхеттенском пространстве является локально минимальной. В частности, локальное устройство экстремальных сетей описывается теоремой 6.12.*

Замечание. Не каждая локально минимальная манхеттенская сеть является экстремальной. Простейший пример получается, если рассмотреть немонотонную ломаную, звенья которой параллельны координатным осям.

Более тонкие эффекты можно увидеть на следующем примере. Ребра сети Υ , приведенной на рис. 6.4, являются кратчайшими кривыми, однако сеть в целом не является экстремальной. На рис. 6.4 показана деформация, линейно уменьшающая манхеттенскую длину этой сети.

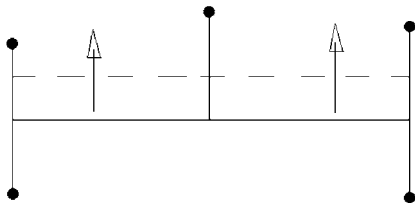


Рис. 6.4. Локально минимальная неэкстремальная сеть на плоскости.

Нам понадобится следующее свойство экстремальных сетей в манхеттенском пространстве \mathbb{R}^n , непосредственно вытекающее из утверждения 6.3. Пусть Υ — произвольная сеть. Максимальный путь в Υ , циклический или нет, все внутренние вершины которого имеют в Υ степень 2 и не являются граничными вершинами для Υ , назовем *нитью*. Отметим, что ребра сети также являются нитями по определению.

Следствие 6.21. *Каждая нить экстремальной сети в манхеттенском пространстве является монотонной кривой.*

6.4.2. Экстремальные сети и линейные сети

Пусть Υ — произвольная вложенная сеть-след в \mathbb{R}^n . Построим по ней линейную сеть $\tilde{\Upsilon}$, заменив нити сети Υ на прямолинейные отрезки, соединяющие те же вершины. Сеть $\tilde{\Upsilon}$ назовем *линеаризацией сети Υ* .

Имеет место следующий очевидный, но важный результат.

Утверждение 6.4. *Сеть Υ является экстремальной сетью в манхеттенском пространстве \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда все ее нити монотонны и ее линейаризация — экстремальная сеть.*

Доказательство. Пусть Υ — экстремальная сеть. Если у нее есть немонотонная нить, то длина сети может быть с ненулевой скоростью уменьшена деформацией этой нити. Поэтому все нити сети Υ монотонны. В частности, сеть Υ и ее линейаризация имеют одинаковые длины. Далее, если существует деформация линейаризованной сети, уменьшающая ее длину с ненулевой скоростью, то при замене всех сетей деформации на их линейаризации мы получаем деформацию с тем же свойством. Эта последняя деформация однозначно задается смещением вершин линейаризации сети Υ и поэтому порождает некоторую деформацию Υ_t сети Υ в классе сетей с монотонными нитями. Очевидно, деформация Υ_t также уменьшает длину с ненулевой скоростью.

Обратно, предположим, что у сети Υ все нити монотонны и ее линейаризация — экстремальная сеть. Если существует деформация Υ_t сети Υ , уменьшающая длину с ненулевой скоростью, то, очевидно, заменяя каждую сеть Υ_t ее линейаризацией, мы построим деформацию линейаризации сети Υ , уменьшающую длину с не меньшей, а значит, и с ненулевой скоростью. Доказательство закончено. ■

Следствие 6.22. *Любая (погруженная) экстремальная сеть в манхеттенском пространстве \mathbb{R}^n получается из некоторой экстремальной линейной сети без подвижных вершин степени 2 произвольной заменой ее ребер монотонными нитями, соединяющими те же точки.*

Таким образом, достаточно описать лишь линейные экстремальные сети в манхеттенском пространстве, не содержащие подвижных вершин степени 2.

6.4.3. Экстремальные манхеттенские сети на плоскости

Опишем экстремальные сети на манхеттенской плоскости. Пусть Υ — сеть с монотонными ребрами. Ребро сети Υ назовем *вертикальным* (*горизонтальным*), если оно представляет собой прямолинейный отрезок, параллельный оси абсцисс (оси ординат). Все остальные ребра назовем *свободными*. Связные компоненты, составленные из горизонтальных (вертикальных) ребер, назовем *горизонтальными* (*вертикальными*) *фрагментами*, а максимальные фрагменты — *сечениями*.

Отметим, что каждый фрагмент представляет собой путь, соединяющий пару вершин сети Υ . Эти вершины будем называть *концевыми вершинами* этого фрагмента. Сеть, полученную из фрагмента γ добавлением всех ребер из Υ , инцидентных вершинам из γ , обозначим через $T(\gamma)$ и назовем *расширением фрагмента γ* .

Пусть γ — некоторый горизонтальный фрагмент. Негоризонтальное ребро e , инцидентное вершине v из γ , назовем *односторонним*, если оно — единственное негоризонтальное ребро, инцидентное v . Одностороннее ребро, инцидентное внутренней вершине v фрагмента γ , назовем *статичным*, если v — граничная вершина дерева Υ . Одностороннее ребро, инцидентное концевой вершине фрагмента γ , также отнесем к *статичным ребрам*. Остальные односторонние ребра назовем *плавающими*.

Далее, вершину v фрагмента γ , не инцидентную одностороннему ребру, назовем *статичной*, если в дереве Υ она является граничной вершиной степени 1 или 2. Отметим, что статичными являются те и только те вершины фрагмента γ , которые не инцидентны ни одному негоризонтальному ребру сети Υ и являются граничными в Υ .

Разобьем множество негоризонтальных ребер, инцидентных фрагменту γ , на два класса C_1 и C_2 в зависимости от того, в какой из двух полуплоскостей, ограниченных проходящей через γ прямой, лежат эти ребра. Обозначим через t_i^s и t_i^n количества статичных и плавающих ребер в классе C_i , $i = 1, 2$. Величину $\text{ind}_i = 2t_i^n + t_i^s$ назовем *индексом класса C_i* , а число $\text{ind}(\gamma) = |\text{ind}_1 - \text{ind}_2|$ — *индексом фрагмента γ* . Для определенности, будем считать, что класс C_1 состоит из ребер, расположенных в верхней полуплоскости по отношению к γ .

Далее, обозначим через e^s полное количество односторонних статичных ребер, т.е. $e^s = t_1^s + t_2^s$, а через v^s — полное количество статичных вершин фрагмента γ . Число $\text{stat}(\gamma) = 2v^s + e^s$ назовем *степенью статичности фрагмента γ* .

Аналогично определяются все понятия для вертикального фрагмента.

Теорема 6.14. *Сеть Υ на манжеттенской плоскости \mathbb{R}^2 является экстремальной сетью тогда и только тогда, когда все ее нити — монотонные кривые, ее линеаризация Υ_l — локально минимальна и индекс каждого фрагмента γ линеаризации Υ_l не превосходит степени статичности этого фрагмента:*

$$\text{ind}(\gamma) \leq \text{stat}(\gamma).$$

Доказательство. В силу утверждения 6.4 при доказательстве теоремы можно сразу предполагать, что сеть Υ является линейной локально минимальной сетью без подвижных вершин степени 2. В частности, сеть Υ совпадает со своей линейризацией Υ_l . Кроме того, ясно, что достаточно рассматривать деформации сети Υ в классе сетей с монотонными ребрами. Отсюда вытекает, что достаточно рассматривать деформации в классе линейных сетей.

При вычислении первой вариации длины отрезка в манхеттенской норме нам понадобится следующая функция:

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{при } x > 0, \\ -y & \text{при } x < 0, \\ |y| & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определим также три векторнозначных функции на \mathbb{R}^n , положив

$$\begin{aligned} \text{sign}(X) &= (\text{sign}(X_1), \dots, \text{sign}(X_n)), \\ \text{null}(X) &= (1 - \text{sign}^2(X_1), \dots, 1 - \text{sign}^2(X_n)), \\ \text{mod}(X) &= (|X_1|, \dots, |X_n|), \end{aligned}$$

где $X = (X_1, \dots, X_n)$. Отметим, что компонента вектора $\text{null}(X)$ равна нулю, если и только если соответствующая компонента вектора X отлична от нуля. В противном случае эта компонента вектора $\text{null}(X)$ равна единице. Отметим также, что функции $\text{null}(X)$ и $\text{mod}(X)$ — четные, а функция $\text{sign}(X)$ — нечетная.

В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать функции null и mod как функции на неупорядоченных парах векторов, а именно:

$$\text{null}(\{A, B\}) = \text{null}(A - B), \quad \text{mod}(\{A, B\}) = \text{mod}(A - B).$$

Из теоремы 6.1 вытекает следующий результат.

Лемма 6.10. Пусть $[A, B]$ — произвольный, возможно вырожденный, отрезок в манхеттенском пространстве \mathbb{R}^n . Рассмотрим его линейную деформацию, при которой точка $A = (A_1, \dots, A_n)$ движется по гладкой кривой $A(t) = A + t\xi + o(t)$, а точка $B = (B_1, \dots, B_n)$ — по гладкой кривой $B(t) = B + t\eta + o(t)$, где $t \in [0, 1]$. Тогда функция $\ell(t)$ его манхеттенской длины дифференцируема при $t = 0$, причем

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ell(t) = \sum_i f(B_i - A_i, \eta_i - \xi_i),$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$.

Другими словами,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \ell(t) = \langle \text{sign}(A-B), \xi \rangle + \langle \text{sign}(B-A), \eta \rangle + \langle \text{null}(\{A, B\}), \text{mod}(\{\xi, \eta\}) \rangle.$$

Лемма 6.10 позволяет записать формулу первой вариации линейной сети в следующем виде.

Лемма 6.11. Пусть Υ — линейная сеть в \mathbb{R}^n и $\Upsilon_t = [\Phi_t]$, $t \in [0, 1]$, — некоторая ее локальная деформация в классе линейных сетей, где Φ_t — соответствующая деформация некоторой параметрической сети $\Phi = \Phi_0$. Обозначим через ξ поле деформации Φ_t . Пусть V — произвольная подвижная вершина сети Φ . Обозначим через S_V сумму векторов $\text{sign}(V - V')$, где сумма берется по всем невырожденным ребрам VV' сети Φ . Тогда

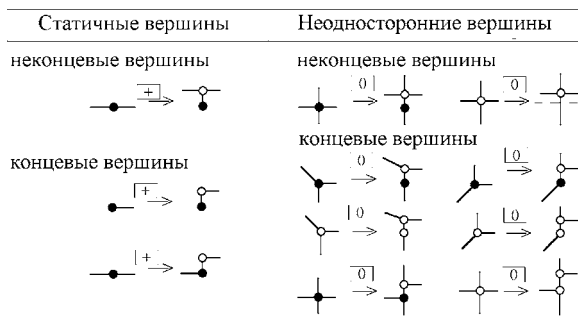
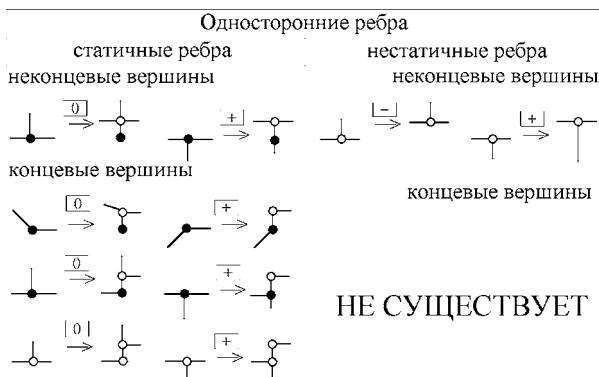
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \ell(\Upsilon_t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \ell(\Phi_t) = \\ &= \sum_{V - \text{подвижна}} \langle S_V, \xi_V \rangle + \sum_{e - \text{ребро}} \langle \text{null}(\partial e), \text{mod}(\xi|_{\partial e}) \rangle. \end{aligned}$$

Первое слагаемое из формулы леммы 6.11 назовем *линейной частью формулы первой вариации*, а второе — *нелинейной*.

Вернемся к доказательству теоремы 6.14. Пусть сначала Υ — экстремальная сеть и γ — ее произвольный фрагмент. Рассмотрим линейную деформацию Υ_t сети Υ , которая смещает фрагмент γ параллельно самому себе в направлении, перпендикулярном γ , причем каждая вершина, подвижная при деформации Υ_t , движется с единичной скоростью. Для определенности будем считать, что γ — горизонтальный фрагмент, который смещается вверх. В окрестности вершин определим деформацию Υ_t так, как показано на рис. 6.5 и 6.6.

Как и выше, разобьем негоризонтальные ребра на два класса C_i , отнеся к классу C_1 ребра из верхней полуплоскости. Напомним, что мы обозначили через t_i^s и t_i^n количества статичных и, соответственно, плавающих односторонних ребер из i -го класса, через v^s — общее количество статичных вершин на γ , а через e^s — сумму $t_1^s + t_2^s$. Из формулы первой вариации, см. лемму 6.11, и условия критичности сети Υ вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \ell(\Upsilon_t) = t_2^n - t_1^n + v^s + t_2^s \geq 0.$$

Рис. 6.5. Расщепления вершин при деформации Υ_t .Рис. 6.6. Расщепления вершин при деформации Υ_t .

Точно так же, рассмотрев деформацию, смещающую γ вниз, получим неравенство

$$t_1^n - t_2^n + v^s + t_1^s \geq 0.$$

Таким образом,

$$-v^s - t_1^s \leq t_1^n - t_2^n \leq v^s + t_2^s.$$

Добавив ко всем частям неравенства величину $(t_1^s - t_2^s)/2$, получим

$$-v^s - e^s/2 \leq \frac{2t_1^n + t_1^s - 2t_2^n - t_2^s}{2} \leq v^s + e^s/2.$$

Остается заметить, что $2t_i^n + t_i^s = \text{ind}_i$ по определению, откуда, так как $\text{stat}(\gamma) = 2v^s + e^s$, получаем требуемое неравенство.

Отметим, что из наших вычислений вытекает следующий полезный результат.

Лемма 6.12. *Неравенство $\text{ind}(\gamma) \leq \text{stat}(\gamma)$ равносильно следующей системе неравенств*

$$\begin{cases} t_1^n \leq t_2^n + v^s + t_2^s, \\ t_2^n \leq t_1^n + v^s + t_1^s. \end{cases}$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть Υ — линейная локально минимальная сеть без подвижных вершин степени 2, такая, что для каждого ее фрагмента γ' выполнено неравенство $\text{ind}(\gamma') \leq \text{stat}(\gamma')$. Рассмотрим произвольную локальную деформацию $\Upsilon_t = [\Phi_t]$ сети-следа Υ в классе линейных сетей, неподвижную на границе этой сети. Тем самым мы фиксируем некоторую параметризацию $\Phi = \Phi_0$ следа Υ (напомним, что такая параметризация может, вообще говоря, содержать вырожденные ребра). Покажем, что первая вариация этой деформации неотрицательна.

Без ограничения общности можно предполагать, что деформация Υ_t обладает следующими свойствами (см. теорему 6.5).

- Каждая вершина расщепляется не более чем на дерево, причем каждое такое дерево содержит не более одной вершины, неподвижной при деформации Φ_t , в частности, у сетей Υ и Φ одинаковое число граничных вершин.
- Сеть Φ (а значит, и все сети Φ_t) не имеет подвижных вершин степени 1 и 2 (отметим, что деформация, изображенная на рис. 6.5 и 6.6, не обладает указанным свойством, однако ее легко можно подправить, не меняя длины сетей, заменив все возникшие при деформации нити прямолинейными отрезками).
- Каждая вершина сети движется равномерно и прямолинейно.

Перенесем на параметрическую сеть Φ введенную выше терминологию. Пусть $\pi: \Phi \rightarrow \Upsilon$ — слабая проекция параметрической сети Φ на канонический представитель Υ . Ребро из Φ , образ которого при слабой проекции π является горизонтальным (вертикальным, свободным) ребром, назовем *горизонтальным* (соответственно, *вертикальным*, *свободным*). Отметим, что горизонтальные, вертикальные и свободные ребра сети Φ — это все ее невырожденные ребра.

Пусть γ' — произвольный фрагмент сети Υ . *Фрагментом γ параметрической сети Φ* , соответствующим фрагменту γ' , назовем прообраз пути γ' при слабой проекции π . *Сечением сети Φ* называется ее фрагмент, соответствующий сечению.

Пусть γ — соответствующий γ' фрагмент сети Φ . *Расширением $T(\gamma)$ фрагмента γ* назовем подсеть в Φ , полученную из γ добавлением всех инцидентных ему ребер сети Φ . Отметим, что все добавленные ребра невырождены. Соответствующие им негоризонтальные ребра сети Υ , напомним, разбиты на классы C_1 и C_2 . Это разбиение индуцирует разбиение соответствующих ребер сети Φ на два класса, которые мы будем обозначать также через C_1 и C_2 .

Запишем формулу первой вариации для деформации Φ_t . Из леммы 6.11 вытекает, что полученное выражение представимо в виде суммы двух выражений, \sum^v и \sum^h , первое из которых зависит только от вертикальных составляющих векторов поля деформации, а второе — только от горизонтальных. Покажем, что каждое из них неотрицательно.

Рассмотрим выражение \sum^v . Оно, как видно из леммы 6.11, состоит из двух частей: линейной \sum_l^v и нелинейной \sum_n^v . При этом, \sum_n^v представляет собой сумму модулей, поэтому неотрицательно. Мы покажем, что линейная часть \sum_l^v может быть всегда скомпенсирована нелинейной частью \sum_n^v .

Лемма 6.13. *Нулевой вклад в слагаемое \sum_l^v дают лишь векторы деформации тех вершин сети Φ , которые лежат на горизонтальных сечениях.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что ненулевой вклад в линейную часть \sum_l^v дают векторы деформации лишь в тех вершинах сети Φ , которые подвижны и которым инцидентно хотя бы одно вертикальное или свободное ребро. Более того, если такой вершине инцидентно два таких ребра, то вклад также равен нулю. Таким образом, вектор деформации в вершине сети Φ дает ненулевой вклад в \sum_l^v , только если эта вершина подвижна и среди инцидентных ей ребер имеется ровно одно невырожденное негоризонтальное ребро.

Пусть V — такая вершина и $V' = \pi(V)$ — ее проекция в Υ . Если V' инцидентно горизонтальному ребру (это заведомо так, если степень вершины V' больше 2), то вершина V , очевидно, принадлежит некоторому горизонтальному сечению. Предположим теперь, что степень вершины V' не превосходит 2. Если степень равна 1, то, в силу наших предположений о деформации Φ_t следа Υ , вершина V так же, как и V' , является граничной, что противоречит ее выбору. Если же степень равна 2, то

вершина V' — граничная, а вершина V имеет степень 3, и ей инцидентны два невырожденных ребра. В силу выбора вершины V одно из них является горизонтальным, что и требовалось. Доказательство закончено. ■

Таким образом, \sum_l^v раскладывается в сумму слагаемых $\sum_l^v(\gamma)$, каждое из которых соответствует вершинам некоторого горизонтального сечения γ сети Φ . Мы покажем, что каждое такое слагаемое можно скомпенсировать независимо от других.

Пусть γ — горизонтальное сечение сети Φ и $T(\gamma)$ — его расширение. По определению сечения, все горизонтальные ребра дерева $T(\gamma)$ содержатся в γ . Кроме того, все вырожденные ребра из $T(\gamma)$ лежат, очевидно, в прообразе множества вершин из соответствующего сечения γ' сети Υ . Поэтому расширения двух различных горизонтальных сечений сети Φ не пересекаются ни по горизонтальным, ни по вырожденным ребрам. С другой стороны, в силу леммы 6.11, величина \sum_n^v равна сумме по всем горизонтальным и вырожденным ребрам выражений, каждое из которых зависит только от векторов поля направлений на границе соответствующего ребра. Таким образом, \sum_n^v не меньше, чем сумма по всем горизонтальным сечениям величин $\sum_n^v(\gamma)$, где через $\sum_n^v(\gamma)$ обозначен вклад в нелинейную часть ребер из $T(\gamma)$. Наша цель — показать, что

$$\sum_l^v(\gamma) + \sum_n^v(\gamma) \geq 0. \quad (*)$$

Покажем это. Обозначим левую часть последнего неравенства через $\sum^v(\gamma)$.

Прежде всего, отметим, что выражение $\sum^v(\gamma)$, по определению, зависит только от вертикальных составляющих векторов поля деформации. Поэтому при доказательстве неравенства (*) можно предполагать, что поле деформации вертикально.

В дальнейшем нам понадобится подправить сеть Υ и деформацию Φ_t , сохраняя справедливость неравенств из условия теоремы и не меняя ни линейной части \sum_l^v , ни нелинейной части \sum_n^v (то же и для горизонтальных компонент).

Лемма 6.14. *В сделанных выше предположениях на деформацию Φ_t предположим, что имеет место одна из двух возможностей.*

- (1) *Вектор поля деформации равен нулю в некоторой подвижной вершине V сети Φ .²*
- (2) *Вектор поля деформации равен нулю в некоторой внутренней точке V ребра e сети Φ .*

² По условию, V является единственной неподвижной при деформации Φ_t вершиной из $\pi^{-1}(\pi(V))$.

Перестроим сеть Φ и сеть Υ , добавив точку V и, соответственно, точку $\pi(V)$ к множествам граничных вершин этих сетей. Полученные сети обозначим через $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Upsilon}$. Тогда сеть $\overline{\Phi}$ проецируется на $\overline{\Upsilon}$, сеть $\overline{\Upsilon}$ является каноническим представителем соответствующего следа, и для $\overline{\Upsilon}$ по-прежнему выполняются все условия теоремы. Деформация Φ_t порождает деформацию $\overline{\Phi}_t$ параметрической сети $\overline{\Phi}$ и задает локальную деформацию следа $\overline{\Upsilon}$. Линейные и нелинейные части вертикальной и горизонтальной составляющих формулы первой вариации деформаций Φ_t и $\overline{\Phi}_t$ совпадают.

Лемма 6.14 дает возможность предполагать, без ограничения общности, что деформация Φ_t оставляет на месте лишь граничные вершины сети Φ , и все ненулевые векторы деформации сонаправлены с осью ординат, т.е. направлены вверх.

Пусть, как и выше, γ' — сечение сети Υ . Разрежем γ' по всем неконцевым вершинам, инцидентным всем ребрам из C_1 , не являющимся плавающими. Замыкания полученных компонент обозначим через γ'_i .

Рассмотрим произвольную компоненту γ'_i . Разобьем вершины из γ'_i на два класса, U_1 и U_2 , отнеся к первому из них все вершины, инцидентные ребрам из C_1 . Ориентируем γ'_i одним из двух возможных способов и, тем самым, упорядочим вершины из γ'_i .

Лемма 6.15. *Класс U_1 не может содержать более двух последовательных вершин.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим минимальный фрагмент δ , содержащий три последовательные вершины из U_1 . Для этого фрагмента имеем:

$$t_1^n = 1, \quad t_1^s \leq 2, \quad t_2^n = t_2^s = v^s = 0, \quad e^s \leq 2,$$

поэтому

$$\text{ind}(\delta) = 2(t_1^n - t_2^n) + t_1^s - t_2^s = 2 + t_1^s,$$

а

$$\text{stat}(\delta) = 2v^s + e^s = t_1^s,$$

что противоречит предположениям теоремы. Лемма доказана. \blacksquare

Лемма 6.16. *Между любыми двумя парами H_1 и H_2 соседних вершин из U_1 всегда находится пара соседних вершин из U_2 .*

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что между H_1 и H_2 нет других пар соседних вершин из U_1 . Предположим противное, т.е. между H_1 и H_2 нет пары последовательных вершин из U_2 .

Рассмотрим наименьший фрагмент δ , содержащий H_1 и H_2 . Обозначим через u_i количество вершин в $U_i \cap \delta$. Из леммы 6.15 вытекает, что $u_2 = u_1 - 3$. С другой стороны,

$$u_2 = v^s + t_2^n + t_2^s - t_1^s + 2, \quad u_1 = t_1^n + 2,$$

откуда $t_1^n = v^s + t_2^n + t_2^s - t_1^s + 3$. Однако, в силу леммы 6.12, имеет место неравенство $t_1^n \leq t_2^n + v^s + t_2^s$, откуда $t_1^s \geq 3$. Но $t_1^s \leq 2$, так как к неконцевым вершинам из γ'_i не крепятся статичные ребра из C_1 . Противоречие. Лемма доказана. ■

Из лемм 6.15 и 6.16 вытекает следующий результат.

Лемма 6.17. *Каждую неконцевую вершину из класса U_1 можно объединить в пару с соседней с ней вершиной из U_2 так, чтобы полученные пары не пересекались.*

Доказательство. Предположим сначала, что существует хотя бы одна пара $H = \{h_1, h_2\}$ соседних вершин из класса U_1 . Если обе эти вершины концевые, то класс U_1 состоит из двух концевых вершин и утверждение леммы тривиально. Пусть одна из рассматриваемых вершин, скажем h_2 , не является концевой. Обозначим через b_1 отличную от h_1 соседнюю с h_2 вершину из γ'_i . В силу леммы 6.15 $b_1 \in U_2$. В качестве первой пары выберем $\{h_2, b_1\}$.

Будем теперь двигаться от пары H в сторону b_1 , продолжая строить разбиение на пары, до тех пор, пока не дойдем до концевой вершины из γ'_i . Если обе вершины из H неконцевые, то будем двигаться одновременно в обе стороны от H . Для каждой следующей неконцевой вершины h из U_1 поступим так.

Если предшествующая h вершина x принадлежит U_2 и еще не входит ни в одну пару, то в качестве следующей пары возьмем $\{x, h\}$ и продолжим движение. Иначе, в силу лемм 6.15 и 6.16, следующая за h вершина y принадлежит U_2 , и в качестве следующей пары мы возьмем $\{h, y\}$ и продолжим движение.

Покажем, что описанная процедура корректна, и в результате мы всегда дойдем до концевой вершины из γ'_i . Фрагмент γ'_i разбивается парами соседних вершин из U_1 на несколько более мелких фрагментов γ'_{ij} . Каждый из таких фрагментов или ограничен с двух сторон парами соседних вершин из U_1 , или такая пара расположена на одном конце фрагмента γ'_{ij} , а второй его конец совпадает с концевой вершиной из γ'_i .

Предположим сначала, что γ'_{ij} ограничен двумя парами H_1 и H_2 смежных вершин из U_1 . В силу леммы 6.16 фрагмент γ'_{ij} содержит па-

ру соседних вершин из U_2 , и все вершины из U_1 , лежащие внутри γ'_{ij} , перемежаются вершинами из U_2 . Поэтому, как легко видеть, наша процедура, начав с первой пары H_i , построит требуемые пары для всех вершин из U_1 , лежащих внутри γ'_{ij} , и перейдет к последней вершине из γ'_{ij} . Если же фрагмент γ'_{ij} ограничен ровно одной парой H_1 соседних вершин из U_1 , то, по определению, при движении по γ'_{ij} от этой пары за каждой внутренней вершиной из U_1 следует вершина из U_2 . Поэтому наша процедура, начав с H_1 , снова построит требуемые пары для всех вершин из U_1 , лежащих внутри γ'_{ij} , и перейдет к концевой вершине из γ'_{ij} .

Рассмотрим теперь оставшуюся возможность: предположим, что на фрагменте γ'_i нет соседних вершин из U_1 . Тогда все вершины из U_1 , лежащие внутри γ'_i , с двух сторон соседствуют с вершинами из U_2 . Требуемые пары теперь строятся очевидным образом. Лемма доказана. ■

Обозначим через $U_2(\gamma')$ объединение множеств U_2 по всем фрагментам γ'_i . Из леммы 6.17 вытекает следующий результат.

Лемма 6.18. *Каждую плавающую вершину из сечения γ' можно объединить в пару с некоторой соседней с ней вершиной из U_2 так, чтобы полученные пары не пересекались.*

Доказательство. Искомое множество пар получается как объединение всех пар, построенных для фрагментов γ'_i с помощью леммы 6.17. Так как пары, соответствующие одному фрагменту γ'_i , не пересекаются по построению, остается проверить, что не пересекаются также и пары, соответствующие смежным фрагментам. Действительно, каждые два смежных фрагмента γ'_i и γ'_j пересекаются по вершине, которая, в каждом из фрагментов, относится к классу U_1 и, являясь концевой, не входит ни в одну пару. Лемма доказана. ■

Отметим, что вершинам из $U_2(\gamma')$ не инцидентны ребрам из класса C_1 .

Вернемся к изучению деформации Φ_t . Напомним, что в линейную вертикальную часть $\sum_l^v(\gamma)$ ее первой вариации дают неположительный вклад как плавающие вершины, так и другие неграничные вершины, инцидентные ребрам из C_1 . Для получения требуемой оценки на $\sum^v(\gamma)$ мы включим каждую такую вершину в некоторый путь Ψ в сети Φ .

Рассмотрим сначала произвольную пару $\{h, x\}$ из леммы 6.18, где h — плавающая вершина, а x — вершина из U_2 . Обозначим через e_h единственное ребро из C_1 , инцидентное h .

Построим по паре $\{h, x\}$ путь Ψ в сети Φ так. Имеется две возможности: или x — граничная вершина сети Υ , или x — подвижная вершина

степени 3 этой сети. В первом случае Ψ — это единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Φ , соединяющий единственную проектирующуюся в x граничную вершину X сети Φ и единственное невырожденное ребро E_h сети Φ , проектирующиеся в e_h . Во втором случае обозначим через e_x единственное ребро из C_2 , инцидентное x , и определим Ψ как единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Φ , соединяющий ребро E_h и единственное невырожденное ребро E_x сети Φ , проектирующиеся в e_x .

Пусть E — неплавающее ребро из C_1 , инцидентное сечению γ . Построим по ребру E путь Ψ в сети Φ так. Обозначим через e проекцию ребра E в Υ , и пусть x — вершина сечения γ' сети Υ , инцидентная e . Имеется две возможности: или вершина x — граничная вершина сети Υ , или подвижная вершина этой сети. В первом случае Ψ — это единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Φ , соединяющий единственную проектирующуюся в x граничную вершину X сети Φ и ребро E . Во втором случае обозначим через e_x единственное ребро из C_2 , инцидентное x , и определим Ψ как единственный путь в расширении $T(\gamma)$ сечения γ сети Φ , соединяющий ребро E и единственное невырожденное ребро E_x сети Φ , проектирующееся в e_x .

По построению, имеет место следующий результат.

Лемма 6.19. *Пусть γ — произвольное сечение сети Φ . Построенные выше для сечения γ пути $\{\Psi\}$ попарно не пересекаются и содержат все вершины, дающие отрицательный вклад в $\sum_l^v(\gamma)$.*

Пусть V_1, \dots, V_k — последовательные внутренние вершины пути Ψ , занумерованные от единственного ребра E_1 из Ψ , входящего в C_1 . Отметим, что ни одна вершина V_j не является граничной вершиной сети Φ , а ребра, соединяющие последовательные V_j , — вырождены. Обозначим через ξ_j проекцию вектора поля деформации в вершине V_j на вертикальную ось. Имеется две возможности: или концевое ребро E_2 пути Ψ , отличное от E_1 , вырождено, или не вырождено. В последнем случае $E_2 \in C_2$ по построению.

В первом случае суммарный вклад векторов ξ_j в $\sum^v(\gamma)$ имеет вид:

$$-\xi_1 + |\xi_1 - \xi_2| + \dots + |\xi_{k-1} - \xi_k| + |\xi_k| \geq -\xi_1 + |\xi_1| \geq 0.$$

Во втором случае суммарный вклад векторов ξ_j в $\sum^v(\gamma)$ имеет вид:

$$-\xi_1 + |\xi_1 - \xi_2| + \dots + |\xi_{k-1} - \xi_k| + \xi_k \geq -\xi_1 + \xi_k + |\xi_1 - \xi_k| \geq 0.$$

Таким образом, суммарный вклад векторов ξ_j в $\sum^v(\gamma)$ всегда неотрицателен. Теперь из леммы 6.19 вытекает, что $\sum^v(\gamma)$ неотрицательна. Доказательство теоремы 6.14 закончено. ■

Следствие 6.23. Пусть Υ — вложенная невырожденная локально минимальная манхеттенская сеть, т.е. Υ совпадает со своей невырожденной компонентой. Тогда для каждого фрагмента γ имеют место следующие соотношения.

- Числа t_i^s и v^s не превосходят 2 и целиком определяются видом концевых вершин фрагмента.
- Более того, $v^s + t_i^s \leq 2$ для $i = 1, 2$.

6.5. Д. П. Ильютко.

N -нормированные плоскости

Настоящий раздел посвящен изучению локально минимальных и экстремальных сетей на n -нормированных плоскостях. Напомним, что n -нормированной плоскостью (\mathbb{R}^2, ρ) называется плоскость \mathbb{R}^2 с нормой ρ , где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным $2n$ -угольником, вписанным в евклидову единичную окружность S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс.

6.5.1. Локально минимальные сети на n -нормированных плоскостях

Введем некоторые понятия.

Определение. Сеть, затачивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой сети, затачивающей данное множество.

Определение. Сеть называется *локально минимальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является кратчайшим.

Положим $\mu_i = (\cos \frac{\pi}{n}i, \sin \frac{\pi}{n}i)$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Отметим, что $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2n-1}$ — последовательность вершин многоугольника Σ .

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная невырожденная линейная сеть и γ — некоторое ребро сети Γ , ориентированное одним из двух возможных способов. Если направление этого ребра приходит во внутреннюю точку стороны $2n$ -угольника Σ , то будем говорить, что *замыкание направления ребра γ равно этой стороне $2n$ -угольника Σ* , а если

направление этого ребра приходит в вершину $2n$ -угольника Σ , то будем говорить, что замыкание направления ребра γ равно этой вершине $2n$ -угольника Σ . Обозначим через $\mathfrak{fl}(\gamma)$ замыкание направления ребра γ .

Для любых подмножеств A и B из $2n$ -угольника Σ обозначим через $\alpha(A, B)$ точную нижнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$, а через $\beta(A, B)$ — точную верхнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$. Если γ_1 и γ_2 — два смежных ребра, то в выражениях $\alpha(\mathfrak{fl}(\gamma_1), \mathfrak{fl}(\gamma_2))$ и $\beta(\mathfrak{fl}(\gamma_1), \mathfrak{fl}(\gamma_2))$ под замыканиями $\mathfrak{fl}(\gamma_i)$ будем понимать замыкания для ребер γ_i , $i = 1, 2$, ориентированных от их общей вершины.

Приведем полное описание локальной структуры локально минимальных сетей. Аналогичные результаты были независимо получены в [143].

Теорема 6.15. *Невырожденная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с некоторой границей на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) является локально минимальной, если и только если одновременно выполняются следующие условия:*

- (1) *каждая вершина степени 1 — граничная;*
- (2) *для любых двух смежных ребер γ_i и γ_j выполняется неравенство*

$$\alpha(\mathfrak{fl}(\gamma_i), \mathfrak{fl}(\gamma_j)) \geq \frac{\pi}{n} \left[\frac{2n-1}{3} \right];$$
- (3) *если γ_1 и γ_2 — ребра, инцидентные внутренней вершине степени 2, то*

$$\alpha(\mathfrak{fl}(\gamma_1), \mathfrak{fl}(\gamma_2)) \geq \pi - \frac{\pi}{n};$$
- (4) *для любых двух соседних ребер γ_i и γ_j , инцидентных внутренней вершине степени k , $k \geq 3$, выполняется неравенство*

$$\beta(\mathfrak{fl}(\gamma_i), \mathfrak{fl}(\gamma_j)) \leq \frac{\pi}{n} \left(\left[\frac{2n}{3} \right] + 4 - k \right).$$

Замечание. Из теоремы 6.15 вытекает, что степень граничной вершины не превосходит 6, а степень внутренней — 4. Действительно, при $n \neq 3$ из пункта 2) теоремы 6.15 вытекает, что угол между ребрами γ_i и γ_j не меньше $\frac{\pi}{2}$, поэтому при таких n степень как внутренней, так и граничной вершины не превосходит 4. При $n = 3$ пункт 2) теоремы гарантирует, что степень вершины не может быть больше 6, однако пункт 4) теоремы ограничивает степень внутренней вершины четверкой.

Замечание. Из пункта 2) теоремы 6.15 видно, что вершины степени 4 могут возникнуть только для $n = 2, 3, 4, 6$. При этом, в случаях $n = 2, 4, 6$ направления ребер обязаны приходить в вершины $2n$ -угольника Σ и углы между соседними выходящими из этой вершины ребрами должны равняться $\frac{\pi}{2}$. Тем самым, условие пункта 4) не накладывает дополнительных ограничений на локальную структуру таких вершин.

Если же $n = 3$, то ситуация существенно сложнее. Оказывается, можно построить невырожденные линейные сети, состоящие из четырех, пяти или шести ребер, инцидентных внутренней вершине, такие, что условия 1), 2) и 3) теоремы выполняются, но сеть не локально минимальна, см. рис. 6.7 (замыкание направления каждого ребра γ_i равно вершине из Σ , и все углы (за исключением одного для случаев $\deg(z) = 4, 5$) между соседними ребрами равны $\frac{\pi}{3}$). Тем самым, для внутренних вершин степени 4, 5, 6 условие пункта 4) накладывает существенные ограничения только для $n = 3$. Иными словами, при $n \neq 3$ условие пункта 4) для вершин степени 4 является избыточным.

Далее, для внутренних вершин степени 3 условие пункта 4) избыточно тогда и только тогда, когда $2n \equiv 1 \pmod{3}$. Если же $2n \not\equiv 1 \pmod{3}$, то при каждом таком n существуют невырожденные линейные сети, состоящие из трех ребер, инцидентных внутренней вершине, такие, что условия 1), 2) и 3) теоремы выполняются, но сеть не локально минимальна, см. рис. 6.8 (замыкание направления каждого ребра γ_i равно вершине из Σ , а $\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_2)) = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{n}$, $\alpha(\text{fl}(\gamma_2), \text{fl}(\gamma_3)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{n}$, $\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_3)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{n}$ для $2n \equiv 0 \pmod{3}$, и $\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_2)) = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3n}$, $\alpha(\text{fl}(\gamma_2), \text{fl}(\gamma_3)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3n}$, $\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_3)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3n}$ для $2n \equiv 2 \pmod{3}$). Таким образом, при $n \neq 3$ условие пункта 4) теоремы 6.15 можно заменить условием 4'):

4') для любых двух соседних ребер γ_i и γ_j , инцидентных внутренней вершине степени не меньше 3, выполняется неравенство $\beta(\text{fl}(\gamma_i), \text{fl}(\gamma_j)) \leq \frac{\pi}{n} \left(\lceil \frac{2n}{3} \rceil + 1 \right)$.

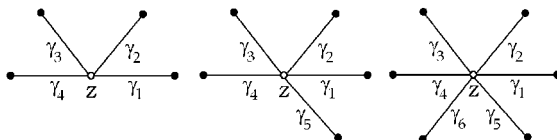


Рис. 6.7. Нелокально минимальные сети, $\deg(z) = 4, 5, 6$.

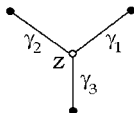


Рис. 6.8. Нелокально минимальная сеть, $\deg(z) = 3$.

Чтобы более наглядно представить локальную структуру невырожденных линейных локально минимальных сетей, мы введем следующие понятия.

Рассмотрим произвольный вектор ξ , и пусть K — некоторое подмножество окружности Σ . Свойство вектора ξ , состоящее в том, что направление этого вектора лежит в K , будем записывать так: $\text{type}(\xi) = K$, при этом будем говорить, что *вектор ξ имеет тип K* . Кроме того, часто мы будем отождествлять $\text{type}(\xi)$ и множество K . Далее, если

$K = \{\mu_i\}$, где μ_i , $i = 0, \dots, 2n - 1$, — вершина из Σ , то будем писать $\text{type}(\xi) = \mu_i$ и будем говорить, что *вектор ξ имеет точечный тип*. При этом, если нам неважно, чему равно i , то будем писать $\text{type}(\xi) = *$. Далее, если K отлично от вершины из Σ , то будем говорить, что *вектор ξ имеет неточечный тип*. Если K состоит из всех точек сторон $\mu_i\mu_{i+1}, \mu_{i+1}\mu_{i+2}, \dots, \mu_{i+k-1}\mu_{i+k}$ многоугольника Σ , причем вершины μ_i и μ_{i+k} могут быть включены, а могут и нет, то будем писать $\text{type}(\xi) = [\mu_i, \mu_{i+k}]$, (μ_i, μ_{i+k}) , $[\mu_i, \mu_{i+k})$ или $(\mu_i, \mu_{i+k}]$ в зависимости от того, включена ли вершина μ_i или μ_{i+k} (соответствует “[” или “]”) или нет (соответствует “(” или “)”). При этом, если известно, что K состоит из всех точек некоторой стороны многоугольника Σ , но при этом нам неважно, из какой, то будем писать $\text{type}(\xi) = \square$, $()$, $] \text{ или } [$ в зависимости от того, включена или нет граничная вершина стороны.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная невырожденная линейная сеть и γ — некоторое ребро сети Γ , ориентированное одним из двух возможных способов. Так как такое γ можно рассматривать как вектор, то для γ определен тип, который мы будем обозначать через $\text{type}_e(\gamma)$.

Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные смежные ребра сети Γ , ориентированные от общей вершины. Будем говорить, что *пара (γ_1, γ_2) имеет погрешность k* , и будем писать $\text{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = k$, если

$$\alpha(\text{type}_e(\gamma_1), \text{type}_e(\gamma_2)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{k\pi}{3n}.$$

На рис. 6.9 показаны два ребра γ_1 и γ_2 типа K_1 и K_2 соответственно, их направления и угол $\alpha = \alpha(\text{type}_e(\gamma_1), \text{type}_e(\gamma_2))$.

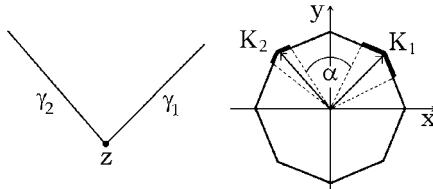
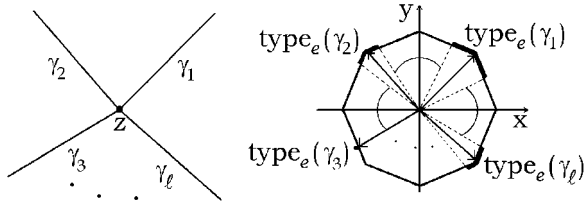


Рис. 6.9. Погрешность $\text{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = n\left(2 - \frac{3\alpha}{\pi}\right)$.

Введем понятие *типа вершины z* и обозначим его через $\text{type}_v(z)$. Пусть вершина z сети Γ имеет степень l и $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ — все выходящие из z ребра, ориентированные от z . Без ограничения общности будем считать, что последовательные ребра γ_i , $i = 1, \dots, l$, имеют последова-

Рис. 6.10. Тип вершины z .

тельные направления при обходе начала координат в положительном направлении, см. рис. 6.10. Положим

$$\begin{aligned} \text{type}_v(z) = \\ = \left\{ \text{type}_e(\gamma_1), \dots, \text{type}_e(\gamma_l); \text{fall}(\gamma_1, \gamma_2), \text{fall}(\gamma_2, \gamma_3), \dots, \text{fall}(\gamma_{l-1}, \gamma_l) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 6.16. *Невырожденная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с некоторой границей на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) является локально минимальной, если и только если каждая вершина x сети Γ имеет степень, которая не превосходит 6, и один из следующих типов (с точностью до движения):*

(1) если $\deg(x) = 1$, то x — граничная вершина любого типа, т.е. $\text{type}_v(x) = \left\{ \square \right\}$;

(2) если $\deg(x) = 2$, то

(a) для внутренней вершины $\text{type}_v(x) = \left\{ \square, \square; 3 - n \right\}$;

(b) для граничной вершины при $2n \equiv k \pmod{3}$, $k = 1, 2, 3$, имеем $\text{type}_v(x) = \left\{ [\mu_i, \mu_{i+\frac{n+k}{3}}], [\mu_j, \mu_{j+\frac{n+k}{3}}]; k \right\}$;

(3) если $\deg(x) = 3$, то

(a) при $2n \equiv 0 \pmod{3}$ имеем $\text{type}_v(x) = \left\{ \square, \square, \square; 3, 3 \right\}$;

(b) при $2n \equiv k \pmod{3}$, $k = 1, 2$, имеем $\text{type}_v(x) = \left\{ *, \square, *; k, k \right\}$;

(c) если вершина граничная и $2n \equiv 0 \pmod{3}$, то $\text{type}_v(x) = \left\{ \square, \square, *; 0, 3 \right\}$;

(d) если вершина граничная и $2n \equiv 2 \pmod{3}$, то

$$\text{type}_v(x) = \{\square, \square, *, 2, 2\};$$

(4) если $\deg(x) = 4$, то $n = 2, 3, 4$ или 6, и

(a) при $n = 2, 4$ или 6 имеем $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, *, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\};$

(b) при $n = 3$ имеем $\text{type}_v(x) = \{*, \square, *, \square; 3, 3, 3\};$

(c) если вершина граничная и $n = 3$, то

$$\text{type}_v(x) = \{\square, \square, *, *, 3, 3, 3\};$$

(5) если $\deg(x) = 5$ или 6, то x — граничная вершина, $n = 3$, и

(a) если степень вершины равна 5, то

$$\text{type}_v(x) = \{\square, *, *, *, *, 3, 3, 3, 3\};$$

(b) если степень вершины равна 6, то

$$\text{type}_v(x) = \{*, *, *, *, *, *, 3, 3, 3, 3, 3\}.$$

6.5.2. Экстремальные сети на n -нормированных плоскостях, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$

В данном разделе мы опишем некоторые свойства экстремальных сетей на n -нормированных плоскостях, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ (если в утверждении нет ограничений на n , то это утверждение верно для любого n).

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\Gamma': G' \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольные сети, причем Γ' может быть слабо спроектирована на Γ .

Определение. Произвольную деформацию сети Γ' назовем *деформацией с расщеплением* сети Γ . При этом сеть Γ' будем называть *типом такого расщепления*.

Определение. Сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой неподвижной на границе деформации $\Gamma'_t: G'_t \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$, где $\Gamma'_{t=0} = \Gamma'$ — произвольный тип расщепления сети Γ , выполнено соотношение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} l(\Gamma'_t) \geq 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.17. *Каждая экстремальная невырожденная линейная сеть на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) является локально минимальной.*

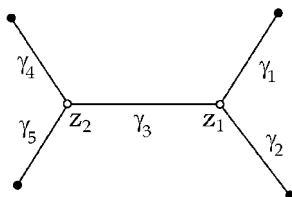


Рис. 6.11. Локально минимальная не экстремальная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$.

Замечание. Не каждая локально минимальная невырожденная линейная сеть на n -нормированной плоскости является экстремальной.

На рис. 6.11 изображена невырожденная линейная локально минимальная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$, с внутренними вершинами z_1 и z_2 типа $\{*, *, *, -2, 1\}$, где $\text{fall}(\gamma_1, \gamma_3) = -2$ и $\text{fall}(\gamma_3, \gamma_4) = -2$. При этом сеть в целом не является экстремальной.

Из теорем 6.15 и 6.16 видно, что для случая $2n \equiv 1 \pmod{3}$ степень вершины может равняться 4 только при $n = 2$, т.е. в случае манхеттенской плоскости. Полная классификация манхеттенских экстремальных сетей получена в [72], см. теорему 6.14, поэтому мы будем рассматривать только случай $n \geq 5$. Напомним устройство локально минимальных сетей на n -нормированной плоскости для случая $2n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 5$, вытекающие из теорем 6.15 и 6.16.

Следствие 6.24. *Невырожденная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с некоторой границей на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$, является локально минимальной, если и только если одновременно выполняются следующие условия:*

- (1) *каждая вершина степени 1 — граничная;*
- (2) *для любых двух смежных ребер γ_i и γ_j выполняется неравенство*

$$\alpha(\text{fl}(\gamma_i), \text{fl}(\gamma_j)) \geq \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3n};$$
- (3) *если γ_1 и γ_2 — ребра, инцидентные внутренней вершине степени 2, то*

$$\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_2)) \geq \pi - \frac{\pi}{n}.$$

Следствие 6.25. *Невырожденная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с некоторой границей на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$, является локально минимальной, если и только если каждая вершина x сети Γ имеет степень, которая не превосходит 3, и один из следующих типов (с точностью до движения):*

(1) если $\deg(x) = 1$, то x — граничная вершина любого типа, т.е. $\text{type}_v(x) = \{\square\}$;

(2) если $\deg(x) = 2$, то

(a) для внутренней вершины

$$\text{type}_v(x) = \{\square, \square; 3 - n\};$$

(b) для граничной вершины

$$\text{type}_v(x) = \left\{ [\mu_i, \mu_{i+\frac{n+1}{3}}], [\mu_j, \mu_{j+\frac{n+1}{3}}]; 1 \right\};$$

(3) если $\deg(x) = 3$, то $\text{type}_v(x) = \{*, \square, *; 1, 1\}$.

6.5.2.1. Существенные сети

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная невырожденная линейная сеть.

Определение. Максимальный путь в Γ , циклический или нет, все внутренние вершины которого имеют в Γ степень 2 и не являются граничными вершинами для Γ , назовем *нитью*.

Определение. Кусочно-регулярную кривую назовем *монотонной*, если направления всех векторов скорости этой кривой приходят на одну и ту же сторону $2n$ -угольника Σ .

Утверждение 6.5. *Каждая нить экстремальной линейной невырожденной сети на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) является монотонной кривой, и ее длина равна длине прямолинейного отрезка, который соединяет концы этой нити.*

Определение. Сеть Γ_l будем называть *линеаризацией* сети Γ , если она получена заменой всех нитей сети Γ на прямолинейные отрезки.

Из утверждения 6.5 заключаем.

Утверждение 6.6. *Невырожденная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ является экстремальной сетью на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) тогда и только тогда, когда все ее нити — монотонные кривые, и линеаризация Γ_l сети Γ является экстремальной сетью на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) .*

Из утверждения 6.6 следует, что для описания структуры экстремальных сетей достаточно ограничиться изучением сетей, которые не содержат нитей.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что рассматриваемая сеть не содержит нитей.

Определение. Граничное ребро сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *1-граничным*, если оно инцидентно граничной вершине степени 1.

Определение. Невырожденная линейная сеть без циклов на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$, называется *существенной*, если она одновременно удовлетворяет следующим условиям:

- (1) для любых двух смежных ребер γ_i и γ_j выполняются неравенства

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3n} \leq \alpha(\mathfrak{fl}(\gamma_i), \mathfrak{fl}(\gamma_j)) \leq \beta(\mathfrak{fl}(\gamma_i), \mathfrak{fl}(\gamma_j)) \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3n}$$

(в частности, все вершины сети имеют степени не выше 3);

- (2) все вершины степени 1 и 2 — граничные, а степени 3 — внутренние;
- (3) каждое неточечное ребро является 1-граничным, в частности, все не 1-граничные ребра — точечные;
- (4) каждая вершина степени 3 инцидентна точечному 1-граничному ребру;
- (5) в каждой вершине степени 2, инцидентной ребрам γ_1 и γ_2 таким, что одно из них является 1-граничным, выполняется равенство

$$\alpha(\mathfrak{fl}(\gamma_1), \mathfrak{fl}(\gamma_2)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3n}.$$

Замечание. Отметим, что любая существенная сеть локально минимальна.

Определение. Совокупность всех смежных 1-граничных ребер произвольной сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$, из общей вершины которых выходит не более одного не 1-граничного ребра, назовем *усами*. Вершину сети Γ , инцидентную усам, назовем *вершиной усов*. Усы назовем *изолированными*,

если вершина усов инцидентна только 1-граничным ребрам. Если усы состоят из k ребер, то назовем их k -усами.

Следующие два утверждения можно рассматривать как альтернативные определения существенной сети.

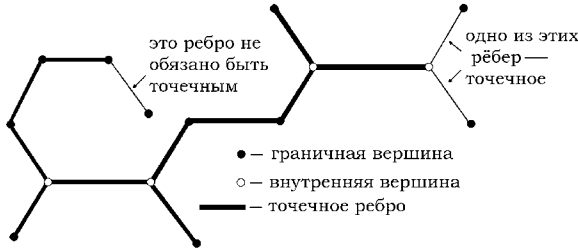


Рис. 6.12. Существенная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$.

Предложение 6.14. *Невырожденная линейная сеть без циклов на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$, является существенной, если и только если она одновременно удовлетворяет следующим условиям:*

- (1) *степени вершин сети не превосходят 3, при этом вершины степени 1 и 2 — граничные, а степени 3 — внутренние;*
- (2) *сеть является объединением пути, все неконцевые ребра которого — точечные, и точечных 1-граничных ребер, инцидентных некоторым внутренним вершинам этого пути;*
- (3) *угол между смежными точечными ребрами равен $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3n}$ или $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3n}$, а между точечным и неточечным ребрами лежит в пределах между $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3n}$ и $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3n}$;*
- (4) *углы между единственным ребром неизолированных 1-усов и смежным с ним ребром и между ребрами изолированных 2-усов строго меньше $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3n}$.*

На рис. 6.12 приведен пример существенной сети.

Предложение 6.15. *Невырожденная линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ без циклов на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$*

и $n \geq 5$, является существенной, если и только если каждая вершина x сети Γ имеет степень не выше 3 и удовлетворяет следующим условиям:

- (1) если $\deg(x) = 1$, то x — граничная вершина любого типа, т.е. $\text{type}_v(x) = \{\square\}$;
- (2) если $\deg(x) = 2$, то x — граничная вершина, причем если инцидентные x ребра — не 1-граничные, то $\text{type}_v(x) = \{*, *, -2\}$ или $\{*, *, 1\}$, иначе $\text{type}_v(x) = \{*, \square; 1\}$, и ребро типа \square — 1-граничное;
- (3) если $\deg(x) = 3$, то x — внутренняя вершина, причем если x — не вершина усов, то $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, 1, 1\}$, и одно из инцидентных x ребер является 1-граничным; иначе $\{*, \square, *, 1, 1\}$, и ребро типа \square — 1-граничное.

Определение. Пусть G — произвольный топологический граф. Измельчением графа G по ребру $e_\beta = [a, b]$ этого графа называется граф G' , полученный из G добавлением к множеству вершин графа G некоторой внутренней точки $c \in e_\beta$ и заменой ребра e_β на два ребра $[a, c]$ и $[c, b]$. При этом, в качестве границы графа G' возьмем границу графа G . Измельчение графа — это измельчение по некоторым наборам его ребер. Измельчение графа G естественным образом порождает измельчение сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Заметим, что любое измельчение локально минимальной (экстремальной) сети также локально минимально (экстремально). Обратно, если некоторое измельчение сети локально минимально (экстремально), то и сама сеть локально минимальна (экстремальна).

Поставим в соответствие каждой локально минимальной невырожденной линейной сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ без циклов на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$, набор существенных подсетей (набор может быть пустым) некоторого измельчения сети Γ , экстремальность которых равносильна экстремальности исходной сети. Сети из этого набора будем называть *существенными представителями* сети Γ . Для этого нам понадобятся следующие операции.

1) Определим операцию разрезания сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ по вершине $x = \{\Gamma: v \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ степени больше 1. Напомним, что топологический

граф G получается из конечной совокупности отрезков I_α некоторой склейкой по их концам. Пусть I_1, \dots, I_k — все те отрезки, концы которых a_i склеились в вершину v . Изменим отношение эквивалентности, задающую склейку концов отрезков I_α , перестав отождествлять точки a_i . Будем говорить, что граф G' , полученный в результате факторизации по так измененной эквивалентности, получается из графа G *разрезанием по вершине v* .

Пусть v_j — вершины графа G' , полученные из вершины v , а $\pi: G' \rightarrow G$ — естественная проекция, состоящая в отождествлении вершин v_j в одну вершину v . Обозначим через G_m связные компоненты графа G' . Определим границу ∂G_m графа G_m как множество тех вершин из G_m , которые при отображении π проектируются или в граничные вершины графа G , или в v . Кроме того, будем говорить, что сети $\Gamma_m: G_m \rightarrow \mathbb{R}^2$ с границами $\partial \Gamma_m: \partial G_m \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma_m = \Gamma \circ \pi|_{G_m}$, получены из сети Γ *разрезанием по граничной вершине x* .

2) Определим операцию разрезания сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ по ребру $\gamma = \{\Gamma: e_\beta \rightarrow \mathbb{R}^2\}$, где e_β — ребро графа G . Измельчим сеть Γ по e_β и разрежем по добавленной вершине. Обозначим через $\Gamma_m: G_m \rightarrow \mathbb{R}^2$ сети, полученные в результате разрезания, и будем говорить, что сети $\Gamma_m: G_m \rightarrow \mathbb{R}^2$ с границами $\partial \Gamma_m: \partial G_m \rightarrow \mathbb{R}^2$ получены из сети Γ *разрезанием по ребру γ* .

Существенные представители произвольной линейной локально минимальной сети без циклов Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная локально минимальная невырожденная линейная сеть без циклов на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$. Перейдем теперь непосредственно к построению существенных представителей сети Γ .

Измельчим сеть Γ по всем неточечным не 1-граничным ребрам и разрежем полученную сеть по всем добавленным вершинам, а также по всем граничным вершинам степени 2 типов

$$\left\{ (), (); 1 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ (\mu_i, \mu_{i+\frac{n-2}{3}}), (\mu_j, \mu_{j+\frac{n-2}{3}}); -2 \right\}$$

(это — все типы вершин степени 2 локально минимальных сетей, которые не могут встречаться в существенных сетях). Рассмотрим все связные компоненты $\Gamma_i: G_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, полученные в результате такого разрезания. Отметим, что все сети Γ_i — локально минимальны.

Утверждение 6.7. *Сеть Γ экстремальна тогда и только тогда, когда каждая сеть Γ_i экстремальна.*

Найдем условия экстремальности сетей Γ_i . Для этого нам понадобятся следующие определения.

Определение. Пусть G — топологический граф с границей ∂G и \overline{G} — подграф графа G . Граница $\partial \overline{G}$ графа \overline{G} называется *индуцированной из графа G* , если она состоит из всех вершин графа \overline{G} , принадлежащих ∂G , а также из тех вершин, которые в \overline{G} и G имеют различные степени.

Определение. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная сеть, $\partial \Gamma: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — ее граница. Сеть $\overline{\Gamma}: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ с границей $\partial \overline{\Gamma}: \partial \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *подсетью сети Γ* , если $\overline{\Gamma} = \Gamma|_{\overline{G}}$, где \overline{G} является подграфом графа G , и его граница $\partial \overline{G}$ индуцирована из G . Если подсеть $\overline{\Gamma}$ отлична от Γ , то она называется *собственной подсетью сети Γ* .

Утверждение 6.8. *Каждая подсеть локально минимальной (экстремальной) сети является локально минимальной (экстремальной).*

Определение. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная локально минимальная невырожденная линейная сеть и $\mathcal{P}: P \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная подсеть в Γ , являющаяся путем. *Отростком пути \mathcal{P}* будем называть каждое ребро сети Γ , не лежащее в \mathcal{P} и инцидентное неконцевой вершине пути \mathcal{P} . Подсеть сети Γ , полученная добавлением всех отростков к пути \mathcal{P} , называется *расширением пути*. Если добавляются те и только те отростки, которые инцидентны вершинам пути \mathcal{P} , внутренним для Γ , то расширение называется *внутренним*. Если все добавленные отростки являются точечными, то расширение называется *точечным*.

Вернемся к сетям Γ_i . Для каждой Γ_i рассмотрим множество всех путей, соединяющих вершины степени 1 из Γ_i . Такие пути будем называть *секущими путями сети Γ_i* . Отметим, что не для каждого секущего пути внутреннее расширение является точечным. Секущие пути, которые допускают внутреннее точечное расширение, называются *внутренне-точечными*.

Рассмотрим множество $\{\Gamma_i^j: G_i^j \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ внутренних точечных расширений всех внутренне-точечных секущих путей сети Γ_i . На этом множестве имеется частичный порядок по включению ($\Gamma_i^j \leq \Gamma_i^k$, если Γ_i^j является подсетью Γ_i^k). Обозначим через $\overline{\mathfrak{M}}_i$ множество максимальных компонент из $\{\Gamma_i^j\}$ в таком порядке и положим $\overline{\mathfrak{M}} = \bigsqcup_i \overline{\mathfrak{M}}_i$. Элементы множества $\overline{\mathfrak{M}}$ будем называть *полусущественными представителями сети Γ* .

Теорема 6.18. *Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная локально минимальная невырожденная линейная сеть на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 5$, и $\overline{\mathfrak{M}}$ — набор полусущественных*

представителей сети Γ . Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если каждая сеть из $\overline{\mathfrak{M}}$ экстремальна.

На самом деле, множество $\overline{\mathfrak{M}}$ из теоремы 6.18 можно упростить.

Определение. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная невырожденная линейная сеть. Максимальный путь в Γ , все внутренние вершины которого имеют в Γ степень 2 и являются граничными вершинами для Γ типа $\{*, *; -2\}$, назовем *граничной нитью первого типа*. Граничную нить первого типа в сети Γ назовем *концевой*, если одно из концевых ребер этой нити является 1-граничным в сети Γ . Концевое ребро концевой нити первого типа называется *ребром крепления*, если оно не является 1-граничным.

Исключим из набора $\overline{\mathfrak{M}}$ все сети, являющиеся граничными нитями первого типа, а от оставшихся в $\overline{\mathfrak{M}}$ сетей отрезем все концевые нити, проделав разрезание по ребрам крепления. Полученное множество обозначим через \mathfrak{M} . Сети из множества \mathfrak{M} будем называть *существенными представителями сети Γ* .

Теорема 6.19. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная локально минимальная невырожденная линейная сеть на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 5$, и \mathfrak{M} — набор существенных представителей сети Γ . Тогда каждая сеть из \mathfrak{M} является существенной сетью. Сеть Γ экстремальна, если и только если каждая сеть из \mathfrak{M} экстремальна.

Опишем более подробно, как получить сети из набора $\overline{\mathfrak{M}}_i$, в предположении, что сеть Γ_i отлична от ребра.

Пусть $\overline{\Gamma}: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная локально минимальная сеть, не содержащая граничных вершин степени 2 типов

$$\{(0, 0); 1\}, \quad \{(\mu_i, \mu_{i+\frac{n-2}{3}}), (\mu_j, \mu_{j+\frac{n-2}{3}}); -2\}$$

и неточечных не 1-граничных ребер.

Определение. Вершины сети $\overline{\Gamma}$, имеющие степень больше 1 и инцидентные 1-граничному ребру, называются *предконцевыми*. Все граничные предконцевые вершины, а также вершины усов назовем *отмеченными*. Кроме того, каждую внутреннюю предконцевую вершину, инцидентную неточечному ребру, также назовем *отмеченной*.

Обозначим через \mathcal{F} множество всех отмеченных вершин сети $\overline{\Gamma}$.

Определение. Путь в $\bar{\Gamma}$, содержащий более одной вершины, называется *отмеченным*, если он соединяет вершины из \mathcal{F} и не содержит внутри себя вершин из \mathcal{F} , внутренних для $\bar{\Gamma}$. Путь в $\bar{\Gamma}$, содержащий ровно одну вершину x , называется *отмеченным*, если $x \in \mathcal{F}$, x является вершиной усов, и кроме того, в случае, когда $\bar{\Gamma}$ отлична от изолированных усов, x — граничная вершина степени 3 в $\bar{\Gamma}$.

Концевым расширением в сети $\bar{\Gamma}$ отмеченного пути $\mathcal{P}: P \rightarrow \mathbb{R}^2$, состоящего более чем из одной вершины, называется подсеть сети $\bar{\Gamma}$, полученная добавлением ребер из $\bar{\Gamma}$, инцидентных концевым вершинам из \mathcal{P} , причем в случае, когда концевая вершина из \mathcal{P} — граничная для $\bar{\Gamma}$, добавляется любое одно 1-граничное для $\bar{\Gamma}$ ребро, а в случае, когда концевая вершина из \mathcal{P} — внутренняя для $\bar{\Gamma}$, добавляются все ребра. *Концевым расширением* в сети $\bar{\Gamma}$ отмеченного пути $\mathcal{P}: P \rightarrow \mathbb{R}^2$, состоящего ровно из одной вершины, называется подсеть сети $\bar{\Gamma}$, полученная следующим образом. Если \mathcal{P} — внутренняя вершина для $\bar{\Gamma}$ (в этом случае $\bar{\Gamma}$ — изолированные усы), то расширение совпадает с сетью $\bar{\Gamma}$. Если же \mathcal{P} — граничная вершина для $\bar{\Gamma}$ (в этом случае \mathcal{P} — вершина k -усов, где $k \geq 2$), то концевое расширение получается из \mathcal{P} добавлением любой пары ребер из усов, инцидентных \mathcal{P} .

Если для отмеченного пути выполнить одновременно концевое и внутреннее расширение, то про результирующую сеть будем говорить, что она получена *концевым внутренним расширением отмеченного пути*.

Утверждение 6.9. *Каждый отмеченный путь в $\bar{\Gamma}$ является внутренне-точечным, и для него существует не более четырех концевых расширений в сети $\bar{\Gamma}$.*

Теорема 6.20. *Если сеть Γ_i отлична от ребра, то множество $\overline{\mathcal{M}}_i$ совпадает с множеством всех концевых внутренних расширений всех отмеченных путей в Γ_i .*

Пример. Рассмотрим локально минимальную невырожденную линейную сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ на n -нормированной плоскости, $n \geq 8$, изображенную на рис. 6.13. Ребра γ_{11} , γ_{17} , γ_{27} , γ_{31} и γ_{40} имеют неточечный тип, остальные все ребра — точечные. Вершины z_{10} , z_{11} , z_{13} , z_{27} , z_{29} , z_{32} , z_{33} и z_{36} являются внутренними, остальные — граничные. Типы вершин следующие: вершины z_2 , z_{16} , z_{19} , z_{20} , z_{21} и z_{39} имеют тип $\{*, *, 1\}$; вершины z_{36} , z_4 , z_{23} , z_{24} и z_{25} имеют тип $\{*, *, -2\}$; вершины z_5 , z_{22} , z_{37} и z_{38} имеют тип $\{*, *, -5\}$, вершина z_{40} имеет тип $\{(), *, 3 - n\}$,

вершины z_{17} и z_{18} имеют тип $\{*, () ; 1\}$, вершины $z_6, z_7, z_{10}, z_{13}, z_{29}, z_{33}$ и z_{36} имеют тип $\{*, *, * ; 1, 1\}$, вершины z_{11}, z_{26}, z_{27} и z_{32} имеют тип $\{*, (), * ; 1, 1\}$.

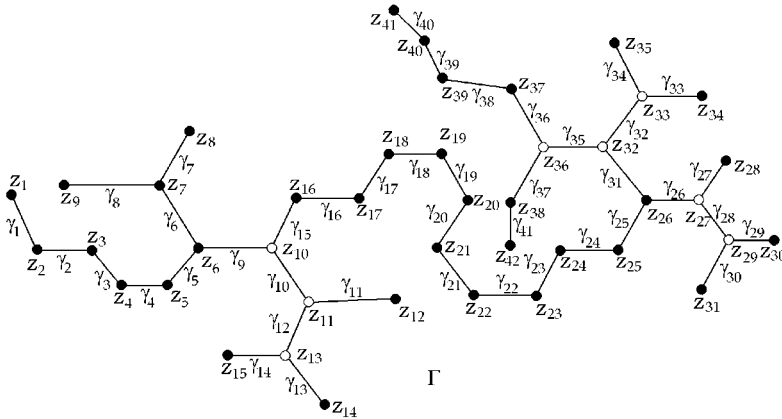


Рис. 6.13. Произвольная локально минимальная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 8$.

Разрежем сеть Γ по вершинам $z_5, z_{22}, z_{37}, z_{38}, z_{40}$ и по ребрам γ_{17}, γ_{31} . В результате получается набор сетей $\Gamma_i, i = 1, \dots, 8$, см. рис. 6.14. Обозначим через \mathcal{F}_i множество отмеченных вершин сети $\Gamma_i, i = 1, \dots, 6$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{z_2, z_4\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{z_6, z_7, z_{11}, z_{13}, z_{17}\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{z_{18}, z_{21}\}, \\ \mathcal{F}_4 &= \{z_{23}, z_{26}, z_{27}, z_{29}\}, \\ \mathcal{F}_5 &= \{z_{32}, z_{33}, z_{36}\}, \\ \mathcal{F}_6 &= \{z_{39}\}.\end{aligned}$$

Для каждой сети Γ_i рассматриваем множество отмеченных путей и все концевые внутренние расширения их. На рис. 6.15 изображено множество $\overline{\mathcal{M}}$. Только три сети Γ_1, Γ_4^1 и Γ_4^2 из множества $\overline{\mathcal{M}}$ содержат концевые нити. На рис. 6.16 приведены сети $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_4^1$ и $\bar{\Gamma}_4^2$, получающиеся

из сетей Γ_1 , Γ_4^1 и Γ_4^2 , соответственно, отрезанием концевых нитей. Множество \mathfrak{M} получается из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ заменой сетей Γ_1 , Γ_4^1 и Γ_4^2 на сети $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_4^1$ и $\overline{\Gamma}_4^2$.

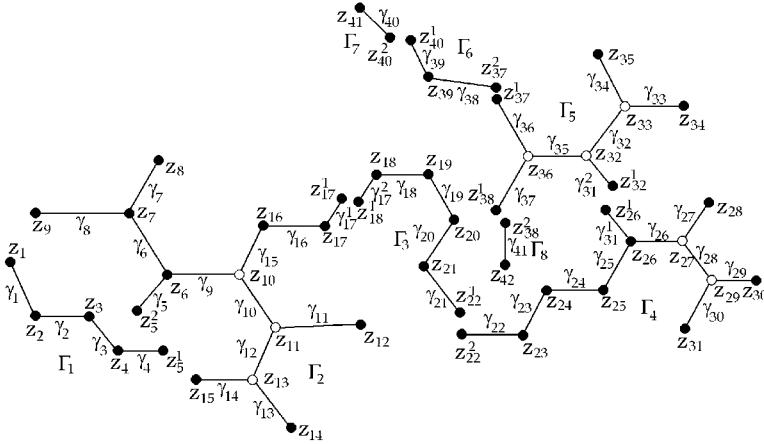
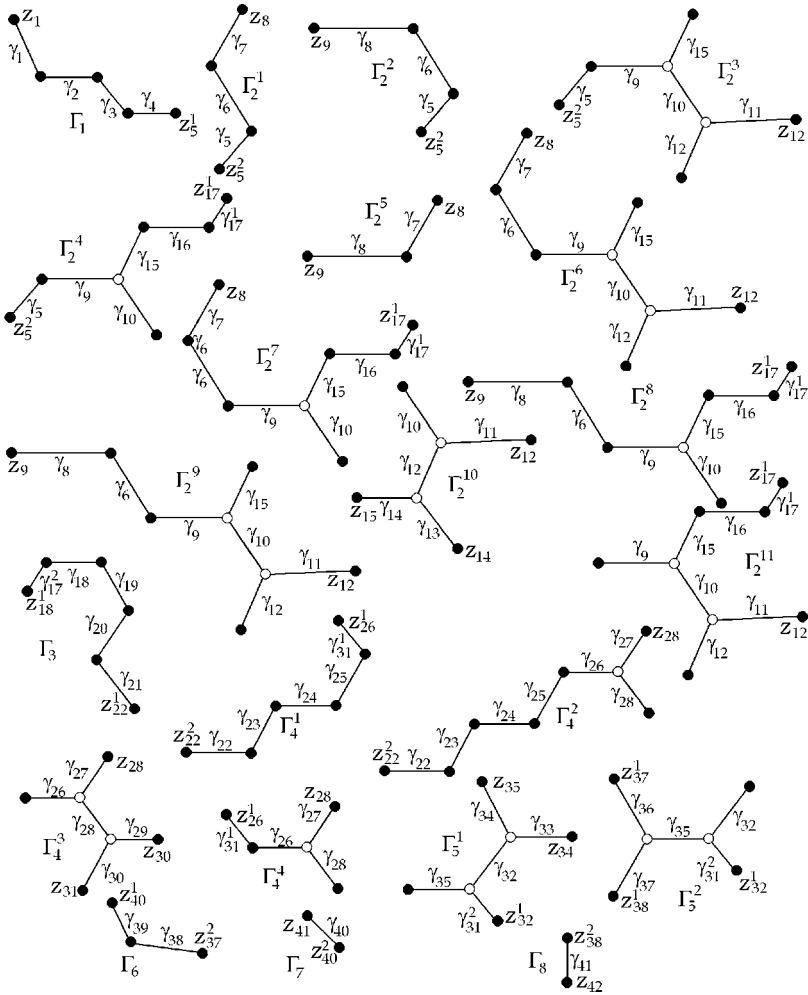


Рис. 6.14. Сети, полученные разрезанием сети Γ по вершинам z_5 , z_{22} , z_{37} , z_{38} , z_{40} и по ребрам γ_{17} , γ_{31} .

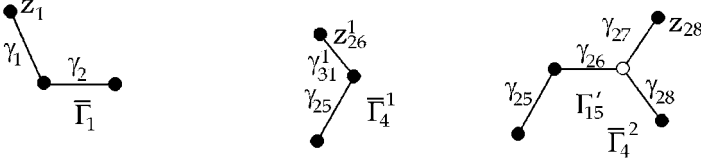
6.5.2.2. Допустимые деформации

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная сеть, $\mathcal{H} = \Gamma|_H: H \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторая ее приведенная компонента и $\overline{\Gamma} = \Gamma/\mathcal{H} = \Gamma|_{G/H}: G/H \rightarrow \mathbb{R}^2$ — сеть, полученная из Γ факторизацией по \mathcal{H} . Обозначим через $\pi: \Gamma \rightarrow \overline{\Gamma}$ каноническую проекцию, индуцированную проекцией $\pi: G \rightarrow G/H$, и пусть $x = \pi(\mathcal{H}) = \overline{\Gamma}|_{\pi(H)}: \pi(H) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Прообраз произвольной локальной сети $\overline{\Gamma}_{loc}(x) \subset \overline{\Gamma}$ для $\overline{\Gamma}$ с центром в x при отображении π назовем *сильно локальной сетью приведенной компоненты* \mathcal{H} .

Определение. Тип расщепления $\Gamma': G' \rightarrow \mathbb{R}^2$ сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ назовем *базовым*, если сильно локальная сеть $\mathcal{T}: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ каждой его приведенной компоненты $\mathcal{H}: H \rightarrow \mathbb{R}^2$ является бинарным деревом. При этом, если \mathcal{H} соответствует внутренней вершине сети Γ' , то все вершины степени 1 дерева \mathcal{T} не принадлежат \mathcal{H} . Если же \mathcal{H} соответствует граничной вершине Γ' , то \mathcal{H} содержит ровно одну вершину $x = \{\mathcal{T}: u \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ дерева \mathcal{T} степени 1, причем в этом случае $\partial\mathcal{H} = \{x\}$.

Рис. 6.15. Множество $\overline{\mathcal{M}}$ полусущественных сетей сети Γ .

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть. Нетрудно видеть, что любая существенная сеть имеет всего один базовый тип расщепления, который мы обозначим через $\Gamma': G' \rightarrow \mathbb{R}^2$. Пусть $z = \{\Gamma: u \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ — произвольная вершина сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Обозна-

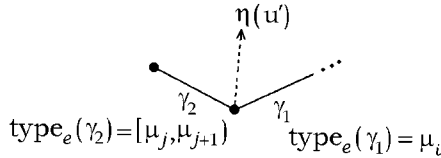
Рис. 6.16. Результат отрезания нитей от сетей Γ_1 , Γ_4^1 и Γ_4^2

чим через $\mathcal{H}(z) = \Gamma'|_{H(u)} : H(u) \rightarrow \mathbb{R}^2$ приведенную компоненту сети Γ' , такую, что $\mathcal{H}(z)(H(u)) = \Gamma(u)$. При этом, если z является внутренней вершиной степени 3, то $H(u) = u'$, где u' — внутренняя вершина степени 3, и если z — граничная вершина степени 2, то $H(u) = [u', v']$, где v' — граничная вершина степени 1, а u' — внутренняя вершина степени 3. Положим $z' = \{\Gamma' : u' \rightarrow \mathbb{R}^2\}$.

Определение. Деформация $\eta : V_{G'} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G') = 0$, сети Γ' называется *допустимой в вершине z'* , если или $\eta(u') = 0$, или $\eta(u')$ имеет следующий вид (с точностью до движения):

(1) если вершина z имеет степень 2 и

- (а) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, [\mu_j, \mu_{j+1}]; 1\}$, где $i < j$, и ребро типа $[\mu_j, \mu_{j+1}]$ — 1-граничное, то $\text{type}(\eta(u')) = \mu_{\frac{i+j+1}{2}}$, см. рис. 6.17;

Рис. 6.17. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, [\mu_j, \mu_{j+1}]; 1\}$, где ребро типа $[\mu_j, \mu_{j+1}]$ — 1-граничное.

- (б) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, \mu_j; -2\}$, где $i < j$, то $\text{type}(\eta(u')) = \mu_{\frac{i+j}{2}}$; см. рис. 6.18;

- (с) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, \mu_j; 1\}$, где $i < j$, то

$$\text{type}(\eta(u')) \in \{\mu_{\frac{i+j-1}{2}}, \mu_{\frac{i+j+1}{2}}\},$$

см. рис. 6.19;

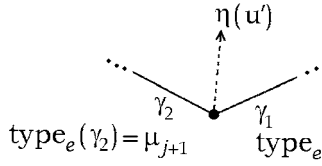


Рис. 6.18. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j; -2\}$.

(2) если вершина z имеет степень 3 и

- (a) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, (\mu_j, \mu_{j+1}), \mu_k; 1, 1\}$, и ребро типа μ_i — 1-граничное, то $\text{type}(\eta(u')) = \pm\mu_i$, см. рис. 6.20;

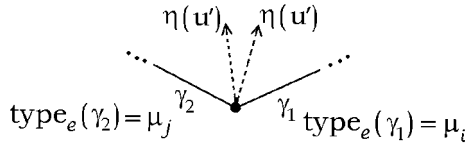


Рис. 6.19. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j; 1\}$.

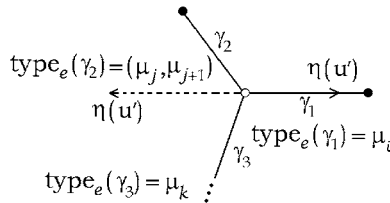


Рис. 6.20. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, (\mu_j, \mu_{j+1}), \mu_k; 1, 1\}$, где ребро типа μ_i — 1-граничное.

- (b) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, и ребра типа μ_i и μ_k — 1-граничные, то $\text{type}(\eta(u')) \in \{-\mu_i, -\mu_k\}$, см. рис. 6.21;
- (c) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, и ребра типа μ_i и μ_j — 1-граничные, то $\text{type}(\eta(u')) = \mu_j$, см. рис. 6.22;
- (d) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, и ребро типа μ_i — 1-граничное, то $\text{type}(\eta(u')) \in \{\mu_j, \pm\mu_i, -\mu_k\}$, см. рис. 6.23;

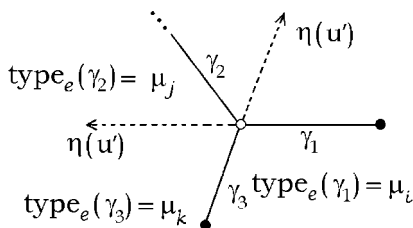


Рис. 6.21. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребра типа μ_i и μ_k — 1-граничные.

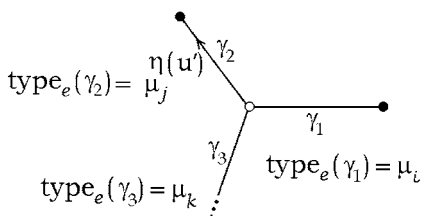


Рис. 6.22. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребра типа μ_i и μ_j — 1-граничные.

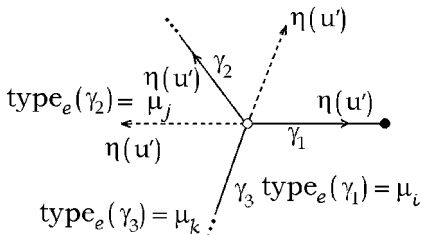


Рис. 6.23. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребро типа μ_i — 1-граничное.

- (e) $\text{type}_v(z) = \{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, и ребро типа μ_j — 1-граничное, то $\text{type}(\eta(u')) = \pm\mu_j$, см. рис. 6.24.

Определение. Деформация $\eta: V_{G'} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G') = 0$, сети Γ' называется *допустимой*, если она допустима в каждой вершине сети Γ' и удовлетворяет следующему условию: если $\gamma' = \{\Gamma': [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ — произвольное ребро сети Γ' и векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ одновременно не

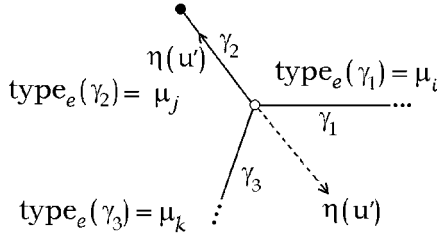


Рис. 6.24. Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребро типа μ_j — 1-граничное.

равны нулю и не параллельны образу ребра γ' , то вектор $\eta(u_1) - \eta(u_2)$ параллелен образу ребра γ' (условия $\eta(u_i) \neq 0$, $i = 1, 2$, и определение приведенной компоненты гарантируют, что γ' — невырожденное ребро).

Утверждение 6.10. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная существующая сеть на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , $2n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 5$, и $\Gamma': G' \rightarrow \mathbb{R}^2$ — единственный базовый тип ее расщепления. Положим $R_{\Gamma'}(x)$ — множество регулярных ребер сети Γ' , инцидентных вершине x сети Γ' . Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если для каждой допустимой деформации $\eta: V_{G'} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G') = 0$, следующая сумма по всем приведенным компонентам $\mathcal{H}(z): H(u) \rightarrow \mathbb{R}^2$ сети Γ' , где $z = \{\Gamma: u \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ — вершина сети Γ , неотрицательна:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\Gamma', \eta) = & \sum_{\substack{\mathcal{H}(z): u' \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \gamma'_i = \{\Gamma': [u', u'_i] \rightarrow \mathbb{R}^2\} \in \\ \in R_{\Gamma'}(z'), \quad i=1, 2, 3}} \left\langle \sum_{i=1}^3 p_{u'}(\gamma'_i, \eta(u'), \eta(u'_i)), \eta(u') \right\rangle + \\ + & \sum_{\substack{\mathcal{H}(z): [u', v'] \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \gamma'_i = \{\Gamma': [u', u'_i] \rightarrow \mathbb{R}^2\} \in \\ \in R_{\Gamma'}(z'), \quad i=1, 2}} \left\{ \left\langle \sum_{i=1}^2 p_{u'}(\gamma'_i, \eta(u'), \eta(u'_i)), \eta(u') \right\rangle + \rho(\eta(u')) \right\} \geq \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

Определение. Деформация $\eta: V_{G'} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G') = 0$, сети Γ' называется *строго допустимой*, если она допустима, не равна нулю в каждой внутренней вершине графа G' и удовлетворяет следующему условию: если $\gamma' = \{\Gamma': [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ — произвольное не 1-граничное невыро-

жденное ребро сети Γ' , то векторы $\eta(u_1)$ и $\eta(u_2)$ не параллельны, а вектор $\eta(u_1) - \eta(u_2)$ — параллелен образу ребра γ' .

Утверждение 6.11. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , $2n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 5$, и $\Gamma': G' \rightarrow \mathbb{R}^2$ — единственный базовый тип ее расщепления. Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если каждая собственная подсеть сети Γ экстремальна, и для каждой строго допустимой деформации $\eta: V_{G'} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G') = 0$, выполнено неравенство $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geq 0$.

Замечание. Из равенства $\mathfrak{D}(\Gamma', a\eta) = a\mathfrak{D}(\Gamma', \eta)$ для любого $a \geq 0$ вытекает, что неравенство $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geq 0$ из утверждения 6.11 достаточно проверить лишь для конечного числа строго допустимых деформаций. В качестве деформаций мы выбираем деформации η с $\|\eta\| = 1$, где $\|\eta\| = \max_{x \in V_{G'}} \|\eta(x)\|$. Пусть $\Lambda(\Gamma') = \{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ — все строго допустимые деформации для Γ' с единичной нормой. Далее, каждая сеть имеет конечное число собственных подсетей, и для проверки их экстремальности можно воспользоваться утверждением 6.11. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 6.21. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная существенная сеть на n -нормированной плоскости (\mathbb{R}^2, ρ) , где $2n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 5$, с единственным базовым типом $\Gamma': G' \rightarrow \mathbb{R}^2$ своего расщепления, и $\Gamma_m: G_m \rightarrow \mathbb{R}^2$, $m = 1, \dots, l$, — все ее собственные подсети с базовыми типами $\Gamma'_m: G'_m \rightarrow \mathbb{R}^2$ своего расщепления. Тогда сеть Γ экстремальна, если и только если для всех строго допустимых деформаций $\eta \in \Lambda(\Gamma')$ и $\eta_m \in \Lambda(\Gamma'_m)$ выполнены неравенства $\mathfrak{D}(\Gamma', \eta) \geq 0$, $\mathfrak{D}(\Gamma'_m, \eta_m) \geq 0$. Таким образом, условие экстремальности существенной сети сводится к проверке справедливости конечного числа неравенств на компоненты векторов η и η_m .

ГЛАВА 7

Отношение Штейнера

Данная глава посвящена современным результатам, связанным с изучением отношения Штейнера метрических пространств, в частности, римановых многообразий и нормированных пространств. Понятие отношения Штейнера возникает как характеристика “хорошести” приближенных решений проблемы Штейнера в данном метрическом пространстве, где в качестве приближения рассматривается минимальное остовное дерево на том же граничном множестве. Отметим, что отношение Штейнера (определение см. ниже) представляет собой нетривиальную характеристику метрического пространства, которая, хотя и не сводится к другим известным характеристикам, оказывается тесно связанной со многими из них, такими как число Юнга, число Хадвигера и пр.

В настоящей главе нам понадобятся не только топологические графы, но и стандартные комбинаторные графы, определение которых мы сейчас напомним.

Пусть V — произвольное конечное множество. (*Комбинаторным графом G на множестве V* называется пара (V, E) , где E — некоторое конечное семейство пар элементов множества V . В семействе E могут встречаться пары с одинаковыми элементами, а также одинаковые пары. Элементы из V называются *вершинами графа G* , а элементы из E — *ребрами графа G* . Ребра вида (v, v) называются *петлями*, а повторяющиеся пары из E называются *кратными ребрами*. Если задан граф G , то множество его вершин обычно обозначается через $V(G)$, а множество его ребер — через $E(G)$. Для удобства мы будем часто обозначать ребро $e = \{x, y\} \in E(G)$ через xy .

Граф G называется *взвешенным*, если на множестве его ребер задана неотрицательная функция $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. При этом число $\omega(e)$ называется *весом ребра $e \in E(G)$* . Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа G* и обозначается через $\omega(G)$. Если G — связный взвешенный граф, то из всех

связных остовных подграфов в G наименьшего веса всегда можно выбрать дерево, которое называется *минимальным остовным деревом* и обозначается через MST_G . Отметим, что если все веса строго больше нуля, то любой связный остовный подграф в G наименьшего веса является деревом.

Пусть X — множество, ρ — некоторая метрика на X и N — произвольное конечное подмножество в X . Пусть G — полный граф на множестве N . Метрика ρ порождает весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру $xy \in E(G)$ число $\rho(x, y)$. Эту весовую функцию мы будем обозначать той же буквой ρ . Минимальное остовное дерево во взвешенном графе G обозначим через MST_N . *Минимальным деревом Штейнера на множестве N или минимальным деревом Штейнера, затягивающим множество N* , называется дерево Γ , $N \subset V(\Gamma)$, для которого

$$\rho(\Gamma) = \inf_{\{N: \overline{N} \subset N\}} \rho(\text{MST}_{\overline{N}}), \quad (7.1)$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным подмножествам \overline{N} в X , содержащим N . Минимальное дерево Штейнера на множестве N обозначается через SMT_N .

Отметим, что, вообще говоря, не для всякого N существует SMT_N . Одной из причин этого может служить неполнота метрического пространства (X, ρ) , хотя, как показывает приводимый ниже пример, неполнота метрического пространства не гарантирует существование минимального дерева Штейнера.

Пример. Пусть X — множество неотрицательных целых чисел. Введем на X функцию расстояния $\overline{\rho}$, положив

$$\overline{\rho}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y. \end{cases}$$

Легко проверить, что $(X, \overline{\rho})$ — полное метрическое пространство¹. Положим $W = X \times X \times X$, и для любых $x = (x^1, x^2, x^3) \in W$ и $y = (y^1, y^2, y^3) \in W$ пусть $\rho(x, y) = \max_i \overline{\rho}(x^i, y^i)$. Ясно, что (W, ρ) — полное метрическое пространство. Наконец, определим множество N так: $N = \{A_1, A_2, A_3\}$, где $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 1)$ и $A_3 = (0, 1, 1)$.

Отметим, что треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний со сторонами длины 2, поэтому $\rho(\text{MST}_N) = 4$. С другой стороны, для произвольной

¹ Авторы пользуются случаем поблагодарить В. В. Рыжикова, сообщившего им об этой конструкции.

точки $S \notin N$ выполняется $\rho(A_i, S) > 1$, поэтому длина любого дерева, построенного на $N \cup \{S\}$, строго больше 3. С другой стороны, при $t > 1$ для $S = (t, t, t)$ имеем

$$\sum_i \rho(A_i, S) = 3 + \frac{3}{t} \rightarrow 3 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

поэтому $\rho(\text{SMT}_N) = 3$. Таким образом, в полном метрическом пространстве (W, ρ) не существует минимального дерева Штейнера, затягивающего N .

В приводимом ниже важном частном случае минимальные деревья Штейнера существуют для любого граничного множества.

Предложение 7.1. Пусть X — связное полное риманово многообразие, а ρ — расстояние между точками из X , равное точной нижней грани длин всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки. Тогда для любого конечного подмножества N в X существует затягивающее его минимальное дерево Штейнера.

Хотя, как мы видели, в случае общих метрических пространств минимальное дерево Штейнера может не существовать, тем не менее сама точная нижняя грань из определения SMT_N существует всегда. В дальнейшем, даже если SMT_N не существует, точную нижнюю грань (7.1) будем обозначать через $\rho(\text{SMT}_N)$.

Определение. Отношением Штейнера $m(X, \rho)$ метрического пространства (X, ρ) называется следующая величина:

$$m(X, \rho) = \inf_{\{N: N \subset X\}} \frac{\rho(\text{SMT}_N)}{\rho(\text{MST}_N)}.$$

7.1. Отношения Штейнера общих метрических пространств

Из определения вытекает, что $0 \leq m(X, \rho) \leq 1$. В действительности, отношение Штейнера лежит в более узких пределах, что вытекает из простого наблюдения, доказанного Муром, см. [12].

Предложение 7.2 (Е. Ф. Муром). Отношение Штейнера любого метрического пространства (X, ρ) не меньше $1/2$:

$$m(X, \rho) \geq \frac{1}{2}.$$

Предложение 7.3. Любое число, лежащее между $1/2$ и 1 , является отношением Штейнера некоторого метрического пространства.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $s \in (1/2, 1]$.

Лемма 7.1. Для любого $s \in (1/2, 1]$ существует метрическое пространство (X, ρ) , состоящее из конечного числа точек, такое, что $m(X, \rho) = s$.

Доказательство. Пусть $a \in [1, 2]$ — некоторое число. Рассмотрим специальное метрическое пространство (X, ρ) , состоящее из $(n+1)$ -й точки c, x_1, \dots, x_n , где $n \geq 1$, для которого расстояние $\rho(x, y)$ между разными точками x и y задается так:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} a, & \text{если } x = c \text{ или } y = c, \\ 2, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $n = 1$, то, очевидно, $m(X) = 1$.

Пусть теперь $n \geq 2$ и $s \in (0, 1)$. Выберем произвольное $N \subset X$, состоящее из $k > 1$ точек. Имеется два случая.

(1) $c \in N$. Тогда $\rho(\text{MST}_N) = a(k-1)$, так как дерево с k вершинами имеет $(k-1)$ ребро, а расстояние между разными точками в X не меньше a , откуда $\rho(\text{MST}_N) \geq a(k-1)$, но остовное дерево, соединяющее точку $c \in N$ с остальными точками из N , имеет длину $a(k-1)$. Далее, $\rho(\text{SMT}_N) = a(k-1)$ по тем же соображениям. Поэтому $\rho(N) = 1$.

(2) $c \notin N$. Тогда $\rho(\text{MST}_N) = 2(k-1)$, так как расстояние между любыми точками из N равно 2. Далее, если SMT_N не содержит дополнительных точек, то его длина равна $2(k-1)$. Если оно содержит одну дополнительную точку, совпадающую с c , то его длина равна ak . Если же оно содержит хотя бы одну дополнительную точку, отличную от c , то его длина больше или равна $\min(2(k-1), ak)$, поэтому $\rho(\text{SMT}_N) = \min(2(k-1), ak)$. Таким образом,

$$m(N) = \min\left(1, \frac{ak}{2(k-1)}\right),$$

откуда

$$\min_{N, c \notin N} m(N) = \min_{2 \leq k \leq n} \min\left\{1, \frac{ak}{2(k-1)}\right\} = \min\left\{1, \frac{an}{2(n-1)}\right\} = \frac{an}{2(n-1)},$$

где последнее равенство имеет место в силу того, что $n \geq 2$ и $a \leq 2$. Отсюда заключаем, что

$$m(X, \rho) = \frac{an}{2(n-1)}.$$

Нам осталось показать, что для любого $s \in (1/2, 1)$ существуют такие $a \in [1, 2]$ и $n \geq 2$, что

$$s = \frac{a n}{2(n-1)} \Leftrightarrow a = 2s \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Так как $1 < 2s < 2$ и $(1 - 1/n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то последнее действительно имеет место. Доказательство закончено. ■

Замечание. Можно показать [12], что отношение Штейнера для любого конечного подмножества произвольного метрического пространства строго больше $1/2$. Отсюда, в частности, вытекает, что ни для какого метрического пространства, состоящего из конечного числа точек, отношение Штейнера не может равняться $1/2$.

Нам осталось построить пример метрического пространства (X, ρ) , для которого отношение Штейнера равно $1/2$. В качестве X возьмем множество всех натуральных чисел и зададим на нем расстояние ρ следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2, & x > 1, y > 1, \\ 1, & x \neq y, x = 1 \text{ или } y = 1. \end{cases}$$

Тогда для любого конечного $N \subset X$, состоящего из n чисел, отличных от 1, $\rho(MST_N) = 2(n-1)$, а SMT_N имеет дополнительную вершину $s = 1$, соединенную ребрами со всеми точками из N , поэтому $\rho(SMT_N) = n$, откуда

$$\frac{\rho(SMT_N)}{\rho(MST_N)} = \frac{n}{2(n-1)},$$

что стремится к $1/2$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для такого метрического пространства $m(X, \rho) = 1/2$. Доказательство предложения закончено. ■

На самом деле, имеются важные достаточно широкие классы метрических пространств, на которых достигаются максимальное и минимальное возможные значения отношения Штейнера.

Напомним, что метрика называется *ультраметрикой*, если для любых точек x, y и z выполняется $\rho(x, z) \leq \max(\rho(x, y), \rho(y, z))$. Соответствующее метрическое пространство называется *ультраметрическим*.

Предложение 7.4. *Отношение Штейнера ультраметрического пространства равно 1.*

Напомним определение филогенетического пространства. Пусть A — некоторое конечное множество, которое мы будем называть *буквами*, и A^* — семейство всевозможных конечных последовательностей, составленных из букв. Элементы из A^* называются *словами*. К каждому слову можно применить одну из трех редакторских операций: вставку буквы, удаление буквы и замена одной буквы на другую. Легко видеть, что с помощью таких редакторских операций можно из данного слова получить любое другое. Естественно, переход от одного слова к другому можно осуществить разными последовательностями редакторских операций. Определим *расстояние* между двумя словами из A^* как наименьшее число редакторских операций, переводящих одно из этих слов в другое. Легко показывается, что определенное расстояние на элементах из A^* удовлетворяет аксиомам метрики и, значит, превращает A^* в метрическое пространство. Это метрическое пространство называется *филогенетическим*, а определенная на нем функция расстояния — *расстоянием Левенштейна*.

Предложение 7.5. *Отношение Штейнера филогенетического пространства равно $1/2$.*

Приведем ряд несложных фактов, описывающих свойства отношения Штейнера произвольных метрических пространств. Доказательства некоторых из этих утверждений можно найти в [91].

Предложение 7.6. *Отношение Штейнера изометричных метрических пространств одинаково.*

Предложение 7.7. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$ — его подпространство. Тогда*

$$m(Y, \rho) \geq m(X, \rho).$$

Предложение 7.8. *Пусть X — некоторое множество, а ρ_1 и ρ_2 — две метрики на множестве X . Предположим, что для некоторых чисел $c_2 \geq c_1 > 0$ и любых двух точек x и y из X выполняется $c_1 \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq c_2 \rho_2(x, y)$. Тогда*

$$\frac{c_1}{c_2} m(X, \rho_2) \leq m(X, \rho_1) \leq \frac{c_2}{c_1} m(X, \rho_2).$$

Предложение 7.9. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не*

увеличивающее расстояний. Предположим, что для каждого конечного подмножества $N' \subset Y$ существует такое конечное подмножество N , что $f(N) = N'$ и

$$\rho_X(\text{SMT}_N) \leq \rho_Y(\text{SMT}_{N'}). \quad (7.2)$$

Тогда

$$m(X, \rho_X) \leq m(Y, \rho_Y).$$

Предложение 7.10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не увеличивающее расстояний. Предположим, что для каждого конечного подмножества $N' \subset Y$ выполняется

$$\inf_{\{N: f(N)=N'\}} \rho_X(\text{SMT}_N) \leq \rho_Y(\text{SMT}_{N'}). \quad (7.3)$$

Тогда

$$m(X, \rho_X) \leq m(Y, \rho_Y).$$

7.2. Отношение Штейнера римановых многообразий

Важным частным случаем метрических пространств являются связанные римановы многообразия, на которых расстояние между точками определяется как точная нижняя грань всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки.

Приведем несколько общих свойств, см. [91].

Теорема 7.1. Отношение Штейнера произвольного связного n -мерного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера пространства \mathbb{R}^n .

Заметим, что отношение Штейнера одномерного связного риманова многообразия равно 1. Далее, в силу предложения 7.7, отношение Штейнера стандартного евклидова пространства \mathbb{R}^n убывает с ростом размерности n , поэтому отношение Штейнера произвольного риманова многообразия размерности не меньше 2 не превосходит отношения Штейнера для стандартной евклидовой плоскости. С другой стороны, для граничного множества $N \subset \mathbb{R}^2$, состоящего из вершин правильного треугольника, отношение длины минимального дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева равно $\sqrt{3}/2$. Поэтому отношение Штейнера для евклидовой плоскости не превосходит $\sqrt{3}/2$. Таким образом, имеет место следующий результат.

Следствие 7.1. *Отношение Штейнера n -мерного связного риманова многообразия, $n \geq 2$, не превосходит $\sqrt{3}/2$.*

Далее напомним, что отображение $f: W \rightarrow M$ связного многообразия W в связное многообразие M называется *накрытием*, если образ отображения f совпадает с M , и у любой точки из M существует окрестность U , прообраз которой состоит из непересекающихся открытых множеств V_α , таких, что ограничение отображения f на каждое V_α задает гомеоморфизм с U . Если f — накрытие, то M называется *базой*, а W — *тотальным пространством* этого накрытия. Накрытие называется *локально-изометричным*, если у каждой точки из W существует окрестность V , такая, что ограничение отображения f на V является изометрией.

Теорема 7.2 (Иванов, Тужилин, Цислик [91]). *Пусть W и M — связные римановы многообразия и $\pi: W \rightarrow M$ — локально-изометричное накрытие. Тогда отношение Штейнера базы M не меньше отношения Штейнера тотального пространства W .*

Следствие 7.2 (Иванов, Тужилин, Цислик [91]). *Если связное риманово многообразие можно локально-изометрично накрыть евклидовым пространством \mathbb{R}^n , то отношение Штейнера этого многообразия равно отношению Штейнера пространства \mathbb{R}^n . В частности, отношение Штейнера двумерного цилиндра, плоского двумерного тора и плоской бутылки Клейна равны отношению Штейнера евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 .*

Приведем основные известные нам результаты, описывающие отношение Штейнера евклидовых пространств \mathbb{R}^n . Более 30 лет назад Гилберт и Поллак [52] сформулировали гипотезу о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\sqrt{3}/2$. До начала 90-х годов были получены многочисленные оценки снизу на отношение Штейнера для \mathbb{R}^2 , все более и более приближающиеся к $\sqrt{3}/2$. Наконец, Ду и Хванг [29] опубликовали доказательство справедливости гипотезы Гилберта–Поллака. Однако их доказательство содержит неформализованное понятие характеристической области погруженного плоского многоугольника и существенно использует некоторые “очевидные” свойства этой области, которые, по мнению авторов, нуждаются в аккуратном доказательстве, отсутствующем в известных авторам публикациях Ду и Хванга. Кроме того, попытка аккуратно определить характеристическую область через кусочно-аффинное отображение многоуголь-

ника в плоскость привела авторов к пониманию, что это далеко не тривиально, так как такое естественное определение, во-первых, приводит к неоднозначности: для данного погруженного многоугольника можно, вообще говоря, определить несколько характеристических областей, и не совсем понятно, как из них выделить одну так, чтобы “очевидные” свойства из доказательства Ду и Хванга имели место; а во-вторых, при таком подходе оказывается возможным построить контрпримеры к ряду утверждений из доказательства Ду и Хванга. Отметим, что консультации с известными нам специалистами по отношению Штейнера не привели к прояснению ситуации.

Тем не менее, если гипотеза Гилберта–Поллака все-таки верна, то следствие 7.2 дает точные значения отношения Штейнера для двумерных цилиндров, плоских двумерных торов и плоских бутылок Клейна.

В случае $n \geq 3$ известны лишь оценки на отношение Штейнера пространства \mathbb{R}^n . Приведем некоторые результаты. Как уже отмечалось выше, отношение Штейнера для \mathbb{R}^n не возрастает с ростом n . Грехам, Хванг [54] получили следующую оценку.

Теорема 7.3. *Отношение Штейнера $m(\mathbb{R}^n)$ произвольного пространства \mathbb{R}^n не меньше $1/\sqrt{3}$.*

Грубую верхнюю оценку на $m(\mathbb{R}^n)$ можно получить, рассматривая вершины правильного симплекса в \mathbb{R}^n в качестве граничного множества и выбирая вместо минимального дерева Штейнера дерево типа звезда, ребра которого соединяют центр тетраэдра с его вершинами, см. [12]. Тогда получается следующая оценка сверху.

Предложение 7.11. *Отношением Штейнера $m(\mathbb{R}^n)$ можно оценить сверху так:*

$$m(\mathbb{R}^n) \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}.$$

Чанг, Гильберт [18] и Смит [141] нашли более точные верхние оценки на отношение Штейнера пространств \mathbb{R}^n , численные значения которых приведены, например, в [12].

Отметим, что, как показали Ду и Смит [36], для $n \geq 3$ отношение Штейнера не может быть достигнуто на вершинах правильного симплекса (см. ниже). Возникает естественный вопрос: какие конфигурации точек могли бы служить претендентами на граничные множества, для которых достигается отношение Штейнера в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$? Более того, может ли отношение Штейнера достигаться на конечном подмножестве \mathbb{R}^n ?

Уже в случае трехмерного евклидова пространства ситуация достаточно нетривиальная. Прodelав большую вычислительную работу, Смит и Макгрегор Смит [142] пришли к выводу, что для \mathbb{R}^3 отношение Штейнера является пределом отношений Штейнера граничных множеств специального типа, лежащих на тройной спирали (см. рис. 7.1).

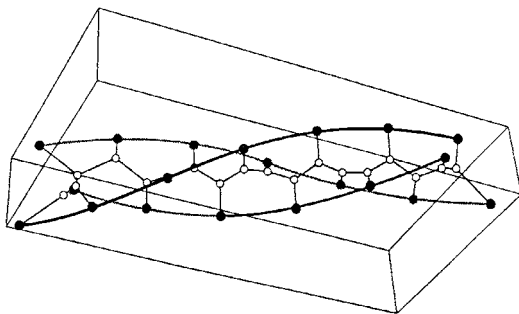


Рис. 7.1. Гипотеза Смита и Макгрегора Смита: отношение Штейнера в \mathbb{R}^3 равно пределу отношений Штейнера граничных множеств такого типа.

Гипотеза 7.1. *Отношение Штейнера трехмерного евклидова пространства может быть вычислено по следующей формуле:*

$$m(\mathbb{R}^3) = \sqrt{\frac{283}{700} - \frac{3\sqrt{21}}{700} + \frac{9\sqrt{11 - \sqrt{21}}\sqrt{2}}{140}} = 0,78419\dots$$

Приведем еще один результат, касающийся вычисления отношения Штейнера римановых многообразий. Этот результат принадлежит Рубинштейну и Венгу [136], которые вычислили отношение Штейнера двумерной сферы постоянной (положительной) кривизны: оно оказалось таким же, как и у \mathbb{R}^2 , т.е. равным $\sqrt{3}/2$. Отметим, что в доказательстве авторы использовали идеи Ду и Хванга относительно характеристической области, что опять же, в силу отмеченных выше проблем с ее определением, приводит к необходимости более детальной проработке доказательства. Тем не менее, если эти результаты Рубинштейна и Венга верны, то из них и теоремы 7.2 мгновенно заключаем, что отношение Штейнера проективной плоскости \mathbb{RP}^2 постоянной (положительной) кривизны равно $\sqrt{3}/2$.

Таким образом, по модулю теорем Ду–Хванга и Рубинштейна–Венга, вычислены отношения Штейнера всех замкнутых (т.е. компактных

без края) двумерных римановых многообразий постоянной неотрицательной кривизны: все они оказались равными отношению Штейнера для евклидовой плоскости. Если же кривизна отрицательна, то точные значения отношения Штейнера еще не получены. Однако можно привести некоторые оценки, см. [91].

Теорема 7.4. *Отношение Штейнера пространства Лобачевского постоянной кривизны -1 не превосходит $3/4$.*

Теорема 7.5. *Отношение Штейнера произвольного двумерного риманова многообразия постоянной кривизны -1 строго меньше $\sqrt{3}/2$.*

В заключение этого раздела приведем еще некоторые полезные факты, описывающие дифференциальные свойства отношения Штейнера граничных множеств в полном римановом многообразии W . Эффективность подобных методов изучения минимальных деревьев Штейнера уже была продемонстрирована в работах Рубинштейна и др., см. [134], [135], [150], где в случае, когда объемлющее пространство является плоскостью, было получено полное описание минимальных деревьев Штейнера для широкого класса граничных множеств, исходя из дифференциальных свойств отношения Штейнера.

Как было замечено выше, полнота многообразия W гарантирует, что для любого конечного подмножества $N \subset W$ существует минимальное дерево Штейнера. Соединяя смежные вершины этого дерева кратчайшими геодезическими, мы получим *геодезическую сеть* (аналог плоского графа), которую будем называть *геометрической реализацией для SMT_N* . Более общо, если G — произвольный граф, множество вершин которого является подмножеством в W , то, соединяя смежные вершины кратчайшими геодезическими, получим *геометрическую реализацию графа G* . В частности, имеет смысл говорить о геометрической реализации для MST_N .

Легко видеть, что, вообще говоря, геометрические реализации не единственны. Геометрическая реализация минимального дерева Штейнера обладает рядом полезных свойств. Приведем один результат, описывающий локальную структуру произвольной геометрической реализации минимального дерева Штейнера.

Предложение 7.12. *Пусть Γ — некоторая геометрическая реализация произвольного невырожденного SMT_N в связном полном римановом многообразии W . Тогда Γ — дерево, у которого все вершины степени 1 являются граничными, угол между любыми двумя смежными ребрами-геодезическими больше или равен 120° , причем если обшая вершина этих ребер — подвижная вершина степени 2, то угол*

между ними равен 180° . В частности, степени вершин дерева Γ не превосходят 3.

Пусть $N = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$, $n > 1$, и $N_t = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, $x_i(0) = x_i$, — некоторая гладкая деформация множества N , т.е. набор гладких кривых $x_i(t)$. Напомним, что через $m(N)$ мы обозначили отношение Штейнера множества N , т.е.

$$m(N) = \frac{\rho(\text{SMT}_N)}{\rho(\text{MST}_N)}.$$

Положим $\rho_s(t) = \rho(\text{SMT}_{N_t})$ и $\rho_m(t) = \rho(\text{MST}_{N_t})$.

Теорема 7.6 (Иванов, Тужилин [92]). *Функции $\rho_s(t)$, $\rho_m(t)$ и $m(N_t)$ дифференцируемы при $t = 0+$, и*

$$\left. \frac{dm(N_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\rho_m(0)} \left(\rho'_s(0) - m(N) \rho'_m(0) \right).$$

Производные $\rho'_s(0)$ и $\rho'_m(0)$ можно вычислить так:

$$\begin{aligned} \rho'_s(0) &= \inf_{\Gamma - \text{SMT}_N} \sum_{x \in N} \langle \nu_x, E_x \rangle, \\ \rho'_m(0) &= \inf_{\Delta - \text{MST}_N} \sum_{x \in N} \langle \mu_x, E_x \rangle, \end{aligned}$$

где E_x — это вектор скорости движения вершины $x \in N$ при деформации N_t в момент $t = 0$, ν_x — это сумма единичных векторов направлений ребер дерева Γ , входящих в вершину x , μ_x — сумма единичных векторов направлений ребер дерева Δ , входящих в вершину x , а точная нижняя грань берется по всевозможным геометрическим реализациям Γ всех SMT_N и по всевозможным геометрическим реализациям Δ всех MST_N .

Более того, эти точные нижние грани достигаются на некотором Γ , являющемся SMT_N , и некотором Δ , являющемся MST_N , поэтому для таких Γ и Δ имеем:

$$\left. \frac{dm(N_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\rho_m(0)} \sum_{x \in N} \langle \nu_x - m(N) \mu_x, E_x \rangle.$$

Конечное подмножество $N \subset W$ назовем *критической точкой для отношения Штейнера $m(N)$* , если для любой гладкой деформации N_t ,

$t \in [0, 1]$, $N_0 = N$, граничного множества N производная функции $m(N_t)$ при $t = 0+$ имеет один и тот же знак (т.е. или всегда неотрицательна, или всегда неположительна).

Пусть $N = \{x_1, \dots, x_n\}$. Обозначим через $\{\Gamma_\alpha\}$ множество всех геометрических реализаций всевозможных SMT_N и через $\{\Delta_\beta\}$ — множество всех геометрических реализаций всевозможных MST_N . Далее, для каждого Γ_α обозначим через ν_α^j сумму единичных векторов направлений ребер дерева Γ_α , приходящих в вершину x_j , и положим $\nu_\alpha = (\nu_\alpha^1, \dots, \nu_\alpha^n)$. Аналогично, для каждого Δ_β обозначим через μ_β^j сумму единичных векторов направлений ребер дерева Δ_β , приходящих в его граничную вершину x_j , и положим $\mu_\beta = (\mu_\beta^1, \dots, \mu_\beta^n)$.

Отметим, что ν_α и μ_β — некоторые точки в пространстве $T = T_{x_1}W \times \dots \times T_{x_n}W$, на котором риманова метрика индуцирует скалярное произведение. Положим

$$A_N = \{\nu_\alpha\} \subset T, \quad B_N = \{\mu_\beta\} \subset T.$$

Теорема 7.7 (Иванов, Тужилин [92]). *Конечное множество $N \subset W$ является критической точкой отношения Штейнера, если и только если выполнено одно из следующих двух включений:*

$$\text{conv } A_N \subset \text{conv}(m(N)B_N), \quad \text{conv } A_N \supset \text{conv}(m(N)B_N),$$

где $m(N)B_N = \{m(N)\mu_\beta\}$. При этом первое включение соответствует случаю неотрицательности производных по направлению функции $m(N)$, а второе — неположительности этих производных.

7.3. Отношение Штейнера нормированных пространств

Пусть теперь $X = \mathbb{R}^n$, а метрика ρ задается некоторой нормой. Обозначим через B замкнутый единичный шар в смысле метрики ρ , центр которого совпадает с началом координат. Тогда B является замыканием некоторого центрально-симметричного ограниченного открытого множества. Обратно, если задано такое подмножество B пространства \mathbb{R}^n , то по нему однозначно восстанавливается соответствующая норма. Это является мотивацией следующих обозначений: во-первых, \mathbb{R}^n с нормой, порожденной B , будем обозначать через (\mathbb{R}^n, B) , а во-вторых, вместо $m(\mathbb{R}^n, \rho)$ будем писать $m(B)$. Часто описанные только что метрические пространства называют *пространствами Банаха–Минковского*. В данном разделе мы приведем основные известные факты, описывающие отношение Штейнера пространств Банаха–Минковского. В дальнейшем,

для краткости, замыкание произвольного центрально-симметричного ограниченного открытого множества будем называть *БМ-шаром*.

7.3.1. Следствия общей теории

Приведем сначала общие факты, являющиеся следствиями из результатов параграфа 7.1.

Напомним, что если шар $B' \subset \mathbb{R}^n$ является образом шара $B \subset \mathbb{R}^n$ при произвольном (невырожденном) линейном преобразовании пространства \mathbb{R}^n , то соответствующие пространства Банаха–Минковского изометричны. Из предложения 7.6 вытекает следующий результат.

Следствие 7.3. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольное (невырожденное) линейное преобразование, B — произвольный БМ-шар и $B' = A(B)$. Тогда B' — также БМ-шар и $m(B) = m(B')$.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство и $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый БМ-шар. Тогда $B' = B \cap L$ является БМ-шаром в L , причем порожденная им норма индуцируется нормой в \mathbb{R}^n , порожденной B . Будем говорить, что пространство L с так определенной нормой является *подпространством* в нормированном \mathbb{R}^n , и писать $(L, B') \subset (\mathbb{R}^n, B)$. Если ρ и ρ' — соответствующие метрики на \mathbb{R}^n и L , то метрическое пространство (L, ρ') является, очевидно, подпространством в (\mathbb{R}^n, ρ) . Предложение 7.7 приводит к следующему результату.

Следствие 7.4. Рассмотрим нормированное пространство (\mathbb{R}^n, B) и некоторое его подпространство (L, B') . Тогда $m(B') \geq m(B)$.

Далее, легко видеть, что если для некоторого положительного числа k и БМ-шаров B и B' имеет место включение $kB \subset B'$, то для произвольного вектора x соответствующие нормы связаны так: $\frac{1}{k}\|x\| \geq \|x\|'$. Из этого наблюдения и предложения 7.8 получаем следующий результат.

Следствие 7.5. Пусть c и c' — два положительных числа, B и B' — два БМ-шара, таких, что

$$\frac{1}{c} \cdot B \subseteq B' \subseteq \frac{1}{c'} \cdot B.$$

Тогда

$$\frac{c}{c'} \cdot m(B) \geq m(B') \geq \frac{c'}{c} \cdot m(B).$$

7.3.2. Исследование отношения Штейнера с помощью расстояния Банаха–Мазура

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный БМ-шар и $[B] = \{T(B) \mid T \in \text{GL}(n, \mathbb{R})\}$ — множество БМ-шаров, являющихся образами шара B при всевозможных невырожденных линейных преобразованиях пространства \mathbb{R}^n . Напомним, что неотрицательная функция $d(x, y)$, определенная на парах точек произвольного множества X , называется *мультипликативным расстоянием*, если $\ln d(x, y)$ является метрикой. Напомним также, что на множестве $\mathbb{B}_n = \{[B]\}$, состоящем из классов $[B]$ по всем БМ-шарам $B \subset \mathbb{R}^n$, определено мультипликативное расстояние Банаха–Мазура следующим образом:

$$\begin{aligned} d([B], [B']) &= \inf \{h \geq 1 \mid \exists B_1 \in [B] \exists B_2 \in [B'] : B_1 \subseteq B_2 \subseteq h B_1\} \\ &= \inf \{h \geq 1 \mid \exists T \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : B \subseteq T(B') \subseteq h B\}. \end{aligned}$$

Метрическое пространство $(\mathbb{B}_n, \ln d)$ называется *компактом Банаха–Мазура*, а $\ln d$ — *расстоянием Банаха–Мазура*.

Из следствия 7.5 легко вытекает следующая теорема, позволяющая сравнивать отношения Штейнера нормированных пространств одной размерности через расстояние Банаха–Мазура.

Теорема 7.8 (Цислик [12]). Пусть B и B' — два БМ-шара в \mathbb{R}^n . Тогда

$$d([B], [B']) m(B) \geq m(B') \geq \frac{1}{d([B], [B'])} m(B).$$

Теорема 7.8 позволяет получить много интересных оценок на отношение Штейнера. Приведем некоторые примеры.

(1) Пусть D^n обозначает стандартный единичный евклидов шар. Джон в работе [96] показал, что для любого БМ-шара B выполняется $d([B], [D^n]) \leq \sqrt{n}$. Откуда, по теореме 7.8, мгновенно получаем [12]

Следствие 7.6. Для любого БМ-шара B имеет место неравенство:

$$m(B) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot m(D^n).$$

Таким образом, если верны результаты Ду–Хванга, то для $B \subset \mathbb{R}^2$ имеем: $m(B) \geq \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.61237\dots$

(2) Хорошо известно (см., например, [12]), что для произвольного БМ-шара B и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой строго выпуклый

БМ-шар B' с гладкой границей, что $\ln d([B], [B']) < \varepsilon$. Этот факт, вместе со следствием 7.5, позволяет заключить, что при получении общих оценок на отношение Штейнера пространств Банаха–Минковского достаточно ограничиться рассмотрением норм, порожденных строго выпуклыми шарами с гладкими границами. Важность этого наблюдения объясняется тем, что локальная структура абсолютно минимальных деревьев в пространствах с такими нормами существенно проще (см., например, [12] или [90]). Эти соображения в случае размерности 2 позволили Ду и др. (см. [47] и [26]) получить² следующую оценку.

Теорема 7.9. *Для любой плоскости Банаха–Минковского с единичным шаром B имеет место следующая оценка:*

$$\frac{2}{3} \leq m(B) \leq \frac{\sqrt{13} - 1}{3} = 0.8685 \dots$$

Как мы увидим в следующем подразделе, нижняя оценка из Теоремы 7.9 достигается (см. там же комментарии по поводу верхней оценки).

7.3.3. Пространства с ℓ_p -нормой

Напомним, что нормированное пространство, порожденное БМ-шаром

$$B_p^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq 1\}, \quad p \geq 1,$$

обозначается через ℓ_p^n . Гурарий, Кадек и Макаев [57] показали, что для $1 \leq p \leq q \leq 2$ или $2 \leq p \leq q \leq \infty$ выполняется

$$d([B_p^n], [B_q^n]) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}},$$

поэтому из теоремы 7.8 получаем [12]

Следствие 7.7. *При $1 \leq p \leq q \leq 2$ и при $2 \leq p \leq q \leq \infty$ выполняется*

$$n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} m(B_p^n) \geq m(B_q^n) \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}} m(B_p^n).$$

²К сожалению, в нашем распоряжении не было этих работ и мы были вынуждены ограничиться информацией из книги [12]. Возможно, однако, что цитируемые работы также опираются на “естественное понятие” характеристической области.

Поэтому, выбирая в качестве p или 1, или 2, а в качестве q — или 2, или ∞ , приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^{\frac{1}{q}}} m(B_1^n) &\geq m(B_q^n) \geq \frac{n^{\frac{1}{q}}}{n} m(B_1^n), \quad \text{при } q \leq 2, \\ \frac{n^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{n}} m(D^n) &\geq m(B_p^n) \geq \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{p}}} m(D^n), \quad \text{при } p \leq 2, \\ n^{\frac{1}{p}} m(B_\infty^n) &\geq m(B_p^n) \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} m(B_\infty^n), \quad \text{при } p \geq 2, \\ \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{q}}} m(D^n) &\geq m(B_q^n) \geq \frac{n^{\frac{1}{q}}}{\sqrt{n}} m(D^n), \quad \text{при } q \geq 2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \min \left[\frac{n}{n^{\frac{1}{q}}} m(B_1^n), \frac{n^{\frac{1}{q}}}{\sqrt{n}} m(D^n) \right] &\geq m(B_q^n) \geq \max \left[\frac{n^{\frac{1}{q}}}{n} m(B_1^n), \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{q}}} m(D^n) \right] \\ &\quad \text{при } q \leq 2, \\ \min \left[n^{\frac{1}{q}} m(B_\infty^n), \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{q}}} m(D^n) \right] &\geq m(B_q^n) \geq \max \left[\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} m(B_\infty^n), \frac{n^{\frac{1}{q}}}{\sqrt{n}} m(D^n) \right] \\ &\quad \text{при } q \geq 2. \end{aligned}$$

Из следствия 7.7 можно получить нетривиальные оценки на отношение Штейнера в двумерном случае. Для этого понадобится следующая теорема, доказанная Хвангом.

Теорема 7.10 (Хванг [64]). *Имеет место следующее равенство:*

$$m(B_1^2) = m(B_\infty^2) = \frac{2}{3}.$$

Замечание. Теорема 7.10, в частности, показывает, что нижняя оценка из теоремы 7.9 достигается, например, на изометричных плоскостях ℓ_1^2 и ℓ_∞^2 .

Из теоремы 7.10, в предположении справедливости гипотезы Гилберта–Поллака, получаем следующие оценки.

Следствие 7.8. *Для $m(B_q^2)$ при $1 \leq q \leq 2$ имеет место следующая*

оценка:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } 1 \leq q \leq \frac{4}{7-3\log_2 3} = 1.78165\dots, \\ \sqrt{\frac{3}{8}} 2^{1/q} & \text{при } \frac{4}{7-3\log_2 3} = 1.78165\dots \leq q \leq 2, \end{cases} \\ \geq m(B_q^2) \geq \begin{cases} \frac{1}{3} 2^{1/q} & \text{при } 1 \leq q \leq \frac{4}{3\log_2 3 - 1} = 1.06528\dots, \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } \frac{4}{3\log_2 3 - 1} = 1.06528\dots \leq q \leq 2, \end{cases}$$

а для $q \geq 2$ выполняется

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } 2 \leq q \leq \frac{4}{3\log_2 3 - 3} = 2.27935\dots, \\ \frac{2}{3} 2^{1/q} & \text{при } \frac{4}{3\log_2 3 - 3} = 2.27935\dots \leq q \leq \infty, \end{cases} \\ \geq m(B_q^2) \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{8}} 2^{1/q} & \text{при } 2 \leq q \leq \frac{4}{5-3\log_2 3} = 16.319\dots, \\ \frac{2}{3} \frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } \frac{4}{5-3\log_2 3} = 16.319 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

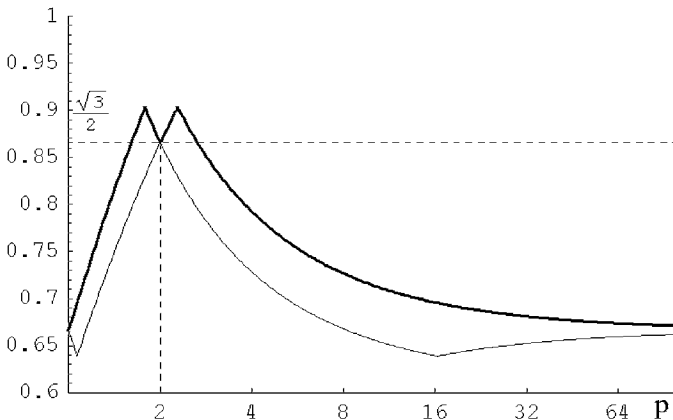


Рис. 7.2. Графики верхней и нижней оценок на отношение Штейнера пространств l_p^2 из Следствия 7.8.

В действительности, оценки, приведенные в следствии 7.8, не являются точными. Один из способов улучшения верхних оценок состоит в вычислении отношения Штейнера для конкретных границ. Так, рассматривая треугольники со стороной, параллельной оси абсцисс, Ду и Лиу [108] получили следующую оценку на отношения Штейнера пространств ℓ_p^2 .

Теорема 7.11. Пусть $p \geq 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Тогда

$$m(B_q^2) \leq \frac{(2^p - 1)^{\frac{1}{p}} + (2^q - 1)^{\frac{1}{q}}}{4}.$$

Поскольку функция, стоящая в правой части неравенства из теоремы 7.11, достигает в точке $p = 2$ строгого максимума $\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем следующий результат.

Следствие 7.9. Отношение Штейнера пространства ℓ_p^2 не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{2}$, причем равенство может достигаться только при $p = 2$.

Замечание. Следствие 7.9 породило предположение, высказанное Цисликом [12], о том, что общая верхняя оценка из теоремы 7.9 может быть уменьшена до $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отметим, что оценка из теоремы 7.11, в свою очередь, может быть улучшена, если вместо треугольников со стороной, параллельной оси абсцисс, рассмотреть треугольники со стороной, параллельной биссектрисе первого квадранта. Соответствующий результат был получен Цисликом, см. [12]. Графики оценок Лиу и Ду и Цислика вместе с графиками оценок из Следствия 7.8 приведены на рис. 7.3. Как видно из рисунка, оценки Лиу, Ду и Цислика улучшают результат из Следствия 7.8 лишь в окрестности $p = 2$. Если рассмотреть граничные множества, состоящие из четырех и более точек, то иногда удастся получить еще лучшие оценки. Так например, Альбрехт [1], изучая отношения Штейнера для граничных множеств из четырех точек, получил более точную оценку в окрестности $p = 1$, которую мы не приводим из-за недостатка места (см. также [12]).

Приведем теперь оценки для ℓ_p -пространств размерности три и выше (случай $p = 2$ обсуждался выше в параграфе 7.2). Первая группа оценок также получена с помощью изучения граничных множеств специального вида, а именно, тетраэдров, кубов и октаэдров, см. [12].

Теорема 7.12. Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ и x_0 — единственный в интервале $(1, 2)$ нуль функции $f(x) = x^p + 2(x - 1)^p - 2$. Тогда

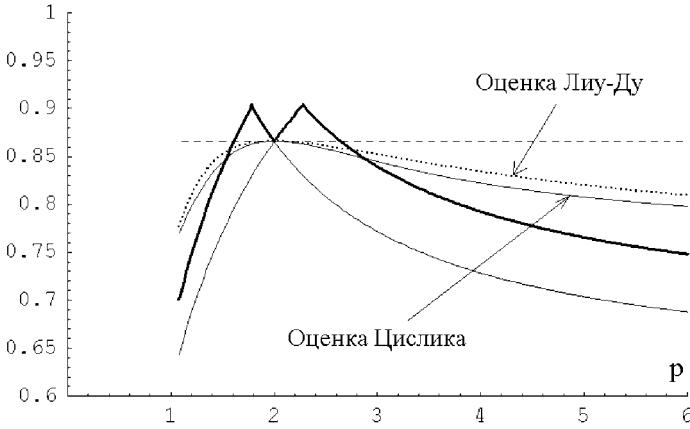


Рис. 7.3. Графики верхних и нижней оценок на отношение Штейнера пространств l_p^2 .

при $1 < p \leq \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} = 2.709511 \dots$ выполняется

$$m(B_p^3) \leq \min \left[\frac{1}{3} \left(2^{-\frac{1}{p}} + (2^q - 1)^{\frac{1}{q}} \right), \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{5} \left((2^q - 1)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{p}} x_0 \right) \right],$$

а при $p \geq \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$ выполняется

$$m(B_p^3) \leq \min \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{q}}, \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (x_0 + 2) \right].$$

Графики оценок из теоремы 7.12 приведены на рис. 7.4.

Ниже собраны известные оценки для старших размерностей.

- Для пространств ℓ_1^n

$$m(B_1^n) \leq \frac{n}{2n-1},$$

где равенство достигается на множестве вершин шара B_1^n .

- Альбрехт [1] показал, что

$$m(B_p^n) \leq \frac{2n}{2n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}},$$

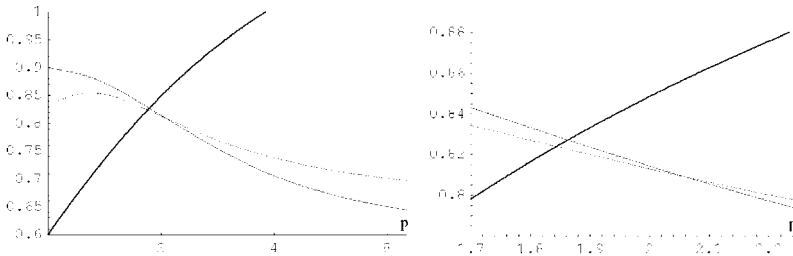


Рис. 7.4. Графики верхних оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^3 .

где равенство достигается на множестве вершин многомерного октаэдра. Отметим, что при $p \rightarrow \infty$ данная оценка монотонно возрастает, стремясь к большему единицы числу $\frac{2n}{2n-1}$. Это означает, что она не работает при больших p .

- Альбрехт [1] показал, что

$$m(B_p^n) \leq \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} n^{\frac{1}{p}},$$

где равенство достигается на множестве вершин стандартного гиперкуба с вершинами в точках $(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Отметим, что при больших p эта оценка лучше, чем предыдущая. На рис. 7.5 приведены графики оценок Альбрехта для $n = 7$.

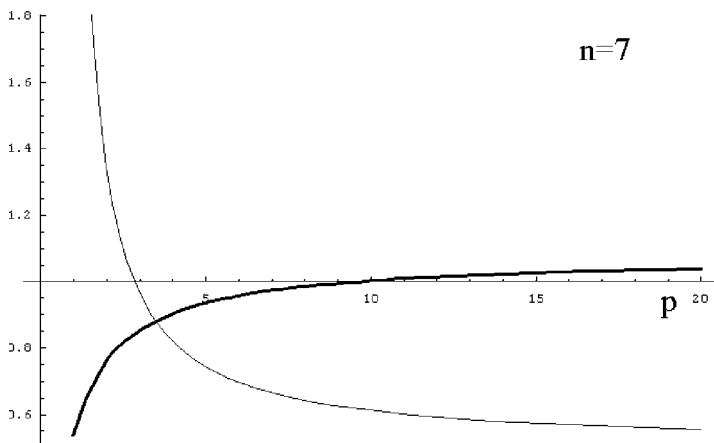
- В частности,

$$m(B_\infty^n) \leq \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

Следующие оценки получены как следствия общего предложения 7.7 и известных вложений пространств с нормами типа ℓ_p друг в друга. О таких вложениях известно, например, следующее:

- Существуют изометричные вложения из ℓ_∞^2 в ℓ_1^m при любых $m \geq 2$ (Любих, Фазерштейн [110]).
- Существуют изометричные вложения из ℓ_1^n в ℓ_∞^m для любых $n \geq 2$ и $m \geq 2^{n-1}$ (Любих, Фазерштейн [111]).

Как следствие, немедленно получаем следующий результат.

Рис. 7.5. Графики верхних оценок на отношение Штейнера пространств l_p^7 .

Следствие 7.10. Для любых $n \geq 2$ и $m \geq 2^{n-1}$ выполняется

$$m(B_\infty^m) \leq m(B_1^n) \leq \frac{n}{2n-1},$$

поэтому

$$m(B_\infty^m) \leq \frac{1 + \log_2 m}{1 + 2 \cdot \log_2 m}.$$

7.3.4. ℓ -геометрии

Еще один интересный пример плоских норм дают так называемые ℓ -нормы, т.е. нормы, чей единичный круг представляет собой правильный 2ℓ -угольник, одна из осей симметрии которого лежит на оси абсцисс. Этот круг обычно обозначают через $B^{(\ell)}$. В частности, $B^{(2)} = B_1^2$ и, по определению, $B^{(\infty)} = B_2^2$.

Зарафцадех и Вонг [137], см. также [12], получили следующую оценку.

Теорема 7.13. Для отношения Штейнера на плоскости с ℓ -нормой, $\ell \geq 2$, имеет место оценка

$$m(\mathbb{R}^2) \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\ell}} \geq m(B^{(\ell)}) \geq m(\mathbb{R}^2) \cos \frac{\pi}{2\ell}.$$

Замечание. В частности, в предположении справедливости гипотезы Гилберта–Поллака, если $\ell = 2$, то полученная оценка не точна, см. теорему 7.10.

Ли и Шен [106] предприняли более детальное исследование отношения Штейнера в ℓ -геометрии. Им удалось получить³ точные значения для ℓ специального вида.

Теорема 7.14. Если $\ell \equiv 3 \pmod 6$, то

$$m(B^{(\ell)}) = m(\mathbb{R}^2) \cos \frac{\pi}{2\ell}.$$

Если $\ell \equiv 0 \pmod 6$, $\ell \geq 6$, то

$$m(B^{(\ell)}) = m(\mathbb{R}^2).$$

В частности, имеется бесконечно много неизометричных плоскостей Банаха–Минковского с отношением Штейнера таким же, как у евклидовой плоскости. Кроме того, отношение Штейнера для ℓ -норм не есть монотонная функция ℓ .

7.4. Отношение Штейнера и другие задачи дискретной геометрии

В данном разделе мы обсудим связи отношения Штейнера и ряда других известных задач дискретной геометрии.

7.4.1. Число Юнга

Пусть B — произвольный n -мерный БМ-шар и $\|\cdot\|_B$ — соответствующая норма в \mathbb{R}^n . Напомним, что для произвольного ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ естественно определяются *диаметр* $D_B(X)$ и *радиус* $R_B(X)$:

$$D_B(X) = \sup\{\|v - v'\|_B \mid v, v' \in X\},$$

$$R_B(X) = \inf\{r \geq 0 \mid X \subset v + rB \text{ для некоторой точки } v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Число

$$J_n(B) = \sup\left\{\frac{R_B(X)}{D_B(X)} \mid X \subset \mathbb{R}^n \text{ — ограниченное множество}\right\}$$

³К сожалению, в нашем распоряжении не было этой работы и мы были вынуждены ограничиться информацией из книги [12]. Возможно, однако, что цитируемая работа также опирается на “естественное понятие” характеристической области.

называется *числом Юнга* нормированного пространства. Хорошо известно (см., например [107]), что

$$\frac{1}{2} \leq J_n(B) \leq \frac{n}{n+1}.$$

Нетрудно видеть, что с помощью числа Юнга можно получить верхнюю оценку для отношения Штейнера. Действительно, предположим что в рассматриваемом нормированном пространстве существует правильный симплекс (т.е. множество точек $\Delta = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, расстояния между любыми двумя из которых равны 1). Тогда, очевидно, длина $\text{MST}(\Delta) = n$, а длина $\text{SMT}(\Delta)$ не превосходит $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_i \|x - A_i\|_B$. По определению радиуса, последнее выражение не превосходит $(n+1)R_B(\hat{\Delta})$, где через $\hat{\Delta}$ обозначена выпуклая оболочка множества Δ . Итак,

$$\rho(\text{SMT}(\Delta)) \leq (n+1)R_B(\hat{\Delta}) \leq (n+1)J_n(B)D_B(\hat{\Delta}) = (n+1)J_n(B),$$

откуда

$$m(B) \leq \frac{\rho(\text{SMT}(\Delta))}{\rho(\text{MST}(\Delta))} \leq \frac{n+1}{n} J_n(B).$$

Учитывая, что в двумерном и трехмерном случаях правильные симплексы существуют всегда, получаем следующий результат, см. [12].

Теорема 7.15. *Для пространств Банаха–Минковского размерности n имеется следующая связь между числом Юнга и отношением Штейнера:*

- при $n = 2$ для любого БМ-шара B имеем $m(B) \leq \frac{3}{2}J_2(B)$,
- при $n = 3$ для любого БМ-шара B имеем $m(B) \leq \frac{4}{3}J_3(B)$,
- если существует правильный симплекс со стороной 1, то $m(B) \leq (n+1)/n J_n(B)$.

Теорема 7.15 показывает важность наличия правильных симплексов или, более общо, конечных множеств точек попарно равноудаленных друг от друга, в нормированных пространствах для оценок на отношение Штейнера. К сожалению, в общем случае правильных симплексов может и не быть. Впрочем, как показал Декстер [22], если расстояние Банаха–Мазура между B и D^n достаточно мало, то правильный симплекс существует.

7.4.2. Упаковки и покрытия

В данном разделе мы покажем, как отношение Штейнера может быть использовано при изучении упаковок и покрытий евклидова пространства. Напомним, что *выпуклым телом в \mathbb{R}^n* называется выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , содержащее внутренние точки. Семейство выпуклых тел в \mathbb{R}^n , внутренности которых не пересекаются, называется *упаковкой*. Семейство подмножеств в \mathbb{R}^n , объединение которых совпадает с \mathbb{R}^n , называется *покрытием \mathbb{R}^n* .

Пусть K — компактное выпуклое тело, а $V = \{v_i\}$ — некоторый набор точек в \mathbb{R}^n , такой, что семейство $\mathcal{M}(V, K) = \{v_i + K\}$ является упаковкой. Для каждого числа $r \geq 0$ обозначим через $\mathcal{M}_r(V, K)$ семейство $\{v_i + (1+r)K\}$. Определим величину $c(V, K)$, называемую *близостью упаковки $\mathcal{M}(V, K)$* , так:

$$\frac{1}{c(V, K)} = \inf\{r \mid \mathcal{M}_r(V, K) \text{ — покрытие}\}.$$

Далее, обозначим через $\mathcal{V}(K)$ множество всех таких $V = \{v_i\}$, что $\mathcal{M}(V, K)$ — упаковка, и положим

$$c(K) = \sup_{V \in \mathcal{V}(K)} \{c(V, K)\}.$$

Для двумерного случая в [12] приводится следующая зависимость⁴ между отношением Штейнера пространства Банаха–Минковского, порожденного БМ-шаром B , и величиной $c(B)$.

Теорема 7.16. Пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ — некоторый БМ-шар. Тогда

$$m(B) \leq \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{c(K)}\right).$$

Приведем результат о свойствах отношения Штейнера, полученный Ду и Смитом [36] из теории упаковок. Предварительно отметим, что, в предположении справедливости гипотезы Гилберта и Поллака, отношение Штейнера евклидовой плоскости достигается на некотором конечном множестве точек (например, на правильном треугольнике). Для евклидовых пространств большей, чем два, размерности существование конечного множества, на котором достигается отношение Штейнера, остается до сих пор открытым вопросом. Тем не менее, если такие

⁴Отметим, что приведенный в [12] эскиз доказательства этого результата ошибочен. Поэтому авторы не знают, справедлива ли приводимая ниже теорема.

множества N существуют, то, оказывается, можно оценить снизу количество точек в N . Поясним, как получается эта оценка.

Начнем с простой конструкции, предложенной Ду и Смитом [36], демонстрирующей, что отношение Штейнера не может достигаться на множестве вершин правильного n -мерного симплекса, $n \geq 3$. Для этого рассмотрим граничное множество P , состоящее из следующих $1 + n(n+1)$ точек пространства \mathbb{R}^{n+1} : одной точки $(0, \dots, 0)$ и $n(n+1)$ точек, у которых все координаты, кроме двух, равны нулю, одна равна -1 и одна $+1$. Ясно, что множество P лежит в n -мерной плоскости, и его можно представить в виде объединения $(n+1)$ -го множества P^i , каждое из которых — это множество вершин n -мерного симплекса, так: $P^i = \{(0, \dots, 0)\} \cup \{x \in P \mid x^i = 1\}$, см. рис. 7.6. Легко видеть, что если $n \geq 3$, то $\text{UMST}(P^i) = \text{MST}(P)$ и $\rho(\text{SMT}(P)) < \sum_i \rho(\text{SMT}(P^i))$, где последнее неравенство вытекает из того, что степень вершины минимального дерева не может быть больше 3. Отсюда немедленно вытекает, что $m(P) < m(P^i)$, что и требовалось.

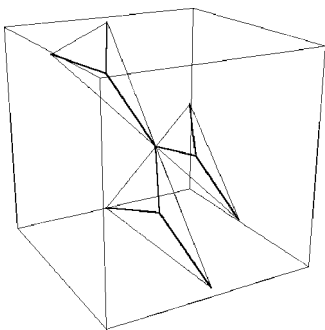


Рис. 7.6. Множество P , представленное в виде объединения правильных симплексов P^i .

Аналогично можно получить следующий важный результат. Пусть P — множество точек в n -мерном пространстве. Выберем произвольную точку $p \in P$ и для каждой точки $q \neq p$ из P построим конус с осью pq и раствором в $\pi/3$. Объединение построенных конусов обозначим через U_p .

Утверждение 7.1. *Если в множестве P можно выбрать такую точку p , что в пространстве можно разместить 4 изометричных экземпляра множеств U_p , попарно внутренним образом не пересекающихся, то $m(\mathbb{R}^n) < m(P)$.*

Далее, конечное подмножество P сферы S^{n-1} назовем k -неразместаемым, если на сфере нельзя разместить k изометричных копий множества P так, чтобы угловое расстояние между этими копиями было не меньше чем $\pi/3$. В противном случае назовем P k -разместаемым. На этом языке утверждение 7.1 можно переформулировать так.

Утверждение 7.2. Пусть P — конечное подмножество пространства \mathbb{R}^n , такое, что $m(\mathbb{R}^n) = m(P)$. Тогда радиальная проекция множества P на сферу с центром в произвольной точке $p \in P$ является 4-неразместаемой.

Таким образом, наша задача сводится к оценке снизу количества точек в 4-неразместаемом множестве точек. Отметим следующее:

- если система шаров радиуса $\pi/3$ с центрами в точках множества $P \subset S^{n-1}$ покрывает сферу, то множество P является 2-неразместаемым;
- если множество P является 4-неразместаемым и существует ортогональное преобразование O , такое, что угловое расстояние между множествами P и $O(P)$ больше, чем $\pi/3$, то множество $P \cup O(P)$ должно быть 2-неразместаемым;
- если не существует ортогональное преобразование O , такое, что угловое расстояние между множествами P и $O(P)$ больше, чем $\pi/3$, то множество P является 2-неразместаемым.

Оценим теперь количество точек в произвольном 2-неразместаемом множестве. Для этого введем следующие обозначения:

$$I_m(x) = \int_0^x \sin^m(u) du, \quad f(\theta, n) = \frac{2 I_{n-2}(\pi/2)}{I_{n-2}(\theta)}.$$

Функция $f(\theta, n)$ — отношение объема сферы S^{n-1} к объему “сферической шапочки” углового радиуса θ .

Пусть P — произвольное конечное подмножество сферы S^{n-1} и $p \in P$. Если P является 2-разместаемым, то должно существовать ортогональное преобразование O , такое, что угловое расстояние между P и $O(P)$ больше или равно $\pi/3$. Если p и q — точки из P , не обязательно различные, то такое ортогональное преобразование O не может переводить точку p внутрь шара радиуса $\pi/3$ с центром в q . Мера Хаара множества таких ортогональных преобразований равна $1/f(\pi/3, n)$. Так как всего имеется $(\#P)^2$ пар точек, то всего имеется $(\#P)^2/f(\pi/3, n)$ “запрещенных” преобразований. Поэтому, если наше

множество 2-размещаемо, то $(\#P)^2/f(\frac{\pi}{3}, n) < 1$. Итак, имеет место следующая оценка.

Лемма 7.2. Пусть P — произвольное 2-неразмещаемое подмножество сферы S^{n-1} . Тогда

$$(\#P)^2 \geq f\left(\frac{\pi}{3}, d\right).$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 7.17 (Ду, Смит [36]). Пусть $D^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — стандартный евклидов шар. Предположим, что существует такое конечное подмножество $N \subset \mathbb{R}^n$, на котором достигается отношение Штейнера, и пусть $\#N$ обозначает количество точек в N . Тогда

$$\#N \geq \left\lceil \frac{1}{2} \sqrt{f\left(\frac{\pi}{3}, n\right)} \right\rceil + 1,$$

где через $\lceil a \rceil$ обозначается наименьшее целое число, больше или равное a .

Отметим, что правая часть неравенства из теоремы 7.17 растет очень быстро с ростом n : так, при $n = 50$ она равна 53, а при $n = 200$ равна 3481911. Таким образом, если на конечном подмноестве в \mathbb{R}^n (при достаточно больших n) достигается отношение Штейнера, то число точек этого подмножества должно быть очень велико — существенно больше, чем размерность n .

7.4.3. Проблема Тамма

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый БМ-шар, порождающий функцию расстояния ρ , и $\Sigma = \partial B$ — граница этого шара. Рассмотрим произвольное конечное подмножество $N \subset \Sigma$ и обозначим через $s(N)$ наименьшее расстояние между точками из N . Наибольшее из чисел $s(N)$ по всем $N \subset \Sigma$, состоящим из k точек, обозначим через $r_n^k(B)$.

Имеет место следующая оценка [12].

Теорема 7.18. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый БМ-шар и $k \geq 3$ — целое число. Тогда

$$m(B) \leq \frac{k}{(k-1)r_n^k(B)}.$$

Отметим, что задача определения числа r_3^k называется *проблемой Тамма* и что точное решение этой проблемы известно лишь при $k \leq 12$ и $k = 24$. С точки зрения теоремы 7.18, лучшая оценка получается при $k = 4$, где оптимальная конфигурация представляет собой множество вершин правильного тетраэдра. Как следствие, получаем следующий результат.

Следствие 7.11. *Отношение Штейнера трехмерного евклидова пространства не превосходит $\sqrt{2/3}$.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые нерешенные задачи

В данном разделе собрано несколько нерешенных задач об экстремальных сетях. Эти задачи были сформулированы авторами в разное время и, по-видимому, разнятся по сложности. Однако все эти задачи, на наш взгляд, представляют интерес для теории экстремальных сетей. Многие из них касаются локально минимальных сетей. Для удобства мы разбили эти задачи на несколько тем.

Локально минимальные сети на плоскости и в пространстве

Задача 1. Существует ли “универсальное” подмножество плоскости, на котором любое бинарное дерево (с соответствующим числом вершин степени 1) имело бы минимальную реализацию? Более общо: существует ли “универсальное” подмножество плоскости, на котором бы любое дерево Штейнера (с соответствующим числом вершин степени 1 и 2) имело бы минимальную реализацию?

Замечание. Имеется два варианта этой задачи: (1) мы ищем минимальную реализацию данного дерева, не принимая во внимание граничное отображение; в этом случае множество называется “универсальным”, если каждое рассматриваемое дерево имеет на нем минимальную реализацию для *некоторого* граничного отображения; или (2) мы учитываем все граничные отображения; в этом случае множество называется “универсальным”, если каждое рассматриваемое дерево имеет на нем минимальную реализацию для *каждого* граничного отображения. Недавно Г. А. Карпунин показал, что множество вершин правильного n -мерного симплекса в \mathbb{R}^{n+1} является “универсальным” множеством во втором, более сильном смысле для бинарных деревьев, имеющих $(n + 1)$ вершину степени 1 (см. [98]).

Задача 2. Верна ли теорема о минимальной реализации любого плоского графа Штейнера, у которого индекс каждого фундаментального цикла равен 6 (см. задачу 3.)

Задача 3. Пусть задан плоский граф G . Рассмотрим произвольную его вершину V , и пусть e_0, \dots, e_{k-1} — ребра графа G , инцидентные вершине V , занумерованные последовательно в соответствии с обходом

вокруг этой вершины против часовой стрелки. Как обычно, будем считать, что индексы складываются по модулю k . Припишем каждой упорядоченной паре e_i, e_{i+1} последовательных ребер число α_i . Назовем α_i *априорным углом между ребрами* e_i и e_{i+1} в вершине V . Пусть заданы априорные углы между любыми смежными ребрами графа G . Найти необходимое и достаточное условие того, что существует планарно эквивалентный графу G линейный граф \tilde{G} , такой, что угол между любыми его смежными ребрами равен априорному углу между соответствующими ребрами исходного графа G .

Замечание. Напомним, во-первых, что каждый плоский граф планарно эквивалентен линейному плоскому графу (теорема Вагнера–Фари). Во-вторых, ясно, что априорные углы не могут быть любыми. По крайней мере, необходимыми являются следующие условия:

- для каждой вершины графа V степени больше 1 сумма всех априорных углов в этой вершине равна 2π ;
- для каждого фундаментального цикла графа G из k ребер сумма априорных углов между последовательными парами ребер этого цикла при обходе его против часовой стрелки равна $\pi(k - 2)$.

Однако несложно построить пример (достаточно рассмотреть триангуляцию из четырех треугольников), когда этих двух условий недостаточно. С другой стороны, легко показать, что если все циклы графа G попарно не пересекаются, то этих двух условий достаточно.

Отметим, что задача 2 — это частный случай задачи 3.

Задача 4. Обобщить теорему классификации локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей на случай произвольных деревьев Штейнера.

Замечание. Ясно, что каждая невырожденная компонента локально минимальной сети Штейнера с выпуклой границей представляет собой локально минимальное бинарное дерево с выпуклой границей и, поэтому, описывается теоремами 5.4 и 5.5 главы 5. Поэтому для решения задачи 4 необходимо описать, как невырожденные компоненты могут стыковаться между собой.

Задача 5. Обобщить теорему классификации локально минимальных невырожденных сетей Штейнера (см. главу 5) с выпуклой границей на случай произвольных сетей Штейнера.

Задача 6. Получить полную классификацию локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей. (См. теорему 5.7 и комментарии к теореме 5.8 главы 5.)

Задача 7. Как один из шагов в решении общей задачи 6, выяснить, верно ли, что если бинарное дерево имеет правильную минимальную

реализацию, то оно (более точно, соответствующий паркет) содержит не более одного узла ветвления?

Задача 8. Имеет ли место следующая теорема реализации для плоских невырожденных локально минимальных сетей с выпуклой границей: плоская тривиальная сеть с числом вращения, не превосходящим пяти, имеет выпуклую минимальную реализацию.

Задача 9. Пусть плоское бинарное дерево Γ имеет число вращения, не превосходящее $12(k-1) + 5$. Верно ли, что Γ имеет минимальную реализацию на граничном множестве, число уровней выпуклости которого не превосходит k ?

Задача 10. Обобщить на случай невырожденных сетей Штейнера теорему из главы 5 о связи числа вращения минимальной сети и количества уровней выпуклости граничного множества. (Нужно так естественно определить аналог числа вращения в общем случае, чтобы полученная оценка была точной.)

Задача 11. Описать пространственные локально минимальные бинарные деревья с выпуклой границей. (См. задачу 17.)

Задача 12. Вычислить размерности пространства (взвешенных) минимальных сетей данного типа с фиксированной границей в \mathbb{R}^n , $n > 2$, в топологических или/и геометрических терминах.

Замечание. Как было отмечено в главе 4, в случае размерности 3 и выше цикломатического числа параметризующего графа недостаточно.

Задача 13. Описать структуру граней многогранника всех (взвешенных) минимальных сетей данного типа с фиксированной границей.

Задача 14. Описать локально минимальные бинарные деревья, множество граничных вершин которых лежит на границе некоторого прямоугольника.

Задача 15. Описать локально минимальные бинарные деревья, множество граничных вершин которых лежит на некоторой окружности.

Задача 16. Описать локально минимальные бинарные деревья, множество граничных вершин которых лежит на некоторой кривой с заданными ограничениями на кривизну (для начала — на выпуклой кривой).

Замечание. Рубинштейн и его коллеги анонсировали существование полиномиального алгоритма поиска абсолютно минимального дерева Штейнера при условии, что граничные вершины расположены на заданной кривой.

Линейные сети

Задача 17. Какими свойствами обладают пространственные ломаные с выпуклым множеством вершин? Описать пространственные ломаные, для которых существуют попарно параллельные ломаные, множество вершин которых выпукло (см. задачу 18).

Замечание. Для случая плоскости эта задача решена Н. С. Гусевым (см. главу 4 и [58]).

Задача 18. Описать плоские линейные деревья, для каждого из которых существует пореберно параллельное линейное дерево, геометрическая граница которого имеет заданное количество уровней выпуклости.

Задача 19. Обобщить теорему о связи числа вращения линейного дерева и количестве уровней выпуклости его геометрической границы на случай линейных сетей общего вида, т.е. сетей с циклами. (Нужно так естественно определить аналог числа вращения в общем случае, чтобы полученная оценка была точной.)

Задача 20. Вычислить (оценить) ранг характеристической системы линейной сети (или, что то же самое (см. главу 3) размерность пространства линейных сетей, параллельных данной и с данной границей) в геометрических или/и топологических терминах.

Задача 21. Найти критерий того, что многогранное множество всех линейных сетей, параллельных данной и с данной границей, ограничено.

Задача 22. Описать структуру граней многогранного множества всех линейных сетей, параллельных данной и с данной границей.

Взвешенные минимальные сети

Задача 23. Обобщить алгоритм Хванга на случай плоских взвешенных бинарных деревьев.

Замечание. Несложно убедиться, что для построения взвешенных локально минимальных бинарных деревьев алгоритм Хванга “в чистом виде” не подходит.

Задача 24. При каких условиях на веса взвешенного бинарного дерева применим алгоритм Хванга?

Задача 25. Пусть на торе фиксирована плоская метрика и пусть задана матрица $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$. Как было показано в главе 5.2, на этом плоском торе может и не существовать замкнутой локально минимальной сети

типа g . Можно ли так задать веса на ребрах параметризующего графа сети типа g , чтобы на данном плоском торе существовала взвешенная локально минимальная сеть типа g ?

Задача 26. Та же задача, что и 25, для плоской бутылки Клейна, для квазирегулярного тетраэдра.

Задача 27. Описать взвешенные графы Штейнера без вершин степени 1 и 2 (регулярные 3-графы), которые могут быть реализованы как замкнутые взвешенные минимальные сети на плоских поверхностях, на поверхностях отрицательной кривизны, на поверхности квазирегулярного тетраэдра.

Задача 28. Описать взвешенные графы, которые могут быть реализованы как замкнутые взвешенные минимальные сети на плоских поверхностях, на поверхностях отрицательной кривизны, на поверхности квазирегулярного тетраэдра.

Задача 29. Понятие паркета, соответствующего плоскому бинарному дереву, можно легко обобщить на случай взвешенных бинарных деревьев с положительной весовой функцией, удовлетворяющей строгому правилу треугольника. Напомним, что каждому плоскому бинарному дереву соответствует плоская триангуляция. Пусть Γ — плоское взвешенное бинарное дерево. Поставим ему в соответствие триангуляцию, длины сторон которой равны весам соответствующих ребер дерева Γ . Проверить, верен ли для таких *взвешенных паркетов* аналог теоремы о паркетной реализации (см. теорему 5.3 главы 5): *если число вращения взвешенного бинарного дерева строго меньше шести, то это бинарное дерево планарно эквивалентно двойственной сети некоторого взвешенного паркета с теми же весами.*

Задача 30. Продолжение задачи 29. Описать взвешенные деревянные паркетные с числом вращения, меньшим шести.

Замечание. По-видимому, в такой общей постановке не удастся получить эффективное описание в терминах узлов ветвления, линейных участков и наростов. Например, в этом случае встречается бесконечное число типов узлов ветвления. Поэтому естественно возникает следующий вопрос: при каких ограничениях на возможные веса можно получить “конечную классификацию”? Например, если соответствующие паркетные являются подпаркетами в аффинном образе стандартного паркета плоскости, то, по-видимому, ответ вообще не изменится. Другой вариант — рассмотреть взвешенные бинарные деревья с заранее заданным конечным набором значений весов (т.е. конечным набором типов возможных треугольников соответствующих паркетов).

Задача 31. Продолжение задачи 29. Обобщить на случай взвешенных бинарных деревьев теорему реализации (см. теорему 5.6 главы 5).

Задача 32. Продолжение задачи 29. Обобщим понятие тривиальной сети Штейнера из главы 5 так. Назовем плоскую невырожденную сеть Штейнера *тривиальной*, если каждый ее фундаментальный цикл не содержит внутренних вершин. Пусть Γ — взвешенная тривиальная сеть. Назовем сеть Γ *правильной*, если для каждого ее фундаментального цикла определенное с помощью весов кручение, при обходе цикла против часовой стрелки, равно 2π . Проверить, верно ли, что для правильной сети число вращения между ее граничными ребрами не зависит от выбора пути, соединяющего эти ребра.

Задача 33. Продолжение задачи 32. Если результат, сформулированный в задаче 32, верен, то можно естественным образом определить число вращения правильной сети. Проверить, верен ли следующий результат: если число вращения правильной сети меньше 6, то эта сеть планарно эквивалентна двойственной сети некоторого взвешенного паркета (с соответствующими весами). Интересно также рассмотреть случай числа вращения, равного 6 (по-видимому, в этом случае препятствия к существованию паркетной реализации могут быть естественным образом сформулированы).

Задача 34. Продолжение задачи 32. Описать взвешенные паркеты, соответствующие правильным сетям, с числом вращения, меньшим шести (см. замечание после задачи 30).

Локально минимальные сети и минимальные остовные деревья

Задача 35. Какими свойствами должно обладать минимальное остовное дерево Γ , чтобы градиентный спуск (в классе сетей-следов), начав с Γ , приводил бы к абсолютно минимальному дереву?

Замечание. Минимальное остовное дерево из задачи 35 существует не для каждого граничного множества (постройте пример).

Задача 36. Описать локальную структуру минимальных остовных деревьев на плоскости и в пространстве. То же на римановом многообразии. То же для случая пространства Банаха–Минковского, см. [11].

Задача 37. Описать локальную структуру так называемых минимальных k -деревьев Штейнера, т.е. минимальных деревьев с не более чем k

дополнительными вершинами (k -Steiner minimal trees, см. [11]) на плоскости и в пространстве.

Задача 38. Назовем локально минимальное дерево Γ *сильно минимальным*, если оно совпадает с минимальным остовным деревом, натянутым на множество всех вершин дерева Γ . Описать сильно минимальные деревья.

Локально минимальные сети на поверхностях

Задача 39. Получить классификацию замкнутых минимальных сетей на замкнутых поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Рассмотреть для начала случай рода 2.

Задача 40. Хорошо известно, что каждая двумерная поверхность M_g^2 рода $g > 1$ постоянной отрицательной кривизны может быть склеена из $4g$ -угольника на плоскости Лобачевского. Дать естественное *геометрическое* описание всех метрик постоянной отрицательной кривизны на поверхности M_g^2 в терминах таких $4g$ -угольников. Другими словами, дать естественное геометрическое описание пространств Тейхмюллера (если это возможно).

Задача 41. Изучить бифуркации замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях при изменении метрики поверхности в классе метрик постоянной кривизны. Интересен уже случай плоских торов и плоских бутылок Клейна. Особенно интересен, конечно, случай поверхностей отрицательной кривизны. Здесь было бы интересно рассмотреть хотя бы один пример (для этого было бы полезно решить задачу 40).

Замечание. Отметим, что для случая плоских поверхностей в главе 5.2 построены так называемые области минимальности, описывающие все плоские поверхности, на которых имеется замкнутая минимальная сеть фиксированного типа. Это позволяет вычислять момент бифуркации при указанном изменении метрики. Таким образом, остается описать перестройку типа сети.

Задача 42. В разделе 5.2 показано, что на каждой плоской поверхности существует бесконечно много топологически различных замкнутых минимальных сетей. У некоторых из них матрицы типов отличаются на множитель. Получить “проективную” классификацию замкнутых локально минимальных сетей на замкнутых плоских поверхностях, т.е. описать типы замкнутых локально минимальных сетей на этих поверхностях с точностью до множителя. В частности, проверить, верно ли, что на каждой замкнутой плоской поверхности лишь конечное число “проективных типов” имеет минимальную реализацию.

Многогранники

Задача 43. Завершить классификацию замкнутых вложенных геодезических на платоновых телах (случай куба и тетраэдра разобран Т. В. Павлюкевич).

Задача 44. Завершить классификацию замкнутых локально минимальных сетей на платоновых телах (случай тетраэдра полностью разобран, см. главу 5, много информации о кубе и додекаэдре, см. [3]).

Задача 45. Описать многогранники, допускающие разветвленное накрытие тором с дырками. Гипотеза: если имеется замкнутая минимальная сеть, отличная от замкнутой геодезической, то такие накрытия существуют.

Задача 46. Распространить развитую в книге технику на случай неориентируемых многогранников.

Задача 47. Сформулировать и доказать теорему Гаусса–Бонне для случая несферических многогранников.

Задача 48. Существует ли многогранник, на котором есть вложенные замкнутые геодезические, а вложенных замкнутых минимальных сетей нет?

Задача 49. На любом ли многограннике существует взвешенная замкнутая минимальная сеть?

Минимальные сети с частично свободной границей

Задача 50. Построить теорию минимальных сетей с частично свободной границей, т.е. описать глобальное устройство таких сетей. (Локальная структура таких сетей может быть легко описана.)

Теория индекса минимальных сетей

Задача 51. Обобщить аналог теоремы Морса об индексе, полученный М. Прониным для случая минимальных деревьев (см. главу 5) на случай сетей с циклами.

Замечание. Для этого нужно понять, как правильно определить исчерпание сетей с циклами.

Задача 52. Получить аналог неравенств Морса для случая минимальных сетей. (Г. Карпуниным заложены основы соответствующей теории, доказано равенство Морса, см. главу 5.)

Задача 53. Обобщить результаты Г. Карпунина (см. главу 5) на случай произвольных римановых многообразий.

Задача 54. Вычислить (оценить) количество локально минимальных сетей (локально минимальных деревьев, локально минимальных бинарных деревьев), затачивающих граничное множество, состоящее из заданного числа вершин.

Задача 55. Изучить бифуркации минимальных сетей при деформации граничного множества.

Экстремальные сети в нормированных пространствах

Задача 56. Описать экстремальные кривые на многообразиях с нормой. В качестве примера рассмотреть левоинвариантные нормы на группах Ли.

Задача 57. Описать локальную структуру экстремальных параметрических сетей и сетей-следов на многообразиях с нормой. В качестве первого примера можно рассмотреть левоинвариантные нормы на группах Ли.

Задача 58. Получить критерий экстремальности замкнутой сети на двумерном торе (аналогично, двумерной бутылке Клейна), снабженном манхеттенской нормой.

Локально минимальные сети в смысле функционала манхеттенской длины

Задача 59. Верно ли, что сети, локально минимальные (экстремальные) по отношению к функционалу манхеттенской длины, являются устойчивыми по отношению к малым деформациям граничного множества (при разумных предположениях об общем положении границы)?

Задача 60. Обобщить теорему об устройстве пространства всех локально минимальных сетей с заданными топологией и границей на случай сетей, локально минимальных (экстремальных) по отношению к функционалу манхеттенской длины.

Задача 61. Описать локальное и глобальное устройство сетей, экстремальных относительно функционала взвешенной манхеттенской длины.

Отношение Штейнера

Задача 62. Проверить, справедлива ли гипотеза Гилберта–Поллака. Можно ли устранить пробелы в конструкции Ду–Хванга?

Замечание. Было бы очень полезно разобраться, какие результаты, касающиеся отношения Штейнера, получены с использованием конструкции Ду–Хванга, а какие — нет.

Задача 63. Для каких пространств отношение Штейнера достигается на конечных граничных множествах?

Замечание. Известно лишь несколько примеров таких пространств размерности 2, скажем ℓ_1^2 .

Пусть B — произвольный БМ-шар в \mathbb{R}^n . Напомним, что множество

$$\hat{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in B\}$$

является БМ-шаром и называется *полярой* или *двойственным БМ-шаром* для B . Например, двумерные шары B_p^2 и B_q^2 являются двойственными при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Задача 64. Как связаны отношения Штейнера двойственных БМ-шаров? Интересно рассмотреть двумерный случай, даже случай двумерных ℓ_p -норм.

Замечание. В книге [12] высказывается гипотеза, что в двумерном случае имеет место равенство, а в случае больших размерностей — равенства нет.

Литература

- [1] J. Albrecht, *Das Steiner Verhältnis endlich dimensionaler L_p -Räumen*, Master's Thesis, Ernst–Moritz–Arndt Universität Greifswald, Diplom Arbeit, 1997.
- [2] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, М.: ОГИЗ, 1948.
- [3] Т. В. Аникеева, *Замкнутые локально минимальные сети на многогранниках*, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., 1999.
- [4] K. Bopp, *Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten*, PhD Thesis, Uni. Göttingen, 1879.
- [5] M. Brazil, J. Cole, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng and N. C. Wormald, *Full minimal Steiner trees on lattice sets*, Melbourne, preprint of Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia, 1995.
- [6] M. Brazil, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng and N. C. Wormald, *Minimal Steiner trees for $2^k \times 2^k$ square lattices*, J. Combin. Theory, Ser. A, **73**, pp. 91–110, 1996.
- [7] M. Brazil, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng and N. C. Wormald, *Minimal Steiner trees for generalizid checkerboards*, Melbourne, preprint of Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia, 1995.
- [8] M. Brazil, J. H. Rubinstein, A. D. Thomas, J. F. Weng and N. C. Wormald, *Minimal Steiner trees for rectangular arrays of lattice points*, Melbourne, research report No. 24, 1995, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia, 1995.
- [9] M. Besson and A. Tromba, *The cusp catastrophe of Thom in bifurcation of minimal Surfaces*, Manuscripta Math., **46**, pp. 273–307, 1984.
- [10] D. Cieslik, *The Steiner Ratio of Metric Spaces*, Greifswald, preprint of Inst. of Math. and Comp. Sc., Ernst–Moritz–Arndt Univ., Greifswald, Germany, 1998.
- [11] D. Cieslik, *Steiner Minimal Trees*, Kluwer Academic Publishers, Boston–London–Dordrecht, 1998.

- [12] D. Cieslik, *The Steiner Ratio*, Kluwer Academic Publishers, Boston–London–Dordrecht, 2001.
- [13] D. Cieslik, *Bäume minimaler Längen in der Normierten Ebene*, 27 Int. Wiss. Koll., Ilmenau, 1982, Heft 5, 3–6, 1982.
- [14] D. Cieslik, *Using Hadwiger Numbers in Networks Design*, DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theor. Comp. Sc., **40**, pp. 59–77, 1998.
- [15] R. C. Clark, *Communication networks, soap films and vectors*, Phys. Ed., **16**, pp. 32–37, 1981.
- [16] E. J. Cockayne, *On the Steiner problem*, Canad. J. Math., **10**, pp. 431–450, 1967.
- [17] Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика? : Элементарный очерк идей и методов*, 3-е изд., испр. и доп., М., МЦНМО, 2001.
- [18] F. R. K. Chung and E. N. Gilbert, *Steiner trees for the regular simplex*, Bull. of the Inst. of Math. Ac. Sinica, **4**, 313–325, 1976.
- [19] F. R. K. Chung and R. L. Graham, *Steiner trees for ladders*, Ann. Disc. Math., **2**, pp. 173–200, 1978.
- [20] F. R. K. Chung, M. Gardner and R. L. Graham, *Steiner trees on a checkerboard*, Math. Magazine, **62**, pp. 83–96, 1989.
- [21] Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко, *Минимальные поверхности и проблема Плато*, М.: Наука, 1987.
- [22] B. V. Dekster, *Simplexes with Prescribed Edge Length in Minkowski and Banach Spaces*, Preprint, 1996.
- [23] B. Delaunay, *Sur la sphère vide*, Bull. Acad. Sci. USSR VII., Classe Sci. Mat. Nat., pp. 793–800, 1934.
- [24] E. W. Dijkstra, *A note on two problems with connection with graphs*, Numer. Math., **1**, No 5, pp. 269–271, 1959.
- [25] D. Z. Du, *On Steiner Ratio Conjectures*, Manuscript of Inst. Appl. Math. Academia Sinica, Beijing, China, 1989.
- [26] D. Z. Du, B. Gao, R. L. Graham, Z. C. Liu, and P. J. Wan, *Minimum Steiner trees in normed planes*, Discrete and Comput. Geom, **9**, pp. 351–370, 1993.
- [27] D. Z. Du and F. K. Hwang, *A New Bound for the Steiner Ratio*, Trans. Amer. Math. Soc., **278**, No 1, pp. 137–148, 1983.
- [28] D. Z. Du and F. K. Hwang, *A Proof of Gilbert–Pollak’s Conjecture on the Steiner Ratio*, DIMACS, Technical Report, 1990.

- [29] D. Z. Du and F. K. Hwang, *A proof of Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner ratio*, Algorithmica, **7**, pp. 121–135, 1992.
- [30] D. Z. Du and F. K. Hwang, *An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak’s Conjecture on the Steiner Ratio*, Proc. of the 31st annual symp. on found. of comp. science, 1990.
- [31] D. Z. Du, F. K. Hwang and S. C. Chao, *Steiner minimal trees for points on a circle*, Proc. Amer. Math. Soc., **95**, No 4, pp. 613–618, 1985.
- [32] D. Z. Du, F. K. Hwang and J. F. Weng, *Steiner minimal trees for points on a zig-zag lines*, Trans. Amer. Math. Soc., **278**, No 1, pp. 149–156, 1983.
- [33] D. Z. Du, F. K. Hwang and J. F. Weng, *Steiner minimal trees for Regular Polygons*, Disc. and Comp. Geometry, **2**, pp. 65–84, 1987.
- [34] D. Z. Du, F. K. Hwang and E. N. Yao, *The Steiner ratio conjecture is true for five points*, J. Combin Th., Ser. A38, pp. 230–240, 1985.
- [35] D. Z. Du, F. K. Hwang, G. D. Song, and G. T. Ting, *Steiner minimal trees on sets of four points*, Discr. and Comp. Geometry, **2**, pp. 401–414, 1987.
- [36] D. Z. Du, and W. D. Smith, *Disproofs of generalized Gilbert–Pollak conjecture on the Steiner ratio in three or more dimensions*, J. Combin. Theory, **74**, ser. A, 115–130, 1996.
- [37] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Москва, Наука, 1985.
- [38] A. L. Edmonds, J. H. Ewing and R. S. Kulkarni, *Regular tessilations of surfaces and $p, q, 2$ -triangle groups*, Ann. Math., **166**, pp. 113–132, 1982.
- [39] В. А. Емеличев и др., *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.
- [40] P. Fermat, *Abhandlungen über Maxima und Minima*, в книге: Oswalds, Klassiker der Exakten Wissenschaften, No. 238, 1934.
- [41] А. Т. Фоменко, *Вариационные методы в топологии*, М.: Наука, 1982.
- [42] А. Т. Фоменко, *Топологические вариационные задачи*, М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [43] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, М., Наука, 1989.
- [44] R. L. Francis, *A note on the optimum location of new machines in existing plant layouts*, J. Indust. Engrg., **14**, pp. 57–59, 1963.

- [45] Z. Füredi, J. Lagarias, F. Morgan, *Singularities of minimal surfaces and networks and related extremal problems in Minkowski space*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **6**, pp. 95–106, 1991.
- [46] Г. А. Гальперин, *О теореме Люстерника–Шнирельмана для многогранников*, Успехи мат. наук, **46**, No 6, сс. 207–208, 1991,
- [47] B. Gao, D. Z. Du, R. L. Graham, *A tight lower bound for the Steiner ratio in Minkowski planes*, Discrete Mathematica, **142**, pp. 49–63, 1995.
- [48] M. R. Garey and D. S. Johnson *The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete*, SIAM J. Appl. Math., **32**, pp. 826–834, 1977.
- [49] M. R. Garey, R. L. Graham and D. S. Johnson, *Some NP-complete geometric problems*, Eighth Annual Symp. on Theory of Comput., pp. 10–22, 1976.
- [50] C. F. Gauss, *Briefwechsel Gauss–Schuhmacher*, в книге: Werke Bd. X, 1, pp. 459–468, Göttingen, 1917.
- [51] G. Georgakopoulos and C. H. Papadimitriou, *The 1-Steiner Problem*, J. of Algorithm, No 8, pp. 122–130, 1987.
- [52] E. N. Gilbert and H. O. Pollak, *Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math., **16**, No 1, pp. 1–29, 1968.
- [53] М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса*, М.: Мир, 1991.
- [54] R. L. Graham and F. K. Hwang, *A remark on Steiner minimal trees*, Bull. of the Inst. of Math. Ac. Sinica, **4**, pp. 177–182, 1976.
- [55] A. Gray, *Tubes*, Addison–Wesley Publ., 1990.
- [56] D. Gromoll, W. Klingenberg and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer-Verlag, 1968. (Русский перевод: Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, М.: Мир, 1971.)
- [57] V. E. Gurarii, M. I. Kadec, V. E. Macaev, *On the distance between isomorphic spaces of finite dimension*, Матем. сб., **70**, сс. 481–489, 1966.
- [58] Н. С. Гусев, *О выпуклых реализациях плоских линейных деревьев*, Матем. заметки, **73**, 5:665–675, 2003.
- [59] M. Hanan, *On Steiner’s Problem with Rectilinear Distance*, SIAM J. Appl. Math., **14**, pp. 255–265, 1966.

- [60] A. Heppes, *Isogonal spherischen Netze*, Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math., **7**, pp. 41–48, 1964.
- [61] S. Hildebrandt and A. Tromba, *The Parsimonious Universe*, New York, Springer-Verlag, 1996.
- [62] Хонг Ван Ле, *Минимальные Ф-лагранжесвы поверхности в почти эрмитовых многообразиях*, Мат. сборник, **180**, сс. 924–936, 1989.
- [63] Hong Van Le, *Relative Calibration and the Problem of Stability of Minimal Surfaces*, в книге: Lecture Notes in Math., Springer, **1463**, 245–262, 1990.
- [64] F. K. Hwang, *On Steiner minimal trees with rectilinear distance*, SIAM J. of Appl. Math., **30**, pp. 104–114, 1976.
- [65] F. K. Hwang, *A linear time algorithm for full Steiner trees*, Oper. Res. Letter, **5**, pp. 235–237, 1986.
- [66] F. K. Hwang and J. F. Weng, *Hexagonal coordinate Systems and Steiner minimal trees*, Disc. Math., **62**, pp. 49–57, 1986.
- [67] F. K. Hwang, D. Richards and P. Winter, *The Steiners Tree Problem*, Elsevier Science Publishers, 1992.
- [68] A. O. Ivanov, *Calibration Forms and New Examples of Globally Minimal Surfaces*, Advances in Soviet Math., AMS, **15**, pp. 235–267, 1993.
- [69] А. О. Иванов, *Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев*, Матем. сборник, **186**, No 9, сс. 45–76, 1995.
- [70] А. О. Иванов, *Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья*, Фундаментальная и прикладная матем., **2**, No 2, сс. 375–409, 1996,
- [71] А. О. Иванов, *Геометрические свойства локально минимальных сетей*, Дисс. доктора физ.-мат. наук, М.: МГУ, 1998.
- [72] A. O. Ivanov, Hong Van Le, A. A. Tuzhilin, *Planar Manhattan Local Minimal and Critical Networks*, European J. of Combinatorics, **23**, No 8, pp. 949–967, 2002.
- [73] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Решение задачи Штейнера для выпуклых границ*, Успехи матем. наук, **45**, No 2, сс. 207–208, 1990.
- [74] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети*, Матем. сб., **182**, No 12, сс. 1813–1844, 1991.

- [75] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато*, Успехи матем. наук, **47**, No 2, сс. 53–115, 1992.
- [76] А. О. Иванов, И. В. Птицына, А. А. Тужилин, *Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах*, Матем. сборник, **183**, No 12, сс. 3–44, 1992.
- [77] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *The Steiner problem for convex boundaries, I; II*, Advances in Soviet Mathematics, AMS, **15**, pp. 15–131, 1993.
- [78] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations*, N.W., Boca Raton, Florida, CRC Press, 1994.
- [79] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *Some problems concerning minimal networks*, International Journal of Shape Modeling, **1**, No 1, pp. 81–107, 1994.
- [80] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Взвешенные минимальные бинарные деревья*, Успехи мат. наук, **50**, No 3, сс. 155–156, 1995.
- [81] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Классификация минимальных скелетов с правильной границей*, Успехи мат. наук, **51**, No 4, сс. 157–158, 1996.
- [82] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия плоских линейных деревьев*, Успехи мат. наук, **51**, No 2, сс. 161–162, 1996.
- [83] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Число вращения плоских линейных деревьев*, Матем. сб., **187**, No 8, сс. 41–92, 1996.
- [84] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей*, Известия РАН, сер. мат., **61**, No 6, сс. 119–152, 1997.
- [85] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *Planar Local Minimal Binary Trees with Convex, Quasiregular, and Regular Boundaries*, Bonn, Preprint of Rheinische Friedrich–Wilhelms Universität Bonn, Sonderforschungsbereich 256, Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, preprint no. 490, 1996.
- [86] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *Geometry and Topology of Local Minimal 2-trees*, Boletim Soc. Bras. Mat., **28**, No 1, pp. 103–139, 1997.
- [87] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей*, The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999.

- [88] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Пространство взаимно параллельных линейных сетей с фиксированной границей*, Изв. Российской академии наук, серия матем., **63**, No 5, сс. 83–126, 1999.
- [89] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия выпуклых многоугольников и затягивающих их локально минимальных бинарных деревьев*, Матем. сборник, **190**, No 1, сс. 69–108, 1999.
- [90] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems*. — World Publisher Press, 2001.
- [91] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик, *Отношение Штейнера для римановых многообразий*, Успехи матем. наук, **55**, No 6, сс. 139–140, 2000.
- [92] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях*, Матем. сборник, **192**, No 6, сс. 31–50, 2001.
- [93] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Extreme Networks*, Acta Appl. Mathemat., **66**, pp. 251–317, 2001.
- [94] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Разветвленные геодезические в нормированных пространствах*, Известия Российской академии наук, серия матем., **66**, No. 5, сс. 33–82, 2002.
- [95] V. Jarnik and M. Kössler, *O minimalnich grafeth obeahujicich n daniých bodu*, Cas. Pest. Mat. a Fys., **63**, pp. 223–235, 1934.
- [96] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, 1948, pp. 187–204.
- [97] Г. А. Карпунин, *Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера*, Матем. сборник, **191**, No 2, сс. 64–90, 2000.
- [98] Г. А. Карпунин, *Минимальные сети на правильном n -мерном симплексе*, Матем. заметки, **69**, No 6, сс. 854–865, 2001.
- [99] Г. А. Карпунин, *Теория Морса минимальных сетей*, Дисс. кандидата физ.-мат. наук, М.: МГУ, 2001.
- [100] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Springer, 1978. (Русский перевод: В. Клингенберг, *Лекции о замкнутых геодезических*, М: Мир, 1982.)
- [101] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, New York, 1963, 1969. (Русский перевод: Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основания дифференциальной геометрии*, М., Наука, 1980.)

- [102] J. B. Kruskal, *On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **7**, pp. 48–50, 1956.
- [103] H. W. Kuhn, *Steiner's problem revisited*, в книге: Studies in Optimization, ser. Studies in Math., **10**, Math. Assoc. Amer., edited by G. B. Dantzig and B. C. Eaves, pp. 53–70, 1975.
- [104] G. Lawlor and F. Morgan, *Minimizing cones and networks: immiscible fluids, norms, and calibrations*, в книге: J. Taylor, ed., Computing optimal geometries, AMS Selected Lectures in Math., 1991.
- [105] G. Lawlor and F. Morgan, *Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing other norms*, Pacific J. Math., **166**, pp. 55–83, 1994.
- [106] D. T. Lee, C. F. Shen, *The Steiner Minimal Tree Problem in the ℓ -geometre Plane*, В книге: ISAAC'96, Lecture Notes in Comp. Science, **1178**, Springer-Verlag, pp. 247–255, 1996.
- [107] von K. Leichtweiß, *Konvexe Mengen*, VEB D. Verlag, Berlin, 1980. (Русский перевод: К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, М.: Наука, 1985.)
- [108] Z. C. Liu, D. Z. Du, *On Steiner minimal trees with L_p distance*, Algorithmica, **7**, pp. 179–192, 1992.
- [109] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, Труды Научно-исследовательского института математики и механики при И МГУ, М., ГИТТЛ, 1930.
- [110] Y. I. Lyubich, L. N. Vaserstein, *Isometric Embeddings between Classical Banach Spaces, Cubature Formulas, and Spherical Designs*, Preprint 1/4/92, SUNY at Stony Brook and PSU at University Park, 1992.
- [111] Y. I. Lyubich, L. N. Vaserstein, *Isometric Embeddings between Classical Banach Spaces, Cubature Formulas, and Spherical Designs*, Geometriae Dedicata, **47**, pp. 327–362, 1993.
- [112] Z. A. Melzak, *On the problem of Steiner*, Canad. Math. Bull., **4**, pp. 143–148, 1960.
- [113] Z. A. Melzak, *Companion to concrete mathematics*, Wiley–Interscience, New York, 1973.
- [114] В. С. Михалевич, В. А. Трубин, Н. З. Шор, *Оптимизационные задачи и индустриальное планирование: модели, методы, алгоритмы*, М.: Наука, 1986.

- [115] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [116] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1963. (Русский перевод: Дж. Милнор, *Теория Морса*, М.: Мир, 1965.)
- [117] F. Morgan and J. Hass, *Geodesic nets on the 2-sphere*, Proc. AMS, **124**, pp. 3843–3850, 1996.
- [118] F. Morgan, *Minimal surfaces, crystals, shortest networks, and undergraduate research*, Math. Intelligencer, **14**, Summer, pp. 37–44, 1992.
- [119] О. Р. Мусин, *О некоторых задачах вычислительной геометрии и топологии*, в книге: Алгебраические вопросы анализа и топологии, Воронеж, изд-во Воронеж. ГУ, сс. 30–51, 1990.
- [120] O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Press, 1962. (Русский перевод: О. Оре, *Теория графов*, М.: Наука, 1980.)
- [121] А. В. Погорелов, *Квазигеодезические линии на выпуклых поверхностях*, Матем. сборник, **25**, сс. 275–307, 1949.
- [122] H. O. Pollak, *Some remarks on the Steiner problem*, J. Combin. Thy., Ser. A24, pp. 278–295, 1978.
- [123] М. М. Постников, *Введение в теорию Морса*, М.: Наука, 1971.
- [124] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия*, М.: Наука, 1987.
- [125] М. В. Пронин, *Локально минимальные сети на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны*, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., No 5, 1998.
- [126] М. В. Пронин, *Индексы локально минимальных сетей на сфере*, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., 4:3–6, 2001.
- [127] М. В. Пронин, *Индексы Морса локально минимальных сетей*, Матем. сборник, в печати.
- [128] F. Preparata and M. Shamos, *Computational Geometry. An introduction*, New York, Springer-Verlag, 1985.
- [129] R. C. Prim, *Shortest connecting networks and some generalizations*, BSTJ, **36**, pp. 1389–1401, 1957.
- [130] И. В. Птицына, *Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна*, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., No 2, сс. 15–22, 1995.

- [131] И. В. Птицына, *Классификация замкнутых локально минимальных сетей на тетраэдрах*, Матем. сборник, **185**, No 5, pp. 119–138, 1994.
- [132] D. S. Richards and J. S. Salowe, *A Linear-Time Algorithm To Construct a Rectilinear Steiner Minimal Tree for k -Extremal Point Sets*, Algorithmica, **7**, pp. 247–276, 1992.
- [133] J. H. Rubinstein and D. A. Thomas, *The Steiner ratio conjecture for six points*, J. Combin. Thy., Ser. A58, pp. 54–77, 1989.
- [134] J. H. Rubinstein and D. A. Thomas, *Graham's conjecture on shortest networks for points on a circle*, Algorithmica, **7**, pp. 193–218, 1992.
- [135] J. H. Rubinstein and D. A. Thomas, *A variational approach to the Steiner network problem*, Ann. Oper. Res., **33**, pp. 481–499, 1991.
- [136] J. H. Rubinstein and J. F. Weng, *Compression theorems and Steiner ratios on spheres*, J. Combin. Optimization, **1**, pp. 67–78, 1997.
- [137] M. Sarrafzadeh, C. K. Wong, *Hierarchical Steiner tree construction in uniform orientations*, Preprint.
- [138] M. I. Shamos, *Computational Geometry*, Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Uni., 1978.
- [139] И. В. Шклярко, *Одномерная проблема Плато на поверхностях*, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., No 3, pp. 8–11, 1989.
- [140] Е. Г. Скляренко, *Гомологии и когомологии общих пространств*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **50**, сс. 129–266, М.: ВИНТИ, 1989.
- [141] W. D. Smith, *How to find Steiner minimal trees in Euclidean d -space*, Algorithmica, **7**, pp. 137–177, 1992.
- [142] W. D. Smith and J. M. Smith, *On the Steiner ration in 3-space*, J. of Combinatorial Theory, **65**, ser. A, pp. 301–332, 1995.
- [143] K. J. Swanepoel, *The Local Steiner Problem in Normed Planes*, Networks, **36**, pp. 104–113, 2000.
- [144] А. А. Тужилин, *Индексы типа Морса минимальных поверхностей в \mathbb{R}^3 и \mathbb{H}^3* , Известия АН СССР, No 3, pp. 581–607, 1991.
- [145] А. А. Тужилин, *Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами*, Матем. сборник, **187**, No 4, сс. 117–159, 1996,
- [146] А. А. Тужилин, *Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами*, Матем. заметки, **61**, No 6, 1997.

- [147] А. А. Тужилин, *Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей, двойственные триангуляции которых являются скелетами*, *Фундаментальная и прикладная математика*, **2**, No 2, сс. 511–562, 1996.
- [148] А. А. Тужилин, *Классификация локально минимальных плоских сетей с выпуклыми границами*, Дисс. доктора физ.-мат. наук, М.: МГУ, 1997.
- [149] А. А. Тужилин и А. Т. Фоменко, *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*, М.: Наука, 1991.
- [150] D. A. Thomas, J. H. Rubinstein and T. Cole, *The Steiner minimal network for convex configuration*, Melbourne, The Uni. of Melbourne, Depart. of Math., Research report, Preprint No 15, 1991.
- [151] А. А. Вдовина, Е. Н. Селиванова, *Локально минимальные сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны*, *Вестник МГУ, сер. матем. и мех.*, No 6, pp. 15–17, 1997.
- [152] M. Zacharias, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, III, AB9.

Список иллюстраций

1	Расщепление вершины.	iv
1.1	Диаграмма типов сетей.	11
1.2	Разрывность функционала при вульгарном определении сетей-следов.	12
1.3	Примеры ρ -эквивалентности.	14
1.4	Бифуркация мыльной пленки в терминах двумерных по- верхностей-следов.	23
3.1	Примеры концевых A - и B -областей.	56
3.2	Верхушка t -шапочки индекса s	58
3.3	Типы сингулярных элементов.	61
3.4	Типы внутренних вершин.	65
3.5	Двойная спираль с числом вращения 18.	74
4.1	Пример дерева экстремальной длины с вырождениями, не единственного в своем классе.	87
4.2	Примеры не выпукло-реализуемых ломаных с числом вращения, меньшим 6.	94
4.3	Выпуклые ломаные, выпуклая комбинация угловых по- следовательностей которых невыпукла.	97
5.1	Построение триангуляции по бинарному дереву.	106
5.2	Это плоское бинарное дерево не имеет паркетной реали- зации.	108
5.3	Двойственная сеть паркета.	109
5.4	Разложение паркета на скелет и наросты.	111
5.5	Оси линейного участка и соответствующего этому участ- ку паркета.	114
5.6	Узлы ветвления деревянных паркетов.	114
5.7	Редукция II-го типа может увеличить число вращения.	117
5.8	Концевые ребра паркета определены неоднозначно.	119
5.9	Схемы классифицирующих скелетов.	120

5.10	Коды невырожденных 6-скелетов.	122
5.11	Расположение наростов в паркетах из \mathcal{WP}_3	123
5.12	Представители бесконечных серий скелетов без узлов ветвления и 3-скелетов, имеющих правильную минималь- ную реализацию.	125
5.13	6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализа- цию: случаи $n = 24$ и $n = 30$	126
5.14	6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализа- цию: случаи $n = 36$ и $n = 42$	126
5.15	Пара концевых наростов.	129
5.16	Типы хвостов.	131
5.17	Точки на окружности.	133
5.18	Четыре класса поворачивающих концевых линейных уча- стков E	136
5.19	Пример квазиправильного 70-угольника, который нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом. . . .	149
5.20	Этот граф Штейнера не имеет плоской минимальной ре- ализации.	150
5.21	Ядра паркета.	154
5.22	Линейные участки.	156
5.23	Структурные элементы.	156
5.24	Линейные макроэлементы и макроэлементы ветвления. . .	157
5.25	Направления концевого линейного участка.	159
5.26	Этот скелет из \mathcal{P}_3 нельзя представить в виде скелета из \mathcal{WP}_3 с полинаростами.	161
5.27	Типы замкнутых локально минимальных сетей на стан- дартной сфере.	165
5.28	Типы замкнутых локально минимальных сетей на \mathbb{RP}^2 . . .	167
5.29	Область минимальности.	181
5.30	Локально минимальная сеть на призме.	206
5.31	Бесконечные серии сетей на платоновых телах.	209
5.32	Квазиправильный тетраэдр.	213
5.33	Перестройки сети: вклейка тройника и шестиугольника. .	216
5.34	Вклейка “грозди шестиугольников”.	217
5.35	Тетраэдроподобная сеть на додекаэдре (развертка). . . .	218
5.36	Тетраэдроподобная сеть на додекаэдре (построение). . .	219
5.37	Тетраэдроподобная сеть на додекаэдре.	219
5.38	Вложенная замкнутая геодезическая на кубе, 1.	220
5.39	Вложенная замкнутая геодезическая на кубе, 2.	221
5.40	Вложенная замкнутая геодезическая на кубе, 3.	221

5.41	Пример сети при $k = 1$	231
5.42	Две сети одинаковой топологии, по-разному затягивающие одно и то же граничное множество.	237
5.43	Геометрические деревья ранга 1, полученные из геометрического дерева G_0 ранга 0 добавлением одного внутреннего ребра.	244
5.44	Устройство пространства \mathcal{T} при $n = 4$	244
5.45	Функция высоты на двумерном торе.	245
5.46	Перестройки Морса.	246
5.47	Перестройки комплекса $\mathcal{N}_{<\bar{c}}$	257
6.1	Два типа полных кратчайших сетей.	262
6.2	Расщепление вершины степени 5.	281
6.3	Сеть, длина которой уменьшается лишь при расщеплении сразу двух ее вершин.	284
6.4	Локально минимальная неэкстремальная сеть на плоскости.	306
6.5	Расщепления вершин при деформации Υ_t	311
6.6	Расщепления вершин при деформации Υ_t	311
6.7	Нелокально минимальные сети, $\deg(z) = 4, 5, 6$	321
6.8	Нелокально минимальная сеть, $\deg(z) = 3$	321
6.9	Погрешность $\text{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = n\left(2 - \frac{3\alpha}{\pi}\right)$	322
6.10	Тип вершины z	323
6.11	Локально минимальная не экстремальная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$	325
6.12	Существенная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 5$	328
6.13	Произвольная локально минимальная сеть на n -нормированной плоскости, где $2n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n \geq 8$	334
6.14	Сети, полученные разрезанием сети Γ по вершинам $z_5, z_{22}, z_{37}, z_{38}, z_{40}$ и по ребрам γ_{17}, γ_{31}	335
6.15	Множество $\overline{\mathfrak{M}}$ полусущественных сетей сети Γ	336
6.16	Результат отрезания нитей от сетей Γ_1, Γ_4^1 и Γ_4^2	337
6.17	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, [\mu_j, \mu_{j+1}]; 1\}$, где ребро типа $[\mu_j, \mu_{j+1}]$ — 1-граничное.	337
6.18	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j; -2\}$	338
6.19	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j; 1\}$	338

6.20	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, (\mu_j, \mu_{j+1}), \mu_k; 1, 1\}$, где ребро типа μ_i — 1-граничное.	338
6.21	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребра типа μ_i и μ_k — 1-граничные.	339
6.22	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребра типа μ_i и μ_j — 1-граничные.	339
6.23	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребро типа μ_i — 1-граничное.	339
6.24	Допустимая деформация для z типа $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k; 1, 1\}$, где ребро типа μ_j — 1-граничное.	340
7.1	Гипотеза Смита и Макгрегора Смита: отношение Штейнера в \mathbb{R}^3 равно пределу отношений Штейнера граничных множеств такого типа.	351
7.2	Графики верхней и нижней оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^2 из Следствия 7.8.	359
7.3	Графики верхних и нижней оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^2	361
7.4	Графики верхних оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^3	362
7.5	Графики верхних оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^7	363
7.6	Множество P , представленное в виде объединения правильных симплексов P^i	367

Алфавитный указатель

- CW -комплекс (см. Клеточный комплекс) 2
- ρ -импульс 271
- k -неразмещаемое подмножество 368
- k -размещаемое подмножество 368
- Абсолютно минимальная сеть 103
- БМ-шар 355
- Боковина 119
- змея 119
 - лестница 119
 - ломаная змея 119
- Выпуклое множество 43
- Выпуклое тело 366
- Главное боковинное число множества 146
- Граничное множество главное боковинное число 146
- жаловый модуль 146
 - жаловый субмодуль 147
 - жаловый субмодуль точки 147
 - наростовое число 146
 - росток змеи 147
 - число поворота 146
- Граф τ -вложенный 93
- τ -граница 93
 - τ -граничная вершина 93
 - τ -фиктивная вершина 93
 - p -опорное ребро 94
 - двустороннее ребро 94
 - простая ломаная 95
 - фрагмент 94
 - вершины 3
 - внутренние 7
 - граничные 7
 - неподвижные 7
 - подвижные 7
 - взвешенный 3
 - вершина, фиктивная 84
 - склейка кратных ребер 83
 - вложение 93
 - выпукло реализуемое 94
 - выпуклое 94
 - неположительное 95
 - параллельность 93
 - выкидывание ребра 4
 - гладкая структура 8
 - индуцированная 8
 - гладкий 8
 - диффеоморфизм 8
 - эквивалентность 8
 - граница 7
 - допустимая окрестность 7
 - замкнутые ребра 3
 - комбинаторный 342
 - вершина 342
 - весовая функция 343
 - взвешенный 343
 - взвешенный, вес 343
 - взвешенный, минимальное остовное дерево 343
 - геометрическая реализация 352
 - на множестве 342
 - ребро 342
 - ребро, вес 343
 - ребро, кратное 342
 - ребро, петля 342
 - локальный граф 7

- каноническая граница 7
 - ломаная 95
 - ориентированная 95
 - на множестве 342
 - невырожденные компоненты 8
 - невырожденный 8
 - обобщенный 3
 - объединение 4
 - ориентированный 3
 - оснащенный 3
 - замена оснащения 8
 - отмеченный 4
 - вершина склейки 5
 - ребро склейки 4
 - склейка 4
 - склейка по вершине 5, 6
 - склейка по ребрам 6
 - склейка по ребру 6
 - параметризующий 8
 - приведенная компонента 28
 - регулярное ребро 26
 - точечная компонента 28
 - точечное ребро 26
 - плоский (см. Параметрическая сеть, плоская) 10
 - подвижный подграф 7
 - проекция 5
 - разрезание по вершине 4
 - восстанавливающее отображение 6
 - разрезание по внутренней точке 5
 - ребро разреза 5
 - точка разреза 5
 - разрезание по ребру 5
 - ребро разреза 5
 - ребра 3
 - внутренние 7
 - граничные 7
 - склейка ребер по вершине степени 2 6
 - слабая проекция 6
 - слабый фактор-граф 6
 - стирание вершины степени 2 6
 - сумма 4
 - топологический 3
 - фактор-граф 5
 - эквивалентность 3
- Деревянный паркет 109
- Δ -жало 130
 - Δ -змея 130
 - Δ -конец 130
 - Δ -хвост 130
 - тип 131
 - линейный участок 112
 - боковина 128
 - боковина подпаркета 128
 - классифицирующий скелет 120
 - концевая Δ -змея 130
 - концевая пара 128
 - линейный участок 127
 - Ω -множество 143
 - t -множество 134, 135
 - t -число 134, 135
 - боковина поворота 134, 137
 - боковинное число, верхнее 143
 - боковинное число, нижнее 143
 - вектор поворота 135
 - змея 128
 - излом 130
 - индекс конца 142
 - классы излома 135
 - концевой 128
 - лестница 128
 - ломаная змея 128
 - подчиненная боковина 134, 137
 - ребро поворота 130
 - угол направлений 142
 - угол от одного конца до другого 141
 - характеристическая полуплоскость 134, 135
 - число поворота 135
 - ячейка поворота 130
 - наростовое число 132
 - наростовый вектор 132
 - наросты концевые 128

- ребро концевое 118
- редукция I-го типа 117
- редукция II-го типа 117
- — ребро разреза 118
- супербоковина 128
- — длина 128
- узел ветвления 112
- число вращения 109
- Диагональная триангуляция 104
- вершина 104
- выпуклая минимальная реализация 107
- двойственная сеть 105
- — вершина 105
- — ребро 105
- — ребро, внутреннее 105
- — ребро, граничное 105
- ребро 104
- — внутреннее 104
- — граничное 104
- — диагональ 104
- связанное множество ячеек 107
- число вращения 107
- ячейка 104
- Допустимая тройка 174, 189
- четная 212
- Жаловый модуль множества 146
- Жаловый submodule множества 147
- Жаловый submodule точки 147
- Задача о плоской линейной укладке с заданными углами 49
- Замкнутая локально минимальная сеть, см. *Замкнутая сеть* 164
- Замкнутая сеть 164
- бутылка Клейна, см. *Замкнутая сеть на K^2* 186
- на торе, см. *Замкнутая сеть на торе* 169
- поверхности отрицательной кривизны, см. *Замкнутая сеть на M_g^2* 191
- тетраэдр, см. *Замкнутая сеть на тетраэдре* 209
- Замкнутая сеть на K^2 186
- I-й дискретный тип 188
- II-й дискретный тип 188
- накрытие бесконечная сеть 186
- — разбиение на шестиугольники 186
- правильная 188
- тип сети 189
- — дискретный тип 189
- — период вертикальный 189
- — период горизонтальный 189
- характеристическая сеть 189
- характеристический треугольник 189
- ячейка 186
- Замкнутая сеть на M_g^2 191
- одноклеточная 195
- топологическая эквивалентность 195
- ячейка 191
- Замкнутая сеть на тетраэдре 209
- период 212
- правильная 212
- тип 214
- характеристическая сеть 214
- характеристический треугольник 214
- Замкнутая сеть на торе M -тип сети 176
- базис сети 172
- бесконечная замкнутая сеть на плоскости 169
- класс параллельности ребер 171
- накрытие 171
- — базис сети 172
- — базисная сетевая геодезическая 172
- — базисная сетевая геодезическая, конец 172
- — базисная сетевая геодезическая, начало 172

- сетевая геодезическая, длина 173
- сетевая геодезическая, неприводимая 172
- сетевая геодезическая, периодическая 172
- сетевая геодезическая, приводимая 172
- сетевая геодезическая, тип 173
- сетевая прямая 171
- сетевой луч 172
- эквивалентные вершины 172
- правильная 178
- сетевая геодезическая 171
- замкнутая 171
- замкнутая 171
- тип сети 174–177
- матрица типа 174
- период вертикальный 174
- период горизонтальный 174
- характеристический треугольник 177
- характеристическая сеть 178
- характеристический треугольник 177, 178
- ячейка 169
- Змея 115
- Квазиправильный многоугольник 129
 - ε -квазиправильный типа s 148
 - соответствующий правильный многоугольник 129
- Квазиправильный тетраэдр 213
- Квазирегулярная кривая 26
- Клеточное пространство (см. Клеточный комплекс) 2
- Клеточный комплекс 2
 - клетка 2
 - приклеивающее отображение 2
 - размерность 2
 - характеристическое отображение 2
 - клеточная эквивалентность 2
 - клеточное отображение 2
 - клеточная эквивалентность 2
 - клеточное разбиение 2
 - конечный 2
 - оснащенная эквивалентность 3
 - оснащенный 3
 - остов 2
 - подкомплекс 2
 - размерность 2
- Комбинаторная теория Морса 235
- Компакт Банаха–Мазура 356
- Компонента уплощения 271
 - противоположные компоненты 271
- Конорма 267
- Кратчайшее прямоугольное дерево 262
- Лагранжиан 18
 - импульс 26
 - квазирегулярный 27
 - дифференцируемый вдоль базы 33
 - правильный 34
 - условие согласованности 27
- Лестница 115
- Линейная сеть 43
 - *плоское линейное дерево* 48
 - геометрическая граница 47
 - исходная ориентация 45
 - параллельность 44
 - ранг 46
 - ранг невырожденной компоненты 45
 - тип 43
 - фундаментальная система 46
 - фундаментальная система невырожденной компоненты 45
- Линейный участок 112
 - *змея* 115
 - *лестница* 115
 - *ломаная змея* 115
 - направляющая 114, 115
 - ось 113
- Локально минимальная сеть 102, 263
 - индекс Морса 221

— индексная форма 221

Ломаная змея 115

Манхеттенская длина 261

Манхеттенская длина вектора 261

Манхеттенское пространство 265

Минимальное дерево Штейнера 103

— геометрическая реализация 352

Минимальное дерево Штейнера на множестве 343

Минимальное дерево Штейнера, затягивающее множество 343

Многогранник вершина 197

— — гауссова кривизна 203

— — полный угол 200

— выпуклая окрестность 201

— выпуклый 197

— гауссова кривизна в вершине 203

— геодезическая 200

— — простая 205

— геодезические эквивалентность 220

— грань 197

— квазигеодезическая 205

— кратчайшая геодезическая 200

— кривая на 198

— — длина 198

— локальный перпендикуляр 200

— локальный полукруг 200

— ориентация 197

— отрицательный угол между смежными ребрами 200

— полная кривизна области 203

— полный угол в вершине 200

— положительный угол между смежными ребрами 200

— развертка в вершине 199

— — локальная окрестность 199

— развертка вдоль ребра 199

— — локальная окрестность 199

— ребро 197

— сектор от ребра к смежному ребру 199

— — развертка 199

— сферический 197

Мультипликативное расстояние 356

Нарост 110

Наростовое число множества 146

Норма манхеттенская 265

Норма на многообразии 299

Нормальный конус 267

Область минимальности 181

Область устойчивости 182

Опирающаяся полуплоскость 93

Опорная плоскость 267

Ориентированный угол 49, 52

Отношение Штейнера 344

— критическая точка 354

— метрического пространства 344

Параметрическая сеть 8

— ρ -смежность 13

— ρ -эквивалентность 13

— *линейная сеть* 43

— вершина 9

— взвешенная 9

— — вершина, фиктивная 84

— — дерево Штейнера 100

— — дерево Штейнера, число вращения 100

— — плоское бинарное дерево, см. *плоское взвешенное бинарное дерево* 97

— — склейка кратных ребер 83

— — характеристическая система локальной структуры 83

— — характеристическая система локальной структуры невырожденной компоненты 83

— — экстремальная 83

— — экстремальная; ложная вершина 85

— — экстремальная; разбиение ребер на уровни 89

— — экстремальная; ребро второго уровня 89

- экстремальная; ребро нулевого уровня 89
- экстремальная; ребро первого уровня 89
- экстремальная; слабо фиктивная вершина 86
- экстремальная; циклическое ребро 89
- вложенная 10
- геодезическая 352
- гладкая 10
- граница 9
- деформация 9
- k -параметрическая 9
- допустимая для функционала 17
- замена параметризации 9
- замкнутое ребро 9
- затягивает множество 9
- квазирегулярная 26
- экстремальная 28
- кусочно-гладкая 10
- кусочно-регулярная 10
- невырожденная 9
- невырожденная компонента 9
- ориентированная 9
- оснащенная 9
- гладкая 10
- квазирегулярная 26
- кусочно-гладкая 10
- кусочно-регулярная 10
- регулярная 10
- параметризующий граф 8
- плоская 10
- погруженная 10
- локально вложенная 10
- реберно вложенная 10
- поднятие 29
- подсеть 9
- правильная ориентация 78
- ребро 9
- вырожденное 9
- невырожденное 9
- регулярная 10
- сеть Штейнера 90
- сильно локальная сеть 284
- слабая проекция 13
- топология 8
- характеристическая система локальной структуры 79
- характеристическая система локальной структуры невырожденной компоненты 79
- эквивалентность 9
- экстремальная 17
- взвешенная 83
- Паркет 108
- *деревянный* 109
- *скелет* 110
- вершина 108
- двойственная сеть 109
- деревянный 107
- контур 108
- звенья 109
- минимальная реализация концевая вершина 129
- нарост 110
- внутренний 110
- концевой 110
- паркет плоскости 108
- направляющие 108
- полоса 108
- ячейка 108
- подпаркет 109
- путь в множестве вершин 154
- разложение на скелет и наросты 111
- ребро 108
- внутреннее 109
- граничное 108
- ребро контура 109
- связанные компоненты 109
- связанные компоненты множества вершин 154
- связный 109
- скелет паркета 111

- тривиальная сеть, см. Тривиальная сеть, паркет 153
- ячейка 108
- — внутренняя 110
- — крайняя 110
- — полукрайняя 110
- — смежные ячейки 108
- Плоская бутылка Клейна группа накрывающих изометрий 185
- — канонический базис 185
- замкнутая локально минимальная сеть 186
- канонический прямоугольник 184
- решетка 185
- универсальное накрытие 185
- Плоская ломаная 51
- вершина 51
- деформация 53
- — неподвижная вершина 53
- — носитель 53
- — подвижная вершина 53
- — подвижное ребро 53
- замкнутая 51
- — внутреннее ребро 51
- — внутренняя вершина 51
- — кручение вдоль 53
- измельчение 51
- индекс пары ломаных в общем положении 54
- каноническое разбиение 58
- — A -область 63
- — A -элемент 63
- — B -область 63
- — B -элемент 63
- — E -область 63
- — E -элемент 63
- — F -область 63
- — F -элемент 63
- — Ω -область 60
- — Ω -область, основание 60
- — Ω -область, полная 63
- — Ω -область, пустая 63
- — t -шапочка 67
- — t -шапочка, верхушка 68
- — t -шапочка, верхушка регулярная 68
- — t -шапочка, индекс 68
- — t -шапочки, верхушка сингулярная 68
- — внутренний элемент 58
- — допустимая ε -деформация 73
- — индекс пары ломаных 62
- — касательный элемент 59
- — концевой элемент 58
- — регулярный элемент 58
- — регулярный элемент, знак 61
- — сингулярный элемент 58
- — сингулярный элемент, допустимая окрестность 60
- — сингулярный элемент, допустимая окрестность, главная компонента границы 61
- — сингулярный элемент, касательный 60
- — сингулярный элемент, трансверсальный 60
- — сингулярный элемент, трансверсальный, несущественный 60
- — сингулярный элемент, трансверсальный, существенный 60
- — слово 64
- — слово, вес 64
- — трансверсальный элемент 59
- — хороший путь 72
- — шапочка несущественная 67
- — шапочка пустая 70
- — шапочка регулярная 66
- — шапочка регулярная, \overline{H} -множество 67
- — шапочка регулярная, H -область 67
- — шапочка регулярная, основание 67
- — шапочка сингулярная 67
- — шапочка сингулярная, \overline{H} -множество 67

- шапочка сингулярная, основание 67
- шапочка строго пустая 70
- шапочка существенная 67
- элемент 63
- элемент, полный 63
- элемент, пустой 63
- каноническое разбиение (регулярное) 54
- A -область 55
- A -элемент 55
- B -область 55
- B -элемент 55
- E -область 55
- E -элемент 55
- F -область 55
- F -элемент 55
- H -область 57
- Ω -область 54
- Ω -область, внутренняя 54
- Ω -область, концевая 54
- Ω -область, основание 54
- Ω -область, полная 55
- Ω -область, пустая 55
- t -шапочка 57
- t -шапочка, верхушка 57
- t -шапочка, индекс 57
- t -шапочка, топ 57
- знак области 55
- знак элемента 54
- слово 56
- слово, вес 56
- шапочка 57
- шапочка, основание 57
- элемент 55
- элемент, полный 55
- элемент, пустой 55
- конечный твистинг 55
- начальный твистинг 55
- незамкнутая 51
- внутреннее ребро 51
- внутренняя вершина 51
- концевая вершина 51
- концевое ребро 51
- кручение вдоль 52
- ориентация 52
- пара ломаных в общем положении 54
- подломаная 51
- ребро 51
- регулярное каноническое разбиение, см. каноническое разбиение (регулярное) 59
- твистинг вершины 52
- Плоская невырожденная сеть Штейнера *тривиальная сеть* 151
- фундаментальный цикл 150
- внешняя вершина 150
- внутренняя вершина 150
- индекс 150
- тривиальный 151
- Плоская риманова метрика 168
- Плоская сеть невырожденная Штейнера, см. *Плоская невырожденная сеть Штейнера* 150
- правильная минимальная реализация 124
- Плоская сеть (см. Параметрическая сеть, плоская) 10
- Плоский тор 168
- группа сдвигов 168
- канонический базис 168
- канонический параллелограмм 168
- решетка канонический базис 169
- сдвиг 172
- универсальное накрытие 169
- Плоское 2-дерево 103
- I-редукция или редукция I-го типа 116
- II-редукция или редукция II-го типа 116
- ребра разреза 116
- усы 105
- Плоское бинарное дерево, см. Плоское 2-дерево 103

- Плоское взвешенное бинарное дерево 97
- граничное ребро 99
 - правило треугольника 98
 - твистинг вершины ориентированного пути 99
 - твистинг упорядоченной пары соседних ребер 99
 - характеристический треугольник вершины 99
 - число вращения 98, 99
 - число вращения пары ребер 99
- Плоское линейное дерево *плоская ломаная* 51
- внутренняя вершина неустойчивая 65
 - — устойчивая 65
 - — фиктивная 65
 - квазигеодезическая 66
 - — луч в направлении 66
 - — направляющая 66
 - правильное 65
 - число вращения 50, 65
 - число вращения между ребрами 49, 65
- Поверхность многогранника, см. *Многогранник* 197
- Подобные римановы метрики 167
- Покрытие 366
- Проблема Тамма 370
- Пространство Банаха–Минковского 355
- БМ-шар 355
- Расстояние Банаха–Мазура 356
- Решетка Ханана 262
- Росток змеи 147
- Сеть ρ -экстремаль 299
- *линейная сеть* 43
 - *параметрическая сеть* 8
 - *плоское 2-дерево* 103
 - *плоское бинарное дерево* 103
 - *сеть-след* 13
 - абсолютно минимальная 103
 - в нормированном пространстве характеристическая система 275
 - взвешенная, плоское бинарное дерево, см. *плоское взвешенное бинарное дерево* 97
 - геодезическая 44, 352
 - деформация 9, 16
 - — допустимая для функционала 17
 - критическая 264
 - локально кратчайшая 263
 - локально минимальная 263, 264
 - многогранник, см. *Сеть на многограннике* 202
 - параметрическая 8
 - плоская выпуклая минимальная реализация 103
 - сеть Штейнера 90
 - след 13
 - экстремальная 17, 264
 - — *локально минимальная сеть* 102
 - — комбинаторная теория Морса 235
 - — на N -нормированной плоскости 319
- Сеть на многограннике 202
- Сеть-след 13
- ρ -экстремальная реализация 297
 - *минимальное дерево Штейнера* 103
 - абсолютно минимальная 103
 - базовый представитель 284
 - вершина монотонная окрестность 305
 - — монотонная окрестность, проколота 305
 - выпуклая ρ -экстремальная реализация 297
 - деформационная эквивалентность 16
 - деформация 16
 - — допустимая для функционала 17
 - канонический представитель 15

- кратчайшая 103
- локально минимальная 103
- на манхеттенской плоскости 308
- ребро, вертикальное 308
- ребро, горизонтальное 308
- ребро, свободное 308
- сечение 308
- фрагмент 308
- фрагмент, вертикальный 308
- фрагмент, вершина статичная 308
- фрагмент, горизонтальный 308
- фрагмент, индекс 308
- фрагмент, концевая вершина 308
- фрагмент, расширение 308
- фрагмент, ребро одностороннее 308
- фрагмент, ребро плавающее 308
- фрагмент, ребро статичное 308
- фрагмент, степень статичности 308
- планарная эквивалентность 16
- свободная вершина 34
- тривиально экстремальная 25
- экстремальная 17
- *локально минимальная сеть* 102
- Скелет 110
 - деревянный *боквина* 119
 - *линейный участок* 112
 - код 121
 - конец 121
 - конец, направления 121
 - концевой линейный участок 121
 - линейный 113
 - линейный участок, направляющая 114
 - ось линейного участка 113
 - перегородка 121
 - разложение на узлы ветвления и линейные участки 112
 - узел ветвления 112
 - классифицирующий 120
 - код 113
 - ось 112
 - змея 119
 - лестница 119
 - ломаная змея 119
 - ось ячейки 113
 - ребро 113
 - ребро отросток 130
 - схема скелета 120
- Субградиент 266
- Субградиентное множество 267
- Твистинг упорядоченной пары векторов 52
- Теорема Вдовина–Селиванова 195, 196
- Гальперин 205
- Гаусса–Бонне для сферических многогранников 204
- Гусев 95, 96
- Ильютко 320, 324, 332, 333, 341
- Карпунин 258, 259
- Мусин 250
- Павлюкевич 205, 206, 215, 220
- Пронин 226–231, 233–235
- классификации замкнутых локально минимальных сетей на квазиправильных тетраэдрах 214
- классификации замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна 190
- классификации замкнутых локально минимальных сетей плоских торах 179
- классификации замкнутых сетей на проективной плоскости 166
- классификации замкнутых сетей на сфере 165
- классификация скелетов с правильной минимальной реализацией 125
- классификация скелетов с числом вращения не превосходящим пяти 120

- критерий критичности граничного множества для отношения Штейнера 354
- критерий локальной минимальности сети-следа на манхеттенской плоскости 305
- критерий существования ρ -экстремальной реализации плоского бинарного дерева 297
- критерий существования выпуклой минимальной реализации плоского бинарного дерева 104
- критерий существования замкнутой локально минимальной сети данного типа на данной плоской бутылке Клейна 190
- критерий существования замкнутой локально минимальной сети данного типа на данном плоском торе 180, 182
- критерий экстремальности линейной параметрической сети в нормированном пространстве 275
- критерий экстремальности локально минимальной сети на манхеттенской плоскости 308
- критерий экстремальности сетей-следов на плоскости с гладкой нормой 294
- критерий экстремальности сетей-следов на плоскости со строго выпуклой гладкой нормой 290
- критерий экстремальности сети-следа в нормированном пространстве 285
- критерий экстремальности сети-следа по отношению к гладкому лагранжиану 30
- критерий экстремальности сети-следа по отношению к правильно квазирегулярному лагранжиану, дифференцируемому вдоль ба-зы 38
- о выпуклой минимальной реализации бинарного дерева с числом вращения не превосходящем пяти 124
- о вычислении производной по направлению от длины минимального остовного дерева, минимального дерева Штейнера и отношения Штейнера 353
- о геодезических на многограннике 202
- о длине замкнутой локально минимальной сети на плоском торе 180, 181
- о замкнутых сетях на платоновых сетях 215
- о квазиправильном многоугольнике, который не затягивается ни одним минимальным бинарным деревом 148
- о концевых линейных участках скелета, имеющего правильную минимальную реализацию 127
- о локальной структуре локально минимальной сети на многограннике 203
- о локальной структуре экстремальной параметрической сети функционал взвешенной длины 83
- — функционал длины 79
- о локальной структуре экстремальной квазирегулярной параметрической сети по отношению к квазирегулярному лагранжиану 29
- о локальной структуре экстремальных сетей в нормированном пространстве 273
- о паркетной реализации для бинарных деревьев 110
- о паркетной реализации тривиальной сети 153
- о расположении наростов 123

- о связи отношений Штейнера базы и тотального пространства локально изометричного накрытия 349
- о связи отношения Штейнера риманова многообразия и евклидова пространства той же размерности 348
- о связи числа вращения плоского линейного дерева и количества уровней выпуклости его геометрической границы 50
- о связи числа вращения экстремального бинарного дерева и количества уровней выпуклости граничного множества для строго выпуклой гладкой нормы 296
- о структуре множества ρ -экстремальных сетей-следов с фиксированными топологией и границей 299
- о структуре множества взвешенных экстремальных сетей с фиксированной топологией и границей 90
- о структуре множества погруженных линейных сетей, параллельных данной 47
- о числе вращения плоского локально минимального бинарного дерева 103
- об индексе пары ломаных в общем положении 55
- об индексе пары ломаных, общий случай 63
- об отношении Штейнера поверхности постоянной отрицательной кривизны 352
- об отношении Штейнера пространства Лобачевского 352
- об оценке жалового модуля граничного множества 147
- об оценке отношения Штейнера евклидова пространства 350
- об устойчивости экстремального бинарного дерева в нормированном пространстве относительно деформации границы 287
- описание кратчайших, локально минимальных и экстремальных кривых в нормированном пространстве 272
- существования и единственности правильной сети на квазиправильном тетраэдре 213
- существования и единственности правильной сети на плоской бутылке Клейна 189
- существования и единственности правильной сети на плоском торе 179
- Тривиальная сеть 151
- паркет вершина внутренняя 154
- — вершина граничная 154
- — код скелета 160
- — линейные участки скелета 155
- — макроэлемент 157
- — макроэлемент, ветвления 157
- — макроэлемент, контур 157
- — макроэлемент, концевой 157
- — макроэлемент, линейный 157
- — макроэлемент, направления 159
- — макроэлементы, перемика 157
- — паркетная оболочка 154
- — полинароствы 160
- — скелет и наросты 153
- — структурный элемент 156
- — структурный элемент, ветвления 156
- — структурный элемент, концевой 156
- — структурный элемент, ребро крепления 156
- — структурный элемент, соединительный 156
- — узел ветвления 155

- — ядро 154
- — ядро ветвления 157
- — ячейка ветвления 155
- число вращения 152
- число вращения пары ребер 152
- Угловая последовательность 95
 - выпуклая 96
- Упаковка 366
 - близость 366
- Уровни выпуклости 43, 51
- Участок уплощения 271
- Филогенетическое пространство 347
 - расстояние Левенштейна 347
- Функционал 16
 - ρ -нормированная длина на многообразии 299
 - l_p -длины 20
 - Больца 21, 23
 - — интегральная часть 21
 - — терминальная часть 21
- взвешенной длины 22
- длины 19
- импульс 26
- классический вариационный 18, 22
- лагранжиан 18
- манхеттенская длина, см. *Манхеттенская длина* 261
- нормированной длины 20
- реберный 17
- финслеровой длины 19
- функционально взвешенной длины 22
- экстремаль 17
- экстремальная сеть 17
- Число Юнга 365
- Число поворота множества 146
- Экстремальное множество (см. Выпуклое множество) 43
- Ядро паркета 154

Иванов Александр Олегович
Тужилин Алексей Августинovich

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Ширококов
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 31.10.2003. Формат 60 × 84¹/₁₆.
 Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,06. Уч. изд. л. 24,34.
 Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
 Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru
