Проблема Штейнера: подход Геометрической Теории Меры.

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Оглавление

Тема 1

Начала теории меры.

Мы предполагаем, что слушатели знакомы с основами теории множеств и топологии, в частности, с понятиями и основными свойствами метрических пространств. Кроме того, ряд фактов, которые мы рассказывали в других семестрах нашего курса, мы будет напоминать без доказательства или давать его краткий набросок. За деталями заинтересованные слушатели могут обратиться к уже изданным конспектам наших лекций [4] и [5], а также на сайт кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ `http://dfgm.math.msu.su/courses.php?comments=19`.

1.1 Обозначения и соглашения

Так как многие из рассматриваемых нами функций могут принимать бесконечные значения, мы часто будем иметь дело с пополненной неотрицательной полупрямой

$$[0,\infty] = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\} \cup \{\infty\},$$

на которой определены естественный порядок ($r < \infty$ при всех $r \in \mathbb{R}$), соответствующая топология, заданная этим порядком ($[0,\infty]$ гомеоморфно отрезку), и алгебраические операции, непрерывные относительно введенной топологии (например, для неотрицательного вещественного числа r имеем $r + \infty = \infty$; если при этом $r > 0$, то $r \cdot \infty = \infty$, $r/\infty = 0$, $r/0 = \infty$), однако не определены операции, которые можно получить предельным переходом, дающим неоднозначный результат или результат, лежащий вне области $[0,\infty]$, например, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$, $\infty - \infty$, $r - \infty$.

Определим точную нижнюю и верхнюю грани подмножеств $M \subset [0,\infty]$ также для пустого M, а именно, $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = 0$.

Для функции $f\colon X \to [0,\infty]$ из произвольного множества X определим сумму $\sum_X f = \sum_{x\in X} f(x)$ следующим образом: $\sum_\emptyset f = 0$, а для непустого X положим $\sum_X f$ равным точной верхней грани обычных сумм $\sum_{x\in A} f(x)$ по всем конечным подмножествам A множества X.

Упражнение 1.1. Покажите, что если X — бесконечное несчетное множество, и $f\colon X \to [0,\infty]$ всюду положительна, то $\sum_X f = \infty$.

Под *расстоянием* на множестве X будем понимать симметричную функцию $d\colon X \times X \to [0,\infty]$ такую, что $d(x,x) = 0$ для любого $x \in X$. Расстояние, не принимающее значение ∞, называется *конечным*. Если для **конечного** расстояния d выполняется неравенство треугольника, то d будем называть *псевдометрикой* или *полуметрикой*. *Невырожденную*псевдометрику, то есть такую, что $d(x,y) = 0$ только при $x = y$, будем называть *метрикой*.

Замечание 1.2. Иногда, при определении метрики, допускаются бесконечные значения, а для обозначения метрики в нашем смысле говорят про *конечную метрику*. У нас конечные метрические пространства будут возникать намного чаще, чем и объясняется наше соглашение.

Расстояние между точками x и y в произвольном метрическом пространстве X, если не оговорено противное, будем обозначать через $|xy|$, хотя иногда, особенно, когда рассматриваются элементы разных пространств, будем писать $|xy|_X$ или же вводить для расстояния свой символ, скажем, d, и писать $d(x,y)$.

Пусть X — метрическое или псевдометрическое пространство. Для $x \in X$ и $r \in (0, \infty]$ через $U_r(x)$ будем обозначать *открытый шар* $\{y \in X : |xy| < r\}$ с центром в x и радиусом r, через $B_r(x)$ — *замкнутый шар* $\{y \in X : |xy| \le r\}$ с центром в x и радиусом r, а через $S_r(x)$ — *сферу* $\{y \in X : |xy| = r\}$ с центром в x и радиусом r. Замкнутый шар и сферу радиуса r будем называть *вырожденными*, если $r = 0$, иначе их назовем *невырожденными*.

Замечание 1.3. Отметим, что одно и то же подмножество метрического пространства *может быть представлено* как шар разного радиуса, в частности, оно может одновременно быть вырожденным шаром и невырожденным. Простейший пример — одноточечное метрическое пространство $X = \{x\}$. Все X является открытым шаром любого положительного радиуса и замкнутым шаром любого неотрицательного радиуса. Представляя X в виде $B_r(x)$, $r > 0$, получаем, что X — невырожденный шар. Но X также можно представить как $B_0(x)$, т.е. как вырожденный шар. Таким образом, говоря о шарах в метрическом пространстве, мы имеем в виду не только сами подмножества этого пространства, но и то, как эти подмножества устроены в смысле метрики.

Упражнение 1.4. Покажите, что $\partial U_r(x)$ и $\partial B_r(x)$ лежат в $S_r(x)$, но могут не совпадать с $S_r(x)$.

Замечание 1.5. Часто в литературе можно встретить другие обозначения: открытый шар обозначают через $B_r(x)$ или $B(x, r)$, а замкнутый шар — через $\bar{B}_r(x)$ или $\bar{B}(x, r)$.

Если A и B — непустые подмножества X, то положим $|AB| = |BA| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$ и назовем *расстоянием* между A и B. Если же $A = \{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr| = \bigl|B\{a\}\bigr|$ будем писать $|aB| = |Ba|$. Отметим, что определенное расстояние не является псевдометрикой (не выполняется неравенство треугольника). Тем не менее, в терминах этих расстояний естественно определяются обобщения открытого и замкнутого шаров на случай, когда вместо центра x рассматривается непустое подмножество $Z \subset X$. Итак, для $r \in (0, \infty]$ положим $U_r(Z) = \{y \in X : |yZ| < r\}$ и назовем *открытой r-окрестностью множества Z*, а для $r \in [0, \infty]$ положим $B_r(Z) = \{y \in X : |yZ| \le r\}$ и назовем *замкнутой r-окрестностью множества Z*.

Упражнение 1.6. Покажите, что для непустого подмножества Z метрического пространства X

(1) $U_r(Z) = \cup_{x \in Z} U_r(x)$, поэтому $U_r(Z)$ является открытым подмножеством X;

(2) $\cup_{x \in Z} B_r(x) \subseteq B_r(Z)$, а равенства, вообще говоря, нет; множество $B_r(Z)$ является замкнутым подмножеством в X;

(3) если Z компактно, то $B_r(Z) = \cup_{x \in Z} B_r(x)$;

(4) если $\bar{Z}$ обозначает замыкание Z, то $\bar{Z} = \bigcap_{r>0} B_r(Z) = \bigcap_{r_i \to 0+} B_{r_i}(Z)$;

(5) $U_r\bigl(U_s(Z)\bigr) \subseteq U_{r+s}(Z)$, а равенства, вообще говоря, нет;

(6) для непустых подмножеств Y и Z метрического пространства X таких, что $d := |YZ| > 0$, любого $0 < r < d$ и непустого $W \subset X$, $W \subset U_r(Y)$, имеем $|WZ| \ge d - r$.

1.2 Теорема Витали о покрытии

Детали обсуждения приводимой ниже теоремы Витали можно найти в [8]–[15].

Введем удобные обозначения. Пусть X обозначает метрическое пространство, а $Y \subset X$ — шар или сфера радиуса r. Тогда для вещественного числа $\lambda > 0$ через λY обозначим тот же объект с тем же центром, но уже радиуса λr. Если $\mathcal{C} = \{Y_\alpha\}$ — семейство шаров или сфер в X, то через $\lambda\mathcal{C}$ будем обозначать семейство $\{\lambda Y_\alpha\}$.

Напомним, что семейство множеств $\mathcal{C} = \{Z_\alpha\}$ называется *дизъюнктным*, если $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$ при всех $\alpha \ne \beta$. Также для произвольного семейства множеств $\mathcal{C} = \{Z_\alpha\}$ положим $\cup\mathcal{C} = \cup_\alpha Z_\alpha$.

Теорема 1.7 (Витали)**.** *Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство замкнутых невырожденных шаров в X, и пусть их радиусы ограничены в совокупности, т.е. не превосходят некоторого числа R. Тогда в $\mathcal{B}$ можно найти дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'$ такое, что для каждого $B \in \mathcal{B}$ существует $B' \in \mathcal{B}'$, для которого $B \cap B' \ne \emptyset$ и $B \subset 5B'$. В частности, $\cup\mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$. Если пространство X сепарабельно, то каждое такое $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно.*

На рисунке 1.1 приведен пример, иллюстрирующий теорему Витали.

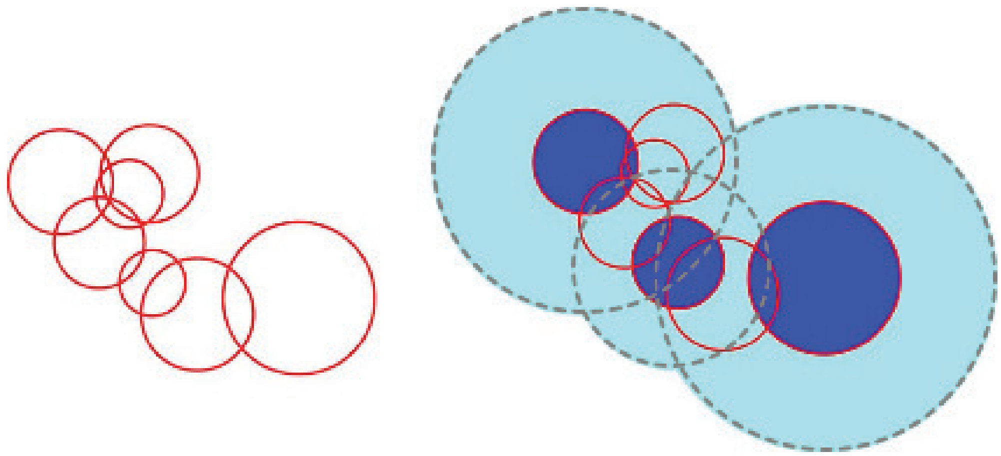

Рис. 1.1: Теореме Витали: слева — исходное семейство шаров, справа темным цветом выделено искомое подсемейство, его пятикратное растяжение содержит все шары исходного семейства.

Доказательство. Разобьем $\mathcal{B}$ на подсемейства $\mathcal{B}_j$, $j \in \mathbb{N}$, положив в $\mathcal{B}_j$ все $B \in \mathcal{B}$, радиусы r которых удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{R}{2^j} < r \leq \frac{R}{2^{j-1}}.$$

Теперь выберем максимальное дизъюнктное объединение в $\mathcal{B}$ специального вида. Чтобы это сделать, нам понадобится лемма Цорна. Напомним, в чем она заключается.

Пусть X — множество, на котором задан частичный порядок, т.е., вообще говоря, не все пары элементов сравнимы. Типичные пример — семейство подмножеств некоторого множества, где порядок задается отношением принадлежности: одно подмножество не превосходит другого, если оно содержится в этом другом (порядок частичный, так как ни для всякой пары подмножеств верно, что одно из них принадлежит другому).

Порядок называется *линейным*, если сравнима любая пара элементов. *Цепочкой в X* называется каждое подмножество X, порядок на котором — линейный. Элемент частично упорядоченного множества называется *максимальным*, если все остальные элементы или его не превосходят, или не сравнимы с ним. Элемент x называется *верхней гранью для $Y \subset X$*, если для каждого $y \in Y$ выполняется $y \leq x$. В этом случае будем писать $Y \leq x$.

Лемма 1.8 (Цорн). *Если в частично упорядоченном множестве каждая цепочка имеет верхнюю грань, то каждый элемент этого множества не превосходит некоторого максимального.*

Применим теперь лемму Цорна для наших целей. Рассмотрим всевозможные дизъюнктные подсемейства в $\mathcal{B}_1$. На этих подсемействах имеется естественный частичный порядок, заданный отношением принадлежности одного семейства другому. Если $\mathcal{D}$ — цепочка таких подсемейств, то $\cup\mathcal{D}$ также представляет собой дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}_1$ (проверьте). Но тогда $\cup\mathcal{D}$ является верхней гранью цепочки $\mathcal{D}$. Тем самым, каждая цепочка имеет верхнюю грань, значит, по лемме Цорна, семейство дизъюнктных подсемейств в $\mathcal{B}_1$ имеет максимальный элемент. Иными словами, в $\mathcal{B}_1$ имеется максимальное дизъюнктное подсемейство. Выберем одно из таких семейств и обозначим его через $\mathcal{B}'_1$.

Теперь добавим к $\mathcal{B}_1$ семейство $\mathcal{B}_2$, и в $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, пользуясь леммой Цорна, выберем максимальное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'_2$, содержащее $\mathcal{B}'_1$. Продолжим этот процесс, и для каждого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, построим максимальное в $\cup_{i=1}^{j}\mathcal{B}_i$ дизъюнктное подсемейство, содержащее $\mathcal{B}'_j$. Наконец, положим $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}'_j$ и получим, очевидно, дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}$.

Замечание 1.9. Можно было бы сразу выбрать максимальное дизъюнктивное подмножество во всем $\mathcal{B}$. Конечно, при таком выборе каждый $B \in \mathcal{B}$ будет пересекать некоторый $B' \in \mathcal{B}'$ в силу максимальности $\mathcal{B}'$, однако мы не гарантированы, что $B \subset 5B'$. Чтобы добиться последнего, приходится выбирать $\mathcal{B}'$ более тонким образом.

Покажем, что $\mathcal{B}'$ — искомое. Возьмем произвольное $B \in \mathcal{B}$, тогда для некоторого j выполняется $B \in \mathcal{B}_j$. Тогда существует $B' \in \mathcal{B}'_j$, для которого $B' \cap B \neq \emptyset$. Действительно, если такого нет, то, добавив B к $\mathcal{B}'_j$, получим также дизъюнктное подсемейство, что противоречит максимальности $\mathcal{B}'_j$.

Далее, радиус шара B' больше $R/2^j$, а радиус шара B не превосходит $R/2^{j-1}$, поэтому $B \subset 5B'$ (проверьте), откуда, в частности, вытекает, что $\cup\mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$.

Пусть теперь X сепарабельно, и подмножество $Y \subset X$ — всюду плотное и не более чем счетное. Так как все шары из $\mathcal{B}'$ имеют положительные радиусы, в каждом из них можно выбрать по одной точке из Y. Так как семейство $\mathcal{B}'$ дизъюнктно, количество элементов в $\mathcal{B}'$ такое же, как и число выбранных точек из Y, поэтому семейство $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно. $\square$

Определение 1.10. Говорят, что семейство шаров $\mathcal{B}$ *сгущается* в некоторой точке $x \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует содержащий x шар $B \in \mathcal{B}$ радиуса меньше ε.

Замечание 1.11. В англоязычной литературе покрытия, которые сгущаются в каждой точке, называют fine coverings.

Следствие 1.12. *Предположим, что семейство $\mathcal{B}$ невырожденных замкнутых шаров в X с ограниченными в совокупности радиусами сгущается в каждой точке некоторого множества $A \subset X$. Тогда семейство $\mathcal{B}'$,* *построенное в теореме* 1.7, *удовлетворяет следующему свойству*: *для любого конечного набора* $\{B_1, \dots, B_m\} \subset \mathcal{B}$ *имеем*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1,\dots,B_m\}} 5B'.$$

Доказательство. Если $A \subset \cup_{i=1}^m B_i$, то все доказано. Пусть теперь существует $x \in A \setminus \cup_{i=1}^m B_i$. Так как покрытие $\mathcal{B}$ сгущается в x, можно найти $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $B \cap B_i = \emptyset$ при всех i. По свойству семейства $\mathcal{B}'$, существует $B' \in \mathcal{B}'$ такой, что $B \cap B' \neq \emptyset$ и $B \subset 5B'$. Осталось заметить, что B' отличен от шаров B_i, так как последние не пересекают B, а B' — пересекает; следовательно, $B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \dots, B_m\}$. $\square$

1.3 Внешняя мера

Для произвольного множества X обозначим через $\mathcal{P}(X)$ семейство всех подмножеств X.

Определение 1.13. Функция $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ называется *внешней мерой*, если $\mu(\emptyset) = 0$, и μ — *счетно субаддитивна*, т.е. для любого счетного семейства $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ подмножеств $A_i \subset X$, и любого $A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$ выполняется неравенство $\mu(A) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

Замечание 1.14.

(1) Из счетной субаддитивности внешней меры и условия $\mu(\emptyset) = 0$ вытекает *конечная субаддитивность*: для любых $A_i \subset X$, $i = 1, \dots, n$, и $A \subset \cup_{i=1}^n A_i$ выполняется $\mu(A) \le \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Действительно, в условии субаддитивности достаточно положить $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$.

(2) Каждая внешняя мера μ на множестве X является *монотонной функцией*, т.е. для любых $A \subset B \subset X$ выполняется $\mu(A) \le \mu(B)$, что является частным случаем конечной субаддитивности.

Определение 1.15. Пусть μ — внешняя мера на множестве X. Подмножество $A \subset X$ называется *μ-измеримым* (по Каратеодори) или просто *измеримым*, когда понятно, о какой мере идет речь, если для любого $F \subset X$ выполняется $\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$ (т.е. если множество A разбивает каждое F «аддитивным образом» по отношению к μ).

Замечание 1.16. В силу условия субаддитивности, для доказательства μ-измеримости множества A достаточно проверять лишь неравенство $\mu(F) \ge \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$, причем только для тех F, у которых $\mu(F) < \infty$ (если $\mu(F) = \infty$, но неравенство очевидно выполняется).

Определение 1.17. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ называется *σ-алгеброй на X*, если $X \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ замкнуто относительно дополнений и счетных объединений.

Замечание 1.18. Так как $\emptyset$ является дополнением до $X \in \mathcal{F}$, то $\emptyset \in \mathcal{F}$. Также $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных объединений. Кроме того, $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных и счетных пересечений.

Теорема 1.19. *Для каждой внешней меры μ на множестве X семейство всех μ-измеримых подмножеств X является σ-алгеброй.*

Определение 1.20. Пусть μ — внешняя мера на множестве X и $A \subset X$. Каждое μ-измеримое множество $\widehat{A} \subset X$ такое, что $A \subset \widehat{A}$ и $\mu(A) = \mu(\widehat{A})$, называется *$\mu$-оболочкой множества A*. Другими словами, μ-оболочка множества A — это «μ-измеримое расширение» множества A, имеющее ту же меру.

Определение 1.21. Внешняя мера μ на множестве X называется *регулярной*, если каждое A имеет μ-оболочку.

Определение 1.22. Внешнюю меру μ на множестве X назовем *счетно-аддитивной на σ-алгебре $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$*, если для любых попарно не пересекающихся $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$, выполняется

$$\mu\big(\sqcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Теорема 1.23. *Для каждой внешней меры μ на множестве X и любой последовательности $A_1, A_2, \dots$ измеримых множеств выполняется*

(1) *если A_i попарно не пересекаются, то имеет место равенство $\mu\big(\sqcup_i A_i\big) = \sum_i \mu(A_i)$, т.е. внешняя мера μ является счетно-аддитивной на σ-алгебре μ-измеримых множеств*;

(2) *если* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, *то* $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\cup_i A_i)$;

(3) *если* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ *и* $\mu(A_1) < \infty$, *то* $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\cap_i A_i)$;

(4) *если внешняя мера* μ *регулярна, то пункт* (2) *имеет место для любых, не обязательно* μ*-измеримых, множеств* $A_i \subset X$.

Пример 1.24. Пусть X — произвольное непустое множество.

(1) Для любого элемента $x \in X$ определим внешнюю меру δ_x на X, положив $\delta_x(A) = 1$, если $x \in A$, и $\delta_x(A) = 0$ в противном случае. Полученная внешняя мера называется *дельта-функцией Дирака с центром в* x. Легко видеть, что каждое $A \subset X$ является δ_x-измеримым.

(2) Определим на X внешнюю меру μ, положив $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(A) = 1$ для любого $A \neq \emptyset$. Тогда σ-алгебра μ-измеримых множеств равна $\{\emptyset, X\}$. Таким образом, если X состоит более чем из одного элемента, то σ-алгебры измеримых множеств для внешних мер δ_x и μ различны.

(3) Определим на X еще одну внешнюю меру, которая называется *считающей*: для конечного A число $\mu(A)$ равно количеству элементов в A, а для бесконечного A положим $\mu(A) = \infty$. Легко проверяется, что каждое $A \subset X$ является μ-измеримым.

Замечание 1.25. Пересечение любого набора σ-алгебр также является σ-алгеброй, поэтому для любого семейства $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ существует и единственна наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{M}$.

1.3.1 Борелевская внешняя мера

Определение 1.26. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ. Наименьшая σ-алгебра на X, содержащая τ, называется *борелевской* и обозначается через $\mathcal{B}(X)$. Элементы борелевской σ-алгебры называются *борелевским множествами*.

Замечание 1.27. Эквивалентное определение борелевской σ-алгебры на топологическом пространстве X: это наименьшая σ-алгебра на X, содержащая все замкнутые множества.

Определение 1.28. Внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевской*, если все борелевские множества являются μ-измеримыми.

Определение 1.29. Подмножества A и B метрического пространства X называются *отделимыми*, если они находятся друг от друга на ненулевом расстоянии: $|AB| > 0$.

Определение 1.30. Внешняя мера μ на метрическом пространстве называется *аддитивной на отделимых множествах*, если для любых отделимых множеств A и B выполняется $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Теорема 1.31 (Критерий Каратеодори). *На метрическом пространстве* X *внешняя мера* μ *является борелевской, если и только если она аддитивна на отделимых множествах.*

Доказательство. Пусть все борелевские множества измеримы, а расстояние между множествами A и B равно положительному ε. Положим $U = U_{\varepsilon/2}(A)$, тогда $U \cap B = \emptyset$, поэтому $(A \cup B) \cap U = A$ и $(A \cup B) \setminus U = B$. Так как множество U открыто и, значит, μ-измеримо, имеем

$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap U\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus U\big) = \mu(A) + \mu(B).$$

Обратно, пусть для любых A и B, находящихся на положительном расстоянии, выполняется $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$. Покажем, что все борелевские множества измеримы.

Лемма 1.32. *Внешняя мера* μ *на топологическом пространстве является борелевской, если и только если все открытые* (*все замкнутые*) *множества являются* μ*-измеримыми.*

Доказательство. Так как открытые и замкнутые множества, по определению, являются борелевскими, то измеримость всех борелевских множеств влечет измеримость и открытых множеств, и замкнутых. Обратно, пусть все открытые (замкнутые) множества измеримы. По теореме 1.19, семейство всех измеримых множеств образует σ-алгебру, которая, по условию, содержит все открытые (все замкнутые) множества. Так как борелевская σ-алгебра — наименьшая из всех, содержащих все открытые (замкнутые) множества, заключаем, что она содержится в σ-алгебре всех измеримых множеств, т.е. все борелевские множества измеримы. Лемма доказана. □

В силу леммы 1.32, достаточно проверить измеримость всех открытых множеств.

Пусть $U \subset X$ — открытое, а $B \subset X$ — произвольное множества. В силу замечания 1.16, достаточно показать, что $\mu(B \cap U) + \mu(B \setminus U) \le \mu(B)$ для любого B конечной меры μ. Для каждого натурального n положим

$$U_n = \{x \in U : \operatorname{dist}(x, X \setminus U) > 1/n\},$$

тогда $\operatorname{dist}(B \cap U_n, B \setminus U) \ge \operatorname{dist}(U_n, X \setminus U) \ge 1/n$, поэтому, в силу условия,

$$\mu(B \cap U_n) + \mu(B \setminus U) = \mu\big((B \cap U_n) \cup (B \setminus U)\big) \le \mu(B).$$

Покажем, что $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$ при $n \to \infty$, чем и завершим доказательство.

Положим $A_n = B \cap (U_{n+1} \setminus U_n)$. Пусть I — множество всех индексов n таких, что $A_{2n} \ne \emptyset$, а J — множество всех n таких, что $A_{2n-1} \ne \emptyset$. Заметим, что для любых различных p, $q \in I$ (а также p, $q \in J$) имеем $\operatorname{dist}(A_{2p}, A_{2q}) > 0$ (соответственно $\operatorname{dist}(A_{2p-1}, A_{2q-1}) > 0$), поэтому, учитывая, что $\mu(\emptyset) = 0$, для любого натурального n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k}) = \mu\big(\cup_{k \le n} A_{2k}\big) \le \mu(B), \quad \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k-1}) = \mu\big(\cup_{k \le n} A_{2k-1}\big) \le \mu(B),$$

и, значит, ряд $\sum \mu(A_k)$ сходится (напомним, что $\mu(B) < \infty$).

Заметим, что $B \cap U = (B \cap U_n) \cup \big(\cup_{k \ge n} A_k\big)$. Из монотонности и субаддитивности вытекает, что

$$\mu(B \cap U_n) \le \mu(B \cap U) \le \mu(B \cap U_n) + \sum_{k \ge n} \mu(A_k),$$

откуда, в силу сходимости ряда $\sum \mu(A_k)$, имеем $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$. Доказательство закончено. □

Определение 1.33. Внешнюю меру μ назовем *конечной*, если она не принимает значение ∞.

Теорема 1.34. *Для произвольного метрического пространства X, конечной борелевской внешней меры μ и произвольного борелевского множества $B \subset X$ выполняется*

$$\mu(B) = \sup\big\{\mu(C) : C \subset B,\ C \text{ замкнуто в } X\big\}, \tag{1.1}$$

$$\mu(B) = \inf\big\{\mu(C) : B \subset C,\ C \text{ открыто в } X\big\}. \tag{1.2}$$

Замечание 1.35. Формула (1.1) имеет место и в более общем случае, а именно, когда X представляет собой счетное объединение замкнутых множеств конечной меры. Формула (1.2) также имеет место в более общем случае: достаточно потребовать, чтобы X равнялось счетному объединению открытых множеств конечной меры.

Определение 1.36. Борелевская внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевски регулярной*, если у каждого $A \subset X$ существует борелевская μ-оболочка, т.е. такое борелевское $B \supset A$, что $\mu(A) = \mu(B)$. Другими словами, каждое подмножество в топологическом пространстве X имеет «μ-измеримое борелевское расширение» той же меры.

1.3.2 Индуцированная внешняя мера

Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, а Y — произвольное подмножество X. Определим функцию $\mu \llcorner Y : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, положив $(\mu \llcorner Y)(A) = \mu(A \cap Y)$ для любого $A \subset X$.

Замечание 1.37. Иногда вместо $\mu \llcorner Y$ бывает удобно писать μ_Y, что мы и делали в наших предыдущих лекциях.

Предложение 1.38. *Функция $\mu \llcorner Y$ является внешней мерой на X и, значит, на Y.*

Доказательство. Покажем, что $(\mu \llcorner Y)(\emptyset) = 0$.

$$(\mu \llcorner Y)(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap Y) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Проверим субаддитивность. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие множества $A \subset X$, тогда $\{A_i \cap Y\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие $A \cap Y$, поэтому

$$(\mu \llcorner Y)(A) = \mu(A \cap Y) \le \sum_i \mu(A_i \cap Y) = \sum_i (\mu \llcorner Y)(A_i),$$

что и требовалось. □

Определение 1.39. Определенную выше внешнюю меру $\mu \llcorner Y$ на Y называют *индуцированной из μ*.

Предложение 1.40. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X, и A — некоторое μ-измеримое подмножество X. Тогда для произвольного $Y \subset X$ множество A и, значит, $A \cap Y$ будут также $(\mu \llcorner Y)$-измеримыми. В частности, положив $A = X$, заключаем, что Y всегда является $(\mu \llcorner Y)$-измеримым.*

Доказательство. Для произвольного множества $B \subset X$ имеем

$$(\mu \llcorner Y)(B) = \mu(B \cap Y) = \mu\big((B \cap Y) \cap A\big) + \mu\big((B \cap Y) \setminus A\big) = \mu\big((B \cap A) \cap Y\big) + \mu\big((B \setminus A) \cap Y\big) = (\mu \llcorner Y)(B \cap A) + (\mu \llcorner Y)(B \setminus A),$$

что и требовалось. □

Замечание 1.41. Не каждое $(\mu \llcorner Y)$-измеримое множество является μ-измеримым. Действительно, так как Y всегда $(\mu \llcorner Y)$-измеримо, даже если Y не μ-измеримо, достаточно привести пример неизмеримого Y. Внешнюю меру, у которой есть неизмеримые множества, мы уже рассматривали в пункте (2) примера 1.24.

Из предложения 1.40 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 1.42. *Если μ — борелевская внешняя мера на топологическом пространстве X, то для любого $Y \subset X$ внешняя мера $\mu \llcorner Y$ — также борелевская.*

Идея доказательства следующей теоремы взята из [10].

Теорема 1.43. *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на топологическом пространстве X, и Y — произвольное μ-измеримое множество, причем $\mu(Y) < \infty$, тогда внешняя мера $\mu \llcorner Y$ — также борелевски регулярна.*

Доказательство. То, что $\mu \llcorner Y$ — борелевская вытекает из следствия 1.42.

Сведем задачу к борелевскому Y. Так как μ — борелевски регулярна, существует $Z \in \mathcal{B}(X)$ такой, что $Y \subset Z$ и $\mu(Y) = \mu(Z)$. Мы покажем, что $\mu \llcorner Y = \mu \llcorner Z$, а для этого достаточно проверить, что $\mu \llcorner Z \le \mu \llcorner Y$, так как обратное неравенство мгновенно вытекает из монотонности.

В силу того, что Y является μ-измеримым, имеем

$$\mu(Z) = \mu(Z \cap Y) + \mu(Z \setminus Y) = \mu(Y) + \mu(Z \setminus Y),$$

откуда $\mu(Z \setminus Y) = 0$ (здесь мы воспользовались конечностью $\mu(Y)$). Снова учитывая μ-измеримость Y, для произвольного $A \subset X$ получим

$$\begin{aligned}(\mu \llcorner Z)(A) &= \mu(A \cap Z) = \mu\big((A \cap Z) \cap Y\big) + \mu\big((A \cap Z) \setminus Y\big) = \\ &= \mu(A \cap Y) + \mu\big((A \cap Z) \setminus Y\big) \le \mu(A \cap Y) + \mu\big(Z \setminus Y\big) = \mu(A \cap Y) = (\mu \llcorner Y)(A).\end{aligned}$$

Итак, нам осталось доказать предложение в предположении, что Y — борелевское. Пусть это так.

Снова выберем произвольное $A \subset X$. Так как μ — борелевски регулярна, существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $A \cap Y \subset B$ и $\mu(A \cap Y) = \mu(B)$. Положим $C = B \cup (X \setminus Y)$ и покажем, что C — борелевская $\mu \llcorner Y$-оболочка множества A.

Заметим, что $C \cap Y = B \cap Y$, а также, что

$$A \subset (A \cap Y) \cup (X \setminus Y) \subset B \cup (X \setminus Y) = C.$$

Так как B и Y — борелевские, то C — также борелевское. Мы завершим доказательство, показав, что $(\mu \llcorner Y)(A) = (\mu \llcorner Y)(C)$, для чего, в силу монотонности, достаточно проверить неравенство $(\mu \llcorner Y)(C) \le (\mu \llcorner Y)(A)$. Сделаем это:

$$(\mu \llcorner Y)(C) = \mu(C \cap Y) = \mu(B \cap Y) \le \mu(B) = \mu(A \cap Y) = (\mu \llcorner Y)(A),$$

что и требовалось. □

1.4 Мера

В классической теории меры построение обычно начинается с некоторой σ-алгебры на множестве X и функции, определенной не на всех подмножествах множества X, а только на тех, что лежат в этой σ-алгебре.

Определение 1.44. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества X. Функция $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ называется *мерой на* $\mathcal{M}$, если $\mu(\emptyset) = 0$ и μ является счетно аддитивной: мера счетного дизъюнктного объединения множеств из $\mathcal{M}$ равна сумме мер этих множеств.

Замечание 1.45. Как и в случае внешней меры, мера является также и конечно аддитивной функцией.

Определение 1.46. Тройка $(X, \mathcal{M}, \mu)$, состоящая из множества X, некоторой σ-алгебры $\mathcal{M}$ на X и произвольной меры μ на $\mathcal{M}$, называется *пространством с мерой*; при этом элементы σ-алгебры $\mathcal{M}$ называются *измеримыми множествами*, а если требуется указать, какая мера рассматривается на σ-алгебре, то — *μ-измеримыми множествами.*

Теорема 1.47. *Пусть μ — мера на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) ***Монотонность***: *если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

(2) ***Счетная субаддитивность***: $\mu\big(\cup A_i\big) \le \sum \mu(A_i)$ *для любого счетного набора $\{A_i\}$ измеримых множеств.*

(3) ***Непрерывность снизу***: *пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cup A_i)$.*

(4) ***Непрерывность сверху***: *пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Предположим, что $\mu(A_1) < \infty$. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cap A_i)$.*

Имеется естественная конструкция, продолжающая меру, определенную на σ-алгебре, на семейство всех подмножеств.

Конструкция 1.48. Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Определим функцию $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, положив

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(B) \mid A \subset B \in \mathcal{M}\big\}.$$

Теорема 1.49. *Определенная только что функция μ^* является внешней мерой, продолжающей μ.*

Доказательство. Покажем сначала, что μ^* продолжает μ. Пусть $A \in \mathcal{M}$. В силу пункта (1) теоремы 1.47, для любого $B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, имеем $\mu(A) \le \mu(B)$, поэтому $\mu^*(A) = \mu(A)$, что и требовалось. В частности, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Далее, покажем, что функция μ^* монотонна (нам это понадобится для доказательства субаддитивности). Пусть $A \subset B$, тогда

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(C) \mid B \subset C \in \mathcal{M}\} \ge \inf\big\{\mu(C) \mid A \subset C \in \mathcal{M}\big\} = \mu^*(A),$$

так как если $C \supset B$, то также $C \supset A$, поэтому первый inf берется по меньшему или такому же множеству, что и второй.

Наконец, проверим, что функция μ^* субаддитивна. Пусть $\{A_i\}$ — произвольное не более чем счетное покрытие произвольного множества $A \subset X$. Для каждого i рассмотрим произвольное $B_i \supset A_i$, $B_i \in \mathcal{M}$, тогда $B = \cup_i B_i \in \mathcal{M}$ и $A \subset B$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) = \mu(B) \le \sum_i \mu(B_i).$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для каждого i существует такое $B_i^\varepsilon \in \mathcal{M}$, $A_i \subset B_i^\varepsilon$, что $\mu(B_i^\varepsilon) \le \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \sum_i \mu(B_i^\varepsilon) \le \varepsilon + \sum_i \mu^*(A_i).$$

В силу произвольности ε, заключаем требуемое. $\square$

Определение 1.50. Описанная в конструкции 1.48 внешняя мера μ^*, построенная по мере μ, называется *лебеговым продолжением меры μ.*

1.5 Мера Лебега

Наиболее популярная мера в математическом анализе называется мерой Лебега. Мы не будем определять ее здесь конструктивно, а вместо этого зададим эту меру неявно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.51 (Лебег)**.** *Существует единственная мера $\mathcal{L}^n$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантная относительно параллельных переносов (сдвигов) и такая, что*

$$\mathcal{L}^n\big([0,1]^n\big) = 1.$$

Определение 1.52. Мера из теоремы 1.51 называется *n-мерной мерой Лебега* или *n-мерным евклидовым объемом.*

Замечание 1.53. Из теоремы 1.51 мгновенно вытекает существование и единственность меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантной относительно сдвигов и такой, что $\mu\big([0,1]^n\big) = a$ для произвольного $a \ge 0$. Эта мера равна $a\,\mathcal{L}^n$.

Определение 1.54. Лебегово продолжение меры Лебега называется *внешней мерой Лебега.*

1.6 «Почти» в смысле меры

В теории меры часто приняты не точные соотношения, а так называемые «почти»-соотношения, по какой-либо мере μ. Приведем ряд примеров, которые нам понадобятся в дальнейшем. Итак, пусть μ — некоторая внешняя мера на множестве X.

Почти принадлежность. Пусть A и B — подмножества в X. Будем говорить, что *μ-почти все A лежит в B* и писать $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ или $B \overset{\text{п.в.}}{\supset} A$, если $\mu(A \setminus B) = 0$.

Предложение 1.55. *Если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B \overset{\text{п.в.}}{\subset} C$, то $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} C$.*

Доказательство. По определению, имеем $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\mu(B \setminus C) = 0$, но $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, поэтому, в силу монотонности внешней меры, $\mu(A \setminus C) = 0$, что и требовалось. □

Предложение 1.56. *Если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

Доказательство. Из субаддитивности внешней меры заключаем, что $\mu(A) \le \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B)$, что и требовалось. □

Почти равенство. Пусть A и B — подмножества в X. Будем говорить, что A и B являются *μ-почти равными* и писать $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$, если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ или $B \overset{\text{п.в.}}{\subset} A$, т.е. если $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Очевидно, отношение почти равенства рефлексивно и симметрично.

Из предложений 1.55 и 1.56 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 1.57.

- *Если $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$ и $B \overset{\text{п.в.}}{=} C$, то $A \overset{\text{п.в.}}{=} C$. Таким образом, отношение почти равенства — отношение эквивалентности.*
- *Если $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$, то $\mu(A) = \mu(B)$.*

Почти покрытие. Пусть $A \subset X$, и $\{A_i\}$ — семейство подмножеств X. Будем говорить, что $\{A_i\}$ является *μ-почти покрытием* A, или что $\{A_i\}$ *покрывает μ-почти все* A, если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} \cup A_i$, т.е. $\mu\big(A \setminus (\cup A_i)\big) = 0$.

Из предложения 1.56 и субаддитивности внешней меры вытекает следующий результат.

Следствие 1.58. *Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное μ-почти покрытие множества A. Тогда $\mu(A) \le \sum \mu(A_i)$.*

Почти непересекающиеся множества. Пусть A и B — подмножества в X. Будем говорить, что A и B являются *μ-почти непересекающимися* или *μ-почти дизъюнктными*, если $\mu(A \cap B) = 0$. Для μ-почти непересекающихся A и B их объединение будем называть *μ-почти дизъюнктным объединением* и обозначать через $A \overset{\text{п.в.}}{\sqcup} B$. Аналогично определяется произвольное μ-почти дизъюнктное семейство подмножеств в X: каждая пара таких подмножеств должна быть μ-почти дизъюнктной.

Предложение 1.59. *Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — семейство μ-измеримых подмножеств X, являющееся μ-почти дизъюнктным. Тогда*

$$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i).$$

Доказательство. Положим $B_k = A_k \cap (\cup_{i \ne k} A_i) = \cup_{i \ne k}(A_k \cap A_i) \subset A_k$. Так как $\mu(A_k \cap A_i) = 0$, то $\mu(B_k) = 0$. Пусть $C_k = A_k \setminus B_k$, тогда $A_k = C_k \sqcup B_k$, причем C_k и B_k являются μ-измеримыми, поэтому $\mu(A_k) = \mu(C_k) + \mu(B_k) = \mu(C_k)$. Легко видеть, что $\{C_k\}$ является (μ-измеримым) дизъюнктным семейством. Положим $A = \cup A_k$, $C = \cup C_k$, тогда, так как $C_k \subset A_k$ при каждом k, имеем $C \subset A$, откуда

$$\mu(A) \ge \mu(C) = \sum \mu(C_k) = \sum \mu(A_k).$$

С другой стороны, в силу счетной субаддитивности внешней меры, имеем $\mu(A) \le \sum \mu(A_k)$, что и требовалось. □

Явное указание меры. Иногда нам нужно будет явно указать ту внешнюю меру, для которой выполняется почти-соотношение. Тогда мы будем к п.в. добавлять обозначение меры, например, μ-п.в. Так появляются почти-соотношения

$$A \overset{\mu\text{-п.в.}}{\subset} B, \ A \overset{\mu\text{-п.в.}}{=} B, \ A \overset{\mu\text{-п.в.}}{\sqcup} B.$$

Тема 2

Меры Хаусдорфа.

Этот раздел посвящен одной из наиболее часто используемых метрической геометрии мер — мере Хаусдорфа. На протяжении этой лекции X обозначает метрическое пространство.

2.1 Определение и свойства

Напомним, что *гамма-функция* определяется следующим образом:

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx;$$

для целого неотрицательного t имеем $\Gamma(t+1)=t!$ и $\Gamma\big(t+\frac12\big)=\frac{(2t-1)!!\sqrt{\pi}}{2^t}=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2t-1)\sqrt{\pi}}{2^t}$. В терминах гамма-функции вычисляется объем шара в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $k\ge1$, а именно, объем шара радиуса R равен $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}R^k$.

Для каждого, не обязательно целого, $k\in[0,\infty)$ величину $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$ обозначим через ω_k. Таким образом, для для $k=0$ имеем $\omega_0=1$, а для натуральных k число ω_k равно объему единичного шара в $\mathbb{R}^k$, в частности, $\omega_1=2$.

Определение 2.1. Для $\delta\in(0,\infty]$ и $A\subset X$ семейство $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{P}(X)$ назовем *δ-покрытием множества A*, если $A\subset\cup_{i\in I}A_i$ и $\operatorname{diam}A_i<\delta$ при всех $i\in I$.

Соглашение 2.2. В приводимом ниже определении мы используем естественное допущение $\operatorname{diam}\emptyset=0$, что соответствует определению диаметра множества A как точной верхней грани **множества** всех расстояний между точками из A (в случае $A=\emptyset$ это множество расстояний также равно $\emptyset$) и тем, что $\sup\emptyset=0$.

Определение 2.3. Для каждых $\delta\in(0,\infty]$, $k\in(0,\infty)$ и $A\subset X$ положим

$$H^k_\delta(A)=\frac{\omega_k}{2^k}\inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty(\operatorname{diam}A_i)^k\ \Big|\ \{A_i\}_{i=1}^\infty - \delta\text{-покрытие } A\Big\},\tag{2.1}$$

$$H^k(A)=\sup_{\delta>0}H^k_\delta(A).\tag{2.2}$$

Замечание 2.4. Если $A_i=\emptyset$, то $(\operatorname{diam}A_i)^k=0$, поэтому сумма в правой части формулы (2.1) не поменяется, если такие A_i исключить из суммирования. Последнее приводит к тому, что при определении H^k_δ можно рассматривать не только счетные, но и не более чем счетные δ-покрытия. Также, учитывая, что для любой функции $f\colon I\to[0,\infty]$ при пустом I имеем $\sum_I f=0$, мы может рассматривать и пустые δ-покрытия $\{A_i\}_{i\in I}$ (для пустого множества A).

Таким образом, определение 2.3 эквивалентно следующему: для каждых $\delta\in(0,\infty]$, $k\in(0,\infty)$ и $A\subset X$ положим

$$H^k_\delta(A)=\frac{\omega_k}{2^k}\inf\Big\{\sum_{i\in I}(\operatorname{diam}A_i)^k\ \big|\ \{A_i\}_{i\in I} - \text{не более чем счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\},$$

и

$$H^k(A)=\sup_{\delta>0}H^k_\delta(A).$$

Замечание 2.5. Может оказаться, что для данного $\delta \in (0, \infty]$ не существует ни одного счетного (и, значит, ни одного не более чем счетного) покрытия множества A. Это так, например, если в качестве $A = X$ взять континуальное метрическое пространство, в котором расстояние между различными точками равно 1, а δ выбрать не превосходящим 1. Тогда в правой части формулы (2.1) точная нижняя грань берется у пустого семейства. Так как $\inf \emptyset = \infty$, то $H^k_\delta(A) = \infty$ для любого $k \in (0, \infty)$.

Заметим также, что отсутствие счетных δ-покрытий при некотором $\delta \in (0, \infty]$ влечет отсутствие счетных δ'-покрытий при всех $\delta' \in (0, \delta)$. Отсюда вытекает, что при каждом $k \in (0, \infty)$ не только $H^k_\delta(A) = \infty$, но и $H^k_{\delta'}(A) = \infty$ при всех $\delta' \in (0, \delta)$, так что $H^k(A) = \infty$.

В дальнейшем, чтобы не перегружать доказательства отдельным рассмотрением разобранного случая, **мы всегда будем предполагать, что каждое из рассматриваемых множеств A при каждом $\delta \in (0, \infty]$ обладает хотя бы одним счетным δ-покрытием**.

Замечание 2.6. На самом деле, функции H^k могут быть определены и для $k = 0$. При этом окажется, что H^0 — считающая мера, введенная нами в пункте (3) примера 1.24. В различных текстах, посвященных геометрической теории меры, функция H^0 определяется вместе со всеми остальными H^k, однако такой подход приводит к многочисленным неприятностям. Обсуждение возникающих на этом пути проблем см. в [21]. Так как в дальнейшем мы будем преимущественно иметь дело с H^1, то приведенное определение 2.3 вполне достаточно для наших целей.

Замечание 2.7. При вычислении $H^k_\delta(A)$ можно ограничиться лишь теми счетными (или не более чем счетными) δ-покрытиями $\{A_i\}$ множества A, в которых каждый непустой элемент A_i пересекает A.

Замечание 2.8. При вычислении $H^k_\delta(A)$ можно ограничиться лишь теми счетными (или не более чем счетными) δ-покрытиями $\{A_i\}$ множества A, в которых каждый элемент A_i — замкнутое подмножество X. Это мгновенно вытекает из того, что у подмножества и его замыкания диаметры одинаковы (замыкание пустого множества совпадает с ним самим).

Замечание 2.9. Так как при уменьшении δ множество δ-покрытий для A уменьшается, то H^k_δ монотонно растет при убывании δ, так что $\sup_{\delta>0} H^k_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A)$.

Замечание 2.10. Напомним, что подмножество A метрического пространства называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset A$ такой, что $\big\{U_\varepsilon(a_i)\big\}_{i=1}^m$ — покрытие A. Ясно, что для вполне ограниченного $A \subset X$, любого $k \in (0, \infty)$ и любого $\delta > 0$ имеем $H^k_\delta(A) < \infty$.

Теорема 2.11. *Для каждого $k \in (0, \infty)$*

(1) *функции H^k_δ при любом $\delta \in (0, \infty]$ и H^k являются внешними мерами на X;*

(2) *внешняя мера H^k — борелевская;*

(3) *внешняя мера H^k_δ борелевской, вообще говоря, не является;*

(4) *внешняя мера H^k — борелевски регулярная;*

(5) *если $H^k(A) > 0$, то $H^p(A) = \infty$ для любого $p < k$;*

(6) *если $H^k(A) < \infty$, то $H^p(A) = 0$ для любого $p > k$;*

(7) *если $H^k_\delta(A) = 0$ для некоторого $\delta \in (0, \infty]$, то для любого $\delta' \in (0, \infty]$ также $H^k_{\delta'}(A) = 0$, и, значит, $H^k(A) = 0$.*

Доказательство. (1) Рассмотрим произвольное множество $A \subset X$, его покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, а также $\delta \in (0, \infty]$ и $k \in (0, \infty)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие δ-покрытия $\{A_{ij}\}_{j=1}^\infty$ множеств A_i, что

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ij})^k \le H^k_\delta(A_i) + \varepsilon^i.$$

Но тогда семейство $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ является также δ-покрытием A, и для $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняется

$$H^k_\delta(A) \le \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i,j=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ij})^k \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \sum_{j=1}^\infty H^k_\delta(A_i).$$

Так как ε можно выбрать сколько угодно малым, то функция H^k_δ субаддитивна.

Заметим также, что $H^k_\delta(\emptyset) = 0$, так как $A = \emptyset$ можно покрыть семейством пустых множеств, а диаметр пустого множества равен нулю (см. соглашение 2.2). Таким образом, H^k_δ является (внешней) мерой при любых k и δ. Предельный переход при $\delta \to 0+$ дает нам, что и H^k является внешней мерой.

(2) Для доказательства воспользуемся критерием Каратеодори (теорема 1.31). Пусть A и B — отделимые подмножества X, и $\delta = |AB|$. Тогда каждое X_i, для которого $\operatorname{diam} X_i < \delta$, не может пересекать A и B одновременно. В силу замечания 2.7, при вычислении $H^k_\delta(A \cup B)$ мы можем ограничиться лишь теми δ-покрытиями $\{X_i\}$, в которых каждый X_i пересекает $A \cup B$. Но каждое такое покрытие распадается в дизъюнктное объединение покрытия A и покрытия B, так что, переходя к точной нижней грани, получаем $H^k_\delta(A \cup B) = H^k_\delta(A) + H^k_\delta(B)$. Выполнив предельный переход при $\delta \to 0+$, заключаем, что $H^k(A \cup B) = H^k(A) + H^k(B)$, и, в силу произвольности выбора отделимых A и B и теоремы 1.31, убеждаемся в борелевости H^k.

(3) Пусть $X = \mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость со стандартной функцией расстояния и декартовыми координатами x, y. Положим $A = \big\{(x, y) : y > 0\big\}$, тогда A — борелевское (открытое) подмножество $\mathbb{R}^2$. В качестве F возьмем границу квадрата $\big\{(x, y) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\big\}$, и пусть $\delta = 4$.

Лемма 2.12. *Для любого связного ограниченного подмножества A метрического пространства X и любого $\delta > \operatorname{diam} A$ имеем $H^1_\delta(A) = \operatorname{diam} A$.*

Доказательство. Действительно, семейство $\{A\}$ является δ-покрытием A, поэтому $H^1_\delta(A) \le \operatorname{diam} A$. С другой стороны, так как A — связно, но $H^1_\delta(A) \ge \operatorname{diam} A$ (это будет доказано в следующих лекциях, см. предложение 4.1). $\square$

В силу леммы 2.12, $H^1_4(F) = \operatorname{diam} F = 2\sqrt{2}$, $H^1_4(F \cap A) = \operatorname{diam}(F \cap A) = \sqrt{5}$ и $H^1_4(F \setminus A) = \operatorname{diam}(F \setminus A) = \sqrt{5}$, поэтому $H^1_4(F) \ne H^1_4(F \cap A) + H^1_4(F \setminus A)$.

(4) Выберем произвольное $A \subset X$ и построим борелевское $B \supset A$ такое, что $H^k(A) = H^k(B)$. Если $H^k(A) = \infty$, то в качестве B можно взять X.

Пусть $H^k(A) < \infty$. В силу замечания 2.8, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $(1/n)$-покрытие $\{A_{ni}\}_{i=1}^\infty$ множества A замкнутыми подмножествами A_{ni} пространства X такое, что

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k \le H^k_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Положим $A_n = \cup_{i=1}^\infty A_{ni}$ и $B = \cap_{n=1}^\infty A_n$, тогда B — борелевское множество, $A \subset A_n$ при всех n, $A \subset B$ и

$$H^k_{1/n}(B) \le H^k_{1/n}(A_n) \le \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k \le H^k_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $H^k(B) \le H^k(A)$, но так как $A \subset B$, выполняется противоположное неравенство и, значит, $H^k(B) = H^k(A)$.

(5) Выберем произвольное $\delta \in (0, 1)$, рассмотрим любое δ-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A и заметим, что

$$(\operatorname{diam} A_i)^k = (\operatorname{diam} A_i)^{k-p} (\operatorname{diam} A_i)^p \le \delta^{k-p} (\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Переходя к точной нижней грани по δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, заключаем, что $H^k_\delta(A) \le \delta^{k-p} H^p_\delta(A)$. Если $H^p(A) < \infty$, то $H^p_\delta(A) \le H^p(A) < \infty$ при всех δ, поэтому $\delta^{k-p} H^p_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$, так что $H^k(A) = \lim_{\delta \to 0+} H^k_\delta(A) = 0$, противоречие.

(6) Выберем произвольное $\delta \in (0, 1)$, рассмотрим любое δ-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A и заметим, что

$$(\operatorname{diam} A_i)^p = (\operatorname{diam} A_i)^{p-k} (\operatorname{diam} A_i)^k \le \delta^{p-k} (\operatorname{diam} A_i)^k.$$

Как и выше, переходя к точной нижней грани по δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, заключаем, что $H^p_\delta(A) \le \delta^{p-k} H^k_\delta(A)$. Так как $H^k_\delta(A) \le H^k(A) < \infty$, то $\delta^{p-k} H^k_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$, поэтому $H^p_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$ и, значит, $H^p(A) = \lim_{\delta \to 0+} H^p_\delta(A) = 0$.

(7) Так как $H^k_\delta(A) = 0$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует δ-покрытие $\{A_{ni}\}_{i=1}^\infty$ множества A, для которого выполнено $\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k < 1/n$, в частности, $\operatorname{diam} A_{ni} < 1/\sqrt[k]{n}$ при всех i. Так как $1/\sqrt[k]{n} \to 0$ при $n \to \infty$, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta' \in (0, \infty]$ существует такое δ'-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A, что $\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_i)^k < \varepsilon$, так что $H^k_{\delta'}(A) < \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, имеем $H^k_{\delta'}(A) = 0$. Осталось устремить δ' к нулю. $\square$

Определение 2.13. Число $H^k(A)$ называется *k-мерной мерой Хаусдорфа множества A.*

Пример 2.14. Пусть $X = \mathbb{R}$ — евклидова прямая, тогда $H^1_\delta = H^1$ — это внешняя мера Лебега L^1. Действительно, так как движение сохраняет диаметры множеств, каждая мера H^k_δ, а, значит, и H^k, на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно движений, поэтому H^n_δ и H^n пропорциональны мере Лебега L^n. Чтобы доказать совпадение мер H^1_δ и H^1 с мерой Лебега L^1 на $\mathbb{R}$, достаточно показать, что их значения на единичном отрезке I равны 1.

Пусть A — произвольное замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$. Так как A компактно, существуют $x, y \in A$ такие, что $\operatorname{diam} A = |xy|$. Но тогда $A \subset [x, y]$. Из монотонности меры заключаем, что $L^1(A) \le L^1\big([x, y]\big) = y - x = \operatorname{diam} A$.

Замечание 2.15. Аналогичное неравенство имеет место и для произвольного $n \in \mathbb{N}$, а именно, для $A \subset \mathbb{R}^n$ выполняется $L^n(A) \le \frac{\omega_n}{2^n}(\operatorname{diam} A)^n$. Последнее неравенство называется *изодиаметрическим.* С помощью него можно показать, что $H^n_\delta = H^n = L^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Вернемся к одномерной мере Хаусдорфа. Замечание 2.8 позволяет нам при вычислении $H^1_\delta(I)$ ограничиться лишь теми δ-покрытиями $\{A_i\}$, в которых все элементы A_i компактны. Тогда для каждого такого покрытия имеем

$$L^1(I) \le L^1(\cup A_i) \le \sum L^1(A_i) \le \sum \operatorname{diam} A_i.$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким $\{A_i\}$, получаем $L^1(I) \le H^1_\delta(I)$.

С другой стороны, разбив I на последовательные отрезки I_p длины меньше δ, получаем

$$H^1_\delta(I) \le \sum \operatorname{diam} I_p = \sum L^1(I_p) = L^1(I).$$

Таким образом, при каждом δ имеем $H^1_\delta(I) = L^1(I)$, откуда и $H^1(I) = L^1(I)$ и, значит, $H^1 = L^1$.

Из теоремы 2.11 вытекает следующий результат.

Следствие 2.16. *Для любого $A \subset X$ имеем:*

(1) *или $H^k(A) = \infty$ при всех $k \in (0, \infty)$,*

(2) *или $H^k(A) = 0$ при всех $k \in (0, \infty)$,*

(3) *или существует и единственно $k \in (0, \infty)$ такое, что $H^p(A) = 0$ при всех $p > k$ и $H^p(A) = \infty$ при всех $p < k$.*

Таким образом,

$$\inf\{k : H^k(A) = 0\} = \inf\{k : H^k(A) < \infty\} = \sup\{k : H^k(A) = \infty\} = \sup\{k : H^k(A) > 0\}.$$

Определение 2.17. Число $\inf\{k : H^k(A) = 0\}$ называется *хаусдорфовой размерностью множества A* и обозначается через $\dim_H A$.

Замечание 2.18. Эквивалентные определения хаусдорфовой размерности получаются из заключительной части следствия 2.16.

2.2 Плотности

В ряде случаев возникает необходимость сравнения некоторой внешней меры μ с мерой Хаусдорфа H^k, в частности, требуется выяснить, в каких точках пространства мера μ «сильнее сконцентрирована», а в каких — «слабее». Для этого изучают предельные значения отношения $\mu\big(B_r(x)\big)/(\omega_k r^k)$ при $r \to \emptyset+$. Также интерес представляет сравнение этих мер не на всем пространстве, а на некотором подмножестве. Так возникает понятие плотности внешней меры и, как частный случай, плотности подмножества метрического пространства.

Определение 2.19. Для внешней меры μ на метрическом пространстве X, числа $k \in (0,\infty)$, подмножества $A \subset X$ и точки $x \in X$ положим

$$\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\mu\big(B_r(x)\cap A\big)}{\omega_k\, r^k},$$
$$\underline{\Theta}_k(\mu, A, x) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\mu\big(B_r(x)\cap A\big)}{\omega_k\, r^k}.$$

Величины $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu, A, x)$ называются соответственно *верхней* и *нижней k-мерными плотностями внешней меры $\mu \llcorner A$ в точке x.*

Если $A = X$, то $\overline{\Theta}_k(\mu, X, x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu, X, x)$ обозначаются для краткости через $\overline{\Theta}_k(\mu, x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu, x)$ и называются *верхней* и *нижней k-мерными плотностями внешней меры μ в точке x.*

Следующий результат взят из [20].

Теорема 2.20. *Пусть μ — борелевская внешняя мера на метрическом пространстве X, $k \in (0,\infty)$ и $t \ge 0$. Тогда*

(1) *если $A_1 \subset A_2 \subset X$, и $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) \ge t$ при всех $x \in A_1$, то $\mu(A_2) \ge t\, H^k(A_1)$;*

(2) *если мера μ регулярна, $A \subset X$ и $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) \le t$ при всех $x \in A$, то $\mu(A) \le 2^k\, t\, H^k(A)$.*

Доказательство. (1) Если $\mu(A_2) = \infty$ или $t = 0$, то утверждение тривиально. Поэтому пусть сразу $\mu(A_2) < \infty$ и $t > 0$.

Далее, мы можем предположить, что выполняется строгое неравенство $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) > t$, так как если мы докажем утверждение в этом предположении, то для нестрогого неравенства $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) \ge t$ утверждение будем выполняться для всех $0 < t' < t$, так что требуемое можно будет получено предельным переходом.

Для каждого $\delta > 0$ положим

$$\mathcal{B}_\delta = \Big\{B_r(x) : x \in A_1,\ 0 < r < \delta/2,\ \mu\big(A_2 \cap B_r(x)\big) \ge t\,\omega_k\, r^k\Big\}.$$

В силу выполнения строгого неравенства $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) > t$ для всех $x \in A_1$, для таких x существуют r, сколь угодно близкие к нулю и, значит, удовлетворяющие $0 < r < \delta/2$, для которых даже $\mu\big(A_2 \cap B_r(x)\big) > t\,\omega_k\, r^k$, так что $\mathcal{B}_\delta$ является покрытием A_1 замкнутыми невырожденными шарами, радиусы которых ограничены в совокупности. И сказанного следует, что к $\mathcal{B}_\delta$ применима теорема Витали (теорема 1.7), в силу которой из покрытия $\mathcal{B}_\delta$ можно выделить дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'_\delta$ такое, что $\cup\mathcal{B}_\delta \subset \cup 5\mathcal{B}'_\delta$.

Далее, заметим, что для каждого $B_r(x) \in \mathcal{B}_\delta$ выполняется $\mu(B_r(x)\cap A_2) > 0$ (иначе в центре x этого шара будет $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) = 0$). Кроме того, по нашему предположению, $\mu(A_2) < \infty$. Отсюда следует, что дизъюнктное семейство $\mathcal{B}'_\delta$ — не более чем счетно. Действительно, если это не так, то (сравните с упражнением 1.1) получаем, что

$$\sum_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} (\mu \llcorner A_2)\big(B_r(x)\big) = \sum_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} \mu\big(B_r(x)\cap A_2\big) = \infty.$$

Но, в силу предложения 1.40, шары $B_r(x)$ и множество A_2 являются $(\mu \llcorner A_2)$-измеримыми, поэтому

$$\mu(A_2) = (\mu \llcorner A_2)(A_2) \ge (\mu \llcorner A_2)\big(\cup_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} B_r(x)\big) = \sum_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} (\mu \llcorner A_2)\big(B_r(x)\big) = \infty,$$

противоречие.

Перенумеруем элементы этого семейства, так что $\mathcal{B}'_\delta = \{B_i\}_{1\le i<N}$, где N может равняться ∞. По определению, для каждого $1 \le i < N$ имеем $B_i = B_{r_i}(x_i)$. Если N конечно, то при $i \ge N$ положим $B_i = \emptyset$, $r_i = 0$, $\operatorname{diam} B_i = 0$. С учетом этих соглашений, приводимые ниже формулы будем писать для счетного семейства $\{B_i\}$.

Так как покрытие $\mathcal{B}_\delta$ сгущается в каждой точке из A_1, можно применить следствие 1.12, из которого вытекает, что для любого $1 \le m < \infty$ выполняется

$$A_1 \setminus \bigcup_{i\le m} B_i \subset \bigcup_{i>m}^{\infty} 5B_i$$

(заметим, что добавление пустых B_i не влияет на справедливость результата).

Отсюда следует, что $A_1 \subset \Big(\cup_{i\le m} B_i\Big) \cup \Big(\cup_{i>m} 5B_i\Big)$ при каждом m. Таким образом, семейство $\{B_i\}_{i\le m} \cup \{5B_i\}_{i>m}$ является (5δ)-покрытием множества A_1, откуда

$$H^k_{5\delta}(A_1) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i\le m}(\operatorname{diam} B_i)^k + \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i>m}(5\operatorname{diam} B_i)^k \le \sum_{i\le m}\omega_k r_i^k + 5^k\sum_{i>m}\omega_k r_i^k. \tag{2.3}$$

По определению элементов покрытия $\mathcal{B}_\delta$, для непустых B_i имеем

$$\omega_k r_i^k \le t^{-1}\mu(B_i\cap A_2) = t^{-1}(\mu \llcorner A_2)(B_i);$$

для $B_i = \emptyset$, также выполняется $\omega_k r_i^k \le t^{-1}(\mu \llcorner A_2)(B_i)$ (правая и левая части последнего неравенства равны нулю).

В силу следствия 1.42, внешняя мера $\mu \llcorner A_2$ является борелевской, откуда

$$\sum_{i=1}^\infty \omega_k r_i^k \le t^{-1}\sum_{i=1}^\infty(\mu \llcorner A_2)(B_i) = t^{-1}(\mu \llcorner A_2)(\cup_{i=1}^\infty B_i) \le t^{-1}\mu(A_2) < \infty, \tag{2.4}$$

поэтому $\sum_{i=m+1}^\infty \omega_k r_i^k \to 0$ при $m\to\infty$. Переходя в неравенстве (2.3) к пределу при $m\to\infty$ и учитывая оценку (2.4), получаем $H^k_{5\delta}(A_1) \le \sum_{i=1}^\infty \omega_k r_i^k \le t^{-1}\mu(A_2)$. Осталось перейти к пределу при $\delta\to 0+$.

(2) Как и в доказательстве предыдущего пункта, без ограничения общности предположим, что для всех $x\in A$ выполняется строгое неравенство $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) < t$. Положим

$$A_n = \Big\{x\in A : \mu\big(A\cap B_r(x)\big) \le t\,\omega_k\, r^k \text{ при всех } 0<r<1/n\Big\},$$

тогда, начиная с некоторого n, каждое A_n непусто, так как для достаточно малых r все величины $\mu\big(A\cap B_r(x)\big)/(\omega_k\, r^k)$ строго меньше t. Отметим, что $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$, $A_1\subset A_2\subset\cdots$ и, хотя A_k не обязаны быть μ-измеримыми и H^k-измеримыми, но μ и H^k — регулярные внешние меры, поэтому, в силу пункта (4) теоремы 1.23, имеем $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ и $H^k(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n\to\infty} H^k(A_n)$. Поэтому, достаточно проверить выполнение неравенства $\mu(A_n) \le 2^k\, t\, H^k(A_n)$ при всех n. Сделаем это.

Если $H^k(A_n) = \infty$, то неравенство имеет место. Пусть теперь $H^k(A_n) < \infty$. Выберем произвольное $\delta \in \big(0, 1/n\big)$, тогда, в силу замечания 2.7, существует δ-покрытие $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ множества A_n, в котором все непустые C_i пересекают A_n. Для каждого непустого C_i выберем произвольную точку $x_i\in A_n\cap C_i$ и положим $r_i = (\operatorname{diam} C_i)/2$, тогда $C_i\subset B_{2r_i}(x_i)$. Для пустых C_i также положим $r_i = (\operatorname{diam} C_i)/2 = 0$.

Так как, для непустых C_i имеем $2r_i = \operatorname{diam} C_i < \delta < 1/n$ и $x_i\in A_n$, то

$$\mu(A\cap C_i) \le \mu\big(A\cap B_{2r_i}(x_i)\big) \le 2^k\, t\,\omega_k\, r_i^k.$$

Для пустых C_i, в силу $r_i = 0$, также выполняется

$$\mu(A\cap C_i) = 0 = 2^k\, t\,\omega_k\, r_i^k.$$

Следовательно,

$$\mu(A_n) = \mu(A\cap A_n) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(A\cap C_i) \le 2^k\, t\,\omega_k\sum_{i=1}^\infty r_i^k = 2^k\, t\,\omega_k \sum_{i=1}^\infty\Big(\frac{\operatorname{diam} C_i}{2}\Big)^k.$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким δ-покрытиям $\{C_i\}_{i=1}^\infty$, получим оценку $\mu(A_n) \le 2^k\, t\, H^k_\delta(A_n)$. Остается устремить δ к нулю. $\square$

Тема 3

Липшицевы отображения. Расстояние Хаусдорфа.

В данном разделе мы напомним необходимые в дальнейшем факты из теории липшицевых отображений, а также ряд свойств расстояния Хаусдорфа, определенного на подмножествах метрического пространства.

3.1 Липшицевы отображения

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств.

Определение 3.1. Отображение f называется *липшицевым*, если существует число $L \ge 0$ такое, что $|f(x)f(x')| \le L\,|xx'|$ при всех $x, x' \in X$. Число L в этом случае называется *константой Липшица отображения* f, само отображение f называется L-липшицевым, а наименьшая константа Липшица для f — *растяжением отображения* f и обозначается через $\operatorname{dil} f$.

Замечание 3.2. В некоторых источниках константой Липшица липшицева отображения f называют его растяжение $\operatorname{dil} f$.

Замечание 3.3.

(1) Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — липшицевы отображения, то $g \circ f$ — также липшицево, и $\operatorname{dil}(g \circ f) \le \operatorname{dil} f \cdot \operatorname{dil} g$.

(2) Функция расстояния от произвольной фиксированной точки $x_0 \in X$, заданная формулой $d_{x_0}(x) = |xx_0|$, является 1-липшицевым отображением $d_{x_0}\colon X \to \mathbb{R}$ (это мгновенно вытекает из неравенства треугольника).

Определение 3.4. Говорят, что последовательность отображений $\{f_i\colon X \to Y\}_{i=1}^{\infty}$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y *равномерно сходится* к отображению $f\colon X \to Y$ (обычно это обозначается через $f_i \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что при всех $i \ge n$ выполняется $\sup_{x \in X} |f_i(x)f(x)| < \varepsilon$.

Замечание 3.5. Если все отображения f_i из определения 3.4 непрерывны, то и предельное отображение f — также непрерывно (проверьте).

Замечание 3.6. Легко видеть, что на множестве всех отображений $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y функция

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x)g(x)|,$$

является невырожденным расстоянием, удовлетворяющим неравенству треугольника. Это расстояние между f и g будем обозначать через $|fg|_\infty$. Более того, если диаметр пространства Y конечен, то $|\cdot|_\infty$ — метрика.

Замечание 3.7. Равномерная сходимость $f_i \rightrightarrows f$ равносильна условию $|f_i f|_\infty \to 0$ при $i \to \infty$ (убедитесь в этом).

Предложение 3.8. *Пусть $\{f_i\colon X\to Y\}_{i=1}^\infty$ — последовательность L-липшицевых отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда если $f_i\rightrightarrows f$, то f также является L-липшицевым.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon>0$, тогда, в соответствии с замечанием 3.7, существует такое n, что для любого $i\ge n$ выполняется $|ff_i|_\infty<\varepsilon$, откуда для любых $x,x'\in X$ имеем

$$\bigl|f(x)f(x')\bigr|\le\bigl|f(x)f_i(x)\bigr|+\bigl|f_i(x)f_i(x')\bigr|+\bigl|f_i(x')f(x')\bigr|<L|xx'|+2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое. □

Определение 3.9. Пусть $\mathcal F=\{f_\alpha\colon X\to Y\}_{\alpha\in\mathcal A}$ — семейство непрерывных отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Будем говорить, что это семейство *равностепенно непрерывно*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x,x'\in X$, $|xx'|<\delta$, и всех $\alpha\in\mathcal A$ имеем $\bigl|f_\alpha(x)f_\alpha(x')\bigr|<\varepsilon$.

Предложение 3.10. *Пусть $\mathcal F=\{f_\alpha\colon X\to Y\}_{\alpha\in\mathcal A}$ — семейство L-липшицевых отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда $\mathcal F$ является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Действительно, если $L=0$, то для любого $\varepsilon>0$, любого f_α и любых $x,x'\in X$ имеем $\bigl|f_\alpha(x)f_\alpha(x')\bigr|=0<\varepsilon$, так что δ из определения 3.9 можно выбрать любым.

Пусть теперь $L>0$. Положим $\delta=\varepsilon/L$, тогда для любого f_α и любых $x,x'\in X$ таких, что $|xx'|<\delta$, выполняется

$$\bigl|f_\alpha(x)f_\alpha(x')\bigr|\le L|xx'|<\varepsilon,$$

что и требовалось. □

Теорема 3.11 (теорема Мак-Шейна о продолжении)**.** *Пусть A — непустое подмножество метрического пространства X, и $f\colon A\to\mathbb R$ — липшицева функция. Тогда существует липшицева функция $g\colon X\to\mathbb R$ такая, что $g|_A=f$ и $\operatorname{dil} g=\operatorname{dil} f$.*

Доказательство. Положим $\lambda=\operatorname{dil} f$ и $g(x)=\sup_{a\in A}\bigl(f(a)-\lambda|xa|\bigr)$. Покажем, что g — искомая функция.

Так как $\operatorname{dil} f=\lambda$, то для любых $x,a\in A$ имеем $f(x)-f(a)\ge-\lambda|xa|$, т.е. $f(x)\ge f(a)-\lambda|xa|$, поэтому $f(x)\ge g(x)$. С другой стороны, для каждого $x\in A$ имеем $g(x)\ge f(x)-\lambda|xx|=f(x)$. Следовательно, $f(x)=g(x)$ для всех $x\in A$.

Покажем теперь, что при каждом $x\in X$ величина $g(x)$ — вещественное число (т.е. отлична от $\pm\infty$). Так как $g(x)\ge f(a)-\lambda|xa|$ при каждом $a\in A$ влечет $g(x)>-\infty$. Покажем, что $g(x)<\infty$. Действительно, при каждых $a_0,a\in A$ имеем

$$g(x)-f(a_0)=\sup_{a\in A}\Bigl[\bigl(f(a)-\lambda|xa|\bigr)-f(a_0)\Bigr]\le\sup_{a\in A}\bigl(\lambda|aa_0|-\lambda|xa|\bigr)\le\lambda|a_0x|,$$

поэтому $g(x)\le f(a_0)+\lambda|a_0x|<\infty$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.12. *Пусть $\varphi\colon W\to\mathbb R$ и $\psi\colon W\to\mathbb R$ — произвольные функции, причем $\sup\psi<\infty$. Тогда*

$$\sup\varphi-\sup\psi\le\sup(\varphi-\psi).$$

Доказательство. Действительно,

$$\sup_{w\in W}\varphi(w)-\sup_{w\in W}\psi(w)=\sup_{w\in W}\bigl(\varphi(w)-\sup_{w'\in W}\psi(w')\bigr)\le\sup_{w\in W}\bigl(\varphi(w)-\psi(w)\bigr),$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $\psi(w)\le\sup_{w'\in W}\psi(w')$ при каждом $w\in W$. □

Покажем теперь, что $\operatorname{dil} g=\operatorname{dil} f$. Так как $f=g|_A$, то $\operatorname{dil} f\le\operatorname{dil} g$. Осталось доказать обратное неравенство. Для этого выберем произвольные $x,x'\in X$, и пусть, без ограничения общности, $g(x)\le g(x')$, тогда, в силу леммы 3.12, имеем

$$0\le g(x')-g(x)=\sup_{a\in A}\bigl(f(a)-\lambda|xa|\bigr)-\sup_{a\in A}\bigl(f(a)-\lambda|x'a|\bigr)\le\sup_{a\in A}\Bigl[\bigl(f(a)-\lambda|xa|\bigr)-\bigl(f(a)-\lambda|x'a|\bigr)\Bigr]\le\lambda|xx'|,$$

что и требовалось. □

Теорема 3.13. *Пусть $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение между метрическими пространствами, причем* $\operatorname{dil} f > 0$. *Тогда для любых $k \in (0,\infty)$, $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty)$ имеем*

$$H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A),$$

так что

$$H^k\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k(A).$$

Доказательство. Положим $\lambda = \operatorname{dil} f$, тогда для любого δ-покрытия $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A семейство $\big\{f(A_i)\big\}_{i=1}^\infty$ будет $(\lambda\delta)$-покрытием множества $f(A)$, поэтому имеем

$$H^k_{\lambda\delta}\big(f(A)\big) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty \big(\operatorname{diam} f(A_i)\big)^k \le \lambda^k \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty \big(\operatorname{diam} A_i\big)^k.$$

Переходя к инфимуму по всем δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, получаем $H^k_{\lambda\delta}\big(f(A)\big) \le \lambda^k H^k_\delta(A)$. Второе неравенство получается из первого при $\delta \to 0+$. $\square$

Следствие 3.14. *Пусть $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение между метрическими пространствами, для которого $0 \le \operatorname{dil} f \le 1$. Тогда для любых $k \in (0,\infty)$, $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty)$ имеем*

$$H^k_\delta\big(f(A)\big) \le H^k_\delta(A),$$

так что

$$H^k\big(f(A)\big) \le H^k(A).$$

Доказательство. Если $\operatorname{dil} f = 0$, то множество $f(A)$ — или пустое при $A = \emptyset$, или одноточечное. В обоих случаях имеем $H^k_\delta\big(f(A)\big) = H^k\big(f(A)\big) = 0$, поэтому оба неравенства выполнены.

Пусть теперь $\operatorname{dil} f > 0$. Тогда, по теореме 3.13, имеем $H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A)$. По замечанию 2.9, при $\operatorname{dil} f \le 1$ выполняется $H^k_\delta\big(f(A)\big) \le H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big)$. Так как $(\operatorname{dil} f)^k \le 1$, то $(\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A) \le H^k_\delta(A)$. Собирая вместе три приведенных неравенства, выводим первое неравенство из утверждения следствия. Второе неравенство получается из первого при $\delta \to 0+$. $\square$

3.2 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Для произвольных непустых множеств $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \max\Big[\sup\big\{|aB| : a \in A\big\}, \sup\big\{|Ab| : b \in B\big\}\Big].$$

Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа.*

Иногда удобней пользоваться другим эквивалентным определением расстояния Хаусдорфа.

Упражнение 3.15. Для непустых $A, B \subset X$ имеем

$$d_H(A,B) = \inf\big\{r : A \subset U_r(B) \;\&\; U_r(A) \supset B\big\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X.

Теорема 3.16. *Функция d_H является конечной метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Упражнение 3.17. Покажите, что для произвольных непустых $A, B \subset X$ выполняется $d_H(A,B) \ge |AB|$.

Приведем еще ряд свойств расстояния Хаусдорфа в следующем упражнении.

Упражнение 3.18. Докажите следующие утверждения для произвольного метрического пространства X.

(1) Пусть $f\colon X \to \mathcal{H}(X)$ задано формулой $f\colon x \mapsto \{x\}$, тогда f — изометричное вложение.

(2) На семействе всех непустых ограниченных подмножеств в X расстояние Хаусдорфа является конечной псевдометрикой.

(3) Для непустых $A, B \subset X$ имеем $d_H(A, B) = d_H(A, \bar{B})$.

(4) Для непустых $A, B \subset X$ имеем $d_H(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{A} = \bar{B}$.

(5) Если $Y \subset X$ является ε-сетью в $A \subset X$, то $d_H(A, Y) \le \varepsilon$.

Пусть $A_n \subset X$ — семейство непустых подмножеств X таких, что для некоторого непустого $A \subset X$ выполняется $d_H(A_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда будем говорить, что последовательность A_n *сходится по Хаусдорфу к* A и писать $A_n \xrightarrow{\mathrm{H}} A$.

Теорема 3.19. *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Тогда следующие свойства одновременно присутствуют или нет у X и $\mathcal{H}(X)$:*

(1) *полнота (Хан 1932),*

(2) *полная ограниченность,*

(3) *компактность (Хаусдорф, Бляшке).*

Тема 4

Одномерная мера Хаусдорфа.

Пусть X — произвольное метрическое пространство.

Предложение 4.1. *Для связного $C\subset X$ и любого $\delta\in(0,\infty)$ выполняется*

$$H^1_\delta(C)\ge\operatorname{diam}C,\ \text{\textit{так что}}\ H^1(C)\ge\operatorname{diam}C.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $H^1_\delta(C)\ge|xy|$ для любых $x,y\in C$ (утверждение для H^1 получается предельным переходом при $\delta\to0+$). Выберем некоторый $x\in C$ и положим $\varphi(y)=|xy|$, тогда, в силу пункта (2) замечания 3.3, функция φ является 1-липшицевой. Следствие 3.14, пример 2.14 и то, что непрерывный образ связного множества связен, приводят к следующей цепочке:

$$H^1_\delta(C)\ge H^1_\delta\bigl(\varphi(C)\bigr)=L^1\bigl(\varphi(C)\bigr)=\operatorname{diam}\varphi(C)\ge\bigl|\varphi(x)-\varphi(y)\bigr|=|xy|,$$

что и требовалось. □

Предложение 4.2. *Пусть $C\subset X$ связно, $x\in C$, $r\in[0,\infty)$ и $C\setminus B_r(x)\ne\emptyset$. Тогда*

$$H^1\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)\ge r.$$

Доказательство. Снова положим $\varphi(y)=|xy|$, $y\in X$. По пункту (2) замечания 3.3, отображение φ является 1-липшицевым, поэтому, в силу следствия 3.14,

$$H^1\Bigl(\varphi\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)\Bigr)\le H^1\bigl(C\cap B_r(x)\bigr).$$

Так как $C\setminus B_r(x)\ne\emptyset$, существует $y\in C\setminus B_r(x)$. Покажем, что $\varphi\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)$ — отрезок $[0,r]$ (возможно вырожденный).

Действительно, предположим противное, т.е. существует $s\in[0,r]$ такое, что $s\notin\varphi\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)$. Так как $\varphi(x)=0$, то $s>0$, но тогда

$$C=\bigl(C\cap U_s(x)\bigr)\sqcup\Bigl(C\cap\bigl(X\setminus B_s(x)\bigr)\Bigr),$$

причем $x\in C\cap U_s(x)$, $y\in C\cap\bigl(X\setminus B_s(x)\bigr)$, поэтому C — несвязно, противоречие.

Из сказанного и примера 2.14 вытекает, что

$$H^1\Bigl(\varphi\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)\Bigr)=L^1\Bigl(\varphi\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)\Bigr)=r,$$

так что $H^1\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)\ge r$. □

Следствие 4.3. *Пусть $C\subset X$ связно, причем $0\le r<(\operatorname{diam}C)/2$, тогда для любого $x\in C$ выполняется*

$$H^1\bigl(C\cap B_r(x)\bigr)\ge r.$$

Доказательство. Так как $r<(\operatorname{diam}C)/2$, то $C\setminus B_r(x)\ne\emptyset$, и остается применить предложение 4.2. □

Следствие 4.3 играет важную роль в доказательстве следующего результата.

Предложение 4.4. *Пусть X — полное метрическое пространство, и C — непустое связное замкнутое подмножество X, причем $H^1(C) < \infty$. Тогда C компактно.*

Доказательство. Так как X — полное пространство и $C \subset X$ — замкнутое, то C также полное. Поэтому для доказательства компактности C достаточно проверить, что C — вполне ограничено.

Предположим противное, т.е. нашлось такое $\varepsilon > 0$, что для него нет конечной ε-сети. Выберем произвольную точку $x_1 \in C$. В силу предположения, существует $x_2 \in C$ такая, что $|x_1x_2| \geq \varepsilon$. Далее, снова в силу предположения, существует $x_3 \in C$ такое, что $|x_1x_3| \geq \varepsilon$ и $|x_2x_3| \geq \varepsilon$, причем этот процесс можно продолжать до бесконечности. Тем самым, мы построили счетное подмножество $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ множества C такое, что $|x_ix_j| \geq \varepsilon$ при $i \neq j$. Отсюда вытекает, что семейство $\{B_i := B_{\varepsilon/3}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ — дизъюнктно. Так как C и все B_i — борелевские, а внешняя мера H^1 — также борелевская, то

$$H^1(C) \geq H^1\Big(\bigcup_{i=1}^\infty (C \cap B_i)\Big) = \sum_{i=1}^\infty H^1(C \cap B_i).$$

Так как $\operatorname{diam} C \geq \varepsilon$, то, в силу следствия 4.3, имеем $H^1(C \cap B_i) \geq \varepsilon/2$, откуда $H^1(C) = \infty$, противоречие, доказывающее компактность C. $\square$

Для доказательства следующего результата нам понадобятся утверждения из общей топологии, относящиеся к теории квазикомпонент. Мы вкратце расскажем об этой теории в следующем разделе.

4.1 Квазикомпоненты

В данном разделе X обозначает произвольное топологическое пространство. Нам понадобится понятие квазикомпоненты, см., например [19].

Определение 4.5. *Квазикомпонентой точки $x \in X$* называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств X, содержащих точку x.

Перечислим некоторые простые свойства квазикомпонент.

Предложение 4.6.

(1) *Квазикомпоненты являются замкнутыми подмножествами X.*

(2) *Семейство всех открыто-замкнутых подмножеств замкнуто относительно конечных пересечений, конечных объединений и дополнений.*

(3) *Каждая квазикомпонента некоторой точки является квазикомпонентой каждой своей точки, так что имеет смысл говорить о квазикомпонентах пространства.*

(4) *Квазикомпоненты либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, семейство всех квазикомпонент образует разбиение пространства X на замкнутые подмножества.*

Доказательство. (1) и (2) тривиальны.

(3) Пусть A — квазикомпонента точки x, и $a \in A$. Покажем, что A — квазикомпонента точки a. Предположим, что это не так, тогда существует открыто-замкнутое множество $C \subset X$ такое, что $a \in C$ и некоторая точка $y \in A$ не содержится в C. Заметим, что $x \notin C$, так как все открыто-замкнутые множества, содержащие x, должны содержать и A. Таким образом, открыто-замкнутое множество $X \setminus C$ содержит x, но не содержит a, что опять же приводит к противоречию.

(4) По определению, квазикомпонента каждого $x \in X$ определена однозначно, и так как каждая квазикомпонента является квазикомпонентой каждой своей точки, разные квазикомпоненты не могут пересекаться. $\square$

Предложение 4.7. *Связная компонента пространства X содержится в некоторой квазикомпоненте пространства X. Таким образом, каждая квазикомпонента представляет собой дизъюнктное объединение некоторого набора связных компонент.*

Доказательство. Пусть C — связная компонента пространства X, содержащая точку x, и Q — квазикомпонента точки x. Рассмотрим произвольное открыто-замкнутое множество $W \subset X$, содержащее x. Тогда $W \supset C$ в силу связности C, поэтому C содержится в пересечении всех таких W, т.е. в квазикомпоненте Q. $\square$

Замечание 4.8. Квазикомпонента может отличаться от компоненты связности, см. [1]. В качестве примера рассмотрим подмножество плоскости с индуцированной топологией, составленное из отрезков $I_n = [A_n, B_n]$, где $A_n = (0, 1/n)$, $B_n = (1, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, а также двух точек $A = (0,0)$ и $B = (1,0)$. Тогда связными компонентами являются отрезки I_n и одноточечные множества $\{A\}$ и $\{B\}$, а квазикомпонентами — те же отрезки I_n, а также двухточечное множество $\{A, B\}$ (проверьте).

Предложение 4.9. *Предположим, что пространство X компактно, $U \subset X$ открыто и $\{F_s\}_{s\in S}$ — семейство замкнутых множеств такое, что $\cap_{s\in S} F_s \subset U$. Тогда существует конечный набор $\{s_1, \ldots, s_k\} \subset S$, для которого $\cap_{i=1}^k F_{s_i} \subset U$.*

Доказательство. Положим $A = X \setminus U$ и $U_s = X \setminus F_s$. Тогда A — замкнутое подмножество компакта X и, значит, само является компактом. Кроме того, $\{U_s\}$ — открытое покрытие компакта A. Действительно,

$$\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{s\in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in S} F_s \supset X \setminus U = A.$$

Таким образом, в этом покрытии существует конечное подпокрытие $\{U_{s_i}\}_{i=1}^k$. Но это означает, что $\cap_{i=1}^k F_{s_i} \subset U$. □

Предложение 4.10. *Пусть топологическое пространство X компактно и хаусдорфово. Тогда для любой точки $x \in X$ связная компонента $C \subset X$, содержащая точку x, совпадает с квазикомпонентой $Q \subset X$ точки x.*

Доказательство. В силу предложения 4.7, достаточно показать, что $Q \subset C$. Мы покажем это, доказав, что квазикомпонента Q связна.

Предположим противное, т.е. существуют замкнутые в Q непересекающиеся непустые множества A и B такие, что $Q = A \sqcup B$, и пусть $x \in A$. Так как Q замкнуто в X, а X — компакт, то Q — также компакт. Аналогично, A и B — непустые компакты (как в Q, так и в X).

Лемма 4.11. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, и $A, B \subset X$ — непустые компакты такие, что $A \cap B = \emptyset$. Тогда A и B отделимы, т.е. существуют открытые множества $U \supset A$ и $V \supset B$ такие, что $U \cap V = \emptyset$.*

Доказательство. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ обозначим через U_b^a и U_a^b некоторые непересекающиеся открытые окрестности точек a и b соответственно. Тогда $\{U_a^b\}_{b\in B}$ — открытое покрытие B, которое, в силу компактности B, содержит конечное подпокрытие $\{U_a^{b_i}\}_{i=1}^n$. Положим $V_a = \cup_{i=1}^n U_a^{b_i} \supset B$ и $V^a = \cap_{i=1}^n U_{b_i}^a$. Тогда $V_a \cap V^a = \emptyset$.

Далее, семейство $\{V^a\}_{a\in A}$ — открытое покрытие A, поэтому, в силу компактности A, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{V^{a_j}\}_{j=1}^m$. Положим $U = \cup_{j=1}^m V^{a_j} \supset A$ и $V = \cap_{j=1}^m V_{a_j} \supset B$, тогда U и V — искомые. □

Вернемся к доказательству предложения. В силу леммы 4.11, существуют открытые непересекающиеся множества $U \supset A$ и $V \supset B$, в частности, $Q \subset U \cup V$.

По определению квазикомпоненты, $Q = \cap F_s$, где $F_s \subset X$ — всевозможные открыто-замкнутые множества, содержащие Q. По предложению 4.9, существует конечный набор $\{s_1, \ldots, s_k\}$ такой, что $F := \cap F_{s_i} \subset U \cup V$. Заметим, что F — открыто-замкнутое множество. Мы покажем, что $U \cap F$ — также открыто-замкнуто, но каждое открыто-замкнутое множество, пересекающее Q, должно содержать $Q = A \sqcup B$ целиком, однако $A \subset (U \cap F)$, а $B \cap (U \cap F) = \emptyset$, противоречие.

Итак, остается проверить, что множество $U \cap F$ открыто-замкнуто. Имеем

$$\overline{U \cap F} \subset \bar{U} \cap F = \bar{U} \cap (U \cup V) \cap F = \big((\bar{U} \cap U) \cup (\bar{U} \cap V)\big) \cap F = U \cap F,$$

где последнее равенство выполняется в силу того, что $\bar{U} \cap V = \emptyset$. Таким образом, $U \cap F$ является не только открытым в силу открытости U и F, но и замкнутым, т.е. открыто-замкнутым. □

Теорема 4.12. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $K \subset X$ — непустой компакт, и C — связная компонента K. Тогда если $C \cap \partial K = \emptyset$, то C также является связной компонентой всего пространства X. В частности, если X связно и $K \neq X$, то $C \cap \partial K \neq \emptyset$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех содержащих C открыто-замкнутых подмножеств K. Так как K — компакт, то все элементы из $\mathcal{F}$ — также компакты. По предложению 4.10, $C = \cap_{F\in\mathcal{F}}F$. Так как $C \cap \partial K = \emptyset$, то $\cap_{F\in\mathcal{F}}(F \cap \partial K) = \emptyset$. Так как компакт в хаусдорфовом топологическом пространстве является замкнутым подмножеством, то $\partial K \subset K$.

Лемма 4.13. *Пусть Y — произвольное непустое подмножество хаусдорфова топологического пространства X, тогда ∂Y — замкнутое подмножество как в X, так и в $\bar{Y}$, т.е. в замыкании Y.*

Доказательство. Действительно, обозначим внутренность Y через $\operatorname{Int} Y$, тогда $\operatorname{Int} Y$ — открытое подмножество как в X, так и в $\bar{Y}$. С другой стороны, $\bar{Y} = \partial Y \sqcup \operatorname{Int} Y$, поэтому $\partial Y = \bar{Y} \setminus \operatorname{Int} Y$, так что граница ∂Y замкнута в $\bar{Y}$. Наконец, $\partial Y = (X \setminus \operatorname{Int} Y) \cap \bar{Y}$, поэтому ∂Y также замкнута в X. □

Из леммы 4.13 и замкнутости K вытекает, что ∂K — замкнутое подмножество K, поэтому ∂K — компакт. Таким образом, все множества $F \cap \partial K$ — компакты.

Лемма 4.14. *Пусть $\{K_i\}_{i\in I}$ — семейство компактов в компакте K, причем $\cap_{i\in I}K_i = \emptyset$. Тогда существует конечный набор $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$, для которого $\cap_{p=1}^{k}K_{i_p} = \emptyset$.*

Доказательство. Действительно, дополнения $U_i = K \setminus K_i$ образуют открытое покрытие компакта K, поэтому из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}\}$, а это означает, что $\cap_{p=1}^{k}K_{i_p} = \emptyset$. □

Из леммы 4.14 вытекает, что существует конечное семейство $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\} \subset \mathcal{F}$, для которого $\cap_{p=1}^{k}(F_{i_p} \cap \partial K) = \emptyset$. Так как $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, то $G := \cap_{p=1}^{k}F_{i_p}$ принадлежит $\mathcal{F}$ и, в силу сказанного выше, не пересекает ∂K. Но тогда G принадлежит внутренности K, поэтому G не только открыто в K, но еще и открыто в X. Так как K — замкнутое множество, то G не только замкнуто в K, но и в X. Итак, G — открыто-замкнуто в X.

Далее, так как каждое $F \in \mathcal{F}$ замкнуто в K, а K замкнуто в X, то F замкнуто в X, поэтому $F \cap G$ замкнуто в X. Кроме того, каждое такое F, а также G открыты в K, поэтому $F \cap G$ открыто в K, и так как $(F \cap G) \cap \partial K = \emptyset$, то $F \cap G \subset \operatorname{Int} K$, поэтому $F \cap G$ открыто в X. Итак, мы показали, что для любого $F \in \mathcal{F}$ множество $F \cap G$ открыто-замкнуто в X.

Так как C связно в K, то C также связно и в X. Отсюда и из предложения 4.7 вытекает, что C содержится в некоторой (однозначно определенной) квазикомпоненте Q пространства X. Обозначим через $\mathcal{H}$ семейство всех открыто-замкнутых множеств, содержащих C, тогда $Q = \cap_{H\in\mathcal{H}}H$. Как было показано выше, каждое множество $G \cap F$, $F \in \mathcal{F}$, принадлежит $\mathcal{H}$, и $C = \cap_{F\in\mathcal{F}}F = \cap_{F\in\mathcal{F}}(F \cap G)$, поэтому $C \supset Q$, значит, $C = Q$.

Из предложения 4.7 вытекает, что $Q = \sqcup C_i$, где C_i — связные компоненты в X, но, как мы показали, $Q = C$ — связно, поэтому Q состоит ровно одного C_i, так что C — связная компонента в X. □

4.2 Геометрическое следствие

Теперь и до конца темы 4 через X снова обозначается метрическое пространство.

Следствие 4.15. *Пусть A — связное подмножество X, $x \in A$ и $r \geq 0$ такие, что $K := B_r(x) \cap A$ — компакт, не совпадающий с A. Пусть $C \ni x$ — связная компонента компакта K. Тогда $H^1(K) \geq H^1(C) \geq \operatorname{diam} C \geq r$.*

Доказательство. Применим теорему 4.12, выбрав в качестве «X» множество A, а к качестве «K» — компакт K. Тогда из этой теоремы вытекает, что C пересекает границу K в пространстве A. В A множество K является шаром радиуса r с центром в x, поэтому его граничные точки удалены от x на расстояние r. Отсюда следует, что $\operatorname{diam} C \geq r$, поэтому, в силу предложения 4.1, получаем требуемое. □

4.3 δ-упаковки

Определение 4.16. Непустое связное компактное хаусдорфово пространство, в частности, непустое связное компактное метрическое пространство называется *континуумом*.

Определение 4.17. Для любого $\delta \in (0, \infty]$, каждое дизъюнктное семейство $\{A_i\}$ подмножеств множества $A \subset X$, состоящее из континуумов A_i таких, что $\operatorname{diam} A_i \leq \delta$, назовем *$\delta$-упаковкой в A*.

Конструкция 4.18. Для каждого $\delta \in (0,\infty]$ определим функцию $L_\delta\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ так:

$$L_\delta(A) = \sup\Bigl\{\sum \operatorname{diam} A_i : \{A_i\} \text{ — конечная } \delta\text{-упаковка в } A\Bigr\}.$$

Замечание 4.19. Отметим, что для каждого множества A ,при каждом $\delta \in (0,\infty]$ имеется хотя бы одна конечная δ-упаковка в A (пустая для пустого A, и непустая, скажем, состоящая из конечного положительного числа одноточечных множеств для непустого A). Для пустого A имеем $L_\delta(A) = 0$ в силу соглашения $\sup\emptyset = 0$.

Предложение 4.20. *Для каждого $\delta \in (0,\infty]$ и $A \subset X$ имеем*

$$L_\delta(A) = \sup\Bigl\{\sum \operatorname{diam} A_i : \{A_i\} \text{ — любая } \delta\text{-упаковка в } A\Bigr\}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как в правой части равенства (4.1) точная верхняя грань берется по не меньшему множеству δ-упаковок, чем в конструкции 4.18, эта правая часть будет больше или равна $L_\delta(A)$. Нам осталось доказать обратное неравенство.

Для любой δ-упаковки $\{A_i\}$ в множестве A имеем, по определению суммы, см. раздел 1,

$$\sum \operatorname{diam} A_i = \sup\Bigl\{\sum \operatorname{diam} B_j : \{B_j\} \text{ — конечное подсемейство в } \{A_i\}\Bigr\} \le L_\delta(A),$$

так что и правая часть равенства (4.1) не превосходит $L_\delta(A)$. $\square$

Предложение 4.21. *Для каждого $\delta \in (0,\infty]$ и $A \subset B \subset X$ имеем $L_\delta(A) \le L_\delta(B)$.*

Доказательство. Это мгновенно вытекает из того, что каждая конечная δ-упаковка в A является также конечной δ-упаковкой в B. $\square$

Предложение 4.22. *Для любого $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty]$ имеем $H^1(A) \ge L_\delta(A)$.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$ — произвольная конечная δ-упаковка для A. Так как H^1, в силу теоремы 2.11, является борелевской внешней мерой (в частности, счетно аддитивной на борелевских и монотонной на всех множествах), а каждое A_i, являясь компактным подмножеством метрического пространства, замкнуто и, значит, борелевское, то, используя предложение 4.1, заключаем, что

$$H^1(A) \ge H^1(\cup A_i) = \sum H^1(A_i) \ge \sum \operatorname{diam} A_i.$$

Осталось перейти к супремуму по всем конечным δ-упаковкам для A. $\square$

Предложение 4.23 (аддитивность L_δ)**.** *Для $A \subset X$ обозначим через $\{A_i\}$ семейство всех связных компонент A (это семейство может иметь любую мощность). Тогда при каждом $\delta \in (0,\infty]$ выполняется $L_\delta(A) = \sum L_\delta(A_i)$.*

Доказательство. Заметим, что каждый континуум, входящий в δ-упаковку множества A, целиком лежит в одной из компонент A_i. Пусть $\{B_k\}$ — произвольная конечная δ-упаковка A. Тогда $\{B_k\}$ распадается на конечные δ-упаковки множеств A_i (некоторые из этих упаковок могут быть пустыми). Отсюда вытекает, что $\sum \operatorname{diam} B_k \le \sum L_\delta(A_i)$. Переходя в супремуму по всем конечным δ-упаковкам множества A, заключаем, что $L_\delta(A) \le \sum L_\delta(A_i)$.

Докажем обратное неравенство, т.е. что $L_\delta(A) \ge \sum L_\delta(A_i)$. Если $L_\delta(A) = \infty$, то неравенство выполняется автоматически. Пусть теперь $L_\delta(A) < \infty$. Покажем, что в этом случае $\sum L_\delta(A_i) \le L_\delta(A)$. Предположим противное, т.е. что $\sum L_\delta(A_i) > L_\delta(A)$. По определению суммы, $\sum L_\delta(A_i)$ является точной верхней гранью сумм всех конечных поднаборов $\bigl\{L_\delta(A_{i_1}), \dots, L_\delta(A_{i_n})\bigr\}$, откуда вытекает, что существует такой поднабор, для которого

$$\sum_{p=1}^n L_\delta(A_{i_p}) > L_\delta(A).$$

Положим $\varepsilon = \sum_{p=1}^n L_\delta(A_{i_p}) - L_\delta(A)$. Так как $L_\delta(A) < \infty$ и, в силу предложения 4.21, $L_\delta(A_i) \le L_\delta(A) < \infty$, то $\varepsilon < \infty$ и $L_\delta(A) = \sum_{p=1}^n L_\delta(A_{i_p}) - \varepsilon$. Далее, для каждого A_{i_p} выберем конечную δ-упаковку $\{B_{i_p j_p}\}$ такую, что $\sum_{j_p} \operatorname{diam} B_{i_p j_p} > L_\delta(A_{i_p}) - \varepsilon/n$, тогда

$$\sum_{i_p, j_p} \operatorname{diam} B_{i_p j_p} > \sum_{p=1}^n L_\delta(A_{i_p}) - \varepsilon = L_\delta(A).$$

Но $\{B_{i_p j_p}\}_{i_p, j_p}$ является конечной δ-упаковкой A, противоречие. $\square$

Напомним определение локально компактного пространства. Существует много, причем неэквивалентных, определений в случае топологических пространств (см. [22]). Для хаусдорфова пространства эти определения эквивалентны. В случае метрических пространств, являющихся основными объектами нашего курса, можно воспользоваться шарами, что даст наиболее удобное определение для дальнейших наших целей.

Определение 4.24. Метрическое пространство называется *локально компактным*, если для каждой его точки существует компактный невырожденный шар с центром в этой точке.

Предложение 4.25. *Пусть X — произвольное локально компактное метрическое пространство, и $A \subset X$ замкнуто. Тогда A также локально компактно.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $a \in A$, и пусть $B_r(a)$ — компактный невырожденный шар в X. Тогда $B_r(a) \cap A$ также является невырожденным шаром в A, см. замечание 1.3. Так как A — замкнуто в X, то $B_r(a) \cap A$ замкнуто в $B_r(a)$. Но замкнутое подмножество компакта также компактно, поэтому $B_r(a) \cap A$ — компактный невырожденный шар в A с центром в a. $\square$

Предложение 4.26. *Пусть $A \subset X$ — связно и локально компактно. Тогда при каждом $\delta \in (0, \infty]$ выполняется*

$$H^1_\delta(A) \le L_\delta(A).$$

Доказательство. Случай пустого A очевиден, поэтому будем предполагать, что $A \ne \emptyset$.

Если $L_\delta(A) = \infty$, то неравенство имеет место. Пусть теперь $L_\delta(A) < \infty$. Так как $A \ne \emptyset$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует непустая конечная δ-упаковка $\{A_i\}$ множества A такая, что

$$\sum \operatorname{diam} A_i \ge L_\delta(A) - \varepsilon.$$

Положим $A' = A \setminus \big(\cup A_i\big)$. Если $A' = \emptyset$, то

$$H^1_\delta(A) \le \sum \operatorname{diam} A_i \le L_\delta(A).$$

Пусть теперь $A' \ne \emptyset$. Так как $\cup A_i$ — компакт, то для любой точки $x \in A'$ имеем $\big|x(\cup A_i)\big| > 0$. Так как A — локально компактно, для каждой точки $x \in A$ существует $R > 0$ такое, что для каждого $r \le R$ множество $A \cap B_r(x)$ — шар радиуса r в A — компакт. Из сказанного вытекает, что для каждой точки $x \in A'$ существует положительное $r_x < \delta/10$ такое, что множество $A \cap B_{r_x}(x)$ компактно и содержится в A'. Таким образом, мы построили покрытие множества A' шарами $B_{r_x}(x)$. Используя теорему Витали (теорема 1.7), выделим из построенного покрытия дизъюнктное семейство $\mathcal{B}' = \big\{B_j := B_{r_j}(x_j)\big\}$ такое, что $5\mathcal{B}'$ покрывает A'. Учитывая оценку $\operatorname{diam} B_j \le 2r_j < \delta/5$, заключаем, что $5\mathcal{B}' \cup \{A_i\}$ образует δ-покрытие A, поэтому

$$H^1_\delta(A) \le \sum \operatorname{diam} A_i + 5 \sum \operatorname{diam} B_j \le L_\delta(A) + 10 \sum r_j.$$

Пусть C_j — связная компонента компакта $A \cap B_j = A \cap B_{r_j}(x_j)$, содержащая x_j. Так как $B_{r_j}(x_j) \subset A'$, и $\{A_i\}$ непустое семейство, состоящее из непустых A_i (каждый континуум, по определению, не пуст), то $A' = A \setminus \cup A_i \ne A$, поэтому и $B_{r_j}(x_j) \subset A' \ne A$. Это, а также связность A, дает нам возможность применить следствие 4.15, откуда заключаем, что $\operatorname{diam} C_j \ge r_j$ при всех j.

Далее, так как $A \cap B_j$ — компакт, а связные компоненты — замкнуты, то каждое C_j является континуумом. Таким образом, мы получили, вообще говоря, не конечную, δ-упаковку $\{C_j\} \cup \{A_i\}$ множества A. Тем не менее, предложения 4.20 дает нам следующую оценку:

$$L_\delta(A) \ge \sum \operatorname{diam} A_i + \sum \operatorname{diam} C_k \ge L_\delta(A) - \varepsilon + \sum r_k,$$

из которой мгновенно вытекает неравенство $\sum r_k \le \varepsilon$. Но тогда

$$H^1_\delta(A) \le L_\delta(A) + 10 \sum r_j \le L_\delta(A) + 10\varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. $\square$

Теорема 4.27. *Пусть $A \subset X$ — локально компактно и состоит из не более чем счетного числа компонент. Тогда для каждого $\delta \in (0, \infty]$ имеем*

$$H^1(A) = L_\delta(A).$$

Доказательство. Предложение 4.22 влечет, что достаточно доказать $H^1(A) \le L_\delta(A)$.

Предположим сначала, что A связно. Тогда, из предложения 4.26 и определения функции L_δ вытекает, что для любых $0 < \delta' \le \delta$ выполняется

$$L_\delta(A) \ge L_{\delta'}(A) \ge H^1_{\delta'}(A).$$

Осталось устремить δ' к 0.

Пусть теперь A несвязно. Обозначим через A_i связные компоненты множества A. Так как каждая связная компонента замкнута, то, по предложению 4.25, каждое A_i — локально компактно, и мы можем применить ко всем A_i только что доказанное неравенство: $H^1(A_i) \le L_\delta(A_i)$. Воспользовавшись счетной субаддитивностью внешней меры H^1 (здесь нам требуется, чтобы число связных компонент множества A было не более чем счетным) и предложением 4.23, получим

$$H^1(A) \le \sum H^1(A_i) \le \sum L_\delta(A_i) = L_\delta(A),$$

доказательство закончено. □

4.4 δ-разбиения

Определение 4.28. Для $A \subset X$, $\delta \in (0, \infty]$ и борелевской внешней меры μ на X, семейство $\{A_i\}$ подмножеств A называется *δ-разбиением A по отношению к μ*, если

(1) все A_i — связные борелевские подмножества,

(2) $\operatorname{diam} A_i \le \delta$ при всех i,

(3) семейство $\{A_i\}$ является μ-почти дизъюнктным,

(4) семейство $\{A_i\}$ является μ-почти покрытием.

Замечание 4.29. В δ-разбиение могут входить и пустые множества, поэтому в тех приводимых ниже формулировках, в которых добавление к разбиению или выбрасывание из него пустых множеств не влияет на результат, условие того, что все рассматриваемые δ-разбиения — счетные, эквивалентно условию, что они не более чем счетные. Мы будем пользоваться этим, не оговаривая специально.

Предложение 4.30. *Пусть $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — некоторое δ-разбиение множества A по отношению к борелевской внешней мере μ на X. Тогда*

$$\mu(A) = \sum \mu(A_i).$$

Доказательство. Так как все A_i лежат в A, имеем $\cup A_i \subset A$ и, значит, $\cup A_i \overset{\text{п.в.}}{\subset} A$. Так как $\{A_i\}$ является μ-почти покрытием множества A, то $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} \cup A_i$, откуда $A \overset{\text{п.в.}}{=} \cup A_i$. Так как все A_i — борелевские, а мера μ — тоже борелевская, то все A_i являются μ-измеримыми; кроме того, $\{A_i\}$ — это μ-дизъюнктное семейство, поэтому, в силу следствия 1.57 и предложения 1.59, имеем

$$\mu(A) = \mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i),$$

что и требовалось. □

Предложение 4.31. *Пусть $K \subset X$ — континуум, $A \subset X$ — борелевское подмножество, содержащее H^1-почти все K, и $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — δ-разбиение A по отношению к H^1. Тогда*

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} A_i \ge \operatorname{diam} K.$$

Доказательство. Пусть $a, b \in K$ — такие точки, что $|ab| = \operatorname{diam} K$ (эти точки существуют в силу компактности K). Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — это 1-липшицева функция, равная расстоянию от точки a, то есть $f(x) = |xa|$. Так как K и каждое A_i — связны, а K — компактно, то множество $f(K)$ — отрезок, а множества $f(A_i)$ — промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи или прямые), поэтому $\operatorname{diam} f(K) = L^1\big(f(K)\big)$ и $\operatorname{diam} f(A_i) = L^1\big(f(A_i)\big)$. Так как функция f является 1-липшицевой, то $\operatorname{diam} A_i \ge \operatorname{diam} f(A_i)$, откуда

$$\sum \operatorname{diam} A_i \ge \sum \operatorname{diam} f(A_i) = \sum L^1\big(f(A_i)\big).$$

Лемма 4.32. *Семейство $\big\{f(A_i)\big\}$ является L^1-почти покрытием множества $f(K)$.*

Доказательство. Так как $K \overset{H^1\text{-п.в.}}{\subset} A \overset{H^1\text{-п.в.}}{\subset} \cup A_i$, то, в силу предложения 1.55, $K \overset{H^1\text{-п.в.}}{\subset} \cup A_i$, т.е. $\{A_i\}$ покрывает H^1-почти все K.

Так как $H^1(K\setminus\cup A_i)=0$ и отображение f является 1-липшицевым, то, по следствию 3.14, $H^1\big(f(K\setminus\cup A_i)\big)\le H^1(K\setminus\cup A_i)=0$. Из замечания 2.14 вытекает, что и $L^1\big(f(K\setminus\cup A_i)\big)=0$.

Так как для любых $U,V\subset X$ имеем $f(U)\setminus f(V)\subset f(U\setminus V)$, то

$$f(K)\setminus f(\cup A_i)\subset f(K\setminus\cup A_i),$$

поэтому из монотонности внешней меры следует, что $L^1\big(f(K)\setminus f(\cup A_i)\big)=0$, т.е. $f(K) \overset{L^1\text{-п.в.}}{\subset} f(\cup A_i)=\cup f(A_i)$. Доказательство закончено. □

Из леммы 4.32 и следствия 1.58 выводим, что

$$\operatorname{diam} f(K)=L^1\big(f(K)\big)\le\sum L^1\big(f(A_i)\big)=\sum\operatorname{diam}A_i.$$

Осталось заметить, что $f(K)$ содержит $f(a)=0$ и $f(b)=\operatorname{diam}K$, откуда $\operatorname{diam} f(K)\ge\operatorname{diam}K$. □

Теорема 4.33. *Для любого $A\subset X$, $\delta\in(0,\infty]$ и δ-разбиения $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A по отношению к H^1 выполняется*

$$H^1(A)\ge\sum_{i=1}^\infty\operatorname{diam}A_i.$$

Если A — локально компактно и имеет конечное или счетное число связных компонент, то для любого $m<H^1(A)$ существует $\delta_0>0$ такое, что для всех $0<\delta\le\delta_0$ выполняется

$$\sum_{i=1}^\infty\operatorname{diam}A_i\ge m.$$

Доказательство. Доказательство первого неравенства мгновенно вытекает из предложений 4.30 и 4.1.

Докажем теперь второе неравенство. По теореме 4.27, имеем $H^1(A)=L_\delta(A)$. По определению функции L_δ, существует конечная δ-упаковка $\{B_j\}_{j=1}^k$ такая, что

$$L_\delta(A)\ge\sum_{j=1}^k\operatorname{diam}B_j\ge m.$$

Напомним, что $\{B_j\}$ — дизъюнктное семейство континуумов, диаметры которых не превосходят δ. Отсюда вытекает, что для каждых $p\ne q$ выполняется $|B_pB_q|>0$. Выберем δ_0 меньшим самого маленького из расстояний $|B_pB_q|$ между различными B_p и B_q.

Обозначим через I_j, $j=1,\dots,k$, множество всех i, для которых $A_i\cap B_j\ne\emptyset$. Так как $\operatorname{diam}A_i$ меньше расстояний между B_p и B_q при $p\ne q$, то $I_p\cap I_q=\emptyset$. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^\infty\operatorname{diam}A_i\ge\sum_{j=1}^k\sum_{i\in I_j}\operatorname{diam}A_i.$$

Применим предложение 4.31, в котором в качестве «K» возьмем континуум B_j, в качестве «A» — борелевское множество $\cup_{i\in I_j}A_i$, и в качестве «$\{A_i\}$» — семейство $\{A_i\}_{i\in I_j}$, см. замечание 4.29. Проверим выполнение условий этого предложения.

Требование «$K\overset{\text{п.в.}}{\subset}A$» — это $B_j\overset{\text{п.в.}}{\subset}\cup_{i\in I_j}A_i$. Оно имеет место, так как $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ покрывает H^1-почти все A и, значит, каждое B_j, а $\{A_i\}_{i\in I_j}$ — это семейство ровно тех A_i, которые пересекают B_j.

Второе требование «$\{A_i\}$ — δ-разбиение A» означает, что $\{A_i\}_{i\in I_j}$ является δ-разбиением $\cup_{i\in I_j}A_i$ (по отношению к H^1). Проверим это. То, что A_i — связные борелевские множества диаметра не превосходящего δ, и что $\{A_i\}_{i\in I_j}$ является H^1-почти дизъюнктным семейством вытекает из того, что $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ является δ-разбиением всего A. То, что $\{A_i\}_{i\in I_j}$ покрывает H^1-почти все $\cup_{i\in I_j}A_i$ — очевидно.

Таким образом, применяя предложение 4.31, заключаем $\sum_{i\in I_j} \operatorname{diam} A_i \ge \operatorname{diam} B_j$, откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} A_i \ge \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in I_j} \operatorname{diam} A_i \ge \sum_{j=1}^{k} \operatorname{diam} B_j \ge m,$$

что и требовалось. □

4.5 δ-цепи и δ-связные метрические пространства

В данном разделе X обозначает метрическое пространство, если не оговорено противное.

Последовательность $L = (x_0, \dots, x_n)$ точек пространства X будем называть *ломаной в X, соединяющей x_0 и x_n*. Точки x_i назовем *вершинами ломаной* L, вершины x_{i-1} и x_i назовем *последовательными*, вершины x_0 и x_n — *концевыми* или *концами ломаной* L, пары $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$, часто обозначаемые также через $x_{i-1}x_i$ или x_ix_{i-1}, — *ребрами* L, число $|e_i| := |x_{i-1}x_i|$ — *длиной ребра* e_i, а величину

$$|L| = \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}x_i|,$$

равную сумме длин всех ребер ломаной L, — *длиной ломаной* L. Если все ребра ломаной L не длиннее некоторого $\delta \in (0, \infty)$, то такую ломаную назовем *δ-цепью*.

Подмножество $A \subset X$ называется *δ-связным*, если любые две точки из A соединяются некоторой δ-цепью в A.

Предложение 4.34. *Пусть A — связное подмножество X, тогда A является δ-связным для любого $\delta \in (0, \infty)$.*

Доказательство. Выберем произвольное $x \in A$, и пусть A_x обозначает множество всех $a \in A$, которые можно соединить с x некоторой δ-цепью. Тогда A_x является непустым открыто-замкнутым подмножеством A. Действительно, $A \ne \emptyset$, так как $x \in A_x$. Далее, для каждого $a \in A_x$ все точки из $U_\delta(a)$ также соединяются с x некоторой δ-цепью (достаточно продолжить δ-цепь, соединяющую x и a), поэтому $U_\delta(a) \subset A_x$ и, значит, A_x — открыто. Наконец, если b — точка прикосновения множества A_x, то существует $a \in A_x \cap U_\delta(b)$, поэтому x и b также соединяются δ-цепью, так что $b \in A_x$ и, значит, A_x — замкнуто. В силу связности A, имеем $A_x = A$, так что A является δ-связным. □

Замечание 4.35. Из δ-связности для любого $\delta \in (0, \infty)$ не вытекает связность. Стандартный пример — множество всех рациональных чисел на прямой.

Предложение 4.36. *Пусть K — компактное подмножество X, состоящее не более чем из $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ связных компонент. Предположим, что для некоторого $\delta \in (0, \infty)$ компакт K содержит δ-связное подмножество A. Тогда*

$$H^1(K) \ge \operatorname{diam} A - (m-1)\delta.$$

Доказательство. При $m = \infty$ неравенство выполняется автоматически, так как диаметр компакта всегда конечен и, значит, $\operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} K < \infty$. Кроме того, если $A = \emptyset$, то неравенство также имеет место. Таким образом, остается рассмотреть случай $m < \infty$ и $A \ne \emptyset$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $x_0, x_1 \in A$ такие, что

$$\ell := |x_0x_1| \ge \operatorname{diam} A - \varepsilon.$$

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ обозначает 1-липшицеву функцию расстояния до точки x_0, а именно, $f(x) = |xx_0|$. Положим $S = f(K)$, тогда S представляет собой объединение m отрезков, каждый из которых — образ соответствующей связной компоненты K. Эти отрезки разделяются не более чем $(m-1)$-им интервалом, которые мы обозначим через I_k.

Так как $f(0) = 0$ и $f(x_1) = \ell$ лежат в S, то открытое множество $(0, \ell) \setminus S$ разбивается на интервалы, каждый из которых содержится в одном из I_k (возможно, совпадает с ним), причем каждый I_k содержит не более одного из этих интервалов. Таким образом, $(0, \ell) \setminus S$ состоит не более чем из $(m-1)$-ого интервала.

Так как функция f является 1-липшицевой, то $f(A)$ также δ-связно, поэтому в $f(A)$ и, значит, в $f(K)=S$ существует δ-цепь, соединяющая $f(x_0)=0$ и $f(x_1)=\ell$. Отсюда вытекает, что длина каждого интервала, из которых состоит $(0,\ell)\setminus S$, не превосходит δ, поэтому $L^1\big[(0,\ell)\setminus S\big]\le(m-1)\delta$.

Так как $[0,\ell]\subset S\cup\big[(0,\ell)\setminus S\big]$, то, в силу монотонности внешней меры, имеем

$$\ell=L^1\big([0,\ell]\big)\le L^1(S)+L^1\big[(0,\ell)\setminus S\big],$$

откуда

$$L^1(S)\ge\ell-L^1\big[(0,\ell)\setminus S\big]\ge\ell-(m-1)\delta.$$

Из следствия 3.14, примера 2.14 и предыдущих оценок заключаем, что

$$H^1(K)\ge H^1(S)=L^1(S)\ge\ell-(m-1)\delta\ge\operatorname{diam}A-\varepsilon-(m-1)\delta.$$

Осталось устремить ε к нулю. $\square$

Замечание 4.37. Если компакт K связен, то из предложения 4.36 следует оценка из предложения 4.1, так как $m=1$, а, в силу предложения 4.34, компакт K является δ-связным для любого $\delta>0$, и его можно выбрать в качестве A.

В приводимом ниже предложении нам понадобится явно указывать, относительно какого подмножества рассматривается окрестность точки и граница подмножества.

Обозначение 4.38. Пусть X — топологическое пространство, и $Z\subset Y\subset X$. Тогда через $\partial_Y Z$ и $\partial_X Z$ будем обозначать границу Z относительно Y в первом случае и относительно X во втором; при этом, $\partial Z=\partial_X Z$.

Пусть $x\in Y$, тогда через $U^Y(x)$ и $U^X(x)$ обозначим окрестности точки x в индуцированной на Y топологии в первом случае, и в топологии X — во втором; при этом, $U(x)=U^X(x)$.

Кроме того, ниже, для краткости изложения, нам понадобится доопределить расстояние $|AB|$ между подмножествами метрического пространства X, одно их которых может быть пустым.

Соглашение 4.39. Для метрического пространства X и произвольного непустого $A\subset X$ положим $|A\emptyset|=|\emptyset A|=\infty$ (что, впрочем, вытекает из соглашения $\inf\emptyset=\infty$).

Теорема 4.40. *Пусть K — компактное подмножество метрического пространства X, состоящее не более чем из $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ связных компонент. Предположим, что для некоторого $\delta\in(0,\infty)$ компакт K содержит δ-связное подмножество A, которое, в свою очередь, содержится в замкнутом подмножестве F пространства X таком, что для некоторого $r\in(0,\infty)$ выполняется*

$$|A\,\partial F|\ge r$$

(при этом, граница ∂F может быть пустой, и в этом случае $r\in(0,\infty)$ можно выбрать любым в силу соглашения 4.39). Тогда

$$H^1(K\cap F)\ge\Big(1-\frac{\delta}{r}\Big)\operatorname{diam}A-(m-1)\delta.$$

Доказательство. Случай, когда или $H^1(K\cap F)=\infty$, или $m=\infty$, или $A=\emptyset$ тривиален, поэтому сразу предположим, что первые две величины конечны и $A\ne\emptyset$, в частности, $K\cap F\ne\emptyset$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ семейство всех тех связных компонент множества $K\cap F$, которые пересекают A, и пусть N — количество элементов в $\mathcal{M}$ (величина N может равняться ∞). Разобьем это семейство на два подмножества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$: к первому отнесем все те компоненты, которые не пересекают $\partial_X F$, а ко второму — которые пересекают $\partial_X F$.

Пусть N_1 и N_2 — количества элементов множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно (если $\partial_X F=\emptyset$, то $N_2=0$). Числа N_1 и N_2 мы оценим с помощью теоремы 4.12, в которой в качестве «X» выберем наш компакт K, в качестве «K» — компакт $K\cap F$, а в качестве «C» — связную компоненту компакта $K\cap F$, лежащую в $\mathcal{M}_1$ (эту компоненту мы также обозначим через C).

Однако, в теореме 4.12 требуется, чтобы компонента C не пересекала другую границу, а именно, $\partial_K(K\cap F)$ (мы же потребовали, чтобы C не пересекала $\partial_X F$).

Лемма 4.41. *В сделанных обозначениях, $\partial_K(K\cap F)\subset\partial_X F$, поэтому условие $C\cap\partial_X F=\emptyset$ влечет $C\cap\partial_K(K\cap F)=\emptyset$.*

Доказательство. Пусть $x \in \partial_K(K \cap F)$, тогда любая окрестность $U^K(x)$ точки x пересекает и $K \cap F$, и $K \setminus (K \cap F) = K \setminus F$. Так как семейства всех окрестностей $U^K(x)$ и всех множеств $U^X(x) \cap K$ совпадают, то из сказанного выше вытекает, что каждая окрестность $U^X(x)$ точки x пересекает и $K \cap F$, и $K \setminus (K \cap F) = K \setminus F$. Первое условие дает $U^X(x) \cap F \ne \emptyset$, а второе гарантирует, что $U^X(x) \cap (X \setminus F) \ne \emptyset$, поэтому $x \in \partial_X F$. $\square$

Итак, мы обосновали применимость теоремы 4.12 и, значит, C является связной компонентой K. Отсюда вытекает, что $N_1 \le m$ и $N_2 \ge N - m$.

Далее, каждое $C \in \mathcal{M}$ является также связным подмножеством X, поэтому, в силу предложения 4.1, имеем $H^1(C) \ge \operatorname{diam} C$. С другой стороны, если $C \in \mathcal{M}_2$, то $\partial F \ne \emptyset$, и условие $|A\,\partial F| \ge r$ влечет $\operatorname{diam} C \ge r$.

Заметим, что семейство $\mathcal{M}$ дизъюнктно, а его элементы, являясь связными компонентами компакта $K \cap F$, замкнуты в $K \cap F$, и, значит, компактны. Тем самым, элементы из $\mathcal{M}$ являются борелевскими подмножествами X. По пункту (2) предложения 2.11, внешняя мера H^1 — борелевская. Все только что сказанное, вместе с неравенством $\operatorname{diam} C \ge r$ для каждого $C \in \mathcal{M}_2$, влечет конечность множества $\mathcal{M}_2$. Действительно, если $\mathcal{M}_2$ — бесконечно, то в нем существует счетное подсемейство $\{C_i\}_{i=1}^\infty$, для которого, в силу пункта (1) теоремы 1.23, выполняется

$$H^1(K \cap F) \ge H^1\Big(\bigsqcup_{i=1}^\infty C_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty H^1(C_i) \ge \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} C_i = \infty,$$

а это противоречит условию $H^1(K \cap F) < \infty$. Тем самым, $\mathcal{M}_2$ — конечное множество, откуда, снова пользуясь пунктом (1) теоремы 1.23, заключаем, что

$$H^1(K \cap F) \ge \sum_{C \in \mathcal{M}_2} \operatorname{diam} C \ge (N - m)r, \tag{4.2}$$

в частности, $N < \infty$, т.е. и все семейство $\mathcal{M}$ — конечно. Последнее влечет компактность множества $K' := \cup_{C \in \mathcal{M}} C$, а это, вместе с очевидным включением $A \subset K'$, дает возможность применить предложение 4.36, в котором в качестве «K» выступает наше K', а в качестве «A» — наше A. Тем самым, мы получаем

$$H^1(K \cap F) \ge H^1(K') \ge \operatorname{diam} A - (N - 1)\delta. \tag{4.3}$$

В заключение, рассмотрим альтернативу: или $(N - m)r$ больше или равно $\operatorname{diam} A$, или меньше. В первом случае доказываемое неравенство выполнено, так как его правая часть меньше $\operatorname{diam} A$, и имеет место неравенство (4.2).

Во втором случае условие $(N - m)r < \operatorname{diam} A$ дает оценку на N:

$$N - 1 < m - 1 + \frac{1}{r} \operatorname{diam} A,$$

которую мы подставим в неравенство (4.3) и получим в точности то, что требуется. $\square$

Тема 5

Теорема Голомба и существование кратчайших сетей.

В этом разделе мы приведем доказательство обобщения знаменитой теоремы Голомба (Gołąb), см. [16], которое взято из [17]. Менее элементарные версии доказательства этого результата можно найти в [7], где имеется неточность, и в [18], где неточность исправлена.

5.1 Теорема Голомба

Теорема 5.1 (Gołąb). *Пусть X — произвольное метрическое пространство, $m \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{F}_m$ — семейство всех непустых компактных подмножеств X, каждое из которых имеет не более чем m связных компонент. Превратим $\mathcal{F}_m$ в метрическое пространство, наделив его метрикой Хаусдорфа. Тогда функция $H^1\colon \mathcal{F}_m \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной снизу, т.е. для любой последовательности K_n элементов из $\mathcal{F}_m$, сходящейся в некоторому $K \in \mathcal{F}_m$, выполняется*

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge H^1(K).$$

Доказательство. Из теоремы 4.27 вытекает, что для доказательство достаточно проверить следующее условие: для любого конечного дизъюнктного семейства $\{C_i\}_{i=1}^p$ континуумов $C_i \subset K$ выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge \sum_{i=1}^p \operatorname{diam} C_i.$$

Рассмотрим два случая.

(1) Пусть сначала $p = 1$. Положим $C = C_1$. Мы должны показать, что

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge \operatorname{diam} C.$$

Так как множество C компактно, то существуют $x, x' \in C$ такие, что $\operatorname{diam} C = |xx'|$. Так как множество C связно, оно, в силу предложения 4.34, является и δ-связным для любого $\delta \in (0,\infty)$ и, значит, существует δ-цепь $C' := (x_0 = x, x_1, \ldots, x_s = x') \subset C$.

Пусть N выбрано так, что для любого $n \ge N$ выполняется $d_H(K_n, K) < \delta$. Тогда, в силу определения расстояния Хаусдорфа, $C \subset K \subset U_\delta(K_n)$, поэтому для каждой точки x_j найдется точка $y_j \in K_n$ такая, что $|x_j y_j| < \delta$. Положим $K_n' = (y_0, \ldots, y_s)$. Тогда K_n' является (3δ)-цепью в K_n, причем $\operatorname{diam} K_n' \ge |y_0 y_s| > |xx'| - 2\delta = \operatorname{diam} C - 2\delta$.

Применим теперь теорему 4.40, в которой «K», «A», «F» и «δ» заменены нашими K_n, K_n', X и 3δ соответственно, а «r» выбрано любым (это можно сделать в силу того, что $\partial X = \emptyset$, поэтому $|K_n'\,\partial X| = \infty$ и неравенство $|K_n'\,\partial X| \ge r$ выполняется для любого r). Получим

$$H^1(K_n) = H^1(K_n \cap X) \ge \Bigl(1 - \frac{3\delta}{r}\Bigr) \operatorname{diam} K_n' - 3\delta(m-1) \ge \Bigl(1 - \frac{3\delta}{r}\Bigr)(\operatorname{diam} C - 2\delta) - 3\delta(m-1).$$

Чтобы завершить доказательство в этом случае, перейдем сначала к $\liminf$ при $n \to \infty$, а затем устремим δ к 0.

(2) Пусть теперь $p > 1$. Так как компакты C_i попарно не пересекаются и их конечное число, то $R := \min\bigl\{|C_iC_j| : i \ne j\bigr\} > 0$. Выберем произвольное $0 < r < R/2$, тогда $F_i := B_r(C_i)$ — замкнутые подмножества X, образующие дизъюнктное семейство $\{F_i\}$.

Напомним нужные нам свойства нижнего предела.

Лемма 5.2. *Пусть a_n и b_n — произвольные числовые последовательности. Тогда*

(1) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$, *если правая часть неравенства определена*;

(2) *если $a_n \le b_n$ при всех n, то справедливо неравенство* $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$.

Так как $\{K_n \cap F_i\}_{i=1}^p$ — дизъюнктное семейство борелевских подмножеств X, а внешняя мера H^1 — борелевская, имеем

$$H^1(K_n) \ge H^1\Bigl(\bigcup_{i=1}^p (K_n \cap F_i)\Bigr) = \sum_{i=1}^p H^1(K_n \cap F_i).$$

Из леммы 5.2 вытекает, что

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^p H^1(K_n \cap F_i) \ge \sum_{i=1}^p \liminf_{n\to\infty} H^1(K_n \cap F_i),$$

поэтому для завершения доказательства в этом случае достаточно показать, что

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n \cap F_i) \ge \operatorname{diam} C_i.$$

Именно это мы сейчас и сделаем.

Фиксируем некоторое i и произвольное $\delta \in (0, r)$. Выберем точки $x, x' \in C_i$ так, чтобы $|xx'| = \operatorname{diam} C_i$. Как мы уже отвечали, в силу предложения 4.34 множество C_i является δ-связным, поэтому существует δ-цепь $C_i' := (x_0 = x, x_1, \ldots, x_s = x') \subset C_i$.

Пусть снова N выбрано так, что для любого $n \ge N$ выполняется $d_H(K_n, K) < \delta$, а $K_n' := (y_0, \ldots, y_s) \subset K_n$ — это (3δ)-цепь такая, что $|x_jy_j| < \delta$ при всех $j = 0, \ldots, s$. Как и выше, $\operatorname{diam} K_n' > \operatorname{diam} C_i - 2\delta$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, а Y и Z — непустые подмножества X. Тогда*

(1) *если $Z \subset Y$, то $|Z\,\partial Y| \ge \bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr|$;*

(2) *если $d_H(Y, Z) < \delta$ для некоторого $\delta \in (0, \infty)$, то для любого $A \subset X$ имеем $|YA| \ge |ZA| - \delta$;*

(3) *если $Z \subset Y$, то для любого $A \subset X$ имеем $|ZA| \ge |YA|$;*

(4) *если Z — непустое подмножество X, $r \in (0, \infty)$ и $Y = B_r(Z)$, то $\bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr| \ge r$.*

Доказательство. (1) Пусть сначала $\partial Y = \emptyset$ (например, $Y = X$), тогда, в силу соглашения 4.39, получаем $|Z\,\partial Y| = \infty$, и неравенство выполняется при любой правой части.

Пусть теперь $\partial Y \ne \emptyset$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существуют такие $z \in Z$ и $y \in \partial Y$, что $|zy| < |Z\,\partial Y| + \varepsilon$. Так как $y \in \partial Y$, множество $U_\varepsilon(y) \cap (X \setminus Y)$ непусто, то существует $x \in X \setminus Y$ такой, что $|yx| < \varepsilon$. Но тогда

$$\bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr| \le |zx| \le |zy| + |yx| < |Z\,\partial Y| + 2\varepsilon.$$

Осталось устремить ε к 0.

(2) Выберем произвольные $y \in Y$ и $a \in A$. Так как $d_H(Y, Z) < \delta$, то $Y \subset U_\delta(Z)$, поэтому существует $z \in Z$ такое, что $|zy| < \delta$. Но тогда $|ya| \ge |za| - |zy| > |za| - \delta$. Так как y и a произвольны, имеем $|YA| \ge |zA| - \delta \ge |ZA| - \delta$.

(3) Это следует из того, что при вычислении величины $|ZA|$ мы берем инфимум по множеству, содержащемуся во множестве, по которому берется инфимум, равный $|YA|$.

(4) Если $Y = X$, то, в силу соглашения 4.39, имеем $\bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr| = \infty$, так что неравенство имеет место.

Пусть теперь $Y \ne X$. Тогда для каждых $z \in Z$ и $x \in X \setminus Y$ выполняется $|xz| > r$, так как в противном случае $x \in B_r(Z) = Y$. □

Далее, замечая, что $d_H(K'_n, C'_i) < \delta$ и применяя лемму 5.3, получим

$$|K'_n\,\partial F_i| \ge \bigl|K'_n\,(X \setminus F_i)\bigr| \ge \bigl|C'_i\,(X \setminus F_i)\bigr| - \delta \ge \bigl|C_i\,(X \setminus F_i)\bigr| - \delta \ge r - \delta.$$

Заметим также, что $K'_n \subset F_i$. Действительно, так как для каждой точки $y_j \in K'_n$ и точки $x_j \in C'_i \subset C_i$ выполняется $|y_j x_j| < \delta < r$, то $y_j \in B_r(C_i) = F_i$.

Последнее замечание позволяет применить теорему 4.40, в которой «K», «A», «F», «δ» и «r» заменены на K_n, K'_n, F_i, 3δ и $r - \delta$ соответственно. Имеем

$$H^1(K_n \cap F_i) \ge \Bigl(1 - \frac{3\delta}{r-\delta}\Bigr)\operatorname{diam} K'_n - 3\delta(m-1) \ge \Bigl(1 - \frac{3\delta}{r-\delta}\Bigr)(\operatorname{diam} C_i - 2\delta) - 3\delta(m-1).$$

Чтобы получить требуемое, перейдем сначала к $\liminf$ при $n \to \infty$, а затем устремим δ к 0. □

5.2 Теорема существования кратчайших сетей

Пусть X — метрическое пространство, и $M \subset X$ — замкнутое и непустое. Обозначим через $\mathcal{C}(M)$ множество всех замкнутых связных подмножеств X, содержащих M.

Положим

$$\operatorname{sn}(M) = \inf\{H^1(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{C}(M)\}.$$

Каждое $\Gamma \in \mathcal{C}(M)$, для которого $H^1(\Gamma) = \operatorname{sn}(M)$, будем называть *кратчайшей сетью, соединяющей M* или *на M*. Множество всех кратчайших сетей на M обозначим через $\mathrm{SN}(M)$. Отметим, что $\mathrm{SN}(M)$ может быть пустым.

Метрическое пространство, напомним, называется *ограниченно компактным*, если все его замкнутые ограниченные подмножества компактны. Эквивалентное условие: все замкнутые шары конечного радиуса компактны (при этом можно рассматривать не все шары, а лишь шары с некоторым фиксированным центром).

Теорема 5.4. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство и $M \subset X$ — замкнутое и непустое. Если $\operatorname{sn}(M) < \infty$, то $\mathrm{SN}(M) \ne \emptyset$ и каждая кратчайшая сеть $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ является континуумом.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_n \in \mathcal{C}(M)$, $n \in \mathbb{N}$, — минимизирующая последовательность, т.е. $H^1(\Gamma_n) \to \operatorname{sn}(M) < \infty$. Без ограничения общности, будем считать, что $H^1(\Gamma_n) \le \operatorname{sn}(M) + 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Сведем доказательство к случаю компактного пространства X. Для этого выберем произвольное $x \in M$ и положим $r_n = (\operatorname{diam}\Gamma_n)/4$. Если $r_n = 0$, то $\Gamma_n = \{x\}$; если же $r_n > 0$, то $r_n < (\operatorname{diam}\Gamma_n)/2$ и, по следствию 4.3,

$$\operatorname{sn}(M) + 1 \ge H^1\bigl(\Gamma_n \cap B_{r_n}(x)\bigr) \ge r_n = \frac{\operatorname{diam}\Gamma_n}{4},$$

поэтому $\operatorname{diam}\Gamma_n \le 4\bigl(\operatorname{sn}(M)+1\bigr)$, так что все Γ_n лежат в шаре $B_r(x)$ радиуса $r = 4\bigl(\operatorname{sn}(M)+1\bigr)$. В силу того, что X — ограниченно компактное, этот шар — компакт. Таким образом, мы будем сразу, не ограничивая общности, предполагать, что X — компакт.

Из пункта (3) теоремы 3.19 вытекает, что некоторая подпоследовательность последовательности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ сходится по Хаусдорфу к непустому компактному $\Gamma \subset X$. Без ограничения общности, сразу будем считать, что $\Gamma_n \xrightarrow{\mathrm{H}} \Gamma$.

Лемма 5.5. *В сделанных предположениях, $M \subset \Gamma$.*

Доказательство. Если это не так, то существует $x \in M \setminus \Gamma$. Так как Γ — компакт, то $d := |x\Gamma| > 0$. Так как $\Gamma_n \xrightarrow{\mathrm{H}} \Gamma$, существует N такой, что для любого $n \ge N$ выполняется $d_H(\Gamma_n, \Gamma) < d/2$, поэтому для этих n имеем $x \in M \subset \Gamma_n \subset U_{d/2}(\Gamma)$. Однако, $x \notin U_{d/2}(\Gamma)$ в силу $|x\Gamma| = d$, противоречие. □

Лемма 5.6. *В сделанных предположениях, Γ — связно.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть Γ' и Γ'' — непустые замкнутые подмножества Γ такие, что $\Gamma = \Gamma' \sqcup \Gamma''$. Так как Γ — компакт, что Γ' и Γ'' — тоже компакты, поэтому $d := |\Gamma'\Gamma''| > 0$, так что $U_{d/4}(\Gamma) = U_{d/4}(\Gamma') \sqcup U_{d/4}(\Gamma'')$.

Так как $\Gamma_n \xrightarrow{\mathrm{H}} \Gamma$, существует N такой, что для любого $n > N$ выполняется $d_H(\Gamma_n, \Gamma) < d/4$, поэтому для таких n имеем $\Gamma_n \subset U_{d/4}(\Gamma)$ и $\Gamma \subset U_{d/4}(\Gamma_n)$.

Так как Γ_n связно, то Γ_n целиком лежит или в $U_{d/4}(\Gamma')$, или в $U_{d/4}(\Gamma'')$. Без ограничения общности, предположим, что $\Gamma_n \subset U_{d/4}(\Gamma')$, но тогда, в силу пункта (6) упражнения 1.6, выполняется $|\Gamma_n\Gamma''| \ge 3d/4$, поэтому $\Gamma'' \not\subset U_{3d/4}(\Gamma_n)$, а, значит, $\Gamma \not\subset U_{3d/4}(\Gamma_n)$ и $d_H(\Gamma_n, \Gamma) \ge 3d/4$, противоречие. □

Из лемм 5.5 и 5.6 вытекает, что $\Gamma \in \mathcal{C}(M)$. По теореме Голомба (теорема 5.1), имеем

$$\mathrm{sn}(M) = \lim_{n\to\infty} H^1(\Gamma_n) = \liminf_{n\to\infty} H^1(\Gamma_n) \geq H^1(\Gamma),$$

поэтому $H^1(\Gamma) = \mathrm{sn}(M)$ и, значит, $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$, так что $\mathrm{SN}(M)$ непусто. Компактность каждой кратчайшей сети $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ следует из того, что такие Γ — замкнутые подмножества компакта X. $\square$

Следующий шаг состоит в изучении геометрии кратчайших сетей, чему посвящены дальнейшие лекции.

Тема 6

Кривые.

Пусть X — метрическое пространство. Каждое непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b]\to X$ будем называть *кривой в X*. Точки $A=\gamma(a)$ и $B=\gamma(b)$ называются *концами* или *концевыми точками кривой* γ. Также говорят, что γ *соединяет A и B*. Если $A=B$, то кривая γ называется *замкнутой* или *петлей*, а если $A\neq B$ — то *незамкнутой*. Незамкнутая кривая γ *инъективна*, если таким является отображение γ. Замкнутая кривая γ *инъективна*, если инъективность отображения γ нарушается только на паре точек $\{a,b\}$.

6.1 Длина кривой

Пусть $\gamma\colon [a,b]\to X$ — произвольная (непрерывная) кривая. Для каждого разбиения $\xi=(a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b)$ отрезка $[a,b]$ рассмотрим соответствующую ему ломаную $L_\gamma(\xi)=\big(\gamma(t_0),\ldots,\gamma(t_m)\big)$ (такие ломаные будем называть *вписанными в кривую* γ), тогда величина

$$|\gamma|=\sup\Big\{\big|L_\gamma(\xi)\big| : \xi \text{ — разбиение отрезка } [a,b]\Big\}$$

называется *длиной кривой* γ. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $|\gamma|<\infty$.

Каждый гомеоморфизм $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$ (фактически, биективное строго монотонное отображение) будем называть называть *заменой параметра* или *перепараметризацией* кривой γ. Замена параметра φ *сохраняет ориентацию*, если функция φ — монотонно возрастающая. Будем говорить, что кривая $\bar\gamma=\gamma\circ\varphi$ *получается из γ заменой параметра.* Иногда, поступая неформально, кривую γ будем записывать как $\gamma(t)$, $t\in[a,b]$, а вместо кривой $\bar\gamma$ с параметром $s=\varphi^{-1}(t)$ будем писать $\gamma(s)$.

Замечание 6.1. Очевидно, длина кривой не меняется при замене параметра, в частности, свойство кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от выбора параметризации.

Приведем примеры спрямляемых кривых.

Пример 6.2. Каждая C-липшицева кривая $\gamma\colon [a,b]\to X$ спрямляемая, так как для любого разбиение ξ отрезка $[a,b]$ имеем $|L_\gamma(\xi)|\le C(b-a)$ и, значит, $|\gamma|\le C(b-a)<\infty$.

Пример 6.3. Любая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема, так как является липшицевой (с константой Липшица, равной максимуму модуля вектора скорости кривой).

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

Предложение 6.4 (Обобщенное неравенство треугольника)**.** *Пусть точки A, $B\in X$ соединяются некоторой кривой γ, тогда $|\gamma|\ge|AB|$.*

Так как образ отрезка — связное множество, из предложения 4.1 получаем следующий результат.

Следствие 6.5. *Пусть γ — кривая в метрическом пространстве X, соединяющая точки A и B, и пусть Γ — образ кривой γ. Тогда $|AB|\le H^1(\Gamma)$.*

Обозначим через $\Omega(X)$ семейство всех (непрерывных) кривых в метрическом пространстве X.

Определение 6.6. Отображение $\Psi\colon \Omega(X)\to\mathbb{R}\sqcup\{\infty\}$ называется *функционалом*. Обозначим через $\mathcal{L}\colon \Omega(X)\to\mathbb{R}\sqcup\{\infty\}$ функционал, определенный правилом $\mathcal{L}\colon \gamma\mapsto|\gamma|$, и назовем его *функционалом длины*.

Отметим, что на $\Omega(X)$ определены

(1) *ограничение* каждой кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$ на каждый подотрезок $[c,d]\subset[a,b]$ (это ограничение будем обозначать через $\gamma|_{[c,d]}$);

(2) *склейка* $\gamma_1\cdot\gamma_2$ тех пар кривых $\gamma_1\colon [a,b]\to X$, $\gamma_2\colon [b,c]\to X$, для которых $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$, а именно, $(\gamma_1\cdot\gamma_2)\colon [a,c]\to X$ — кривая, ограничения которой на $[a,b]$ и $[b,c]$ совпадают соответственно с γ_1 и γ_2;

(3) *замена параметра*;

(4) *эквивалентность*, отождествляющая кривые, отличающиеся на замену параметризации.

Следующий результат описывает свойства функционала длины.

Теорема 6.7. *Пусть $\mathcal{L}\colon \Omega(X)\to\mathbb{R}\sqcup\{\infty\}$ — функционал длины, определенный на кривых метрического пространства X. Тогда $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами*:

(1) **аддитивность:** *если $\gamma=\gamma_1\cdot\gamma_2$ — склейка кривых $\gamma_1,\gamma_2\in\Omega(X)$, то $\mathcal{L}(\gamma)=\mathcal{L}(\gamma_1)+\mathcal{L}(\gamma_2)$*;

(2) **непрерывность:** *для произвольной спрямляемой кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$ функция $f(t)=\mathcal{L}\big(\gamma|_{[a,t]}\big)$ непрерывна*;

(3) **независимость от параметра:** *для каждой кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$ и замены параметра $\psi\colon [c,d]\to[a,b]$ выполняется $\mathcal{L}(\gamma)=\mathcal{L}(\gamma\circ\psi)$*;

(4) **согласованность с топологией:** *для каждого $x\in X$, $\varepsilon>0$, $y\in X\setminus U_\varepsilon(x)$ и кривой $\gamma\in\Omega(X)$, соединяющей x и y, выполняется $\mathcal{L}(\gamma)\ge\varepsilon$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь пункт (2), докажем его. Выберем произвольное $t\in[a,b]$ и покажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, для которого при всех $s\in[a,b]\cap(t-\delta,t+\delta)$ выполняется $\big|f(t)-f(s)\big|<\varepsilon$. Положим $\ell=|\gamma|$. По определению, существует разбиение ξ отрезка $[a,b]$ такое, что $\ell-\varepsilon/2<\big|L_\gamma(\xi)\big|\le\ell$. Если $t\notin\xi$, добавим его к ξ (полученное разбиение обозначим той же буквой). Ясно, что для полученного разбиения по-прежнему выполняется $\ell-\varepsilon/2<\big|L_\gamma(\xi)\big|\le\ell$.

В качестве δ_1 возьмем расстояние от t до ближайшего отличного от t элемента разбиения ξ. Так как подразбиениями разбиения ξ мы можем менять длину ломаной $L_\gamma(\xi)$ лишь в пределах $(\ell-\varepsilon/2,\ell]$, то для каждого $s\in[a,b]\cap(t-\delta_1,t+\delta_1)$ длина $\ell_{ts}=\big|f(t)-f(s)\big|$ фрагмента кривой γ между точками $\gamma(t)$ и $\gamma(s)$ отличается от $\big|\gamma(t)\gamma(s)\big|$ менее чем на $\varepsilon/2$. С другой стороны, в силу непрерывности отображения γ, существует такое $\delta_2>0$, что при всех $s\in[a,b]\cap(t-\delta_2,t+\delta_2)$ имеем $\big|\gamma(t)\gamma(s)\big|<\varepsilon/2$. Осталось положить $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. □

Нам будет полезно еще одно важное свойство функционала длины $\mathcal{L}$.

Предложение 6.8 (Полунепрерывность снизу)**.** *Функционал $\mathcal{L}$ полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности $\gamma_n\colon [a,b]\to X$ спрямляемых кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой кривой γ, имеем*

$$\mathcal{L}(\gamma)\le\liminf_{n\to\infty}\mathcal{L}(\gamma_n).$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon>0$ и покажем, что при достаточно больших n выполняется $\mathcal{L}(\gamma)\le\mathcal{L}(\gamma_n)+\varepsilon$, а раз так, то $\mathcal{L}(\gamma)\le\liminf_{n\to\infty}\mathcal{L}(\gamma_n)+\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получим требуемое.

Итак, пусть фиксировано $\varepsilon>0$. Выберем такое разбиение $\xi=(a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b)$ отрезка $[a,b]$, что $\mathcal{L}(\gamma)-\big|L_\gamma(\xi)\big|<\varepsilon/2$. Существует N такое, что для любого $n>N$ и всех i выполняется $\big|\gamma(t_i)\gamma_n(t_i)\big|<\dfrac{\varepsilon}{4m}$. Отсюда мгновенно вытекает, что

$$\big|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\big|<\big|\gamma_n(t_{i-1})\gamma_n(t_i)\big|+\frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому $\big|L_\gamma(\xi)\big|<\big|L_{\gamma_n}(\xi)\big|+\varepsilon/2$. Таким образом,

$$\mathcal{L}(\gamma)<\big|L_\gamma(\xi)\big|+\varepsilon/2<|L_{\gamma_n}(\xi)|+\varepsilon/2+\varepsilon/2\le\mathcal{L}(\gamma_n)+\varepsilon,$$

что и требовалось. □

6.2 Натуральная параметризация, безостановочные кривые

Определение 6.9. Кривая $\gamma(s)$, $s \in [a,b]$, называется *натурально параметризованной*, а ее параметр s — *натуральным*, если для любых $a \le s_1 \le s_2 \le b$ выполняется равенство $\mathcal{L}(\gamma|_{[s_1,s_2]}) = s_2 - s_1$. Параметр t кривой $\gamma(t)$ называется *равномерным*, а кривая $\gamma(t)$ — *равномерно параметризованной*, если для некоторого $\lambda \ge 0$ кривая $\gamma(\lambda s)$ натурально параметризована. При этом λ называется *скоростью кривой* γ. В частности, скорость натурально параметризованной кривой равна 1.

Замечание 6.10. Натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$ является 1-липшицевой, а равномерная кривая $\gamma(t)$ такая, что $\gamma(\lambda s)$ — натурально параметризованная кривая, также является липшицевой, но с константой Липшица λ.

Замечание 6.11. Не всякая кривая может быть параметризована натуральным параметром, например, это нельзя сделать с кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$, $a \ne b$, являющейся отображением в точку. Более общо, это нельзя сделать, если кривая γ «останавливается» на некотором невырожденном отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, т.е. ограничение γ на этот отрезок есть отображение в точку. Если запретить такие «остановки», то этого оказывается достаточным для существования у спрямляемой кривой натуральной параметризации.

Определение 6.12. Кривая $\gamma : [a,b] \to X$ называется *безостановочной*, если любых любых $a \le t_1 < t_2 \le b$ ограничение $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ не является постоянным отображением.

Предложение 6.13. *Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ — безостановочная спрямляемая кривая, тогда функция $f(t) = \mathcal{L}(\gamma|_{[a,t]})$ строго монотонна.*

Доказательство. Пусть $a \le t_1 < t_2 \le b$, тогда $f(t_2) - f(t_1) = \mathcal{L}\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) > 0$, так как отображение $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ — не постоянное. □

Предложение 6.14. *Для любой безостановочной спрямляемой кривой $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, существует такая замена параметра φ, что кривая $\gamma \circ \varphi$ — натурально параметризована.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = \mathcal{L}\big(\gamma_{[a,t]}\big)$, тогда, в силу пункта (2) предложения 6.7, эта функция непрерывна, а, в силу предложения 6.13, она строго монотонна, поэтому f непрерывно и биективно отображает отрезок $[a,b]$ на отрезок $\big[0,\mathcal{L}(\gamma)\big]$. Так как отрезок компактен, отображение f — гомеоморфизм, поэтому $\varphi = f^{-1}$ — замена параметра на кривой γ. Для любых $0 \le s_1 \le s_2 \le \mathcal{L}(\gamma)$ имеем

$$\mathcal{L}(\gamma\circ\varphi|_{[s_1,s_2]}) = \mathcal{L}(\gamma|_{[\varphi(s_1),\varphi(s_2)]}) = \mathcal{L}(\gamma|_{[a,\varphi(s_2)]}) - \mathcal{L}(\gamma|_{[a,\varphi(s_1)]}) = f\big(\varphi(s_2)\big) - f\big(\varphi(s_1)\big) = s_2 - s_1,$$

что и требовалось. □

Замечание 6.15. Если в предложении 6.14 в качеств φ взять функцию f^{-1}/λ, $\lambda > 0$, то получим равномерно параметризованную кривую, скорость которой равна λ. Важный частный случай таких кривых возникает при $\lambda = |\gamma|$: здесь равномерная кривая $\gamma \circ \varphi$ параметризована отрезком $[0,1]$ и имеет скорость, равную $|\gamma|$.

В [3] предлагается расширить класс замен параметра, а именно, рассматривать монотонные (не обязательно строго монотонные) сюрьективные отображения между параметризующими отрезками. Оказывается, при таком определении замены параметризации удается ввести натуральный параметр на любой спрямляемой кривой.

Определение 6.16. Скажем, что кривые $\gamma\colon [a,b] \to X$ и $\bar\gamma\colon [c,d] \to X$ получены друг из друга *монотонной заменой параметра*, если или существует монотонное сюрьективное отображение $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ такое, что $\bar\gamma = \gamma \circ \varphi$, или же существует монотонное сюрьективное отображение $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ такое, что $\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$.

Пункт (3) из теоремы 6.7 непосредственно обобщается и на монотонные замены.

Предложение 6.17. *Кривые, отличающиеся друг от друга на монотонную замену параметра, имеют одинаковые длины.*

Имеет место следующий результат (идею доказательства можно найти, например, в наших лекциях, размещенных на сайте [26] кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ в разделе «Спецкурсы кафедры»).

Предложение 6.18. *Для произвольной спрямляемой кривой* $\gamma\colon [a,b] \to X$ *в метрическом пространстве* X *существует натурально параметризованная кривая* $\big[0,|\gamma|\big] \to X$ *и равномерно параметризованная кривая* $[0,1] \to X$ *со скоростью* $|\gamma|$, *причем обе эти кривые получены из* γ *некоторыми монотонными заменами параметра.*

Замечание 6.19. Если кривая γ представляет собой отображение в точку, то параметризующий отрезок $\big[0,|\gamma|\big]$ вырождается в точку (в этом случае замена параметра φ отображает $[a,b]$ в точку $\{0\}=[0,0]$); чтобы получить равномерно параметризованную кривую $[0,1]\to X$ со скоростью $|\gamma|=0$, достаточно рассмотреть произвольное сюръективное монотонное отображение отрезка $[0,1]$ в отрезок $[a,b]$ и взять композицию его и γ.

6.3 Кратчайшие кривые и геодезические

Определение 6.20. Спрямляемая кривая $\gamma\colon [a,b]\to X$ в метрическом пространстве X, соединяющая точки A и B из X, называется *кратчайшей*, если $\mathcal{L}(\gamma)$ равно точной нижней грани длин $\mathcal{L}(\delta)$ всех спрямляемых кривых δ, соединяющих A и B.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 6.21. *Кривая* γ *в метрическом пространстве является кратчайшей, если и только если каждый ее отрезок — кратчайшая кривая.*

Определение 6.22. Кривая $\gamma\colon [a,b]\to X$ в метрическом пространстве X называется *локально кратчайшей*, если для каждого $t\in[a,b]$ существует такой содержащий t интервал $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$, что $\gamma|_{[\alpha,\beta]\cap[a,b]}$ — кратчайшая кривая.

Определение 6.23. *Геодезической* называется равномерно параметризованная локально кратчайшая кривую.

Следующий результат вытекает из предложения 6.18.

Следствие 6.24. *Пусть* $\gamma\colon [a,b]\to X$ — *локально кратчайшая кривая. Тогда существует монотонная замена параметра, превращающая* γ *в натурально параметризованную геодезическую.*

Предложение 6.25. *Каждая кратчайшая натурально параметризованная кривая* $\gamma\colon [a,b]\to X$ *в метрическом пространстве* X *является инъективным отображением.*

Доказательство. Если кривая γ является отображением в точку, то $[a,b]=[a,a]=\{a\}$, поэтому γ — инъективно.

Пусть теперь $\gamma(s)$, $s\in[a,b]$, — неточечная натурально параметризованная кривая, и предположим, что для некоторых $a\le s_1<s_2\le b$ имеем $\gamma(s_1)=\gamma(s_2)$. Выкинув из кривой γ ее часть между s_1 и s_2, мы снова получим непрерывную кривую, соединяющую те же точки, но имеющую длину $|\gamma|-(s_2-s_1)<|\gamma|$, противоречие с тем, что γ — кратчайшая. □

Предложение 6.26. *Если* $\gamma\colon [a,b]\to X$ — *произвольная кривая в метрическом пространстве* X, *и* Γ — *ее образ. Тогда* $H^1(\Gamma)\le|\gamma|$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\delta>0$ имеем $H^1_\delta(\Gamma)\le|\gamma|$. Так как γ — непрерывное на компакте $[a,b]$ отображение, то γ — равномерно непрерывна, поэтому существует такое разбиение $\xi=(a=t_0<t_1<\dots<t_m=b)$ отрезка $[a,b]$, что если $\Gamma_i=\gamma\big([t_{i-1},t_i]\big)$, то $\operatorname{diam}\Gamma_i<\delta$. Отсюда вытекает, что семейство $\{\Gamma_i\}_{i=1}^m$ является δ-покрытием Γ, откуда

$$H^1_\delta(\Gamma)\le\sum_{i=1}^m\operatorname{diam}\Gamma_i.$$

С другой стороны, если $\gamma_i=\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, то, по предложению 6.4, имеем $\operatorname{diam}\Gamma_i\le|\gamma_i|$, откуда, учитывая, что $|\gamma|=\sum_{i=1}^m|\gamma_i|$ (аддитивность функционала длины, пункт (1) теоремы 6.7), получаем требуемое. □

Предложение 6.27. *Если* $\gamma\colon [a,b]\to X$ — *инъективная кривая в метрическом пространстве* X, *и* Γ — *ее образ, то* $|\gamma|=H^1(\Gamma)$.

Доказательство. В силу предложения 6.26, для инъективной кривой γ достаточно проверить, что $H^1(\Gamma) \ge |\gamma|$. Последнее равносильно тому, что для любого разбиения $\xi = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$ отрезка $[a,b]$ выполняется

$$H^1(\Gamma) \ge \sum_{i=1}^{m} \bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr|.$$

Положим $\Gamma_i = \gamma\bigl([t_{i-1}, t_i]\bigr)$, тогда Γ_i — компактное связное подмножество в X. По предложению 4.1, имеем $H^1(\Gamma_i) \ge \operatorname{diam} \Gamma_i$. Учитывая, что $\operatorname{diam} \Gamma_i \ge \bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr|$, а также что разные Γ_i пересекаются не более чем по точке, т.е. $\{\Gamma_i\}$ является H^1-почти дизъюнктным покрытием множества Γ, получаем, в силу предложения 1.59, что

$$H^1(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} H^1(\Gamma_i) \ge \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam} \Gamma_i \ge \sum_{i=1}^{m} \bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr|,$$

что и требовалось. □

Комбинируя предложения 6.18, 6.25 и 6.27, а также то, что длина кривой не зависит от монотонной замены параметризации (предложение 6.17), приходим к следующему результату.

Следствие 6.28. *Пусть γ — кратчайшая кривая в метрическом пространстве и Γ — ее образ. Тогда $|\gamma| = H^1(\Gamma)$.*

6.4 Теорема Арцела–Асколи и ее следствия

Напомним несколько нужных нам понятий и теорем (подробности можно найти, например, в наших лекциях [5]).

Определение 6.29. Для метрического пространства X и вещественного числа $\varepsilon > 0$, множество $A \subset X$ называется *ε-сетью*, если для любого $x \in X$ существует $a \in A$ такое, что $|xa| < \varepsilon$. Пространство X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть.

Предложение 6.30. *Метрическое пространство X является компактным, если и только если оно полное и вполне ограниченное.*

Пусть ℓ^∞ обозначает векторное пространство вещественных ограниченных последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots)$ с нормой $\|a\|_\infty = \sup\bigl\{|a_i| : i = 1, 2, \ldots\bigr\}$. Эта норма определяет стандартным образом функцию расстояния на ℓ^∞, превращая это нормированное пространство в полное метрическое пространство.

Предложение 6.31. *Для каждого сепарабельного метрического пространства X существует изометричное вложение $\nu\colon X \to \ell^\infty$.*

Нам понадобится модификация [7] теоремы Арцела–Асколи, которая доказывается так же, как и оригинал (см. наши лекции [5]). Понятия равномерной сходимости и равностепенной непрерывности были введены выше, см. определения 3.4 и 3.9.

Теорема 6.32 (Арцела–Асколи). *Пусть $\{\gamma_i\colon K \to X\}_{i=1}^\infty$ — равностепенно непрерывное семейство отображений из компактного метрического пространства K в метрическое пространство X. Предположим, что существует такое компактное $C \subset X$, что для любого $\delta > 0$, начиная с некоторого i, зависящего от δ, выполняется $\gamma_i(K) \subset U_\delta(C)$. Тогда существует такое $\gamma\colon K \to C$, что некоторая подпоследовательность $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots$ равномерно сходится к γ.*

Приводимое ниже следствие в наших лекциях [5] фигурирует как теорема Арцела–Асколи. Сейчас же мы выведем этот результат из модифицированной теоремы 6.32

Следствие 6.33. *Пусть X — компактное метрическое пространство, и γ_n — последовательность кривых в X. Предположим, что длины кривых γ_i равномерно ограничены, т.е. существует $M \ge 0$ такое, что $|\gamma_i| \le M$ для всех i. Тогда в этой последовательности существует подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой кривой γ, причем*

$$|\gamma| \le \liminf |\gamma_i| \le M.$$

Доказательство. По предложению 6.18, все кривые γ_i можно равномерно параметризовать отрезком $[0,1]$, при этом скорость так параметризованной кривой γ_i будет равна $|\gamma_i|$ и, в силу предположения, эти скорости будут ограничены числом M. Полученные после такой замены параметра кривые снова обозначим через γ_i.

В силу замечания 6.10, отображения γ_i являются M-липшицевыми, поэтому, по предложению 3.10, семейство $\{\gamma_i\}$ является равностепенно непрерывным. Так как X — компактно, то его можно взять в качестве «C» из теоремы 6.32, следовательно, в силу этой теоремы, последовательность γ_i равномерно сходится к некоторой кривой $\gamma\colon [0,1]\to X$. Осталось применить предложение 6.8. $\square$

Следствие 6.34. *Любые две точки A и B произвольного компактного метрического пространства X, которые соединяются спрямляемой кривой, соединяются также кратчайшей кривой.*

Доказательство. Пусть ℓ равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих A и B. По определению инфимума, существует последовательность γ_i кривых, соединяющих A и B, для которой $|\gamma_i|\to\ell$. Но тогда длины кривых γ_i равномерно ограничены и применимо следствие 6.33, в соответствии с которым в последовательности γ_i имеется подпоследовательность γ_{i_k}, равномерно сходящаяся к некоторой кривой γ, для которой выполняется $|\gamma|\le\liminf_{n\to\infty}|\gamma_{k_n}|=\ell$. Но, по определению ℓ, имеем $|\gamma|\ge\ell$, поэтому $|\gamma|=\ell$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. $\square$

Тема 7

Теоремы спрямляемости.

В данном разделе мы выясним, как устроены все связные замкнутые подмножества конечной одномерной меры Хаусдорфа в полном метрическом пространстве, в том числе, кратчайшие деревья — решения проблемы Штейнера.

7.1 Первая теорема спрямляемости

Теорема 7.1 (Первая теорема спрямляемости)**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, и C — непустое связное замкнутое подмножество X, причем $H^1(C) < \infty$. Тогда C компактно, и любые две точки из C соединяются инъективной липшицевой (и, значит, спрямляемой) кривой, лежащей в C.*

Доказательство. Компактность C — это результат предложения 4.4. Нам осталось показать, что любые две точки из C соединяются инъективной липшицевой кривой.

Напомним, что для $\delta > 0$ последовательность $(x_0, \ldots, x_n)$ точек метрического пространства называется *δ-цепью, соединяющей x_0 и x_n*, если расстояния между последовательными точками x_{i-1} и x_i не превосходит δ. По предложению 4.34, для любого $\delta > 0$ любые точки $x, y \in C$ соединяются в C некоторой δ-цепью.

Укорачивая, если необходимо, δ-цепь $(x = x_1, \ldots, x_n = y)$, добьемся того, чтобы $|x_i x_{i+1}| > 0$ при всех i, а также чтобы $|x_i x_j| > \delta$ при $|i-j| > 1$. Обозначим через n_1 и n_2 количества нечетных и четных i между 1 и n. Тогда семейства шаров $\{B_{\delta/2}(x_{2i-1})\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{B_{\delta/2}(x_{2i})\}_{i=1}^{n_2}$ являются дизъюнктными. До конца этого доказательства будем рассматривать только такие δ-цепи.

Выберем теперь $\delta < \operatorname{diam} C$, тогда, в силу следствия 4.3, имеем $H^1\big(B_{\delta/2}(x_i) \cap C\big) \ge \delta/2$, откуда

$$H^1(C) \ge \frac{\delta}{2}\, n_1, \qquad H^1(C) \ge \frac{\delta}{2}\, n_2,$$

поэтому, учитывая равенство $n_1 + n_2 = n$, получаем $n\,\delta \le 4H^1(C) =: L$.

Так как C компактно, то оно также сепарабельно, поэтому, в силу предложения 6.31, существует изометричное вложение $\nu\colon C \to \ell^\infty$. Соединяя в ℓ^∞ последовательные точки $\nu(x_i)$ прямолинейными отрезками, получим непрерывную кривую $\bar\gamma_\delta$, длина которой не превосходит $\delta(n-1)$, а значит и L. Очевидным образом параметризуем кривую $\bar\gamma_\delta$ натуральным параметром, и продолжим эту параметризацию на весь отрезок $[0, L]$, положив ее равной постоянному отображению на $\big[|\bar\gamma_\delta|, L\big]$. Полученное продолжение также обозначим через $\bar\gamma_\delta$. Заметим, что кривая $\bar\gamma_\delta\colon [0, L] \to \ell^\infty$ является 1-липшицевой.

Итак, мы построили семейство 1-липшицевых кривых $\bar\gamma_{1/k} : [0, L] \to \ell^\infty$, которое, в силу предложения 3.10, является равностепенно непрерывным. Кроме того, каждая из этих кривых лежит в $U_{2/k}\big(\nu(C)\big)$, поэтому применима теорема 6.32, гарантирующая существование кривой $\bar\gamma\colon [0, L] \to \nu(C)$, к которой равномерно сходится некоторая подпоследовательность в последовательности $\bar\gamma_{1/k}$. Предельная кривая $\bar\gamma$, очевидно, соединяет $\nu(x)$ и $\nu(y)$, а также, в силу предложения 3.8, кривая $\bar\gamma$ является 1-липшицевой.

Положим $\gamma = \nu^{-1} \circ \bar\gamma$, тогда, в силу только что сказанного, γ является 1-липшицевой и, значит, спрямляемой кривой в C, соединяющей x и y. В силу следствия 6.34, существует кратчайшая в C кривая $\gamma_{\min}$, соединяющая эти же точки. Воспользовавшись предложением 6.18, введем на $\gamma_{\min}$ натуральный параметр. Осталось применить предложение 6.25. $\square$

Следствие 7.2. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $M = \{x, y\} \subset X$, и пусть существует непустое замкнутое связное $\Gamma_0 \subset X$ такое, что $M \subset \Gamma_0$ и $H^1(\Gamma_0) < \infty$. Тогда $\mathrm{SN}(M) \neq \emptyset$, и каждое $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ представляет собой образ кратчайшей кривой, соединяющей x и y.*

Доказательство. Теорема 5.4 обеспечивает существование кратчайшей сети, в частности, непустоту $\mathrm{SN}(M)$. Таким образом, существует замкнутое связное непустое $\Gamma' \subset X$, $M \subset \Gamma'$, для которого $H^1(\Gamma') = \mathrm{sn}(M) \leq H^1(\Gamma_0) < \infty$. В силу теоремы 7.1, множество Γ' компактно, и в Γ' существует спрямляемая кривая γ', соединяющая x и y. По следствию 6.34, точки x и y соединяются некоторой кривой γ, являющейся кратчайшей в Γ'. Обозначим через Γ образ кривой γ, тогда $\Gamma \in \mathcal{C}(M)$ и $H^1(\Gamma) \leq H^1(\Gamma')$ в силу монотонности, так что $H^1(\Gamma) = H^1(\Gamma')$, откуда $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$.

Покажем, что $\Gamma = \Gamma'$, чем и завершим доказательство. Предположим противное, т.е. что существует точка $z \in \Gamma'$, не принадлежащая Γ. Так как Γ компактно, то $|z\Gamma| > 0$. Фиксируем произвольную точку y из Γ и построим кривую $\delta : [0,1] \to \Gamma'$, соединяющую $z = \delta(0)$ с точкой y. Так как Γ замкнуто, определено наименьшее $t > 0$, для которого точка $\delta(t) = w$ лежит в Γ. Обозначим через Δ образ кривой $\delta|_{[0,t]}$. По построению $\Delta \cap \Gamma = \{w\}$, то есть Γ и Δ почти не пересекаются. По следствию 6.28 и предложению 6.4, имеем $H^1(\Delta) = |\delta|_{[0,t]}| \geq |wz| \geq |z\Gamma| > 0$. Наконец, из монотонности внешней меры и предложения 1.59 вытекает, что

$$H^1(\Gamma') \geq H^1(\Gamma \overset{\text{п.в.}}{\sqcup} \Delta) = H^1(\Gamma) + H^1(\Delta) > H^1(\Gamma),$$

противоречие. □

Пусть V — некоторое конечное подмножество топологического пространства X, а E — конечное семейство образов инъективных кривых в X, каждая из которых соединяет некоторые точки из V. Тогда пара $G = (V, E)$ называется *геометрическим графом в* X, а элементы множеств V и E называются соответственно *вершинами* и *ребрами* графа G. Также *геометрическим графом* будем называть подмножество топологического пространства X, представимое в виде объединения множества вершин и множества ребер некоторого такого графа G, при этом ребра графа будем отождествлять с их образами. Такое подмножество будем обозначать той же буквой G. Также сохраним обозначения для вершин и ребер.

Замечание 7.3. Отметим, что каждое бесконечное подмножество можно представить в виде графа бесконечным числом способов, например, мы может «подразбивать» ребра такого геометрического графа, относя произвольные внутренние точки некоторых ребер к вершинам и очевидным образом измельчая такие ребра.

Граф G называется *инъективным*, если различные его ребра могут пересекаться только по своим концам. Ясно также, что G можно рассматривать как обычный граф, в котором ребра имеют геометрическую интерпретацию. Последнее позволяет применять к геометрическим графам всю терминологию теории графов, см. например [23]. Так *деревом* будем называть связный ацикличный граф.

Если геометрический граф $G = (V, E)$ лежит в метрическом пространстве, то определены *длины* $|e|$ *ребер* $e \in E$ как длины кривых e, а также *длина* $|G|$ всего *графа* как сумма длин всех ребер $e \in E$. Так как каждое ребро — инъективная кривая (замкнутая или незамкнутая), то, в силу предложения 6.27, имеем $|e| = H^1(e)$. Кроме того, для инъективного графа $G = (V, E)$ в метрическом пространстве, его семейство ребер E является H^1-почти дизъюнктным покрытием G, поэтому $H^1(G) = \sum_{e \in E} H^1(e) = |G|$.

Пусть M — произвольное конечное подмножество топологического пространства X. Будем говорить, что геометрический граф $G = (V, E)$ в X *соединяет* M, если G связен и $M \subset V$.

Следствие 7.4. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $M \subset X$ — конечное множество, и пусть существует непустое замкнутое связное $\Gamma_0 \subset X$ такое, что $M \subset \Gamma_0$ и $H^1(\Gamma_0) < \infty$. Тогда $\mathrm{SN}(M) \neq \emptyset$, и каждое $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ представляет собой инъективное дерево в X, соединяющее M.*

Доказательство. Из теоремы 5.4 получаем, что $\mathrm{SN}(M) \neq \emptyset$, и что каждая кратчайшая сеть $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ является континуумом, т.е. связна и компактна. Из Первой теоремы спрямляемости (теорема 7.1) следует, что любая пара точек из Γ соединяется кратчайшей в Γ (и, значит, инъективной спрямляемой) кривой. Выберем произвольные две точки $x, y \in M \subset \Gamma$, и пусть γ_1 — кратчайшая в Γ кривая, соединяющая x и y. Через Γ_1 обозначим образ γ_1.

Если все точки из M попали на Γ_1, то они разбивают Γ_1 на образы инъективных спрямляемых кривых, так что Γ_1 — геометрический граф с множеством вершин M, причем, в силу инъективности отображения γ_1, граф Γ_1 является деревом.

Если же в M существует точка z, не лежащая на Γ_1, то, в силу компактности Γ_1, имеем $|z\Gamma_1| > 0$. Фиксируем произвольную точку из Γ_1 и соединим ее с z кратчайшей в Γ кривой $\tilde{\gamma}_2 \colon [0,1] \to \Gamma$. В силу замкнутости Γ_1

определено такое наименьшее $t > 0$, что $\tilde\gamma_2(t) \in \Gamma_1$. Обозначим через γ_2 ограничение $\tilde\gamma_2$ на $[0,t]$, а через Γ_2 — образ γ_2, и положим $\gamma_2(t) = w$. Длина кривой γ_2 не меньше расстояния между ее концами, которое не меньше чем $|z\Gamma_1|$ и, поэтому, положительно. Кроме того $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{w\}$. Снова, разбивая множество $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ попавшими на него точками из M, а также точкой w, получим геометрическое дерево. Описанный только что процесс повторим до тех пор, пока все точки из M не будут задействованы. В результате получим дерево Γ', $M \subset \Gamma' \subset \Gamma$, для которого $H^1(\Gamma') = H^1(\Gamma)$. Остается повторить рассуждения из заключительной части доказательства следствия 7.2 и убедиться, что $\Gamma' = \Gamma$. □

Определение 7.5. Дерево Γ из следствия 7.4 называется *минимальным деревом Штейнера* или *кратчайшим деревом на M*.

7.2 Вторая теорема спрямляемости

Теорема 7.6 (Вторая теорема спрямляемости). *Пусть X — полное метрическое пространство, и C — непустое связное замкнутое подмножество X, причем $H^1(C) < \infty$. Тогда существует не более чем счетное семейство липшицевых кривых $\gamma_i\colon [0,1] \to C$, $\Gamma_i = \gamma_i\big([0,1]\big)$, такое, что*

$$H^1\Big(C \setminus \bigcup_i \Gamma_i\Big) = 0.$$

Кроме того, замыкание множества $\bigcup_i \Gamma_i$ совпадает с C.

Доказательство. По Первой теореме спрямляемости (теорема 7.1), множество C компактно, поэтому существуют $x, y \in C$ такие, что $\operatorname{diam} C = |xy|$. По той же теореме, точки x и y соединяются инъективной липшицевой кривой $\gamma_1\colon [0,1] \to C$. Положим $\Gamma_1 = \gamma_1\big([0,1]\big)$. Дальнейшее построение будем проводить по индукции, повторяя следующую конструкцию.

Предположим, что мы уже построили $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ такие, что $\Gamma_i \subset C$ при всех i, и Γ_i при всех $i \ge 2$ пересекает $\cup_{j<i}\Gamma_j$ ровно по одной точке. Покажем, что если $\{\Gamma_i\}$ не покрывают C, то такое построение можно продолжить.

Итак, пусть $C \ne \cup_{i=1}^k \Gamma_i$. Положим $A_k = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$, и определим величину $d_k := \sup_{x\in C}\big|xA_k\big| > 0$. Так как C компактно, то существуют $x_k \in C$ такое, что $\big|x_kA_k\big| = d_k$.

Выберем произвольную точку $y_k \in A_k$. По Первой теореме спрямляемости (теорема 7.1) точки x_k и y_k соединяются липшицевой кривой $\gamma\colon [0,1] \to C$. Пусть t' — точная нижняя грань тех t, для которых $\gamma(t) \in A_k$. Так как A_k замкнуто, то $\gamma(t') \in A_k$. В силу определения, кривая $\gamma|_{[0,t']}$ пересекает A_k только по своей концевой точке. Положим $\Gamma_{k+1} = \gamma\big([0,t']\big)$. Итак, мы получили искомое семейство $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{k+1}$.

В силу следствия 6.5, имеем $d_k \le \big|x_k\gamma(t')\big| \le H^1(\Gamma_{k+1})$. Кроме того, так как Γ_i и Γ_j при $i \ne j$ пересекаются самое большое по одной точке, то $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{k+1}$ является H^1-почти дизъюнктивным семейством. В силу предложения 1.59 и монотонности внешней меры, получаем

$$\sum_{i=1}^{k+1} d_i \le \sum_{i=1}^{k+1} H^1(\Gamma_i) = H^1(A_{k+1}) \le H^1(C).$$

Таким образом, или мы за конечное число шагов покроем все C и, тем самым, утверждение теоремы будет выполнено, или же будем повторять описанную конструкцию бесконечное число раз.

Рассмотрим второй случай. Положим $A = \cup_{i=1}^\infty \Gamma_i$. Из сказанного выше вытекает, что $\sum_{i=1}^\infty d_i \le H^1(C)$, в частности, $d_i \to 0$ при $i \to \infty$. Кроме того, последовательность d_i не возрастает, и расстояние от каждой точки $x \in X \setminus A_k$ до A_k не превосходит d_k, так что

$$C \subset B_{d_k}(A_k) \subset B_{d_k}(A).$$

В силу пункта (4) упражнения 1.6, имеем $\bar A = \cap_{k=1}^\infty B_{d_k}(A)$, поэтому $C \subset \bar A$. Заметим, что $A \subset C$ и C — замкнуто, поэтому $\bar A = C$.

Положим $A^k = \cup_{i=k}^\infty \Gamma_i$ и $A_p^q = \cup_{i=p}^q \Gamma_i$.

Лемма 7.7. *В сделанных обозначениях, при каждом $x \in C \setminus A_k$ и каждом $r > 0$ таком, что $B_r(x) \cap A_k = \emptyset$, выполняется*

$$H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big) \ge r.$$

Доказательство. При каждом i существует точка $x_i \in A_i$ такая, что $|xx_i| = |xA_i|$. Имеется две возможности.

(1) Начиная с некоторого i точка x попала в A_i, тогда при всех $j \ge i$ выполняется $x_i = x$. По построению, $i > k$, множество A_i связно и содержит некоторую точку вне шара $B_r(x)$, так как $B_r(x) \cap A_k = \emptyset$, поэтому, в силу предложения 4.2, имеем $H^1(B_r(x) \cap A_i) \ge r$. Так как $B_r(x) \cap A_k = \emptyset$, то

$$B_r(x) \cap A_i = B_r(x) \cap A^i_{k+1} \subset B_r(x) \cap A^{k+1},$$

откуда

$$H^1\bigl(B_r(x) \cap A^{k+1}\bigr) \ge H^1\bigl(B_r(x) \cap A_i\bigr) \ge r,$$

что и требовалось.

Пусть теперь x не принадлежит ни одному A_i, тогда при каждом i имеем $0 < |xx_i| \le d_i$. Так как $d_i \to 0$ при $i \to \infty$, последовательность x_i сходится к x. Выберем произвольное $r' < r$, тогда, начиная с некоторого i, имеем $B_{r'}(x_i) \subset B_r(x)$, поэтому $H^1\bigl(B_r(x) \cap A^{k+1}\bigr) \ge H^1\bigl(B_{r'}(x_i) \cap A^{k+1}\bigr)$ и $B_{r'}(x_i) \cap A_k = \emptyset$. Последнее, вместе с предложением 4.2, дает оценку $H^1\bigl(B_{r'}(x_i) \cap A_i\bigr) \ge r'$. Снова заметим, что

$$B_{r'}(x_i) \cap A_i = B_{r'}(x_i) \cap A^i_{k+1} \subset B_{r'}(x_i) \cap A^{k+1},$$

поэтому

$$H^1\bigl(B_r(x) \cap A^{k+1}\bigr) \ge H^1\bigl(B_{r'}(x_i) \cap A^{k+1}\bigr) \ge H^1\bigl(B_{r'}(x_i) \cap A_i\bigr) \ge r'.$$

В силу произвольности r', получаем требуемое. □

Определим теперь внешнюю меру μ на X, положив $\mu = H^1 \llcorner A^{k+1}$. Так как A^{k+1} является H^1-измеримым (и даже борелевским), то $H^1(A^{k+1}) \le H^1(C) < \infty$, а так как внешняя мера H^1 борелевски регулярна (пункт (5) теоремы 5), то, в силу теоремы 1.43, мера μ также борелевски регулярна. Тем самым, применима теорему 2.20, в которой в качестве «A_1» нужно взять $C \setminus A_k$, а в качестве «A_2» — множество A.

По лемме 7.7, для каждой точки $x \in C \setminus A_k$ и для всех достаточно малых $r > 0$ выполняется $H^1\bigl(B_r(x) \cap A^{k+1}\bigr) \ge r$, поэтому, с учетом равенства $\omega_1 = 2$ и того, что $B_r(x) \cap A^{k+1} = B_r(x) \cap A$, получим, что

$$\frac{\mu\bigl(B_r(x) \cap A\bigr)}{\omega_1\, r} = \frac{H^1\bigl((B_r(x) \cap A) \cap A^{k+1}\bigr)}{2r} = \frac{H^1\bigl(B_r(x) \cap A^{k+1}\bigr)}{2r} \ge \frac{1}{2},$$

откуда

$$\overline{\Theta}(\mu, A, x) = \limsup_{r \to 0+} \frac{\mu\bigl(B_r(x) \cap A\bigr)}{\omega_1\, r} \ge \frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает, что, в силу теоремы 2.20, выполняется

$$\frac{1}{2} H^1(C \setminus A_k) \le \mu(A) = (H^1 \llcorner A^{k+1})(A) = H^1(A^{k+1} \cap A) = H^1(A^{k+1}).$$

Так как $C \setminus A \subset C \setminus A_k$, имеем

$$H^1(C \setminus A) \le H^1(C \setminus A_k) \le 2H^1(A^{k+1}). \tag{7.1}$$

Так как семейство $\{\Gamma_i\}$ является H^1-почти дизъюнктным, то, в силу предложения 1.59, имеем

$$H^1\bigl(\cup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} H^1(\Gamma_i) \le H^1(C) < \infty,$$

поэтому величина

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} H^1(\Gamma_i) = H^1\Bigl(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i\Bigr) = H^1(A^{k+1})$$

стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, в силу оценки (7.1), получаем

$$H^1(C \setminus A) = H^1\Bigl(C \setminus \bigcup_i \Gamma_i\Bigr) = 0,$$

что и требовалось. □

Замечание 7.8. Равенство $\bigcup_i \Gamma_i = C$ выполняться не обязано. Например, рассмотрим в качестве $C \subset \mathbb{R}^2$ «гребенку», образованную горизонтальным отрезком $[OA_1]$, где O — начало координат, и $A_1 = (1, 0)$, и вертикальными отрезками A_iB_i, $i = 2, \ldots$, где $A_i = (1/i, 0)$, и $B_i = (1/i, 1/i)$. Тогда, если в качестве $\Gamma_i \subset C$ взять двузвенные ломаные $B_{i+1}A_{i+1}A_i$, $i = 1, \ldots$, то их объединение, очевидно, не содержит O.

7.3 Другая постановка проблемы Штейнера

В литературе встречаются и другие постановки общей проблемы Штейнера. Напомним формулировку из раздела 5.2 и приведем еще одну из работы [18].

Пусть X — метрическое пространство, $M \subset X$ — замкнутое и непустое его подмножество,

$$\mathcal{C}(M) = \big\{\Gamma : \Gamma \subset X \text{ — замкнутое связное, } M \subset \Gamma\big\}$$

и

$$\mathrm{sn}(M) = \inf\{H^1(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{C}(M)\},$$
$$\mathrm{SN}(M) = \big\{\Gamma \in \mathcal{C}(M) : H^1(\Gamma) = \mathrm{sn}(M)\big\}.$$

Каждое $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ мы назвали в разделе 5.2 *кратчайшей сетью, соединяющей* M.

Часто целесообразно минимизировать меру только «самой сети», не включая «границу», а именно, вместо $\mathcal{C}(M)$ можно рассмотреть класс

$$\mathcal{C}_0(M) = \big\{S \subset X : S \cup M \text{ связно}\big\}$$

и определить

$$\mathrm{sn}_0(M) = \inf\{H^1(S) : S \in \mathcal{C}_0(M)\},$$
$$\mathrm{SN}_0(M) = \big\{S \in \mathcal{C}_0(M) : H^1(S) = \mathrm{sn}_0(M)\big\}.$$

Заметим, что при таких определениях множество M может быть «большим» (то есть иметь бесконечную H^1-меру), а задача поиска кратчайшей сети остается осмысленной. Ниже мы обсудим связь между этими двумя задачами.

Лемма 7.9. *Пусть S — связное подмножество метрического пространства. Тогда его замыкание $\bar{S}$ тоже связно и $H^1(S) = H^1(\bar{S})$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. При доказательстве искомого равенства достаточно рассмотреть случай $H^1(S) < \infty$.

Положим $\mu = H^1 \llcorner S$. Из связности S и следствия 4.3 следует, что для любой точки $x \in S$ и любого $r \le (\operatorname{diam} S)/2$ выполнено

$$\mu\big(B_r(x)\big) = H^1\big(B_r(x) \cap S\big) \ge r.$$

Та же самая оценка справедлива и для любого $x \in \bar{S}$. Действительно, пусть $x_k \to x$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $x \in \bar{S}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех k, для которых $|xx_k| < \varepsilon$ выполнено включение $B_r(x_k) \subset B_{r+\varepsilon}(x)$, поэтому $\mu\big(B_{r+\varepsilon}(x)\big) \ge \limsup_k \mu\big(B_r(x_k)\big)$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем

$$\mu\big(B_r(x)\big) \ge \limsup_k \mu\big(B_r(x_k)\big) \ge r,$$

поэтому $\overline{\Theta}_1(\mu, x) \ge 1/2$ для всех $x \in \bar{S}$, и, применяя теорему 2.20, получаем

$$0 = \mu(\bar{S} \setminus S) \ge \frac{1}{2} H^1(\bar{S} \setminus S),$$

откуда и вытекает требуемое. □

Из леммы 7.9 следует, что если рассмотреть вместо $\mathcal{C}(M)$ большее множество

$$\mathcal{C}_1(M) = \big\{\Gamma : \Gamma \text{ — связное подмножеств } X,\ M \subset \Gamma\big\},$$

т.е. отказаться от замкнутости сети, то

$$\mathrm{sn}_1(M) = \inf\{H^1(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{C}_1(M)\} = \mathrm{sn}(M),$$

и для каждого $\Gamma \in \mathcal{C}_1(M)$, для которого $H^1(\Gamma) = \mathrm{sn}_1(M)$, имеем: $\bar{\Gamma} \in \mathcal{C}(M)$ и $H^1(\bar{\Gamma}) = H^1(\Gamma) = \mathrm{sn}(M)$.

Утверждение 7.10. *Если $H^1(M) < \infty$, то две описанные выше постановки проблемы Штейнера эквивалентны в следующем смысле*:

- *для любого* $S \in \mathrm{SN}_0(M)$ *замыкание* $\bar{\Gamma}$ *связного множества* $\Gamma = S \cup M$ *принадлежит* $\mathrm{SN}(M)$;
- *для любого* $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ *выполнено* $S = \Gamma \setminus M \in \mathrm{SN}_0(M)$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{SN}_0(M)$. Рассмотрим $\Gamma = S \cup M$, тогда $\Gamma \in \mathcal{C}_1(M)$, и предположим, что существует $\Gamma' \in \mathcal{C}_1(M)$, для которого $H^1(\Gamma') < H^1(\Gamma)$. В частности, $H^1(\Gamma') < \infty$, и, так как M измеримо и $M \cap \Gamma' = M \cap \Gamma = M$, то

$$H^1(\Gamma' \setminus M) = H^1(\Gamma') - H^1(M) < H^1(\Gamma) - H^1(M) = H^1(\Gamma \setminus M),$$

а так как $\Gamma = S \cup M$, то $\Gamma \setminus M = S \setminus M$, поэтому

$$H^1(\Gamma' \setminus M) < H^1(\Gamma \setminus M) = H^1(S \setminus M) \leq H^1(S),$$

что противоречит минимальности S в $\mathcal{C}_0(M)$, поскольку множество $\Gamma' \setminus S$ также принадлежит $\mathcal{C}_0(M)$. Таким образом, $\Gamma \in \mathrm{SN}_1(M)$, а $\bar{\Gamma} \in \mathrm{SN}(M)$.

Обратно, пусть $\Gamma \in \mathrm{SN}_1(M)$. Предположим, что существует $S \in \mathcal{C}_0(M)$ такое, что $H^1(S) < H^1(\Gamma \setminus M)$. Тогда

$$H^1(S \cup M) \leq H^1(S) + H^1(M) < H^1(\Gamma \setminus M) + H^1(M) = H^1(\Gamma),$$

что противоречит минимальности Γ (последнее равенство снова следует из измеримости M). Утверждение доказано. $\square$

Из теоремы существования кратчайшей сети (теорема 5.4) и утверждения 7.10 вытекает следующая теорема существования.

Следствие 7.11. *Пусть* X *— ограниченно компактное метрическое пространство и* $M \subset X$ *— замкнутое, непустое и* $H^1(M) < \infty$. *Если* $\mathrm{sn}_0(M) < \infty$, *то* $\mathrm{SN}_0(M) \neq \emptyset$ *и для каждого* $S \in \mathrm{SN}_0(M)$ *замыкание множества* $S \cup M$ *является континуумом.*

Литература

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Факториал Пресс, 2000.

[3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[4] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрическая теория меры, часть 1*, Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, Москва, 2018.

[5] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов*, Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, Москва, 2017.

[6] Deza M.M., Deza E. *Encyclopedia of Distances.* Springer, 2009.

[7] Ambrosio L., Tilli P., *Topics on Analysis in Metric Spaces.* Oxford, Oxford University Press, 1987.

[8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Изд-во "Наука", 1976.

[9] Богачев В.И. *Основы теории меры*, 2-е изд., НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, т.1 и т.2, 2006.

[10] Evans L.C., Gariepy R.F. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, 1992.

[11] Mattila P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, 1995.

[12] Lin F., Yang X. *Geometric Measure Theory. An Introduction.* International Press, 2002.

[13] Talebi M. *Covering Theorems.* 2013, `http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/sem_talebi.pdf`

[14] Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* Москва, Наука, 1987.

[15] Fremlin D.H. *Measure Theory.* Vol. 1–5, Torres Fremlin, 2001–2008.

[16] Gołąb S. *Sur quelques points de la théorie de la longueur* (*On some points of the theory of the length*). Ann. Soc. Polon. Math., 1929, v. 7, pp. 227–241.

[17] Alberti G., Ottolini M. *On the structure of continua with finite length and Golab's semicontinuity theorem*, ArXiv e-prints, arXiv:1705.09941, 2017.

[18] Paolini E., Stepanov E. *Existence and regularity results for the Steiner problem.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 2013, v. 46, pp. 837–860.

[19] Энгелькинг Р. *Общая топология*, Пер. с англ. — М.: Мир, 1986.

[20] Simon L. *Lectures on Geometric Measure Theory*, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

[21] Тужилин А.А. *Мера Хаусдорфа: трудности перевода*, 2017. http://dfgm.math.msu.su/files/tuzhilin/HausdorffMeasureDef.pdf

[22] https://en.wikipedia.org/wiki/Locally_compact_space

[23] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

[24] W. Rudin *Real and Complex Analysis*, McGrow Hill Book Company, 1986.

[25] W. Rudin *Functional Analysis*, McGrow Hill Inc., 1991.

[26] http://dfgm.math.msu.su/courses.php