Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

15 ноября 2020 г.

Оглавление

Лекция 1

Метрические пространства. Определения и примеры.

Всюду ниже мы будем называть *расстоянием* на множестве X каждую неотрицательную симметричную функцию d от пар точек из X, равную нулю на одинаковых точках: $d\colon X\times X\to[0,\infty]$, $d(x,y)=d(y,x)$, $d(x,x)=0$ для любых $x,y,\in X$. Если дополнительно известно, что выполняется *неравенство треугольника* $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ для любых $x,y,z\in X$, то d будем называть *псевдометрикой* или *полуметрикой*. Если, в дополнении к неравенству треугольника, функция d *невырождена*, т.е. условие $d(x,y)=0$ влечет $x=y$ для любых $x,y\in X$, то такая d называется *метрикой*. Пара (X,d), где d — метрика (псевдометрика), называется *метрическим* (*псевдометрическим*) *пространством*. В дальнейшем, для упрощения изложения, мы будем называть метрическим (псевдометрическим) пространством само множество X, неявно предполагая, что на нем задана функция расстояния, удовлетворяющая соответствующим свойствам. Кроме того, если мы захотим подчеркнуть, что расстояние всюду отлично от ∞, то к его названию будем добавлять слово "конечный", например, конечная метрика или конечная псевдометрика.

Замечание 1.1. Если d — псевдометрика, то отношение ν, заданное условием $d(x,y)=0$, является эквивалентностью (проверьте). Более того, для любых $x,y,x',y'\in X$, $x\nu x'$, $y\nu y'$, имеем $d(x,y)=d(x',y')$, поэтому, если $[x]$ обозначает класс эквивалентности ν, содержащий x, то функция $d_\nu\colon X/\nu\times X/\nu\to[0,\infty]$, $d_\nu\big([x],[y]\big)=d(x,y)$, корректно определена (не зависит от выбора представителей классов эквивалентности) и задает метрику на X/ν.

Замечание 1.2. Если $d\colon X\times X\to[0,\infty]$ — псевдометрика, то отношение ν, заданное условием $d(x,y)<\infty$, также является эквивалентностью (проверьте). При этом, ограничение d на каждый класс эквивалентности представляет собой конечную псевдометрику, а расстояние между точками, попавшими в различные классы, равно ∞.

Замечание 1.3. Там, где это не приводит к путанице, мы будем обозначать расстояние между точками x и y через $|xy|$, не указывая имя конкретной функции расстояния. Это позволит пользоваться единообразными обозначениями даже в случае, когда у нас имеется несколько различных пространств.

Приведем некоторые примеры псевдометрик и метрик.

Пример 1.4.

(1) Простейший пример псевдометрики задается условием $|xy|=0$ для всех x,y.

(2) Простейший пример метрики задается условием $|xy|=\mathrm{const}>0$ для всех $x\ne y$. Отметим, что const может равняться ∞.

(3) Если $\|\cdot\|$ — норма на некотором векторном пространстве, то функция $|xy|=\|x-y\|$ является метрикой. Если же $\|\cdot\|$ — полунорма, т.е. допускается $\|x\|=0$ для ненулевых векторов x, то функция $|xy|=\|x-y\|$ задает псевдометрику.

(4) Если $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение на векторном пространстве, то функция $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ является нормой. Таким образом, соответствующее расстояние можно считать порожденным этим скалярным произведением. Полученное расстояние называется *евклидовым*, соответствующим $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если отказаться от

условия невырожденности, т.е. допускать $\langle x, x\rangle = 0$ для ненулевых векторов x, то функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ будет полунормой.

Имеется хорошо известный критерий того, когда норма порождается скалярным произведением. Соответствующее условие состоит в том, что для любых двух векторов a и b должно выполняться равенство $2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2$, т.е. сумма квадратов длин всех четырех сторон параллелограмма $(0, a, a+b, b)$ равна сумме квадратов длин его диагоналей (докажите этот критерий).

(5) Важный частный случай нормы на $\mathbb{R}^n$ задается следующей формулой. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $1 \le p \le \infty$, тогда положим

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} & \text{при } p < \infty, \\ \sup_{1\le k\le n} |x_k| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $|\cdot|_p$ является нормой (сделайте это). Кроме того, норма $\|\cdot\|_2$ порождается скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, причем это — единственная из всех норм $\|\cdot\|_p$, которая порождается таким образом, что вытекает из 1.4 (4).

(6) Норма из пункта (5) обобщается на пространство вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, если в предыдущих формулах заменить n на ∞. Однако теперь $\|x\|_p$ может равняться ∞. Чтобы получить стандартное нормированное пространство, для каждого фиксированного p в качестве X возьмем множество всех последовательностей x, для которых $\|x\|_p < \infty$. Полученное нормированное векторное пространство часто обозначается через ℓ^p. Легко проверяется, что $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$ при $p \le q$. Расстояние в ℓ^p, соответствующее норме $\|x\|_p$, будем обозначать через ℓ_p.

(7) Пространство размерности n можно рассматривать как множество всех отображений вида $v\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ с поточечным сложением и умножением на числа; пространство всех вещественных последовательностей — это множество отображений вида $v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Общая конструкция состоит в том, что рассматривается произвольное множество X и семейство $F(X)$ всех отображений $f\colon X \to \mathbb{R}$; линейная структура опять задается поточечным сложением и умножением на числа. На $F(X)$ можно снова ввести функцию $\|\cdot\|_p$. Для этого нужно обобщить понятие суммы на произвольное, не обязательно счетное, множество элементов. Мы сделаем это лишь в интересующем нас случае неотрицательных чисел и ∞.

Итак, пусть $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ — произвольная (неотрицательная) функция, заданная на некотором множестве X. Определим (вообще говоря, бесконечную) сумму $\sum_X \varphi = \sum_{x\in X} \varphi(x)$ индуктивным образом: (1) если $X = \emptyset$, то $\sum_X \varphi = 0$; (2) если X — непустое конечное множество, то $\sum_X \varphi$ — стандартная сумма чисел $\varphi(x)$; (3) если X бесконечно, то $\sum_X \varphi = \sup_K \sum_K \varphi$, где супремум берется по всех конечным подмножествам множества X. Полезно иметь в виду, что если функция φ положительна на несчетном подмножестве в X, то $\sum_{x\in X} \varphi(x) = \infty$ (покажите это). Таким образом, это определение не уводит нас далеко от хорошо известного в матанализе определения ряда.

Итак, с учетом данного выше определения $\sum_X \varphi$, мы можем теперь задать $\|\cdot\|_p$ и для функций из $F(X)$. Если положить $\ell^p(X) = \{f \in F(X) : \|f\|_p < \infty\}$, то снова получим линейное нормированное пространство и соответствующую функцию расстояния. Особую роль в дальнейшем будет играть пространство $\ell^\infty(X)$.

Отметим, что вместо $\mathbb{R}$ можно выбрать поле комплексных чисел или, более обще, любое другое поле, на котором определена норма (аналог модуля комплексного числа).

(8) Пусть A — некоторое множество, и A^* — семейство всех конечных последовательностей элементов из A, а также пустая последовательность λ. Будем интерпретировать A как *алфавит* некоторого языка. Тогда элементы из A естественно назвать *буквами*, а элементы из A^* — *словами*. *Редакторской операцией на* A^* называется преобразование слова, состоящее или в исключении одной из букв этого слова (*делеция*), или во вставке буквы в слово (*вставка*), или в замене одной буквы на другую (*замена*). Наименьшее число редакторских операций, необходимых для перехода от одного слова к другому, называется *расстоянием Левенштейна* и задает метрику на A^*. Это расстояние играет важную роль в лингвистике и биоинформатике.

(9) Пусть $\Gamma = (V, E)$ — связный простой граф (множество V может быть бесконечным). Определим на V функцию расстояния, положив ее равной длине кратчайшего (по числу ребер) пути, соединяющего данную пару вершин. Эта функция является конечной метрикой на V (проверьте). Если граф несвязный, то аналогичным образом определяется общая метрика: если вершины лежат в разных связных компонентах,

то расстояние между ними полагается равным ∞. Единообразно это можно сделать, если принять соглашение $\inf \emptyset = \infty$. Разбиение, описанное в 1.2, соответствует разложению графа на связные компоненты.

(10) Если $\Gamma = (V, E, \omega)$ — взвешенный связный простой граф с весовой функцией $\omega\colon E \to [0, \infty)$, то *длиной пути в графе* Γ называется суммарный вес ребер этого пути. Определим функцию расстояния, положив ее равной точной нижней грани весов всех путей, соединяющих данную пару вершин. Полученная функция является конечной псевдометрикой на V. Отметим, что даже если ω всюду положительна, то построенная функция расстояния не обязана быть метрикой (рассмотрите граф с положительной весовой функцией, в котором некоторая пара вершин соединяется бесконечным числом путей со стремящимися к нулю весами). Снова, если граф несвязный, то описанная конструкция приводит к общей псевдометрике.

(11) Пусть G — произвольная группа с множеством образующих S. *Граф Кэли пары* (G, S) — это взвешенный ориентированный граф $\Gamma(G, S) = (G, E, \omega\colon E \to S)$, в котором $(g, h) \in E$ тогда и только тогда, когда $h = gs$ для некоторого $s \in S$, а $\omega(g, h) = s$.

Отметим, что в геометрической теории групп множество S обычно удовлетворяет следующим свойствам: нейтральный элемент не содержится в S, и $S = S^{-1}$, т.е. если $s \in S$, то и $s^{-1} \in S$. В этом случае граф $\Gamma(G, S)$ не имеет петель, и если $(g, h) \in E$, то $(h, g) \in E$, так как $h = gs$ влечет $g = hs^{-1}$. При таких предположениях в качестве графа Кэли рассматриваемся простой граф, в котором каждая пара взаимно противоположных ориентированных ребер заменяется на одно ребро. Для такого графа Кэли конструкция 1.4 (9) определяет метрику на G, которая используется для определения скорости роста группы G.

(12) Пусть X — произвольное метрическое пространство. Для каждого $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$. Элемент $x \in X$ назовем *точкой прикосновения множества* A, если $|xA| = 0$; множество A назовем *замкнутым*, если оно содержит все своим точки прикосновения. Для произвольных непустых множеств $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A, B) = \max\Big[\sup\big\{|aB| : a \in A\big\}, \sup\big\{|Ab| : b \in B\big\}\Big].$$

Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа.* Если $\mathcal{H}(X)$ обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X, то, как будет показано в дальнейшем, ограничение d_H на $\mathcal{H}(X)$ является конечной метрикой.

(13) Отображение $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *изометричным*, если оно сохраняет расстояния, т.е. для любых $x, x' \in X$ выполняется $\big|f(x)f(x')\big| = |xx'|$. Биективное изометричное отображение называется *изометрией*, а метрические пространства, между которыми существует изометрия, — *изометричными.* Отметим, что изометричное отображение всегда инъективно, поэтому является изометрией на свой образ. Изометричные отображения также называются *изометричными вложениями.*

Тройку (Z, X', Y'), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', назовем *реализацией пары* (X, Y) *метрических пространств*, если X' изометрично X, а Y' изометрично Y. Точная нижняя грань чисел d, для которых существует реализация (Z, X', Y') пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') < d$, называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами* X *и* Y и обозначается через $d_{GH}(X, Y)$. Расстояние Громова–Хаусдорфа было определено Д. Эдвардсом [3], а затем переоткрыто и обобщено М. Громовым [4], [5]. Так как работа [3] мало известна даже специалистам и редко цитируется (см. например [6], [7], [8]), мы в лекции 7 вкратце расскажем о ее содержании.

Очевидно, что для изометричных пространств X и Y выполняется $d_{GH}(X, Y) = 0$. Обратное утверждение неверно, например, если $X = [0, 1]$, а $Y = [0, 1)$, то $d_{GH}(X, Y) = 0$, однако эти пространства неизометричны (проверьте).

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии (другими словами, множество классов изометрии компактных метрических пространств). Несложно проверяется, что это множество континуально. Кроме того, как будет показано ниже, расстояние d_{GH} является конечной метрикой на $\mathcal{M}$. Метрическое пространство $(\mathcal{M}, d_{GH})$ называется *пространством Громова–Хаусдорфа.*

Огромная коллекция метрических пространств собрана в книге [1].

Приведем теперь ряд примеров, демонстрирующих, как из одних метрических пространств можно получать другие.

Пример 1.5.

Умножение метрики на число. Если d — функция расстояния на множестве X, то для каждого вещественного $\lambda > 0$ функция $\lambda\, d$ также является расстоянием на X; при этом, если d была метрикой (псевдометрикой), то $\lambda\, d$ будет иметь тот же тип. Соответствующее пространство мы будем обозначать через $\lambda\, X$.

Прибавление константы. Пусть d — функция расстояния на X. Определим аналог символов Кронекера для $x, y \in X$, положив $\delta_{xy} = 0$ при любых $x \neq y$ и $\delta_{xx} = 1$ при любом x. Тогда при каждом вещественном $c > 0$ функция $(d{+}c)(x, y) = d(x, y){+}c\,(1{-}\delta_{xy})$ является расстоянием. При этом, если d — псевдометрика, то $d{+}c$ — метрика. Отметим, что эта конструкция может быть распространена и на некоторые отрицательные числа c (разберитесь, в чем здесь дело; кроме того, выясните, какие еще функции можно применять к метрике, чтобы она осталась метрикой).

Индуцированное расстояние. Фактически, мы уже неявно пользовались этой очевидной конструкцией. Пусть d — функция расстояния на множестве X, а Y — непустое подмножество X. Определим на Y функцию расстояния, положив $|yy'| = d(y, y')$ для любых $y, y' \in Y$, и назовем ее *индуцированной из* d или являющейся *ограничением* d *на* Y. Отметим, что ограничение метрики (псевдометрики) всегда является метрикой (псевдометрикой). В дальнейшем, говоря про функцию расстояния на подмножестве, мы всегда, если не оговорено противное, будем иметь в виду именно индуцированное расстояние.

Несвязное объединение. Пусть d_i — функция расстояния на X_i, $i \in I$, где I — некоторое множество индексов. Определим на $\sqcup_{i\in I} X_i$ функцию расстояния, положив ее ограничение на X_i равным d_i, а на парах точек, принадлежащих разным X_i, — равным бесконечности. Полученная функция расстояния называется *расстоянием на несвязном объединении*, а само пространство $\sqcup_{i\in I} X_i$ — *несвязным объединением* X_i.

Произведение. Пусть d_i — функция расстояния на X_i, $i \in I$, где I — некоторое множество индексов. Положим $X = \prod_{i\in I} X_i$. Отметим, что, по определению, X равно множеству всех отображений $x\colon I \to \sqcup_{i\in I} X_i$ таких, что $x(i) \in X_i$ при каждом $i \in I$. В частности, если все X_i равны одному и тому же пространству Y, то $X = Y^I$, где последнее, напомним, обозначает множество всех отображений из I в Y.

Рассмотрим множество $[0, \infty]^I$. Тогда для любых двух точек $x, x' \in X$ функцию $d_I(x, x')\colon I \to [0, \infty]$, определенную правилом $d_I(x, x')(i) = d_i\big(x(i), x'(i)\big)$, можно рассматривать как элемент из $[0, \infty]^I$. Пусть теперь $\rho\colon [0, \infty]^I \to [0, \infty]$ — произвольная функция, тогда ρ порождает на X функцию расстояния d_ρ следующим образом: $d_\rho(x, x') = \rho\big(d_I(x, x')\big)$. Функцию ρ иногда называют *связующей*, а функцию d_ρ — расстоянием, порожденным ρ; при этом пространство X с функцией расстояния d_ρ называется *полупрямым произведением пространств* X_i *со связующей функцией* ρ. Для конечных функций расстояния d_i имеют место те же построения, но с заменой $[0, \infty]$ на $[0, \infty)$.

Отметим, что $[0, \infty)^I$ является подмножеством векторного пространства $F(I)$ всех вещественных функций на I, определенного в 1.4 (7). Важным частным случаем функции ρ является ограничение некоторой нормы, заданной на $F(I)$. Так, если в качестве ρ выбрать $\|\cdot\|_2$, то соответствующее расстояние на X будет метрикой, которая называется *метрикой прямого произведения*, а само X — прямым произведением пространств X_i.

Отметим, что существует еще много других операций, строящих из одних метрических пространств другие, например, операция факторицазии по некоторому отношению эквивалентности и порожденные ей различные склейки метрических пространств; кроме того, имеются различные пределы (проективные и инъективные), а также предел по расстоянию Громова–Хаусдорфа.

Лекция 2

Топология метрических пространств. Расстояние Хаусдорфа.

Мы предполагаем, что слушатели знакомы с основами общей топологии. В данном разделе мы поговорим о топологии, порожденной метрикой.

Пусть X — метрическое пространство, а $x \in X$ — произвольная его точка. Для каждого $r > 0$ и $x \in X$ положим $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$ и назовем полученное множество *открытым шаром радиуса r с центром в x* или *r-окрестностью точки $x \in X$*. Множество $U \subset X$ называется *открытым*, если оно представимо в виде объединения открытых шаров. В частности, каждый открытый шар, а также пустое множество (объединение пустого семейства открытых шаров) являются открытыми множествами. Легко проверяется, что семейство так определенных открытых множеств образует топологию на X, а само X с такой топологией — хаусдорфово топологическое пространством. Эта топология называется *метрической*, и когда речь идет про топологию на метрическом пространстве, то, если не оговорено противное, имеется в виду именно эта топология.

Приведем ряд полезных для дальнейшего определений и фактов.

Определения и факты 2.1.

(1) Метрическое пространство называется *полным*, если каждая его фундаментальная последовательность сходится. Например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство, а $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — нет.

(2) Метрическое пространство *компактно*, если каждая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Например, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — компакт, а $[a, b)$ компактом не является.

(3) Точка x метрического пространства X является *точкой прикосновения множества $A \subset X$*, если при каждом $r > 0$ выполняется $U_r(x) \cap A \neq \emptyset$; эквивалентное условие: $|xA| = 0$. Множество всех точек прикосновения множества A называется его *замыканием* и совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A (проверьте). Замыкание множества A будем обозначать через $\bar{A}$. Приведем пример: $\overline{[a, b)} = [a, b]$.

(4) Подмножество метрического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Метрическое пространство, содержащее счетное всюду плотное подмножество, называется *сепарабельным*. Например, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{Q}$ счетно, $\mathbb{R}$ — сепарабельно.

(5) Семейство открытых множеств топологического пространства называется его *базой*, если каждое открытое множество представимо в виде объединения множеств этого семейства. Например, в произвольном метрическом пространстве X множество всех шаров $U_{1/n}(x)$ по всем $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ образует базу. Если X сепарабельно, то в качестве базы можно взять такие шары, ограничившись центрами из счетного всюду плотного подмножества. Легко проверяется, что *сепарабельность метрического пространства эквивалентна наличию в нем счетной базы* (докажите).

(6) Для вещественного числа $\varepsilon > 0$, подмножество A метрического пространства X называется *ε-сетью* или *ε-плотным подмножеством*, если для каждого $x \in X$ выполняется $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$; иными словами, $X = \cup_{a \in A} U_\varepsilon(a)$. Метрическое пространство X называется *вполне ограниченным* или *предкомпактным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть. Например, интервал (a, b) предкомпактен.

(7) *Если пространство вполне ограничено, то оно — сепарабельно* (в качестве счетного всюду плотного множества можно взять объединение конечных $(1/n)$-сетей по всем $n \in \mathbb{N}$). Обратное, вообще говоря, неверно, например, $\mathbb{R}$ сепарабельно, но не вполне ограничено.

(8) *Полная ограниченность эквивалентна тому, что каждая последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность* (докажите).

(9) Из предыдущих пунктов легко получается, что *метрическое пространство компактно, если и только если оно полное и вполне ограниченное.*

Пусть X — произвольное пространство с конечной метрикой. Обозначим через $C(X)$ векторное пространство всех непрерывных функций на X, и рассмотрим на $C(X)$ норму $\|\cdot\|_\infty$. Тогда подпространство $C(X) \cap \ell^\infty(X)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных функций на X, обозначим через $C_b(X)$. Норма $\|\cdot\|_\infty$ превращает $C_b(X)$ в пространство с конечной метрикой.

Определим теперь отображение $\nu\colon X \to C_b(X)$ следующим образом. Для каждой точки $x \in X$ через d_x обозначим функцию $d_x\colon X \to [0,\infty)$, заданную правилом $d_x(y) = |xy|$. Легко проверяется, что $d_x \in C(X)$. Фиксируем теперь некоторую точку $p \in X$ и рассмотрим функцию $d_x - d_p$. Тогда для каждого $y \in X$ имеем $\bigl|d_x(y) - d_p(y)\bigr| \le |xp|$, поэтому функция $d_x - d_p$ ограничена и, значит, принадлежит $C_b(X)$.

Теорема 2.2 (Фреше, Куратовский)**.** *Отображение $\nu\colon X \to C_b(X)$, определенное по формуле $\nu\colon x \mapsto d_x - d_p$, является изометричным.*

Доказательство. Действительно, для любых $x, y \in X$ имеем

$$\ell_\infty(d_x - d_p, d_y - d_p) = \sup_{z \in X}\bigl|d_x(z) - d_y(z)\bigr| \le |xy|$$

по неравенству треугольника. С другой стороны, если $z = y$, то $\bigl|d_x(z) - d_y(z)\bigr| = |xy|$, откуда и вытекает требуемое. □

Докажем теперь более тонкий результат. Напомним, что через ℓ^∞ мы обозначили пространство всех ограниченных последовательностей с метрикой, заданной нормой $\|\cdot\|_\infty$.

Теорема 2.3 (Фреше)**.** *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, тогда X изометрично вкладывается в ℓ^∞.*

Доказательство. Упорядочим счетное всюду плотное подмножество пространства X, которое существует в силу сепарабельности, и получим последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Выберем произвольную точку $p \in X$ и поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ последовательность $\nu(x)$, полученную ограничением функции $d_x - d_p$ на последовательность $x_1, x_2, \ldots$, а именно, $\nu(x)(i) = d_x(x_i) - d_p(x_i)$. Так как функции $d_x - d_p$ ограничены, то $\nu(x) \in \ell^\infty$. Неравенство $\ell_\infty\bigl(\nu(x), \nu(y)\bigr) \le |xy|$ проверяется так же, как в доказательстве теоремы 2.2. Обратное неравенство вытекает из того, что подмножество $\{x_i\}$ является всюду плотным в X: рассматриваем $x_{i_k} \to x$, тогда

$$\ell_\infty\bigl(\nu(x), \nu(y)\bigr) = \sup_{z \in X}\bigl|d_x(z) - d_y(z)\bigr| \ge \bigl|d_x(x_{i_k}) - d_y(x_{i_k})\bigr| \to d_y(x) = |xy| \text{ при } k \to \infty.$$

Теорема доказана. □

Как видно из предыдущих рассуждений, при изучении компактности важную роль играет полнота пространства. Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 2.4. *Для каждого метрического пространства X существует единственное, с точностью до изометрии, полное метрическое пространство, в которое X изометрически вкладывается в виде всюду плотного подмножества.*

Определение 2.5. Полное метрическое пространство, описанное в теореме 2.4, называется *пополнением пространства X.*

Замечание 2.6. Построение пополнения пространства X состоит в рассмотрении псевдометрического пространства всех фундаментальных последовательностей в X (расстояние между последовательностями — предел расстояний между последовательными их членами) и переходе к метрическому пространству с помощью техники, описанной в 1.1.

Легко видеть, что метрическое пространство и его всюду плотное подмножество одновременно или вполне ограничены, или нет. Отсюда и из утверждения 2.1 (9) мгновенно получается следующий результат.

Следствие 2.7. *Метрическое пространство предкомпактно, если и только если его пополнение компактно.*

2.1 Расстояние Хаусдорфа

В примере 1.4 (12) мы определили расстояние Хаусдорфа $d_H(A,B)$ между непустыми подмножествами A и B метрического пространства X, а также ввели обозначение $\mathcal{H}(X)$ для множества всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X. Покажем, что на $\mathcal{H}(X)$ расстояние d_H является конечной метрикой.

Для удобства дадим сначала другое эквивалентное определение расстояния Хаусдорфа. Для $r>0$ и непустого множества $A\subset X$ определим *открытую окрестность* $U_r(A)$ *радиуса* r *с центром в* A, положив $U_r(A)=\{x\in X:|xA|<r\}=\cup_{a\in A}U_r(a)$ (проверьте последнее равенство).

Предложение 2.8. *Для непустых* $A,B\subset X$ *имеем*

$$d_H(A,B)=\inf\bigl\{r: A\subset U_r(B)\ \&\ U_r(A)\supset B\bigr\}.$$

Доказательство. Это мгновенно вытекает из определения окрестности множества A, а именно, из того, что $x\in U_r(A)$, если и только если $|xA|<r$. $\square$

Теорема 2.9. *Функция d_H является конечной метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Доказательство. Выберем произвольные $A,B\in\mathcal{H}(A)$. Так как они ограничены, то для некоторого $r>0$ имеем $A\subset U_r(B)$ и $U_r(A)\supset B$, откуда $d_H(A,B)<\infty$. Таким образом, d_H — конечная функция расстояния.

Если $A\ne B$, то без ограничения общности можно считать, что существует $a\in A\setminus B$, но так как множество $X\setminus B$ открыто, существует $r>0$ такое, что $U_r(a)\cap B=\emptyset$, в частности, $|aB|\ge r$ и, значит, $d_H(A,B)\ge r$. Тем самым мы проверили, что d_H невырождена и, значит, положительно определенна.

Наконец, проверим неравенство треугольника. Выберем произвольные $A,B,C\in\mathcal{H}(X)$ и положим $d_H(A,B)=c$, $d_H(B,C)=a$, $d_H(A,C)=b$. Мы должны показать, что $d_H(A,C)\le d_H(A,B)+d_H(B,C)$, т.е. $b\le c+a$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$ и положим $r=c+\varepsilon$ и $s=a+\varepsilon$, тогда $A\subset U_r(B)$ и $B\subset U_s(C)$ влечет $A\subset U_r\bigl(U_s(C)\bigr)\subset U_{r+s}(C)$ (докажите последнее включение; можно ли его заменить на равенство?). Аналогично, $U_{r+s}(A)\supset C$. Таким образом, $b\le r+s=c+a+2\varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое. $\square$

В дальнейшем, говоря про расстояние на $\mathcal{H}(X)$, всегда будем иметь в виду метрику Хаусдорфа.

Приведем еще ряд свойств расстояния Хаусдорфа в следующем упражнении.

Упражнение 2.10. Докажите следующие утверждения для произвольного метрического пространства X.

(1) Пусть $f\colon X\to\mathcal{H}(X)$ задано формулой $f\colon x\mapsto\{x\}$, тогда f — изометричное вложение.

(2) На семействе всех непустых ограниченных подмножеств в X расстояние Хаусдорфа является конечной псевдометрикой.

(3) Для непустых $A,B\subset X$ имеем $d_H(A,B)=d_H(A,\bar B)$.

(4) Для непустых $A,B\subset X$ имеем $d_H(A,B)=0$ тогда и только тогда, когда $\bar A=\bar B$.

(5) Если $Y\subset X$ является ε-сетью в $A\subset X$, то $d_H(A,Y)\le\varepsilon$.

Для дальнейшего нам понадобится одна техническая конструкция. Пусть $A_1,A_2,\dots$ — последовательность подмножеств из X.

Определение 2.11. Положим

$$\operatorname{Flim\,sup}A_k=\cap_{n=1}^\infty\overline{A_n\cup A_{n+1}\cup\cdots}$$

и назовем *верхним замкнутым пределом* последовательности A_k.

Предложение 2.12. *Имеем*

$$\operatorname{Flim\,sup}A_k=\bigl\{x\in X:\forall\varepsilon>0\ \textit{выполняется}\ \#\{k:U_\varepsilon(x)\cap A_k\ne\emptyset\}=\infty\bigr\}.$$

Доказательство. Положим $A=\operatorname{Flim\,sup}A_k$.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $x\in A$, тогда x является точкой прикосновения множества $\cup_{k=n}^\infty A_k$ при каждом $n\in\mathbb{N}$, поэтому это множество пересекает $U_\varepsilon(x)$ и, значит, для некоторого $k\ge n$ имеем $A_k\cap U_\varepsilon(x)\ne\emptyset$. Отсюда вытекает, что $\#\{k:U_\varepsilon(x)\cap A_k\ne\emptyset\}=\infty$.

Обратно, предположим, что при каждом $\varepsilon>0$ выполняется $\#\{k:U_\varepsilon(x)\cap A_k\ne\emptyset\}=\infty$. Тогда при каждом $n\in\mathbb{N}$ имеем $U_\varepsilon(x)\cap\bigl(\cup_{k=n}^\infty A_k\bigr)\ne\emptyset$, так что x является точкой прикосновения каждого множества $\cup_{k=n}^\infty A_k$ и, поэтому, принадлежит A. $\square$

Следующая теорема утверждает, что свойства, определяющие компактность, наследуются при переходе от X к $\mathcal{H}(X)$.

Теорема 2.13. *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Тогда следующие свойства одновременно присутствуют или нет у X и $\mathcal{H}(X)$:*

(1) *полнота (Хан 1932),*

(2) *полная ограниченность,*

(3) *компактность (Хаусдорф, Бляшке).*

Доказательство. (1) Пусть сначала X — полное. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H}(X)$ и положим $A = \operatorname{Flim\,sup} A_k$. Тогда полнота $\mathcal{H}(X)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.14. *Имеем $A \in \mathcal{H}(X)$ и $A_n \to A$.*

Доказательство. Проверим сначала, что $A \neq \emptyset$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность A_k фундаментальна, в ней существует подпоследовательность $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ такая, что $d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^{k+1}$. Выберем произвольное $a_1 \in A_{n_1}$. Тогда существует такое $a_2 \in A_{n_2}$, что $|a_1 a_2| < \varepsilon/2^2$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такую, что $|a_k a_{k+1}| < \varepsilon/2^{k+1}$. Но, по неравенству треугольника, эта последовательность фундаментальна, поэтому, в силу полноты пространства X, она сходится к некоторому $a \in X$, причем $|aa_k| \le \varepsilon/2^k < \varepsilon/2^{k-1}$. Теперь возьмем произвольное $\delta > 0$ и выберем p такое, что $\varepsilon/2^p < \delta$. Тогда для любого $k \ge p$ выполняется $a_k \in U_\delta(a) \cap A_{n_k}$. Итак, мы показали, что при каждом $\delta > 0$ множество $\{k : U_\delta(a) \cap A_k \neq \emptyset\}$ бесконечно, следовательно, по 2.12, имеем $a \in A$.

Далее, A замкнуто, так как является пересечением замкнутых множеств.

Заметим, что когда выше мы строили последовательность $a_1, a_2, \ldots$, мы начинали с произвольного $a_1 \in A_{n_1}$. В результате мы получили $a \in A$ такое, что $|a_1 a| < \varepsilon$. Тем самым, мы за одно выяснили следующую вещь: для любого $\varepsilon > 0$ существует n такой, что $A_n \subset U_\varepsilon(A)$. Учитывая также, что последовательность A_k фундаментальна, мы можем выбрать n, для которого одновременно $A_n \subset U_{\varepsilon/2}(A)$ и при всех $k \ge n$ выполняется $A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_n)$. Объединим эти два включения и получим следующее заключение: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что при каждом $k \ge n$ выполняется

$$A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_n) \subset U_{\varepsilon/2}\big(U_{\varepsilon/2}(A)\big) \subset U_\varepsilon(A).$$

Наконец, подобные рассмотрения приводят и к обратному неравенству. А именно, фиксируем ε и найдем такое n, что при всех $k \ge n$ выполняется $d_H(A_k, A_n) < \varepsilon/2$. Так как для каждого $a \in A$ окрестность $U_{\varepsilon/2}(a)$ пересекает бесконечное число A_k, для каждого такого k имеем

$$a \in U_{\varepsilon/2}(A_k) \subset U_{\varepsilon/2}\big(U_{\varepsilon/2}(A_n)\big) \subset U_\varepsilon(A_n),$$

т.е. $A \subset U_\varepsilon(A_n)$. Вновь, из фундаментальности последовательности A_k вытекает, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует n такое, для которого при всех $k \ge n$ выполняется $A \subset U_\varepsilon(A_k)$. Отсюда делаем сразу два вывода: (1) множество A ограничено, так как каждое A_k такое, и (2) $d_H(A_k, A) \to 0$, т.е. последовательность $A_1, A_2, \ldots$ сходится к A и, значит, $\mathcal{H}(X)$ — полное пространство.

Обратно, пусть $\mathcal{H}(X)$ полно. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек из X и построим по ней последовательность $A_i = \{x_i\} \in \mathcal{H}(X)$. По 2.10 (1), последовательность $A_1, A_2, \ldots$ также фундаментальна, поэтому $A_k \to A \in \mathcal{H}(X)$. Но тогда $\operatorname{diam} A = 0$, т.е. $A = \{a\}$, так что a является пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots$, поэтому X полно. □

(2) Пусть X — вполне ограничено. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и конечную ε-сеть $Y \subset X$. Тогда множество $\mathcal{P}(Y)$, состоящее из всех непустых подмножеств Y, будет ε-сетью в $\mathcal{H}(X)$ (проверьте).

Обратно, если $\mathcal{H}(X)$ вполне ограничено и $\mathcal{Y}$ — конечная ε-сеть в $\mathcal{H}(X)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то множество Z, полученное из $\mathcal{Y}$ выбором в каждом $Y \in \mathcal{Y}$ по произвольной точке, будет ε-сетью в X (докажите).

(3) Это следует из предыдущих пунктов и 2.1 (9). □

Конструкцию замкнутого верхнего предела можно распространить следующим образом.

Определение 2.15. Положим

$$\operatorname{Flim\,inf} A_k = \bigl\{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ выполняется } \#\{k : U_\varepsilon(x) \cap A_k = \emptyset\} < \infty\bigr\}$$

и назовем ***нижним замкнутым пределом*** последовательности A_k.

Если у последовательности $A_1, A_2, \dots$ одновременно существуют верхний и нижний замкнутый пределы и эти пределы равны, то говорят, что у последовательности $A_1, A_2, \dots$ существует ***замкнутый предел***, который обозначают через $\operatorname{Flim} A_k$.

Упражнение 2.16. Пусть $A_k, A \in \mathcal{H}(X)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

(1) Если $A_k \to A$, то $A = \{a : a_k \to a,\ a_k \in A_k \text{ при всех } k\}$.

(2) Пусть $A_k = \{a_k\}$ при всех k. Тогда последовательность A_k сходится, если и только если сходится последовательность a_k. При этом, если $a_k \to a$, то $A_k \to \{a\}$.

(3) Если $A_k \to A$, то существует $\operatorname{Flim} A_k$ и $A = \operatorname{Flim} A_k$.

(4) Если $A_k \to A$ и при всех k имеем $A_k \supset A_{k+1}$, то $A = \cap_k A_k$.

(5) Если все A_k компактны, и при всех k выполняется $A_k \supset A_{k+1}$, то $A_k \to \cap_k A_k =: A$, причем A — непустой компакт.

(6) Если $A_k \to A$ и при всех k имеем $A_k \subset A_{k+1}$, то $A = \overline{\cup_k A_k}$.

(7) Если при всех k выполняется $A_k \subset A_{k+1}$, и множество $A = \overline{\cup_{k=1}^\infty A_k}$ является компактом, то все A_k также компактны и $A_k \to A$.

(8) Пусть X компактно. Тогда

   (a) если $A := \operatorname{Flim} A_k$ существует, то $A_k \to A$ (если отказаться от условия компактности X, то это утверждение перестает быть верным; приведите пример);

   (b) если при всех k выполняется $A_k \supset A_{k+1}$, то $A := \cap_k A_k \in \mathcal{H}(X)$ и $A_k \to A$;

   (c) если при всех k выполняется $A_k \subset A_{k+1}$, то $A := \overline{\cup_{k=1}^\infty A_k} \in \mathcal{H}(X)$ и $A_k \to A$.

(9) Если $X = \mathbb{R}^n$, все A_k выпуклы, и $A_k \to A$, то A выпукло. Таким образом, множество $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ замкнуто в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. В частности, если $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый компакт, то пространство $\mathcal{H}_c(X)$ выпуклых компактных подмножеств X компактно; иными словами, в любой последовательности выпуклых компактов, содержащихся в X, существует подпоследовательность, сходящаяся к выпуклому компакту, также лежащему в X (теорема Бляшке).

Лекция 3

Кривые в метрических пространствах, внутренняя метрика, теорема Хопфа–Ринова.

3.1 Спрямляемые кривые

Пусть X — метрическое пространство. Конечную последовательность $L = (A_0, \dots, A_n)$ точек пространства X назовем *ломаной в* X; при этом пары (A_{i-1}, A_i) будем называть *ребрами ломаной* L, а числа $|A_{i-1}A_i|$ — *длинами* этих ребер. Сумма длин всех ребер ломаной L называется *длиной ломаной* L и обозначается через $|L|$.

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — произвольная кривая. Для каждого разбиения $\xi = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$ рассмотрим соответствующую ему ломаную $L_\gamma(\xi) = \bigl(\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)\bigr)$ (такие ломаные будем называть *вписанными в кривую* γ), тогда величина

$$|\gamma| = \sup\Bigl\{\bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| : \xi \text{ — разбиение отрезка } [a,b]\Bigr\}$$

называется *длиной кривой* γ. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $|\gamma| < \infty$.

Замечание 3.1. Очевидно, длина кривой не меняется при замене параметра, в частности, свойство кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от выбора параметризации.

Приведем примеры спрямляемых кривых.

Напомним, что отображением $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *липшицевым*, если существует такое $C > 0$, что для любых $x, x' \in X$ выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| \le C\,|xx'|$. Каждое такое C называется *константой Липшица*, а точная нижняя грань $\operatorname{dil} f$ констант Липшица — *растяжением отображения* f (обозначение происходит от английского слова dilatation). Иногда, для краткости, липшицево отображение с константой Липшица C называют C*-липшицевым.*

Пример 3.2. Каждая C-липшицева кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ спрямляемая, так как для любого разбиение ξ отрезка $[a,b]$ имеем $|L_\gamma(\xi)| \le C(b-a)$ и, значит, $|\gamma| \le C(b-a) < \infty$.

Пример 3.3. Любая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема, так как является липшицевой (с константой Липшица, равной максимуму модуля вектора скорости кривой).

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

Предложение 3.4 (Обобщенное неравенство треугольника)**.** *Пусть точки x, $y \in X$ соединяются некоторой кривой γ, тогда $|\gamma| \ge |xy|$.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Для любых $x, y \in X$ положим

$$d_{in}(x,y) = \inf\bigl\{|\gamma| : \gamma \text{ — кривая, соединяющая } x \text{ и } y\bigr\},$$

где, как и выше, мы полагаем $\inf\emptyset = \infty$.

Замечание 3.5. Из 3.4 и ряда тривиальных соображений вытекает, что d_{in} является метрикой на X (не обязательно конечной), причем для любых $x, y \in X$ выполняется $d_{in}(x, y) \geq |xy|$. Если исходная метрика на X является конечной, и любые две точки из компоненты линейной связности соединяются спрямляемой кривой, то классы эквивалентности, заданной условием $d_{in} < \infty$, совпадают с компонентами линейной связности.

Определение 3.6. Если определенная выше метрика d_{in} совпадает с исходной, то исходная метрика называется *внутренней*.

Замечание 3.7. Легко проверяется (сделайте это), что d_{in} является внутренней метрикой. Это приводит к тому, что d_{in} часто называют *внутренней метрикой, порожденной исходной*.

Обозначим через $\Omega(X)$ семейство всех кривых в метрическом пространстве X.

Определение 3.8. Каждое отображение $\Psi\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ называется *функционалом*. Обозначим через $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ функционал, определенный правилом $\mathcal{L}\colon \gamma \mapsto |\gamma|$, и назовем его *функционалом длины*.

Отметим, что на $\Omega(X)$ определены

(1) *ограничение* каждой кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ на каждый подотрезок $[c, d] \subset [a, b]$;

(2) *склейка* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ тех пар кривых $\gamma_1\colon [a, b] \to X$, $\gamma_2\colon [b, c] \to X$, для которых $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, а именно, $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)\colon [a, c] \to X$ — кривая, ограничения которой на $[a, b]$ и $[b, c]$ совпадают соответственно с γ_1 и γ_2;

(3) *замена параметра* и эквивалентность, отождествляющая кривые, отличающиеся на замену параметризации.

Следующий результат описывает свойства функционала длины.

Теорема 3.9. *Пусть $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ — функционал длины, определенный на кривых метрического пространства X. Тогда $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами*:

(1) **аддитивность:** *если $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ — склейка кривых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X)$, то $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$*;

(2) **непрерывность:** *для любой спрямляемой $\gamma\colon [a, b] \to X$ функция $f(t) = \mathcal{L}\bigl(\gamma|_{[a,t]}\bigr)$ непрерывна*;

(3) **независимость от параметра:** *для каждой кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ и замены параметра $\psi\colon [c, d] \to [a, b]$ выполняется $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma \circ \psi)$*;

(4) **согласованность с топологией:** *для каждого $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $y \in X \setminus U_\varepsilon(x)$ и кривой $\gamma \in \Omega(X)$, соединяющей x и y, выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \geq \varepsilon$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь пункт (2), докажем его. Выберем произвольное $t \in [a, b]$ и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при всех $s \in [a, b] \cap (t - \delta, t + \delta)$ выполняется $\bigl|f(t) - f(s)\bigr| < \varepsilon$. Положим $\ell = |\gamma|$. По определению, существует разбиение ξ отрезка $[a, b]$ такое, что $\ell - \varepsilon/2 < \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| \leq \ell$. Если $t \notin \xi$, добавим его к ξ (полученное разбиение обозначим той же буквой). Ясно, что для полученного разбиения по-прежнему выполняется $\ell - \varepsilon/2 < \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| \leq \ell$.

В качестве δ_1 возьмем расстояние от t до ближайшего отличного от t элемента разбиения ξ. Так как подразбиениями разбиения ξ мы можем менять длину ломаной $L_\gamma(\xi)$ лишь в пределах $(\ell - \varepsilon/2, \ell]$, то для каждого $s \in [a, b] \cap (t - \delta_1, t + \delta_1)$ длина $\ell_{ts} = \bigl|f(t) - f(s)\bigr|$ фрагмента кривой γ между точками $\gamma(t)$ и $\gamma(s)$ отличается от $\bigl|\gamma(t)\gamma(s)\bigr|$ менее чем на $\varepsilon/2$. С другой стороны, в силу непрерывности отображения γ, существует такое $\delta_2 > 0$, что при всех $s \in [a, b] \cap (t - \delta_2, t + \delta_2)$ имеем $\bigl|\gamma(t)\gamma(s)\bigr| < \varepsilon/2$. Осталось положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

Приведем еще одно важное свойство функционала длины $\mathcal{L}$.

Предложение 3.10 (Полунепрерывность снизу)**.** *Функционал $\mathcal{L}$ полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности $\gamma_n\colon [a, b] \to X$ спрямляемых кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой кривой γ, имеем*

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n).$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших n выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$, а раз так, то $\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получим требуемое.

Итак, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Выберем такое разбиение $\xi = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ отрезка $[a, b]$, что $\mathcal{L}(\gamma) - \big|L_\gamma(\xi)\big| < \varepsilon/2$. Существует N такое, что для любого $n > N$ и всех i выполняется $\big|\gamma(t_i)\gamma_n(t_i)\big| < \frac{\varepsilon}{4m}$. Отсюда мгновенно вытекает, что

$$\big|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\big| < \big|\gamma_n(t_{i-1})\gamma_n(t_i)\big| + \frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому $\big|L_\gamma(\xi)\big| < \big|L_{\gamma_n}(\xi)\big| + \varepsilon/2$. Таким образом,

$$\mathcal{L}(\gamma) < \big|L_\gamma(\xi)\big| + \varepsilon/2 < |L_{\gamma_n}(\xi)| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

3.2 Некоторые свойства пространств с внутренней метрикой

Общие метрические пространства могут геометрически сильно отличаться от $\mathbb{R}^n$. Например, в дискретных пространствах шары ненулевого радиуса могут совпадать с их центрами. В частности, расстояние от произвольной точки до такого шара будет равняться расстоянию от этой точки до центра. В пространствах с внутренней метрикой такого не возникает.

Теорема 3.11 (условие Хопфа–Ринова)**.** *Пусть X — пространство с конечной внутренней метрикой, $x, y \in X$, $x \ne y$, и $0 < r \le |xy|$. Тогда*

$$\big|yU_r(x)\big| = |xy| - r.$$

Замечание 3.12. Для общих метрических пространств X, даже с конечной метрикой, теорема не имеет места. Действительно, для метрического пространств $X = \{x, y\}$, $|xy| = 1$, положим $r = 0.5$, тогда $U_r(x) = \{x\}$, $\big|yU_r(x)\big| = 1 \ne |xy| - r = 0.5$.

Доказательство теоремы 3.11. Для любой точки $z \in U_r(x)$ имеем $|zy| \ge |xy| - |zx| > |xy| - r$, поэтому $\big|yU_r(x)\big| \ge |xy| - r$. Докажем, что имеет место и обратное неравенство.

Для каждого $0 < \varepsilon < r$ рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma\colon [0, 1] \to X$, $x = \gamma(0)$ и $y = \gamma(1)$, для которой $|\gamma| \le |xy| + \varepsilon$. Определим непрерывную функцию $f(t) = \big|x\gamma(t)\big|$, $f(0) = 0$, $f(1) = |xy|$, и выберем произвольное t_0 такое, что $f(t_0) = r - \varepsilon$. Обозначим через γ_1 часть кривой γ между 0 и t_0, а через γ_2 — оставшуюся часть кривой γ. Тогда $|\gamma_1| \ge r - \varepsilon$ по предложению 3.4, поэтому $|\gamma_2| \le |xy| - r + 2\varepsilon$ и, по тому же предложению, $\big|\gamma(t_0)y\big| \le |\gamma_2| \le |xy| - r + 2\varepsilon$. Но $\gamma(t_0) \in U_r(x)$, поэтому $\big|yU_r(x)\big| \le |xy| - r + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое. $\square$

Замечание 3.13. Условие Хопфа–Ринова может выполняться и в пространствах, метрика которых не является внутренней, например, в метрическом пространстве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел (со стандартной функцией расстояния).

Приведем некоторые следствия из теоремы 3.11. Предварительно дадим необходимое определение.

Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$, $r \ge 0$. Положим $B_r(x) = \{y \in X : |xy| \le r\}$ и назовем *замкнутым шаром с центром в x радиуса r* или *замкнутой r-окрестностью точки x*.

Отметим, что $B_r(x)$ является замкнутым множеством, вообще говоря, отличающимся от замыкания открытого шара $U_r(x)$: если, как и в приведенном выше примере, X состоит из двух точек x и y, находящихся на расстоянии 1, то $U_1(x) = \{x\}$, $B_1(x) = \{x, y\}$, $\overline{U_1(x)} = \{x\} \ne B_1(x)$. Однако, если метрика пространства X — внутренняя, то теорема 3.11 мгновенно влечет следующий результат.

Следствие 3.14. *Пусть X — пространство с конечной внутренней метрикой. Тогда $B_r(x) = \overline{U_r(x)}$.*

Доказательство. Точка y является точкой прикосновения шара $U_r(x)$, если и только $|yU_r(x)| = 0$, откуда $|xy| \le r$, т.е. $y \in B_x(r)$ и, значит, $\overline{U_r(x)} \subset B_r(x)$. Докажем обратное включение.

Пусть $y \in B_r(x)$. Если $|xy| < r$, то $y \in U_r(x) \subset \overline{U_r(x)}$. Если же $|xy| = r$, то, по теореме 3.11, имеем $|yU_r(x)| = |xy| - r = 0$, откуда $y \in \overline{U_r(x)}$. $\square$

Следующий результат будет использован при доказательстве первой части теоремы Хопфа–Ринова.

Следствие 3.15. *Пусть X — пространство с конечной внутренней метрикой и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждой ε-сети S в шаре $B_r(x) \subset X$ и любых $\delta' > \delta > 0$ имеем $B_{r+\delta}(x) \subset \cup_{s\in S} B_{\varepsilon+\delta'}(s)$.*

Доказательство. Для любой точки $y \in B_{r+\delta}(x)$ имеем $|xy| \le r+\delta$, поэтому или $y \in U_r(x)$ и, значит, $|yU_r(x)| = 0$, или же, по теореме 3.11, выполняется $\big|yU_r(x)\big| \le \delta$. Таким образом, для любого $\delta' > \delta$ существует такое $z \in U_r(x) \subset B_r(x)$, что $|yz| < \delta'$. С другой стороны, существует $s \in S$, для которого $U_\varepsilon(s) \ni z$, откуда $|sy| \le |sz| + |zy| < \varepsilon + \delta'$, поэтому $y \in B_{\varepsilon+\delta'}(s)$, что и требовалось. □

3.3 Локальная компактность

Определение 3.16. Метрическое пространство X называется *локально компактным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $B_\varepsilon(x)$ компактен.

Замечание 3.17. Несложно проверяется, что локальную компактность пространства X можно определить следующим эквивалентным условием: для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность, у которой замыкание компактно.

Замечание 3.18. В отличие от компактности, локальная компактность, даже в сочетании с внутренней метрикой, не гарантирует полноту метрического пространства. Очевидный пример — открытый шар в евклидовом пространстве. Другой пример — евклидово пространство с выброшенной точкой.

Теорема 3.19 (Хопф–Ринов, часть 1)**.** *Пусть X — локально компактное пространство с конечной внутренней метрикой. Тогда пространство X полно, если и только если каждый замкнутый шар в X компактен.*

Доказательство. Пусть сначала известно, что каждый замкнутый шар компактен. Докажем полноту. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Тогда существует r такое, что все x_n содержатся в $B_r(x_1)$. По 2.1 (9), шар $B_r(x_1)$ является полным, поэтому последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к некоторой точке $x \in B_r(x) \subset X$, что и требовалось.

Пусть теперь пространство X полно. Определим на X функцию $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\rho(x) = \sup\{r > 0 : \text{шар } B_r(x) \text{ компактен}\}.$$

Лемма 3.20. *Пусть существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\rho(x_0) = \infty$. Тогда каждый шар $B_r(x)$ компактен и, значит, ρ тождественно равна ∞.*

Доказательство. При каждых x и $r > 0$ шар $B_r(x)$ содержится в некотором компактном шаре $B_{r'}(x_0)$, поэтому, в силу замкнутости множества $B_r(x)$, шар $B_r(x)$ также компактен. □

Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и покажем, что $\rho(x_0) = \infty$ (в силу леммы 3.20, этого достаточно для завершения доказательства теоремы).

Предположим противное, т.е. что $\rho(x_0) < \infty$. Тогда, в силу леммы 3.20, функция ρ везде конечна.

Легко доказывается следующий результат.

Лемма 3.21. *Функция ρ является 1-липшицевой и, значит, непрерывной.*

Лемма 3.22. *В сделанных предположениях, шар $B_{\rho(x)}(x)$ компактен при каждом x.*

Доказательство. Положим $R = \rho(x)$. Так как шар $B_R(x)$ — замкнутое подмножество полного пространства X, то этот шар является также полным. Следовательно, по 2.1 (9), достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ в этом шаре можно выбрать конечную ε-сеть. Ясно, что это свойство можно проверить для достаточно малых ε. Поэтому мы, без ограничения общности, будем предполагать, что $R - \varepsilon/2 > 0$.

По определению R, существует такое r', $R - \varepsilon/2 < r' \le R$, для которого шар $B_{r'}(x)$ является компактом. В силу 2.1 (9), в $B_{r'}(x)$ существует конечная $(\varepsilon/2)$-сеть S. Покажем, что S является ε-сетью для $B_R(x)$, чем и завершим доказательство леммы.

Итак, выберем произвольную точку $y \in B_R(x)$. По 3.11, имеем $\big|yU_{r'}(x)\big| \le R - r' < \varepsilon/2$, т.е. существует $z \in U_{r'}(x)$, для которого $|zy| < \varepsilon/2$. Но для z существует $s \in S$ такая, что $|zs| < \varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника. □

Так как ρ — непрерывная функция, ее ограничение на компакт $B_R(x_0)$ достигает своего минимума. Обозначим этот минимум через ε, тогда, по лемме 3.22, шары $B_\varepsilon(x)$ компактны при всех $x \in B_R(x_0)$. Пусть S — конечная $\varepsilon/3$-сеть в $B_R(x_0)$, существующая в силу компактности $B_R(x_0)$. Положим $W = \cup_{s\in S} B_\varepsilon(s)$. Так как все шары $B_\varepsilon(s)$ — компакты, множество W также является компактом. Воспользуемся следствием 3.15, положив $\delta = \varepsilon/3$ и $\delta' = 2\varepsilon/3$. Тогда, в силу этого следствия,

$$B_{R+\delta}(x_0) = B_{R+\varepsilon/3}(x_0) \subset \cup_{s\in S} B_{\varepsilon/3+\delta'}(s) = \cup_{s\in S} B_\varepsilon(s) = W,$$

поэтому шар $B_{R+\varepsilon/3}(x_0)$ компактен, противоречие с выбором R. Теорема доказана. $\square$

Определение 3.23. Метрическое пространство, в котором каждый замкнутый шар компактен, называется *ограниченно компактным.*

Замечание 3.24. Таким образом, теорема 3.19 утверждает, что метрическое пространство с конечной внутренней метрикой ограниченно компактно, если и только если оно локально компактно и полно.

Замечание 3.25. Ограниченная компактность, очевидно, может быть переформулирована следующим эквивалентным образом: *каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно.*

Лекция 4

Сходимость последовательностей кривых, теорема Арцела–Асколи, кратчайшие кривые.

4.1 Липшицевость, сходимость и равномерная сходимость

В данном разделе мы сформулируем и докажем ряд полезных технических результатов относительно сходимости липшицевых отображений.

Пусть $f_n\colon X \to Y$ некоторое семейство произвольных (не обязательно непрерывных) отображений метрических пространств. Говорят, что последовательность f_n *поточечно сходится* к отображению $f\colon X \to Y$, если для каждого $x \in X$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Последовательность f_n *равномерно сходится* к отображению $f\colon X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для каждого $n \ge N$ выполняется $\bigl|f(x)f_n(x)\bigr| < \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Замечание 4.1. Определим описанные выше сходимости, представив отображения f_n точками множества $\prod_{x\in X} Y$, которое, напомним, мы определяли как семейство Y^X всех отображений из X в Y. Зададим на $\prod_{x\in X} Y$ две разные топологии, в которых сходимость точек f_n будет соответствовать поточечной и равномерной сходимости отображений f_n.

Начнем со случая поточечной сходимости. Топологию на $\prod_{x\in X} Y$, называемую *тихоновской*, зададим базой, состоящей из всех множеств вида $\prod_{x\in X} V(x)$, где $\{V(x)\}_{x\in X}$ — семейство непустых открытых подмножеств Y таких, что для всех $x \in X$, кроме их конечного числа, выполняется $V(x) = Y$ (покажите, что так определенное семейство действительно образует базу топологию). Тогда сходимость в этой топологии точек f_n к точке f равносильна поточечной сходимости отображений f_n к отображению f (проверьте).

Чтобы смоделировать равномерную сходимость, зададим на $\prod_{x\in X} Y$ метрику, порожденную нормой $\|\cdot\|_\infty$. Тогда равномерная сходимость отображений f_n к отображению f — это сходимость в топологии, порожденной этой метрикой.

Предложение 4.2. *Пусть X — компактное, а Y — произвольное метрические пространства, и пусть $f_n\colon X \to Y$ — последовательность C-липшицевых отображений, сходящихся поточечно к некоторому отображению $f\colon X \to Y$. Тогда f является C-липшицевым отображением, а последовательность f_n сходится к f равномерно.*

Доказательство. Чтобы проверить C-липшицевость отображения f, достаточно выполнить предельный переход в неравенстве $\bigl|f_n(x)f_n(x')\bigr| \le C \cdot |xx'|$ при произвольных фиксированных $x,\, x' \in X$.

Докажем теперь равномерную сходимость. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует N, для которого при всех $n > N$ и всех $x \in X$ выполняется $\bigl|f(x)f_n(x)\bigr| < \varepsilon$.

Положим $\delta = \varepsilon/(3C)$, и пусть $\{x_i\} \subset X$ — конечная δ-сеть. Выберем N таким, чтобы при всех $n > N$ и всех i выполнялось $\bigl|f(x_i)f_n(x_i)\bigr| < \varepsilon/3$.

Фиксируем произвольное $x \in X$. Существует такое i, что $|xx_i| < \delta$. Из C-липшивости отображений f_n и f заключаем, что $\bigl|f_n(x)f_n(x_i)\bigr| \le C \cdot |xx_i| < \varepsilon/3$ и, аналогично, $\bigl|f(x)f(x_i)\bigr| < \varepsilon/3$, откуда

$$\bigl|f(x)f_n(x)\bigr| \le \bigl|f(x)f(x_i)\bigr| + \bigl|f(x_i)f_n(x_i)\bigr| + \bigl|f_n(x_i)f_n(x)\bigr| < \\ < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Следующий вариант предыдущего утверждения полезен при изучении кривых.

Следствие 4.3. *Пусть X — метрическое пространство, а $\gamma_n\colon [a,b] \to X$ — последовательность C-липшицевых кривых, сходящихся поточечно к отображению $\gamma\colon [a,b] \to X$. Тогда γ является C-липшицевой кривой, а последовательность γ_n сходится к γ равномерно.*

Приведенное далее предложение доказывается аналогично предложению 4.2.

Предложение 4.4. *Пусть X — компактное, Y — произвольное метрические пространства, и $f_n\colon X \to Y$ — последовательность C-липшицевых отображений. Предположим, что для некоторого всюду плотного подмножества $Z \subset X$ последовательность $f_n|_Z$ сходится поточечно. Тогда и сама последовательность f_n сходится поточечно к некоторому отображению $f\colon X \to Y$ и, значит, в силу предложения* 4.2*, эта сходимость равномерная, а отображение f является C-липшицевым.*

Следствие 4.5. *Пусть $\gamma_n\colon [a,b] \to X$ — последовательность C-липшицевых кривых в метрическом пространстве X. Предположим, что для некоторого всюду плотного подмножества $Z \subset [a,b]$ последовательность отображений $\gamma_n|_Z$ сходится поточечно. Тогда и последовательность кривых γ_n сходится поточечно к некоторой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ и, значит, в силу следствия* 4.3*, эта сходимость равномерная, а кривая γ является C-липшицевой.*

4.2 Натуральная и равномерная параметризации кривых

Определение 4.6. Кривая $\gamma(s)$, $s \in [a,b]$, называется *натурально параметризованной*, а параметр s — *натуральным*, если для любых $a \le s_1 \le s_2 \le b$ выполняется $\bigl|\gamma|_{[s_1,s_2]}\bigr| = s_2 - s_1$. Параметр t кривой $\gamma(t)$ называется *равномерным*, а кривая $\gamma(t)$ — *равномерно параметризованной*, если для некоторого $\lambda > 0$ кривая $\gamma(s/\lambda)$ натурально параметризована. При этом число λ называется *скоростью равномерно параметризованной кривой* γ.

Замечание 4.7. Если кривая $\gamma(s)$, $s \in [a,b]$, параметризована равномерно и λ — ее скорость, то отображение γ является λ-липшицевым. Действительно, кривая $\delta(s) = \gamma(s/\lambda)$ натурально параметризована, поэтому для любых $a \le s_1 \le s_2 \le b$ выполняется

$$\bigl|\gamma(s_1)\gamma(s_2)\bigr| = \bigl|\delta(\lambda s_1)\delta(\lambda s_2)\bigr| \le \bigl|\delta|_{[\lambda s_1,\lambda s_2]}\bigr| = \lambda(s_2 - s_1).$$

Замечание 4.8. Не всякая кривая может быть параметризована натуральным параметром, например, это нельзя сделать с кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$, $a \ne b$, являющейся отображением в точку. Более общо, это нельзя сделать, если кривая γ "останавливается" на некотором невырожденном отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, т.е. ограничение γ на этот отрезок есть отображение в точку. Если запретить такие "остановки", то этого оказывается достаточным для существования натуральной параметризации. Кривые, не содержащие определенных выше остановок, называются *безостановочными*.

В [7] предлагается расширить класс замен параметра, а именно, рассматривать монотонные (не обязательно строго монотонные) сюръективные отображения между параметризующими отрезками. Оказывается, при таком определении замены параметризации удается ввести натуральный параметр на любой спрямляемой кривой.

Определение 4.9. Скажем, что кривые $\gamma\colon [a,b] \to X$ и $\bar\gamma\colon [c,d] \to X$ получены друг из друга *монотонной заменой параметра*, если или существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ такое, что $\bar\gamma = \gamma \circ \varphi$, или же существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ такое, что $\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$.

Имеет место следующий результат (докажите).

Предложение 4.10. *Для произвольной спрямляемой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве X существует натурально параметризованная кривая $\bigl[0,|\gamma|\bigr] \to X$ и равномерно параметризованная кривая $[0,1] \to X$ со скоростью $|\gamma|$, причем обе эти кривые получены из γ некоторыми монотонными заменами параметра.*

Замечание 4.11. Идея доказательства предложения 4.10 состоит в том, чтобы от кривой γ перейти к безостановочной кривой $\delta\colon [c,d] \to X$, а затем на последней ввести натуральную параметризацию, взяв в качестве замены параметра функцию, обратную к строго монотонной функции $\psi(s) = \bigl|\delta|_{[c,s]}\bigr|$. Чтобы получить кривую δ, предлагается ввести на отрезке $[a,b]$ следующее отношение эквивалентности: точки t и t' находятся в отношении, если и только если ограничение отображения γ на отрезок между t и t' постоянно. Факторизуя отрезок $[a,b]$ по этому отношению, снова получим некоторый отрезок $[c,d]$, причем отображение γ индуцирует на $[c,d]$ отображение δ по следующему правилу: если $\pi\colon [a,b] \to [c,d]$ — каноническая проекция, соответствующая введенной эквивалентности, то для каждого $s \in [c,d]$ отображение γ постоянно на $\pi^{-1}(s)$, так что корректно определено отображение $\delta\colon s \mapsto \gamma\bigl(\pi^{-1}(s)\bigr)$.

Поучительным пример — кривая, являющаяся параметризацией отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$ канторовой лестницей. Хотя множество, на котором канторова лестница непостоянна — это канторово множество, имеющее меру ноль, тем не менее фактор отрезка по отношению, стягивающему в точки отрезки постоянства канторовой лестницы, гомеоморфен невырожденному отрезку (докажите). Если этот гомеоморфизм задать с помощью самой канторовой лестницы, то мы получим натуральную параметризацию.

4.3 Теорема Арцела–Асколи

Развивая идеи из раздела 4.1, сформулируем и докажем вариант знаменитой теоремы Арцела–Асколи. Предварительно дадим необходимое определение.

Определение 4.12. Пусть $\gamma_n\colon [a_n,b_n] \to X$ — последовательность кривых в метрическом пространстве X. Будем говорить, что эта последовательность *сходится* (*равномерно сходится*) к кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$, если существуют такие кривые $\bar\gamma_n\colon [c,d] \to X$ и $\bar\gamma\colon [c,d] \to X$, полученные соответственно из γ_n и γ монотонными заменами параметра, что отображения $\bar\gamma_n$ сходятся (равномерно сходятся) к отображению $\bar\gamma$.

Теорема 4.13 (Арцела–Асколи)**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство, и γ_n — последовательность кривых в X. Предположим, что длины кривых γ_n равномерно ограничены, т.е. существует такое число C, что $|\gamma_n| \le C$ для всех n. Тогда в этой последовательности существует подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой кривой длины не больше C.*

Доказательство. По предложению 4.10, монотонными заменами параметра из кривых γ_n можно получить равномерно параметризованные кривые $\bar\gamma_n\colon [0,1] \to X$, скорости которых не превосходят C. Из замечания 4.7 вытекает, что все кривые $\bar\gamma_n$ являются C-липшицевыми.

Выберем счетное всюду плотное подмножество $Z \subset [0,1]$, тогда диагональный процесс Кантора позволяет построить такую подпоследовательность $\bar\gamma_{n_i}$, которая поточечно сходится на Z к некоторому отображению $f\colon Z \to X$. По следствию 4.5, отображения $\bar\gamma_{n_i}\colon [0,1] \to X$ сходятся равномерно к некоторой C-липшицевой кривой $\gamma\colon [0,1] \to X$. По предложению 3.10, $|\gamma| \le \liminf_{n_i\to\infty} |\bar\gamma_{n_i}| \le C$, что и требовалось. □

Замечание 4.14. Классическая теорема Арцела–Асколи использует понятия равностепенно непрерывного и равномерно ограниченного семейств отображений, определения которых приведем в несколько более общей ситуации. А именно, пусть X и Y — произвольные метрические пространства, а F — некоторое семейство отображений $f\colon X \to Y$. Семейство F называется *равномерно ограниченным*, если в Y существует такой шар $B_r(y)$, что $f(X) \subset B_r(y)$ для любого $f \in F$. Семейство F называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, x' \in X$, $|xx'| < \delta$, и для любой $f \in F$ выполняется $|f(x)f(x')| < \varepsilon$.

Классическая теорема Арцела–Асколи утверждает, что равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная последовательность вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Так как равностепенная непрерывность влечет непрерывность каждой функции, то, благодаря равномерной сходимости, предельная функция будет непрерывной.

Более общая формулировка теоремы Арцела–Асколи может быть получена так: заменяем $[a,b]$ на компактное метрическое пространство X; заменяем функции на отображения в некоторое метрическое пространство

Y; условие равномерной ограниченности последовательности реализуем в виде условия компактности Y; последовательность заменяем на произвольное семейство отображений F; тогда теорема утверждает, что если семейство F равностепенно непрерывно, то каждая последовательность $f_1, f_2, \ldots \in F$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.

В приведенном нами варианте теоремы Арцела–Асколи (теорема 4.13) пространство X совпадает с отрезком $[0,1]$, а условие равностепенной непрерывности возникает благодаря равномерной параметризации кривых с учетом того, что длины кривых равномерно ограничены.

Упражнение 4.15. Можно ли обобщить теорему 4.13, заменив отрезки $[a_n, b_n]$ на произвольные компакты K_n, гомеоморфные некоторому компакту K, и не добавляя условие равностепенной непрерывности?

4.4 Существование кратчайших кривых

Применим предыдущие результаты для изучения кривых наименьшей длины.

Определение 4.16. Спрямляемая кривая в метрическом пространстве называется *кратчайшей*, если ее длина равна точной нижней грани длин всех кривых, соединяющих ее концы.

Замечание 4.17. Если X — пространство с внутренней метрикой, то кривая γ в X, соединяющая x и y, является *кратчайшей*, если и только если $|xy| = |\gamma|$.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 4.18. *Кривая в метрическом пространстве является кратчайшей, если и только если каждый ее отрезок — кратчайшая кривая.*

Определение 4.19. Кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве X называется *локально кратчайшей*, если для каждого $t \in [a,b]$ существует такой содержащий t интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, что $\gamma|_{[a,b]\cap[\alpha,\beta]}$ — кратчайшая кривая.

Определение 4.20. Равномерно параметризованная локально кратчайшая кривая называется *геодезической*.

Замечание 4.21. Натурально параметризованную кратчайшую геодезическую $\gamma\colon [a,b] \to X$ в пространстве с внутренней метрикой часто определяют другим, эквивалентным способом, а именно, как изометричное вложение отрезка $[a,b]$ в метрическое пространство X.

Следствие 4.22. *Любые две точки x и y компактного метрического пространства X, которые соединяются спрямляемой кривой, соединяются также кратчайшей кривой.*

Доказательство. Пусть ℓ равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих x и y. Существует последовательность γ_n, для которой $|\gamma_n| \to \ell$. Но тогда длины кривых γ_n равномерно ограничены и применима теорема 4.13, в соответствии с которой в последовательности γ_n имеется подпоследовательность γ_{k_n}, равномерно сходящаяся к некоторой кривой γ. По 3.10, имеем $|\gamma| \le \liminf_{n\to\infty} |\gamma_{k_n}| = \ell$, но, по определению ℓ, выполняется $|\gamma| \ge \ell$, поэтому $|\gamma| = \ell$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. □

Следствие 4.23. *В ограниченно компактном пространстве X с конечной внутренней метрикой любые две точки соединяются кратчайшей кривой, причем длина этой кривой равна расстоянию между этими точками.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные различные точки $x, y \in X$. Так как метрика конечная и внутренняя, существует последовательность кривых γ_n, соединяющих x и y, для которой $|xy| = \lim_{n\to\infty} |\gamma_n|$. Тогда последовательность чисел $|\gamma_n|$ ограничена сверху некоторым числом C и, по предложению 3.4, все кривые γ_n лежат в замкнутом шаре $B_C(x)$. Так как пространство ограниченно компактное, шар $B_C(x)$ компактен, так что, в силу следствия 4.22, эти точки соединены в шаре $B_C(x)$ кратчайшей кривой γ. Так как γ не длиннее всех γ_n, имеем $|\gamma| \le |xy|$, поэтому γ — кратчайшая. □

Определение 4.24. Говорят, что конечная метрика пространства X является *строго внутренней*, если любые две точки из X соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.

4.5 Кратчайшие и середины

Определение 4.25. Точка z метрического пространства называется *серединой между точками x и y* этого пространства, если $|xz| = |yz| = \frac{1}{2}|xy|$.

Теорема 4.26. *Пусть X — полное метрическое пространство. Предположим, что для каждой пары точек $x, y \in X$ существует середина. Тогда метрика — строго внутренняя.*

Доказательство. Выберем произвольные две точки x и y из X. Мы покажем, что эти точки можно соединить кривой $\gamma\colon [0,1] \to X$, для которой $|\gamma| = |xy|$.

Будем последовательно определять отображение γ для различных точек отрезка $[0,1]$. Положим $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Далее, пусть $\gamma(1/2)$ — середина между x и y; $\gamma(1/4)$ — середина между $\gamma(0)$ и $\gamma(1/2)$, а $\gamma(3/4)$ — середина между $\gamma(1/2)$ и $\gamma(1)$. Продолжая этот процесс, определим γ на всех двоично-рациональных точках отрезка $[0,1]$, т.е. на всех точках вид $m/2^n$, где $0 \le m \le 2^n$, а $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что множество всех двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$ всюду плотно в $[0,1]$. Кроме того, несложно показывается, что построенное отображение γ является $|xy|$-липшицевым. Доказательство следующей технической леммы мы оставляем в качестве упражнения.

Лемма 4.27. *Пусть Z — всюду плотное подмножество метрического пространства X, а $f\colon Z \to Y$ — некоторое C-липшицево отображение в полное метрическое пространство Y. Тогда существует единственное непрерывное отображение $F\colon X \to Y$, продолжающее f. Более того, отображение F также является C-липшицевым.*

Итак, используя лемму 4.27, продолжим по непрерывности отображение γ на весь отрезок $[0,1]$, и полученную $|xy|$-липшицеву кривую вновь обозначим через γ. Как было замечено в примере 3.2, $|\gamma| \le |xy|\,|1-0| = |xy|$, откуда, в силу предложения 3.4, имеем $|\gamma| = |xy|$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. □

Замечание 4.28. Свойство метрики быть внутренней не достаточно для того, чтобы в полном метрическом пространстве существовали середины и кратчайшие кривые между любыми точками. Рассмотрим счетное семейство отрезков $[0, 1+1/n]$, $n \in \mathbb{N}$, каждый со стандартной метрикой, и склеим в одну точку A все их нули, а в другую точку B — все концы $1+1/n$. Если x и y принадлежат разным отрезкам, скажем, $[0,1+1/n]$ и $[0,1+1/m]$, то зададим расстояние между x и y равным $\min(x+y, 1-x+1/n+1-y+1/n)$ (т.е. на каждой паре склеенных отрезков рассматривается внутренняя метрика окружности). Тогда расстояние между A и B равно 1 и не достигается ни на какой кривой. Кроме того, для этих точек не существует середины.

Определение 4.29. Точка z метрического пространства (X,d) называется *ε-серединой между точками x и y* этого пространства, если $\big||xz| - \frac{1}{2}|xy|\big| < \varepsilon$ и $\big||yz| - \frac{1}{2}|xy|\big| < \varepsilon$.

Теорема 4.30. *Пусть X — полное метрическое пространство. Предположим, что для каждой пары точек $x, y \in X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина. Тогда метрика — внутренняя.*

Доказательство. В основе — такое же доказательство, как и у теоремы 4.26, только сейчас находим не строгие середины, а приближенные, следя за тем, чтобы суммарный “разброс” не был большим (используем тот факт, что $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$). □

Имеются также и обратные очевидные утверждения, даже без предположения полноты пространства.

Предложение 4.31. *В пространстве с внутренней (строго внутренней) метрикой для любых двух точек и любого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина (середина).*

Лекция 5

Кратчайшие в пространстве $\mathcal{H}(X)$.

Вернемся к изучению геометрии пространства $\mathcal{H}(X)$ замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X. **Всюду ниже будем предполагать, что метрика пространства X — конечная**.

Говоря про расстояние Хаусдорфа, мы определили открытую окрестность $U_r(A)$ для произвольного непустого подмножества A метрического пространства X. Теперь же нам также понадобятся замкнутые окрестности подмножеств. Напомним, что для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ мы положили $|xA| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\}$.

Определение 5.1. Для непустого $A \subset X$ и неотрицательного r (возможно, равного ∞) *замкнутой r-окрестностью множества A* или *замкнутым шаром радиуса r с центром в A* назовем множество $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \le r\}$.

Хорошо известно, что функция $f_A(x) = |xA|$ непрерывна и, поэтому, $B_r(A)$ является замкнутым множеством для любого непустого $A \subset X$. Ясно, что для ограниченного A множество $B_r(A)$ также ограничено. Тем самым, доказано следующее предложение.

Предложение 5.2. *Для любого метрического пространства X, каждого $A \in \mathcal{H}(X)$ и любого неотрицательного r имеем $B_r(A) \in \mathcal{H}(X)$.*

Также легко доказывается следующий результат.

Предложение 5.3. *Для любого метрического пространства X и любых непустых $A, B \subset X$ имеем*

$$d_H(A,B) = \inf\{r : A \subset B_r(B) \text{ и } B \subset B_r(A)\}.$$

Более того, если $r = d_H(A,B)$, то $A \subset B_r(B)$ и $B \subset B_r(A)$. Таким образом, $d_H(A,B)$ равно наименьшему r, для которого $A \subset B_r(B)$ и $B \subset B_r(A)$.

Доказательство. Первая часть предложения стандартна и ее доказательство оставляется в качестве упражнения. Для доказательства второй части, предположим противное, т.е. что без ограничения общности, существует $b \in B$, не лежащее в $B_r(A)$, т.е. $R := |bA| > r$. Но тогда для $r < s < R$ имеем $B \not\subset B_s(A)$, что противоречит определению $d_H(A,B)$. □

Перейдем к изучению множеств, лежащих между произвольными A и B из $\mathcal{H}(X)$. Для удобства изложения, введем следующее понятие.

Определение 5.4. Пусть W — произвольное метрическое пространство, $a, b \in W$, $|ab| = r$, $s \in [0,r]$. Будем говорить, что $c \in W$ *находится в s-положении между a и b*, если $|ac| = s$ и $|cb| = r - s$.

Следующий результат мгновенно получается из предложения 5.3.

Предложение 5.5. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B)$, $s \in [0,r]$. Тогда если множество $C \in \mathcal{H}(X)$ находится в s-положении между A и B, то $C \subset B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$.*

Обозначение 5.6. Множество $B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$ из предложения 5.5 будем обозначать через $C_s(A,B)$ или, если понятно, о каких A и B идет речь, то просто через C_s.

Замечание 5.7. Множество C_s лежит в $\mathcal{H}(X)$, если и только если $C_s \neq \emptyset$.

Приведем пример описания множеств, находящихся в s-положении между некоторыми A и B из $\mathcal{H}(X)$.

Предложение 5.8. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $r = |ab|$, $s \in [0, r]$. Тогда*

(1) *C_s представляет собой множество всех точек из X, находящихся между a и b в s-положении;*

(2) *C_s находится в s-положении между A и B, если и только если $C_s \neq \emptyset$;*

(3) *множество $C \in X$ находится в s-положении между A и B, если и только если C — непустое замкнутое подмножество C_s.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Для доказательства второго утверждения, кроме замечания 5.7, нужно еще показать, что C_s находится в s-положении. Мы проверим лишь $d_H(A, C_s) \le s$, так как неравенство $d_H(B, C_s) \le r - s$ доказывается абсолютно так же. В силу того, что для каждой $c \in C_s$ выполняется $|Ac| = s$, имеем $C_s \subset B_s(A)$. Так как A — одноточечно, имеем также $A \subset B_s(c) \subset B_s(C_s)$, что и требовалось.

Наконец, опишем все $C \in \mathcal{H}(X)$, находящиеся в s-положении между A и B. По предложению 5.5, каждое такое C является непустым замкнутым подмножеством C_s. Обратно, если C — непустое замкнутое подмножество C_s, то $C \in \mathcal{H}(X)$ и для произвольного $c \in C$ имеем $A \subset B_s(c) \subset B_s(C)$ и, аналогично, $B \subset B_{r-s}(C)$, поэтому C находится в s-положении между A и B. □

Замечание 5.9. В предложении 5.8 мы показали, что для одноточечных A и B все множества C, находящиеся в s-положении между A и B, — это, в точности, все непустые замкнутые подмножества C_s. Для неодноточечных множеств это, вообще говоря, неверно. В качестве примера рассмотрим на $X = \mathbb{R}$ отрезки $A = [0, 2]$ и $B = [3, 5]$, тогда $d_H(A, B) = 3$. Возьмем $s = 1.5$, тогда $C_s = [1.5, 3.5]$. Пусть $C = \{2.5\} \in C_s$. Тогда $d_H(A, C) = d_H(B, C) = 2.5$, так что $d_H(A, C) + d_H(B, C) > d_H(A, B)$.

Замечание 5.10. Если в предыдущем примере взять произвольное замкнутое подмножество C отрезка $C_s = [1.5, 3.5]$, содержащее границу $\partial C_s = \{1.5, 3.5\}$ этого отрезка, то получим $d_H(A, C) = d_H(B, C) = 1.5 = s$. Это демонстрирует, что в s-положении между данными A и B может находиться более одного (даже бесконечно много) множеств $C \in \mathcal{H}(X)$.

Следующая теорема доказана в [10] для случая $X = \mathbb{R}^n$.

Теорема 5.11. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Тогда для любых A, $B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$, $s \in [0, r]$, множество $C_s = C_s(A, B)$ принадлежит $\mathcal{H}(X)$ и находится в s-положении между A и B.*

Упражнение 5.12. Приведите пример метрического пространства X и подмножеств $A, B \in \mathcal{H}(X)$, для которых некоторое множество C_s не лежит в $\mathcal{H}(X)$. Приведите пример, в котором $C_s \in \mathcal{H}(X)$, но C_s не находится в s-положении между A и B.

Доказательство теоремы 5.11. По теореме 3.19, пространство X — ограниченно компактное. В частности, множество $\mathcal{H}(X)$ состоит из всех непустых компактных подмножеств X. По следствию 4.23, метрика пространства X — строго внутренняя.

Покажем, что множество C_s непусто. По определению хаусдорфова расстояния, для каждой точки $a \in A$ имеем $|aB| \le r$, и так как B — компакт, существует $b \in B$, для которого $|ab| = |aB|$. Так как метрика строго внутренняя, существует кривая $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, для которой $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ и $|ab| = |\gamma| \le r$. Так как функция $f(t) = \bigl|a\gamma(t)\bigr|$ непрерывна, $f(0) = 0$ и $f(1) \le r$, существует t_0 такое, что $\bigl|a\gamma(t_0)\bigr| \le s$ и $\bigl|b\gamma(t_0)\bigr| \le r - s$. Следовательно, $\gamma(t_0) \in C_s$ и, значит, $C_s \neq \emptyset$. В силу замечания 5.7, $C_s \in \mathcal{H}(X)$.

Покажем теперь, что $d_H(A, C_s) = s$ и $d_H(B, C_s) = r - s$. Для этого достаточно проверить, что $d_H(A, C_s) \le s$ и $d_H(B, C_s) \le r - s$, так как $d_H(A, B) = r$ и d_H удовлетворят неравенству треугольника. Докажем, что $d_H(A, C_s) \le s$ (второе неравенство получается ровно так же).

Так как $C_s \subset B_s(A)$, достаточно проверить, что $A \subset B_s(C_s)$. Как было показано выше, для каждой точки $a \in A$ существует выходящая из a кратчайшая кривая $\gamma(t)$ такая, что для некоторой ее точки $\gamma(t_0)$ выполняется $\bigl|a\gamma(t_0)\bigr| \le s$ и $\gamma(t_0) \in C_s$. Следовательно, $A \subset B_s(C_s)$, что и требовалось. □

Следствие 5.13. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой (=ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой). Тогда $\mathcal{H}(X)$ — также ограниченно компактное, а метрика Хаусдорфа — строго внутренняя.*

Доказательство. Это вытекает из теорем 2.13 и 4.26. □

На самом деле, то, что метрика пространства $\mathcal{H}(X)$ из следствия 5.13 является строго внутренней, можно доказать явно, предъявив для каждой пары точек пространства $\mathcal{H}(X)$ соединяющую их кратчайшую кривую.

Следствие 5.14. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой, $A, B \in \mathcal{H}(X)$, и $r = d_H(A,B)$. Тогда $\gamma(s) = C_s(A,B)$, $s \in [a,b]$, является кратчайшей кривой, соединяющей A и B, причем длина кривой γ равна $d_H(A,B)$, а параметр s — натуральный.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $0 \le t < s \le r$, тогда $d_H(A,C_t) = t$, $d_H(C_t,B) = r-t$, $d_H(A,C_s) = s$, $d_H(C_s,B) = r-s$. Мы покажем, что $d_H(C_t,C_s) = s-t$, чем и завершим доказательство. Так как, в силу следствия 5.13, метрика пространства $\mathcal{H}(X)$ — строго внутренняя, точка C_t соединяется с A и B кратчайшими кривыми δ_A и δ_B соответственно, которые вместе дают кратчайшую кривую δ^t, соединяющую A и B. Выберем на δ^t натуральный параметр $u \in [0,r]$, $\delta^t(0) = A$, $\delta^t(r) = B$, тогда $\delta^t(s)$ находится в s-положении между A и B. По предложению 5.5, имеем $\delta^t(s) \subset C_s$. Так как $d_H\big(C_t, \delta^t(s)\big) = s-t$, то $C_t \subset B_{s-t}\big(\delta^t(s)\big)$ и, тем более, $C_t \subset B_{s-t}(C_s)$. Аналогично показываем, что $C_s \subset B_{s-t}(C_t)$, но тогда $d_H(C_t,C_s) \le s-t$. Однако, по неравенству треугольника, имеем

$$d_H(C_t,C_s) \ge d_H(A,B) - d_H(A,C_t) - d_H(C_s,B) = \\ = r - t - (r-s) = s-t,$$

откуда $d_H(C_t,C_s) = s-t$, что и требовалось. □

Теорема 5.15. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B) > 0$, $s \in (0,r)$, $0 < \varepsilon \le \min\{s, r-s\}/2$. Предположим, что для некоторой точки $p \in C_s$ выполняется $U_\varepsilon(p) \subset C_s$. Тогда $C_s \setminus U_\varepsilon(p)$ находится в s-положении между A и B.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.11, заключаем, что X — ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой.

Положим $D = C_s \setminus U_\varepsilon(p)$. Заметим, что D — замкнутое ограниченное множество. Покажем, что $D \ne \emptyset$. Так как $A \ne B$, без ограничения общности можно считать, что $B \not\subset B_s(A)$, поэтому существует $b \in B$, $b \notin C_s$, так что $|bC_s| > 0$ и, значит, $|pb| > \varepsilon$. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, — кратчайшая кривая, для которой $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = b$. В силу сказанного выше, имеем $|\gamma| > \varepsilon$, поэтому существует и единственно t_0, для которого $\big|p\gamma(t_0)\big| = \varepsilon$. Ясно, что $\gamma(t_0)$ является точкой прикосновение $U_\varepsilon(p)$ и, поэтому, в силу замкнутости C_s, имеем $\gamma(t_0) \in C_s$. С другой стороны, $\gamma(t_0) \notin U_\varepsilon(p)$, так что $\gamma(t_0) \in D$. Тем самым, мы доказали, что $D \in \mathcal{H}(X)$.

Докажем теперь, что D находится в s-положении между A и B. Как и в доказательстве теоремы 5.11, ограничимся проверкой того, что $A \subset B_s(D)$. Выберем произвольное $a \in A$ и докажем, что $a \in B_s(D)$. По теореме 5.11, имеем $A \subset B_s(C_s)$, поэтому $|aC_s| \le s$ и, в силу компактности C_s, существует $c \in C_s$, для которого $|ac| \le s$. Если $c \in D$, то $a \in B_s(D)$ и все доказано.

Пусть теперь $c \in U_\varepsilon(p)$. Если $a \in U_\varepsilon(p)$, то для построенной выше точки $\gamma(t_0) \in D$ имеем $\big|a\gamma(t_0)\big| \le |ap| + \big|p\gamma(t_0)\big| < 2\varepsilon \le s$, поэтому $a \in B_s(D)$. Если же $a \notin U_\varepsilon(p)$, то обозначим через γ кратчайшую кривую, соединяющую a и c. Тогда существует $\gamma(t_0)$, для которой $\big|p\gamma(t_0)\big| = \varepsilon$, так что $\gamma(t_0) \in D$ и $\big|a\gamma(t_0)\big| < |ac| \le s$, откуда снова $a \in B_s(D)$. □

Следствие 5.16. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B) > 0$, $s \in (0,r)$. Предположим, что внутренность множества C_s непуста. Тогда имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(X)$, которые находятся в s-положении между A и B.*

Доказательство. По теореме 5.15, существует $p \in C_s$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $U_\varepsilon(p) \subset C_s$ и $D_\varepsilon = C_s \setminus U_\varepsilon(p)$ находится в s-положении между A и B. Как было показано в доказательстве теоремы 5.15, для выбранных p и ε существует точка $x \in X$ такая, что $x \notin U_\varepsilon(p)$ (в доказательстве такой точкой оказалась $b \in B$). Снова выбираем кратчайшую кривую $\gamma(t)$, соединяющую p и x, и замечаем, что при каждом $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \le \varepsilon$ существует t_0, для которого $\gamma(t_0) \in U_{\varepsilon_2}(p) \setminus U_{\varepsilon_1}(p)$, т.е. все $U_\varepsilon(p)$, а вместе с ними и все D_ε, различны. □

Пример 5.17. Даже если множества A и B конечные, все равно между ними в s-положении может оказаться бесконечное число множеств. Простейшим примером является двухточечное подмножество $A = \{0,3\}$ вещественной прямой и одноточечное $B = \{1\}$. Тогда $d_H(A,B) = 2$ и при $s = 1$ имеем $C_s = [0,1] \cup \{2\}$, так что любое замкнутое $C \subset C_s$, содержащее $\{0,1,2\}$, находится в s-положении между A и B. Таких C, очевидно, бесконечно много. В приводимом ниже следствии выясняется еще одна причина того, почему в s-положении может оказаться бесконечно много множеств.

Следствие 5.18. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B) > 0$. Предположим, что существуют $a \in A$ и $b \in B$, для которых $|ab| < r$. Тогда при каждом $0 < s < r$ имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(X)$, которые находятся в s-положении между A и B.*

Доказательство. Положим $U = U_s(a) \cap U_{r-s}(b)$ и заметим, что $U \subset C_s$. Так как метрика строго внутренняя, множество U непусто (проверьте), поэтому C_s имеет непустую внутренность и применимо следствие 5.16. □

В приводимых ниже двух следствиях, X обозначает полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Оба результата непосредственно вытекают из следствия 5.18.

Следствие 5.19. *Предположим, что для $A \neq B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$ и некоторого $s \in (0, r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(X)$, находящихся в s-положении между A и B. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \geq r$.*

Следствие 5.20. *Предположим, что для $A \neq B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$ и некоторого $s \in (0, r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(X)$, находящихся в s-положении между A и B. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|aB| = |Ab| = r$.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Пару $\{A, B\}$ различных множеств из $\mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$, назовем *конфигурацией*, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \geq r$ (равносильное условие: если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|aB| = |Ab| = r$). Конфигурация $\{A, B\}$ называется *конечной*, если A и B имеют конечное число элементов, иначе конфигурация $\{A, B\}$ называется *бесконечной*.

Для дальнейшего также будет удобно ввести следующее обозначение. Пусть A и B — произвольная пара множеств из $\mathcal{H}(X)$. Для каждого вещественного s обозначим через $N_s(A, B)$ количество различных множеств из $\mathcal{H}(X)$, находящихся между A и B в s-положении. Отметим, что если $r = d_H(A, B)$, то при $s \notin [0, r]$ имеем $N_s(A, B) = 0$. Кроме того, $N_0(A, B) = N_r(A, B) = 1$. При оставшихся $s \in (0, r)$ величина $N_s(A, B)$ может быть как конечной, так и равной ∞. Ниже мы будем изучать свойства функции $N_s(A, B)$.

Замечание 5.21. Отметим следующее очевидное свойство. Пусть A и B — произвольные непустые конечные подмножества метрического пространства X, $r = d_H(A, B) > 0$, $s \in [0, r]$, тогда $C_s(A, B) = \cup_{a \in A,\, b \in B}\big(B_s(a) \cap B_{r-s}(b)\big)$. Отсюда вытекает, что если для любых $x, y \in X$ и любого $s \in \big[0, |xy|\big]$ пересечение $B_s(x) \cap B_{|xy|-s}(y)$ состоит из конечного числа точек, то для каждой конечной конфигурации $\{A, B\}$ имеем $N_s(A, B) < \infty$. В частности, это имеет место для евклидова пространства X. Более того, в случае евклидова пространства и одноточечных $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ имеем $N_s(A, B) = 1$ при всех $s \in \big[0, |ab|\big]$.

Пример 5.22. Рассмотрим на евклидовой плоскости правильный $2k$-угольник со стороной 1, и пусть A — множество вершин этого многоугольника, взятых через одну, а B — множество оставшиеся вершин. Тогда $d_H(A, B) = 1$, и при каждом $s \in (0, 1)$ множество C_s состоит из $2k$ точек $c_1, \ldots, c_{2k}$ (мы нумеруем эти точки последовательно при одном из двух обходов многоугольника). Легко видеть, что имеется более одного множества C, находящегося между A и B в s-положении, например, $C = C_s \setminus \{c_i\}$, или $C = C_s \setminus \{c_1, c_3, \ldots, c_{2k-1}\}$.

Упражнение 5.23. Докажите, что при $s \in (0, 1)$ и $k = 3$ в примере 5.22 выполняется $N_s(A, B) = 18$. Вычислите $N_s(A, B)$ при остальных k.

Отметим, что конечность числа множеств в s-положении может возникать не только для конечных конфигураций, но и для бесконечных.

Пример 5.24 (Бесконечная конфигурация с единственным множеством в каждом фиксированном положении)**.** Пусть A и B — две не совпадающие концентрические окружности радиусов $r_A > r_B$ соответственно на евклидовой плоскости. Тогда $r = d_H(A, B) = r_A - r_B$, и при каждом $s \in [0, r]$ множество C_s представляет собой окружность, концентрическую с A и B и имеющую радиус $r_A - s$. Пусть C — произвольное замкнутое подмножество C_s, не совпадающее с C_s. Тогда в C_s существует точка x, не принадлежащая C и, в силу замкнутости C, не являющаяся точкой прикосновения для C, т.е. при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется $|xC| > \varepsilon$. Но тогда A не содержится в $B_{s+\delta}(C)$ при достаточно малых δ, так что $d_H(A, C) > s$. Таким образом, в приведенном примере при каждом s имеем $N_s(A, B) = 1$.

Упражнение 5.25. Выясните, когда для двух отрезков A и B на евклидовой плоскости, $r = d_H(A, B)$, при каждом $s \in [0, r]$ выполняется $N_s(A, B) = 1$. Аналогичный вопрос про $N_s(A, B) < \infty$.

Приведем пример бесконечной конфигурации $\{A, B\}$, для которой $N_s(A, B) = \infty$. Таким образом, условие того, что пара образует конфигурацию, не является достаточным для конечности числа промежуточных множеств в одном и том же положении.

Пример 5.26. Пусть A — подмножество евклидовой плоскости, состоящее из окружности радиуса 2 и ее центра, а B — окружность с тем же центром, но радиуса 1. Тогда $d_H(A, B) = 1$, и при каждом $s \in (0, 1)$ множество C_s состоит из двух окружностей C' и C''. Пусть C' — меньшая из этих окружностей, и x — ее произвольная точка. Тогда каждое множество $C = C'' \cup \{x\}$ содержится в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и находится в s-положении между A и B.

Следующий результат, впрочем, в несколько другой формулировке и с достаточно странным доказательством, можно найти в [14].

Теорема 5.27. *Пусть X — ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой. Предположим дополнительно, что любые две точки из X соединяются единственной, с точностью до параметризации, кратчайшей кривой, и что кратчайшие кривые в X, содержащие общий невырожденный фрагмент, лежат в одной и той же кратчайшей кривой. Пусть $\{A, B\}$ — произвольная конфигурация и $r = d_H(A, B) > 0$. Тогда функция $f(s) = N_s(A, B)$ постоянна на $(0, r)$.*

Доказательство. Нам нужны следующие вспомогательные результаты.

Лемма 5.28. *Пусть W — произвольное метрическое пространство, $K \subset W$ — некоторый непустой компакт и $r \geq 0$. Тогда $B_r(K) = \cup_{x\in K} B_r(x)$.*

Доказательство. Ясно, что $\cup_{x\in K} B_r(x) \subset B_r(K)$. Докажем обратное включение.

Пусть w — произвольная точка из $B_r(K)$, тогда, по определению, $|wK| \leq r$. Так как K — компакт, то существует $x \in K$ такой, что $|wK| = |wx|$, откуда $w \in B_r(x)$, что и завершает доказательство. $\square$

Следствие 5.29. *Пусть W — произвольное метрическое пространство, K и L — произвольные непустые компактные подмножества W, и $r = d_H(K, L)$. Тогда для любого $s \in [0, r]$ выполняется*

$$C_s(K, L) = \bigcup_{x\in K,\, y\in L} \big(B_s(x) \cap B_{r-s}(y)\big).$$

Лемма 5.30. *Пусть W — произвольное пространство со строго внутренней метрикой. Тогда каждая пара точек x и y из W соединяется единственной, с точностью до замены параметра, кратчайшей кривой, если и только если для любых $x, y \in W$, $r = |xy|$, и любого $s \in [0, r]$ множество $B_s(x) \cap B_{r-s}(y)$ состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. Предположим сначала, что каждая пара точек из W соединяется единственной кратчайшей кривой. Соединим x и y натурально параметризованной кратчайшей кривой $\gamma(t)$, $t \in [0, r]$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(r) = y$, тогда для $p = \gamma(s)$ имеем $p \in B_s(x) \cap B_{r-s}(y)$, так что множество $B_s(x) \cap B_{r-s}(y)$ непусто. Более того, все отличные от p точки кривой γ не лежат в $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$. Предположим, что множество $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$ содержит некоторую точку $q \neq p$. Обозначим через γ_1 и γ_2 кратчайшие кривые, соединяющие q с x и y соответственно. Сделаем подходящие замены параметров на кривых γ_i и рассмотрим склейку δ полученных кривых. Тогда $|\delta| = |\gamma_1| + |\gamma_2| = |xq| + |qy| = |xy|$, поэтому δ — также кратчайшая кривая. Из сказанного выше вытекает, что γ и δ не получаются друг из друга заменой параметра, противоречие.

Пусть теперь каждое множество $B_s(x) \cap B_{r-s}(y)$ состоит ровно из одной точки. Покажем, что каждая пара точек пространства W соединяется единственной, с точностью до параметризации, кратчайшей кривой. Предположим противное, т.е. что для некоторых точек x и y существует по меньшей мере две кратчайших кривых γ и δ, не получающихся друг из друга заменой параметра и соединяющих x с y. Параметризуем эти кривые натуральным параметром $t \in [0, r]$ так, чтобы $\gamma(0) = \delta(0) = x$ и $\gamma(r) = \delta(r) = y$. Тогда существует $s \in [0, r]$ такое, что $\gamma(s) \neq \delta(s)$. Так как $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ содержатся в $B_s(x) \cap B_{r-s}(y)$, то это множество состоит более чем из одной точки, противоречие. $\square$

Применим следствие 5.29 и лемму 5.30 к конфигурации $\{A, B\}$. Так как при всех $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \geq r$, то каждое множество $C_s(a, b) := B_s(a) \cap B_{r-s}(b)$ или пусто (при $|ab| > r$), или, по лемме 5.30, состоит из одной точки (при $|ab| = r$), которую мы обозначим через $c_s(a, b)$. Таким образом, множество $C_s(a, b)$ пусто (непусто) при некотором s, если и только если оно пусто (соответственно, непусто) при любом $s \in [0, r]$.

Далее, обозначим через M множество всех пар (a, b), для которых $|ab| = r$, и определим отображения $\mu_s \colon M \to C_s$, положив $\mu_s \colon (a, b) \mapsto c_s(a, b)$. По лемме 5.29, имеем $C_s = \cup_{(a,b)\in M} C_s(a, b)$, поэтому все отображения μ_s являются сюръекциями. Покажем, что все μ_s при $s \in (0, r)$ инъективны.

Лемма 5.31. *Пусть (a_1,b_1) и (a_2,b_2) — два различных элемента из M, тогда $c_s(a_1,b_1)\ne c_s(a_2,b_2)$ при каждом $s\in(0,r)$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда натурально параметризованные кратчайшие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, $t\in[0,r]$, $\gamma_i(0)=a_i$, $\gamma_i(r)=b_i$, $i=1,\,2$, пересекаются в некоторой точке $p=c_s(a_1,b_1)=c_s(a_2,b_2)=\gamma_1(s)=\gamma_2(s)$, но не совпадают. Обозначим часть кривой γ_i от a_i до p через γ_{ia}, а от p до b_i — через γ_{ib}. Так как $|\gamma_{1a}|=|\gamma_{2a}|=s$ и $|\gamma_{1b}|=|\gamma_{2b}|=r-s$, имеем $|\gamma_{ia}|+|\gamma_{jb}|=r$ при всех $1\le i,\,j\le 2$. Так как $\{A,B\}$ — конфигурация, то $|a_ib_j|\ge r$, поэтому склейки кривых γ_{ia} и γ_{jb} являются кратчайшими кривыми.

Без ограничения общности, предположим, что $b_1\ne b_2$, тогда склейки $\gamma_{1a}\cdot\gamma_{1b}=\gamma_1$ и $\gamma_{1a}\cdot\gamma_{2b}$ являются различными кратчайшими кривыми, содержащими общий невырожденный фрагмент γ_{1a}, противоречие. $\square$

Лемма 5.31 и сделанное выше замечаниее доказывают, что при каждом $s\in(0,r)$ отображение μ_s является биекцией. В частности, все множества C_s, $s\in(0,r)$, равномощны между собой и имеют ту же мощность, что и множество M.

Лемма 5.32. *Пусть $s\in(0,r)$ и $c\in C_s$. Положим $\mu_s^{-1}(c)=\{(a,b)\}$. Тогда $B_s(c)\cap A=\{a\}$ и $B_{r-s}(c)\cap B=\{b\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности, будем считать, что $B_s(c)\cap A$ содержит $a'\ne a$. Но тогда $|a'b|\le|a'c|+|cb|\le r$. С другой стороны, так как $\{A,B\}$ — конфигурация, имеем $|a'b|\ge r$, откуда $|a'b|=r$, поэтому $(a',b)\in M$ и $c=\mu_s(a',b)=\mu_s(a,b)$, противоречие с леммой 5.31. $\square$

Для завершения доказательства теоремы, выясним, какие из подмножеств C множества C_s расположены между A и B. Так как $C\subset B_s(A)$ и $C\subset B_{r-s}(B)$, то C находится между A и B, если и только если $A\subset B_s(C)$ и $B\subset B_{r-s}(C)$, т.е. если для каждой точки из $a\in A$ существует $c\in C$ такая, что $a\in B_s(c)$ (аналогично, для точек из B).

Обозначим через π_A естественную проекцию множества M на A, т.е. $\pi_A\colon(a,b)\mapsto a$; аналогично, пусть π_B обозначает естественную проекцию множества M на B. По лемме 5.32, для каждого $c\in C_s$ имеем $B_s(c)\cap A=\pi_A\big(\mu_s^{-1}(c)\big)$, поэтому тот факт, что для каждой точки из $a\in A$ существует $c\in C$, для которой $a\in B_s(c)$, эквивалентен условию $\pi_A\big(\mu_s^{-1}(C)\big)=A$, т.е. сюръективности ограничения проекции π_A на $\mu_s^{-1}(C)$. Аналогично, соответствующее условие для B равносильно сюръективности ограничения проекции π_B на $\mu_s^{-1}(C)$. Итак, количество $N_s(A,B)$ различных $C\subset C_s$, находящихся в s положении между A и B, равно количеству подмножеств множества M, проекции которых на A и B сюръективны. Но последнее условие не зависит от s. $\square$

Исходя из теоремы 5.27, для каждой конечной конфигурации $\{A,B\}$ в ограниченно компактном пространстве со строго внутренней метрикой определим величину $N(A,B)$ равной $N_s(A,B)$ для произвольного $s\in\big(0,d_H(A,B)\big)$. Возникает естественный вопрос: чему могут быть равны числа $N(A,B)$? Имеет место удивительная теорема, доказанная в [14] и имеющая приложения в теории графов.

Теорема 5.33. *Для каждого натурального числа m, $1\le m<37$, кроме $m=19$, существует конечная конфигурация $\{A,B\}$ в некотором $\mathbb{R}^n$, для которой $N(A,B)=m$. Не существует ни конечной, ни бесконечной конфигурации в $\mathbb{R}^n$, для которой $N(A,B)=19$ и $N(A,B)=37$.*

Оказывается, теорема 5.33 приводит к нетривиальному результату теории графов. Если $\{A,B\}$ — некоторая конфигурация, $r=d_H(A,B)$, и M, как и выше, — множество всех пар (a,b), $a\in A$, $b\in B$, таких, что $|ab|=r$, то положим $V=A\cup B$ и $E=M$, тогда $G(A,B):=(V,E)$ является простым двудольным ориентированным графом, который будем называть *графом конфигурации* $\{A,B\}$. Ясно, что граф $G(A,B)$ — конечный, если и только если конфигурация $\{A,B\}$ — конечная.

Напомним, что семейство ребер двудольного графа называется *реберным покрытием*, если каждая вершина инцидентна некоторому ребру этого семейства. Заметим, что это условие эквивалентно сюръективности канонических проекций, каждая из которых отображает множество ребер на одну из двух долей, сопоставляя каждому ребру инцидентную ему вершину из рассматриваемой доли. Таким образом, в обозначениях доказательства теоремы 5.27, множество $C\subset C_s$ находится в s-положении, если и только если $\mu_s^{-1}(C)$ является реберным покрытием графа $G(A,B)$, так что $N(A,B)$ — число различных реберных покрытий графа $G(A,B)$.

Предложение 5.34. *Пусть $G=(V,E)$ — конечный двудольный граф с долями V_1 и V_2, имеющий хотя бы одно реберное покрытие. Тогда существует такое натуральное n и такое вложение $\nu\colon V\to\mathbb{R}^n$, что $\big\{\nu(V_1),\nu(V_2)\big\}$ — конфигурация, и отображение ν порождает изоморфизм графа G и соответствующего $G\big(\nu(V_1),\nu(V_2)\big)$ неориентированного графа H.*

Доказательство. Пусть $V_1 = \{a_1, \dots, a_p\}$, $V_2 = \{b_1, \dots, b_q\}$. Положим $n = p + q$. Пусть e_i обозначает i-й базисный вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\nu(a_i) = e_i$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, q\}$ обозначим через I_j множество всех таких i, что $a_i b_j \in E$, и пусть $|I_j|$ — количество элементов во множестве I_j. Положим $N = 1 + \max_j |I_j|$, $m_j = N - |I_j|$ и для каждого $j \in \{1, \dots, q\}$ пусть

$$\nu(b_j) = \sqrt{m_j} e_{p+j} + \sum_{i \in I_j} e_i.$$

Если $a_i b_j \in E$, то $i \in I_j$ и, значит, $\bigl|\nu(a_i)\nu(b_j)\bigr|^2 = m_j + |I_j| - 1 = N - 1$. Если же $a_i b_j \notin E$, то $i \notin I_j$ и, значит, $\bigl|\nu(a_i)\nu(b_j)\bigr|^2 = m_j + |I_j| + 1 = N + 1$. Так как граф G имеет хотя бы одно реберное покрытие, для каждого $a_i \in V_1$ и каждого $b_j \in V_2$ имеем $\bigl|\nu(a_i)\nu(V_2)\bigr| = \bigl|\nu(b_j)\nu(V_1)\bigr| = \sqrt{N-1}$, поэтому $\bigl\{\nu(V_1), \nu(V_2)\bigr\}$ — конечная конфигурация. То, что ν является изоморфизм графов G и H — очевидно из построения. □

Из теоремы 5.33 и предложения 5.34 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 5.35. *Не существует двудольного графа, имеющего ровно* 19 *или* 37 *реберных покрытий.*

Следствие 5.36. *Не существует конфигурации* $\{A, B\}$ *с* $N(A, B) = 19$ *и с* $N(A, B) = 37$ *для конечных подмножеств* A *и* B *ограниченно компактного пространства со строго внутренней метрикой.*

Эти исследования были недавно продолжены З. Н. Овсянниковым [20]. Он ввел понятие “атомарного двудольного графа”, определил разложение произвольного двудольного на атомарные и выяснил, как связаны количества реберных покрытий атомарных графов и результирующего двудольного. Это позволило продолжить последовательность и показать, что количество реберных покрытий двудольных графов, а значит и количество кратчайших, соединяющих пару компактов, не может равняться 41, 59 и 67. Кроме того, Овсянников установил, что в интервале от 1 до 1000, все числа, кроме 19, 37, 41, 59, 67, а также, возможно, кроме 82, 97, 149, 197, 223, 257, 291 и 379 реализуются как количества реберных покрытий (кратчайших).

Замечание 5.37. Таким образом, имеется интересная последовательность натуральных чисел, начальный отрезок которой выглядит так: $19, 37, 41, 59, 67, \dots$. Мы проверили ее на известном сайте `https://oeis.org/`, который на 30 июля 2017 года содержал 289946 последовательностей. Оказалось, что этой последовательности там нет. Было бы интересно найти следующие члены этой последовательности.

Лекция 6

Расстояние Громова–Хаусдорфа.

В данном разделе мы будем изучать расстояние Громова–Хаусдорфа, введенное в пункте (13) примера 1.4. Наше изложение существенно опирается на [7] и [21].

Напомним определение этого расстояния. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Замечание 6.1. Почему мы даем такое, на первый взгляд, более технически сложное определение расстояния по Громову-Хаусдорфу, когда можно было бы определить его как точную нижнюю грань чисел $d_H(X', Y')$ по всем реализациям (X', Y', Z) пары (X, Y)? Дело в том, что семейство таких реализаций уже не является множеством (вспомните парадокс Кантора про множество всех множеств). Вводя r и говоря про *существование реализации* мы, тем самым, избавляемся от необходимости рассматривать все реализации.

Обозначение 6.2. В дальнейшем нам будет иногда необходимо явно указывать пространство, в котором рассматривается та или иная метрика, а также соответствующая метрика Хаусдорфа. Таким образом, расстояние между точками $x, x' \in X$ мы иногда будем обозначать через $|xx'|_X$, а соответствующее расстояние Хаусдорфа между непустыми подмножествами A и B пространства X — через $d_H^X(A, B)$. Кроме того, если ρ — некоторая метрика на X, то расстояние Хаусдорфа, порожденное этой метрикой, обозначим через ρ_H.

Оказывается, при определении расстояния Громова–Хаусдорфа достаточно рассматривать лишь метрические пространства вида $(X \sqcup Y, \rho)$, где ограничения метрики ρ на X и Y совпадают с исходными метриками. Такие ρ будем называть *допустимыми метриками*, а множество всех допустимых метрик для данных X и Y обозначим через $\mathcal{D}(X, Y)$.

Теорема 6.3. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\bigl\{\rho_H(X, Y) : \rho \in \mathcal{D}(X, Y)\bigr\}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Правую часть уравнения (6.1) обозначим через $d'_{GH}(X, Y)$. Тогда $d_{GH}(X, Y) \le d'_{GH}(X, Y)$, так как при каждом $\rho \in \mathcal{D}(X, Y)$, $Z = (X \sqcup Y, \rho)$, тройка (X, Y, Z) является реализацией пары (X, Y). Докажем теперь обратное неравенство.

По определению расстояния Громова–Хаусдорфа, для любого $\varepsilon > 0$ существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что

$$d_H(X', Y') \le d_{GH}(X, Y) + \varepsilon.$$

Если X' и Y' не пересекаются, то ограничим метрику с Z на $X' \cup Y'$ и, после отождествления X' и Y' с X и Y соответственно, получим допустимую метрику ρ на $X \sqcup Y$, для которой $\rho_H(X, Y) \le d_{GH}(X, Y) + \varepsilon$. Если же $X' \cap Y' \ne \emptyset$, заменим Z на $Z \times \mathbb{R}$ с метрикой $\bigl|(z, t)(z', s)\bigr| = |zz'| + |ts|$, а X' и Y' — на множества $X'' = X' \times \{0\}$ и $Y'' = Y' \times \{\varepsilon\}$ соответственно, тогда $(X'', Y'', Z \times \mathbb{R})$ — реализация (X, Y) такая, что $d_H(X'', Y'') \le d_{GH}(X, Y) + 2\varepsilon$, откуда $d'_{GH}(X, Y) \le d_{GH}(X, Y)$. □

Замечание 6.4. Если X и Y — подмножества некоторого метрического пространства, то $d_{GH}(X, Y) \le d_H(X, Y)$. В частности, если $d_H(X, Y) = 0$, то и $d_{GH}(X, Y) = 0$, поэтому расстояние Громова–Хаусдорфа, как и расстояние Хаусдорфа, не является положительно определенным: например, расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$, в силу только что сказанного, равно нулю. Однако, если ограничиться компактными метрическими пространствами, то равенство нулю функции d_{GH} будет равносильно изометричности этих пространств (докажем ниже).

Замечание 6.5. В силу симметричности расстояния по Хаусдорфу, функция d_{GH} также симметрична.

Предложение 6.6. *Функция d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Выберем произвольные метрические пространства X, Y и Z и покажем, что $d_{GH}(X,Z) \le d_{GH}(X,Y) + d_{GH}(Y,Z)$.

Выберем произвольные допустимые метрики $\mu \in \mathcal{D}(X,Y)$ и $\nu \in \mathcal{D}(Y,Z)$, а также число $\delta > 0$. Определим на $X \sqcup Z$ функцию расстояния ρ, положив ее равной исходным метрикам на X и Z, а для $x \in X$ и $z \in Z$ определим ее так:

$$\rho(x,z) = \rho(z,x) = \inf_{y\in Y}\big\{\mu(x,y) + \nu(y,z)\big\} + \delta.$$

Непосредственно проверяется (сделайте это), что ρ — допустимая метрика на $X \sqcup Z$, а также что

$$\rho_H(X,Z) \le \mu_H(X,Y) + \nu_H(Y,Z) + \delta.$$

Откуда, в силу теоремы 6.3,

$$\begin{aligned} d_{GH}(X,Z) = \inf_{d\in\mathcal{D}(X,Z)} d_H(X,Z) \le \inf_\rho \rho_H(X,Z) \le \\ \le \inf_{\mu\in\mathcal{D}(X,Y)} \mu_H(X,Y) + \inf_{\nu\in\mathcal{D}(Y,Z)} \nu_H(Y,Z) + \delta = \\ = d_{GH}(X,Y) + d_{GH}(Y,Z) + \delta. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться произвольностью δ. □

Таким образом, мы показали, что на каждом семействе классов изометрии метрических пространств функция d_{GH} является псевдометрикой. Если диаметры всех пространств семейства ограничены некоторым положительным числом, то d_{GH} является конечной псевдометрикой. Как уже отмечалось, d_{GH} метрикой не является. Однако, если ограничиться компактными метрическими пространствами, то d_{GH} уже будет метрикой.

Предложение 6.7. *Если X и Y — компактные метрические пространства такие, что $d_{GH}(X,Y) = 0$, то X изометрично Y.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность допустимых метрик $d^k \in \mathcal{D}(X,Y)$ такую, что $d^k_H(X,Y) < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как X и Y — метрические компакты, для каждого $x \in X \subset X \sqcup Y$ существует $y \in Y \subset X \sqcup Y$ такое, что $d_k(x,y) < 1/k$. Выберем любой такой y и положим $I_k(x) = y$. Тем самым, мы получили некоторое отображение $I_k\colon X \to Y$ (возможно, разрывное). Аналогично определим отображение $J_k\colon Y \to X$.

Из неравенства треугольника вытекает, что для любых $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ выполняется

$$\begin{gathered} d_k\big(I_k(x), I_k(x')\big) < \frac{2}{k} + d_k(x,x'), \\ d_k\big(J_k(y), J_k(y')\big) < \frac{2}{k} + d_k(y,y') \\ d_k\big(x, J_k\circ I_k(x)\big) < \frac{2}{k}, \quad d_k\big(y, I_k\circ J_k(y)\big) < \frac{2}{k}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Аналогично тому, что было проделано в доказательстве теоремы Арцела–Асколи, построим “предельные” отображения $I\colon X \to Y$ и $J\colon Y \to X$. А именно, выберем в X счетное всюду плотное подмножество $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$; с помощью канторова диагонального процесса, построим подпоследовательность $\{I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots\}$, для которой при каждом i последовательность $I_{k_p}(x_i)$ сходится к некоторому $I(x_i) \in X$; продолжим построенное отображение $I\colon S \to Y$ на все X по непрерывности. Аналогично поступим с последовательностью J_k. Переходя в неравенствах (6) к пределу, заключаем, что для любых $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ имеем

$$\big|I(x)I(x')\big| \le |xx'|, \quad \big|J(y)J(y')\big| \le |yy'|, \tag{6.3}$$

$$\big|x\,(J\circ I)(x)\big| = 0, \quad \big|y\,(I\circ J)(y)\big| = 0. \tag{6.4}$$

Соотношения (6.4) говорят о том, что I и J — взаимно обратные биекции, а соотношения (6.3) — то, что оба этих отображения не увеличивают расстояния и, значит, I и J расстояния сохраняют, т.е. являются изометриями. □

В следующем упражнении дается одно из возможных обобщений предложения 6.7.

Упражнение 6.8. Докажите, что если метрическое пространство X компактно, метрическое пространство Y полно, и $d_{GH}(X,Y)=0$, то X изометрично Y.

Замечание 6.9. Даже если оба пространства X и Y являются ограниченно компактными, предложение 6.7 может не иметь места. Чтобы описать соответствующий пример, обозначим через X и Y подмножества евклидовой плоскости, построенные следующим образом. Каждое из этих пространств получается из вещественной оси добавлением вертикальных отрезков, выходящих из точек $(m,0)$, $m\in\mathbb{Z}$, в направлении оси ординат и имеющих следующие длины: в случае X длины равны $|\sin m|$, а в случае Y — равны $\bigl|\sin(m+1/2)\bigr|$. В качестве расстояния на X и Y возьмем соответствующие внутренние метрики. Таким образом, X и Y можно рассматривать как (бесконечные) геометрические графы.

Легко видеть, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $m\in\mathbb{Z}$ выполняется $\Bigl|\bigl|\sin(m+n)\bigr|-\bigl|\sin(m+1/2)\bigr|\Bigr|<\varepsilon$. Отсюда вытекает, что пространство X сдвигом на векторы $(n,0)$ может быть сделано сколь угодно близким по Хаусдорфу к пространству Y, следовательно, $d_{GH}(X,Y)=0$.

С другой стороны, ясно, что множества $\bigl\{|\sin m|\bigr\}_{m\in\mathbb{Z}}$ и $\Bigl\{\bigl|\sin(m+1/2)\bigr|\Bigr\}_{m\in\mathbb{Z}}$ не пересекаются. Так как изометрия является гомеоморфизмом (в частности, она переводит вершины, степени которых отличны от 2, в вершины той же степени), пространства X и Y неизометричны.

Как вытекает из определения, расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет наименьшую “невязку” при всевозможных “совмещениях” метрических пространств. Возникает естественный вопрос: можно ли это совмещение, для некоторых классов метрических пространств, реализовать внутри одного и того же пространства? Следующий результат отвечает на поставленный вопрос для класса сепарабельных пространств.

Рассмотрим метрическое пространство ℓ^∞ всех ограниченных последовательностей, введенное в пункте (6) примера 1.4. Напомним, что по теореме 2.3, каждое сепарабельное метрические пространство изометрично вкладывается в ℓ^∞.

Предложение 6.10. *Пусть X и Y — сепарабельные метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X,Y)=\inf d_H^{\ell^\infty}\bigl(\varphi(X),\psi(Y)\bigr),$$

где точная нижняя грань берется по всем изометрическим вложениям $\varphi\colon X\to\ell^\infty$ и $\psi\colon Y\to\ell^\infty$.

Доказательство. Пространство $X\sqcup Y$ с допустимой метрикой $d\in\mathcal{D}(X,Y)$ также сепарабельно, поэтому, по теореме 2.3, оно изометрически вкладывается в ℓ^∞, откуда и вытекает требуемое. □

Для конкретных вычислений расстояния Громова–Хаусдорфа оказываются полезными другие эквивалентные определения этого расстояния.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Как и в случае отображений, для каждого отношения σ между X и Y и каждых $x\in X$ и $y\in Y$ определены *образ* $\sigma(x)=\bigl\{y\in Y:(x,y)\in\sigma\bigr\}$ и *прообраз* $\sigma^{-1}(y)=\bigl\{x\in X:(x,y)\in\sigma\bigr\}$. Также для $A\subset X$ и $B\subset Y$ определены их *образ* и *прообраз* как объединения соответственно образов и прообразов их точек.

Пусть $\pi_X: X\times Y\to X$ и $\pi_Y: X\times Y\to Y$ обозначают канонические проекции $\pi_X(x,y)=x$ и $\pi_Y(x,y)=y$. Теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma\subset X\times Y$. Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Иными словами, для каждого $x\in X$ существует $y\in Y$, находящийся с x в отношении R и, обратно, для каждого $y\in Y$ существует $x\in X$, находящийся с y в отношении R. Таким образом, соответствие можно рассматривать как сюръективное многозначное отображение. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Для каждого отношения $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ определим его *искажение* $\operatorname{dis}\sigma$ по формуле

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|:(x,y),\,(x',y')\in\sigma\Bigr\}.$$

Замечание 6.11. Для любых $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{P}(X,Y)$ таких, что $\sigma_1\subset\sigma_2$, имеем $\operatorname{dis}\sigma_1\le\operatorname{dis}\sigma_2$ (проверьте).

Замечание 6.12. Для $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ выполняется $\operatorname{dis}R=0$, если и только если R — график изометрии (покажите это).

Теорема 6.13. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}R : R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

Доказательство. Обозначим через $I(X,Y)$ правую часть равенства из формулировки теоремы. Докажем сначала, что $d_{GH}(X,Y)\ge I(X,Y)$.

Выберем произвольное $r>d_{GH}(X,Y)$, тогда, в силу теоремы 6.3, существует $d\in\mathcal{D}(X,Y)$, для которой $d_H(X,Y)<r$. Рассмотрим отношение

$$R=\bigl\{(x,y) : d(x,y)<r\bigr\}.$$

Так как $d_H(X,Y)<r$, то R — соответствие. Кроме того, из неравенство треугольника вытекает, что для (x,y), $(x',y')\in R$ выполняется

$$\bigl|d(y,y')-d(x,x')\bigr|\le d(x,y)+d(x',y')<2r,$$

т.е. $\frac{1}{2}\operatorname{dis}R\le r$ и, значит, $I(X,Y)\le r$. В силу произвольности r, получаем требуемое неравенство.

Докажем теперь, что $d_{GH}(X,Y)\le I(X,Y)$. Выберем произвольное $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ и положим $r=\frac{1}{2}\operatorname{dis}R$. В силу замечания 6.12, достаточно рассмотреть случай, когда $r>0$. Определим на $Z=X\sqcup Y$ функцию расстояния, продолжив ее с X и Y по формуле

$$d(x,y)=d(y,x)=\inf\bigl\{|xx'|+r/2+|y'y| : (x',y')\in R\bigr\}.$$

Ясно, что d — симметричная функция, и так как $r>0$, то d — положительно определенная. Неравенство треугольника проверяется непосредственно (сделайте это). Таким образом, $d\in\mathcal{D}(X,Y)$. Кроме того, $d_H(X,Y)\le r/2$, так как для каждого $x\in X$ существует $y\in Y$ такое, что $(x,y)\in R$, но тогда $d(x,y)=r/2$ (аналогично для $y\in Y$). Осталось воспользоваться теоремой 6.3. □

Напомним, что для отношений σ между X и Y и θ между Y и Z определена *композиция* $\theta\circ\sigma$ следующим условием: $(x,z)\in\theta\circ\sigma$, если и только если существует $y\in Y$ такое, что $(x,y)\in\sigma$ и $(y,z)\in\theta$.

Упражнение 6.14. Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $R_1\in\mathcal{R}(X,Y)$, $R_2\in\mathcal{R}(Y,Z)$. Докажите, что

(1) $R_2\circ R_1\in\mathcal{R}(X,Z)$;

(2) $\operatorname{dis}(R_2\circ R_1)\le\operatorname{dis}R_1+\operatorname{dis}R_2$;

(3) выведите из предыдущего пункта неравенство треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа.

Приведем еще один подход к изучению расстояния Громова–Хаусдорфа. Предварительно заметим, что искажение, определенное для отношений, также переносится на отображения метрических пространств, если эти отображения рассматривать как графики.

Определение 6.15. Отображение $f\colon X\to Y$ метрических пространств называется *ε-изометрией*, если $\operatorname{dis}f\le\varepsilon$ и $f(X)$ является ε-сетью в Y.

Теорема 6.16. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, и $\varepsilon>0$. Тогда*

(1) *если $d_{GH}(X,Y)<\varepsilon$, то существует 2ε-изометрия $f\colon X\to Y$;*

(2) *если существует ε-изометрия $f\colon X\to Y$, то выполнена оценка $d_{GH}(X,Y)<2\varepsilon$.*

Доказательство. (1) Воспользуемся теоремой 6.13, в соответствии с которой существует отношение $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $\operatorname{dis}R<2\varepsilon$. Теперь для каждого $x\in X$ выберем произвольное $y\in R(x)$ и положим $f(x)=y$. Тем самым, мы определили отображение $f\colon X\to Y$, и так как $f\subset R$ (здесь мы отождествляем f с его графиком), то, в силу замечания 6.11, $\operatorname{dis}f\le\operatorname{dis}R<2\varepsilon$. Выберем теперь произвольный $y'\in Y$, произвольный $x\in R^{-1}(y')$ и пусть $y=f(x)$. Так как $\operatorname{diam}R(x)\le\operatorname{dis}R<2\varepsilon$, то $|yy'|<2\varepsilon$, поэтому $f(X)$ является 2ε-сетью.

(2) Рассмотрим отношение $R=\bigl\{(x,y) : |f(x)y|<\varepsilon\bigr\}$. Так как $f(X)$ является ε-сетью, то R — соответствие. Чтобы оценить искажение R, выберем произвольные $(x,y),(x',y')\in R$, тогда

$$\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|\le\Bigl||xx'|-\bigl|f(x)f(x')\bigr|\Bigr|+\Bigl|\bigl|f(x)f(x')\bigr|-|yy'|\Bigr|\le$$

$$\le\varepsilon+\bigl|f(x)y\bigr|+\bigl|y'f(x')\bigr|<3\varepsilon,$$

поэтому $\operatorname{dis}R\le3\varepsilon<4\varepsilon$ и $d_{GH}(X,Y)\le\frac{1}{2}\operatorname{dis}R<2\varepsilon$. □

6.1 Некоторые примеры

Следующее утверждение мгновенно вытекает из определения расстояния Громова–Хаусдорфа.

Пример 6.17. Пусть Y — произвольная ε-сеть метрического пространства X. Тогда $d_{GH}(X,Y) \le d_H(X,Y) \le \varepsilon$. Таким образом, каждое компактное метрическое пространство приближается (по Громову-Хаусдорфу) с любой точностью конечными метрическими пространствами.

Пример 6.18. Обозначим через Δ_1 одноточечное метрическое пространство. Тогда для любого метрического пространства X имеем

$$d_{GH}(\Delta_1, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X.$$

Действительно, $\mathcal{R}(\Delta_1, X)$ состоит ровно из одного соответствия R, причем $\operatorname{dis} R = \operatorname{diam} X$. Осталось воспользоваться теоремой 6.13.

Пример 6.19. Пусть X и Y — некоторые метрическое пространства, причем диаметр одного из них конечен. Тогда

$$d_{GH}(X,Y) \ge \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|.$$

Действительно, достаточно воспользоваться неравенством треугольника (предложение 6.6) для тройки X, Y, Δ_1.

Пример 6.20. Пусть X и Y — некоторые метрическое пространства, тогда

$$d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$

в частности, если X и Y — ограниченные метрические пространства, то $d_{GH}(X,Y) < \infty$.

Действительно, если диаметр одного из пространств X, Y бесконечен, то неравенство имеет место. Если оба пространства одноточечные — то также все очевидно. Пусть теперь $0 < d := \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\} < \infty$. Определим на $X \sqcup Y$ функцию расстояния ρ, продолжив исходные расстояния на X и Y по формуле $\rho(x,y) = \rho(y,x) = d/2$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Ясно, что мы получили симметричную положительно определенную функцию на парах точек. Легко проверяется, что ρ удовлетворяет неравенству треугольника (сделайте это). Таким образом, $\rho \in \mathcal{D}(X,Y)$ и $\rho_H(X,Y) = d/2$, откуда $d_{GH}(X,Y) \le d/2$.

6.2 GH-сходимость и GH-пределы

Говорят, что последовательность X_k метрических пространств *сходится по Громову–Хаусдорфу* или, более коротко, GH-*сходится* к метрическому пространству X, если $d_{GH}(X_k, X) \to 0$ при $k \to \infty$. В этом случае мы пишем $X_k \xrightarrow{\mathrm{GH}} X$; пространство X мы называем *пределом по Громову–Хаусдорфу* или GH-*пределом* последовательности X_k и обозначаем через $\text{GH-}\lim_{k\to\infty} X_k$.

Приведем ряд простых наблюдений.

(1) Если $X = \text{GH-}\lim_{k\to\infty} X_k$, $Y = \text{GH-}\lim_{k\to\infty} X_k$, и одно из пространств X, Y компактное, а другое — полное, то X и Y изометричны. Действительно, в силу неравенства треугольника, имеем $d_{GH}(X,Y) = 0$. Осталось воспользоваться упражнением 6.8.

(2) Сходимость по Хаусдорфу влечет GH-сходимость.

(3) Каждый метрический компакт является GH-пределом конечных метрических пространств (своих конечных $1/k$-сетей).

Теорема 6.21. *Пусть $X_k \xrightarrow{\mathrm{GH}} Y$, тогда если, начиная с некоторого k, все X_k обладают одним из перечисленных свойств, то это свойство наследуется пространством Y:*

(1) *диаметр равен бесконечности;*

(2) *диаметр ограничен некоторым числом D (на самом деле,* $\operatorname{diam} X_k \to \operatorname{diam} Y$*);*

(3) *сепарабельность;*

(4) *полная ограниченность*;

(5) *если дополнительно предполагается, что Y — полное, то ограниченная компактность*;

(6) *если дополнительно предполагается, что Y — полное, то свойство метрики быть внутренней*;

(7) *если дополнительно предполагается, что Y — полное, то свойство метрики быть одновременно ограниченно компактной и строго внутренней.*

(8) *если в предыдущем пункте отказаться от ограниченной компактности, то Y уже не обязано иметь строго внутреннюю метрику.*

Доказательство. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без ограничения общности будем считать, что $d_{GH}(X_k,Y)<1/k$. По теореме 6.13, для каждого $k\in\mathbb{N}$ существует $R_k\in\mathcal{R}(X_k,Y)$ такое, что $\operatorname{dis}R_k<2/k$. Кроме того, по теореме 6.16, для каждого $k\in\mathbb{N}$ существуют $2/k$-изометрии $f_k\colon X_k\to Y$ и $g_k\colon Y\to X_k$.

(1) Если $\operatorname{diam}Y<\infty$, то, в силу примера 6.19, начиная с некоторого k, имеем $d_{GH}(X_k,Y)=\infty$, противоречие.

(2) Заметим сначала, что $\operatorname{diam}Y<\infty$, так как, в противном случае, начиная с некоторого k, будет выполнено $d_{GH}(X_k,Y)=\infty$. Далее, так как Y — компакт, существуют $y,y'\in Y$ такие, что $\operatorname{diam}Y-1/k<|yy'|$. Но тогда $\operatorname{diam}Y-3/k<\bigl|g_k(y)g_k(y')\bigr|\le\operatorname{diam}X_k$ и, аналогично, $\operatorname{diam}X_k\le\operatorname{diam}Y+3/k$. Устремляя k к бесконечности, получаем требуемое.

(3) Выберем в X_k счетное всюду плотное множество S_k, тогда выполнено неравенство $d_{GH}(S_k,X_k)\le d_H(S_k,X_k)=0$, так что $d_{GH}(S_k,X_k)=0$ и, по неравенству треугольника, $d_{GH}(S_k,Y)<1/k$. По теореме 6.16, для каждого $k\in\mathbb{N}$ существует $2/k$-изометрия $f'_k\colon S_k\to Y$. Положим $Y_k=f'_k(S_k)$, тогда Y_k является не более чем счетной $2/k$-сетью в Y. Следовательно, $S=\cup_{k=1}^\infty Y_k$ — счетное всюду плотное подмножество Y.

(4) Выберем в X_k конечную $1/k$-сеть S_k и положим $Y_k=f_k(X_k)$, $Z_k=f_k(S_k)$. Мы покажем, что конечное множество Z_k является $5/k$-сетью в Y. Действительно, так как Y_k является $2/k$-сетью в Y, то для произвольного $y\in Y$ существует $x_k\in X_k$ такой, что $\bigl|yf_k(x_k)\bigr|<2/k$. Так как S_k является $1/k$ сетью в X_k, существует $s_k\in S_k$, для которого $|x_ks_k|<1/k$. Так как $\operatorname{dis}f_k\le2/k$, то $\bigl|f_k(x_k)f_k(s_k)\bigr|<3/k$, откуда

$$\bigl|yf_k(s_k)\bigr|\le\bigl|yf_k(x_k)\bigr|+\bigl|f_k(x_k)f_k(s_k)\bigr|<2/k+3/k=5/k,$$

что и требовалось.

(5) Достаточно показать, что каждый замкнутый шар $B_r(y)\subset Y$, $r>0$, компактен. Положим $A_k=R_k^{-1}\bigl(B_r(y)\bigr)$, и пусть $R_k^A=R_k\cap\bigl(A_k\times B_r(y)\bigr)$. Тогда $R_k^A\in\mathcal{R}\bigl(A_k,B_r(y)\bigr)$ и $\operatorname{dis}R_k^A\le\operatorname{dis}R<2/k$, поэтому $d_{GH}\bigl(A_k,B_r(y)\bigr)<1/k$.

Выберем произвольные точки $x_k\in R_k^{-1}(y)$. Если $k_0\in\mathbb{N}$ таково, что $2/k_0<r$, то для каждого $k\ge k_0$ множества $B_{r-2/k}(x_k)$ непусты, и, кроме того, $B_{r-2/k}(x_k)\subset A_k\subset B_{r+2/k}(x_k)$. Действительно, если $x'\in B_{r-2/k}(x_k)$ и $(x',y')\in R_k$, то $|y'y|<|x'x_k|+2/k\le r$, поэтому $y'\in B_r(y)$ и, значит, $x'\in A_k$. Если же $x'\in A_k$, то $(x',y')\in R_k$ для некоторого $y'\in B_r(y)$, так что $|y'y|\le r$ и, значит, $|x_kx'|<|y'y|+2/k\le r+2/k$, так что $x'\in B_{r+2/k}(x_k)$.

Отсюда вытекает, что

$$d_{GH}\bigl(A_k,B_{r+2/k}(x_k)\bigr)\le d_H\bigl(A_k,B_{r+2/k}(x_k)\bigr)\le d_H\bigl(B_{r-2/k}(x_k),B_{r+2/k}(x_k)\bigr)\le4/k,$$

поэтому $d_{GH}\bigl(B_{r+2/k}(x_k),B_r(y)\bigr)<5/k$ в силу неравенства треугольника. Следовательно, $B_{r+2/k}(x_k)\xrightarrow{\mathrm{GH}}B_r(y)$ при $k\to\infty$. Так как пространство Y полное, то замкнутое подпространство $B_r(y)\subset Y$ также полное. В силу пункта (4), пространство $B_r(y)$ вполне ограничено. Осталось применить (9) из определений и фактов 2.1.

(6) В силу теоремы 4.30, достаточно показать, что для любых $y,y'\in Y$ и любого $\varepsilon>0$ существует ε-середина между y и y'. Выберем произвольные $x_k\in R_k^{-1}(y)$ и $x'_k\in R_k^{-1}(y')$, для них найдем $1/k$-середину $s_k\in X_k$, и, наконец, выберем произвольное $z_k\in R(s_k)$. По определению $1/k$-середины, расстояния от s_k до x_k, x'_k отличаются от $|x_kx'_k|/2$ меньше, чем на $1/k$. Так как $\operatorname{dis}R<2/k$, то $|x_kx'_k|$ отличается от $|yy'|$ меньше, чем на $2/k$; кроме того, $|z_ky|$, $|z_ky'|$, $|yy'|$ отличаются соответственно от $|s_kx_k|$, $|s_kx'_k|$, $|x_kx'_k|$ меньше, чем на $2/k$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\bigl||z_ky|-|yy'|/2\bigr|&=\bigl||z_ky|-|s_kx_k|+|s_kx_k|-|x_kx'_k|/2+|x_kx'_k|/2-|yy'|/2\bigr|\le\\&\le\bigl||z_ky|-|s_kx_k|\bigr|+\bigl||s_kx_k|-|x_kx'_k|/2\bigr|+\bigl||x_kx'_k|/2-|yy'|/2\bigr|<2/k+1/k+1/k=4/k,\end{aligned}$$

и, аналогично, $\bigl||z_ky'|-|yy'|/2\bigr|<4/k$, что и требовалось.

(7) По пункту (5), пространство Y является ограниченно компактным; по пункту (6), метрика пространства Y — внутренняя. Осталось применить следствие 4.23.

(8) В качестве примера рассмотрим метрический граф Y, полученный склеиванием концов отрезков $[0,1+1/n]$, $n \in \mathbb{N}$ (все 0 склеиваются в одну точку, а все концы $1+1/n$ — в другую). В качестве X_k возьмем пространство, полученное из Y заменой отрезка $[0,1+1/k]$ на отрезок $[0,1]$. $\square$

Лекция 7

Пространство метрических компактов.

Данный раздел посвящен описанию различных свойств семейств метрических пространств. Особое внимание уделяется семейству классов изометрии метрических компактов.

7.1 Число покрытия и число упаковки

Пусть X — произвольное метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Определяемые ниже числовые характеристики пары (X, ε) будут в дальнейшем использованы нами при изучении вполне ограниченных семейств метрических компактов, в частности, в терминах этих чисел будет сформулирован критерий Громова предкомпактности семейства компактных метрических пространств.

Определение 7.1. *Числом покрытия* $\operatorname{cov}(X, \varepsilon)$ назовем наименьшее число открытых шаров радиуса ε, которыми можно покрыть пространство X. *Числом упаковки* $\operatorname{pack}(X, \varepsilon)$ назовем максимальное число открытых попарно непересекающихся шаров радиуса $\varepsilon/2$ в пространстве X.

Упражнение 7.2. Докажите, что

(1) метрическое пространство X ограничено, если только если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) < \infty$ (аналогичное утверждение для $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) < \infty$);

(2) метрическое пространство X — конечное, если и только если существует n такое, что $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \le n$ при всех $\varepsilon > 0$ (аналогичное утверждение для $\operatorname{pack}(X, \varepsilon)$);

(3) функции $f(\varepsilon) = \operatorname{cov}(X, \varepsilon)$ и $g(\varepsilon) = \operatorname{pack}(X, \varepsilon)$ — монотонно убывающие.

Предложение 7.3. *Для любого метрического пространства X и любого числа $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \le \operatorname{pack}(X, \varepsilon) \le \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4).$$

Доказательство. Докажем сначала первое неравенство. Если $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) = \infty$, то неравенство автоматически выполнено. Пусть теперь $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) < \infty$ и $x_1, \ldots, x_n$, $n = \operatorname{pack}(X, \varepsilon)$, — наибольший набор точек в X, для которого шары $U_{\varepsilon/2}(x_i)$ попарно не пересекаются. Так как это семейство максимально, то для любого $x \in X$ существует x_k такое, что $U_{\varepsilon/2}(x) \cap U_{\varepsilon/2}(x_k) \ne \emptyset$, откуда $|xx_k| < \varepsilon$. Но тогда семейство $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ покрывает X, так что $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \le n = \operatorname{pack}(X, \varepsilon)$.

Докажем второе неравенство. Снова, если $\operatorname{cov}(X, \varepsilon/4) = \infty$, то неравенство выполнено. Пусть теперь $\operatorname{cov}(X, \varepsilon/4) < \infty$ и $x_1, \ldots, x_m$, $m = \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4)$, — наименьший набор точек в X, для которого шары $U_{\varepsilon/4}(x_i)$ покрывают X. Предположим, что $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) > \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4)$, тогда существуют $x'_1, \ldots, x'_n$, $n > \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4)$, такие, что шары $U_{\varepsilon/2}(x'_i)$ попарно не пересекаются. С другой стороны, для некоторых $i \ne j$ существует k такое, что $x'_i, x'_j \in U_{\varepsilon/4}(x_k)$, следовательно, $\{x'_i, x'_j\} \subset U_{\varepsilon/2}(x'_i) \cap U_{\varepsilon/2}(x'_j)$, так что это пересечение непусто, противоречие. □

Следствие 7.4. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, тогда*

(1) *если* $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) < \infty$*, то* $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) < \infty$;

(2) *если* $\mathrm{cov}(X,\varepsilon) < \infty$, *то* $\mathrm{pack}(X, 4\varepsilon) < \infty$.

Таким образом, $\mathrm{cov}(X,\varepsilon) < \infty$ *при всех* $\varepsilon > 0$, *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{pack}(X,\varepsilon) < \infty$ *при всех* $\varepsilon > 0$.

Предложение 7.5. *Пусть* X — *произвольное метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $\mathrm{cov}(X,\varepsilon) < \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$;

(2) $\mathrm{pack}(X,\varepsilon) < \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$;

(3) *пространство* X *вполне ограничено.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Это вытекает из следствия 7.4.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Условие $\mathrm{cov}(X,\varepsilon) < \infty$ равносильно существованию конечного покрытия $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$, что эквивалентно существованию конечной ε-сети $\{x_i\}_{i=1}^n$. Таким образом, условие пункта (1) равносильно полной ограниченности пространства X. $\square$

Предложение 7.6. *Пусть* X, Y — *метрические пространства,* $\delta > 0$, *и* $d_{GH}(X,Y) < \delta$, *тогда*

(1) $\mathrm{cov}(X,\varepsilon) \ge \mathrm{cov}(Y, \varepsilon + 2\delta)$,

(2) $\mathrm{pack}(X,\varepsilon) \ge \mathrm{pack}(Y, 2\varepsilon + 4\delta)$.

Доказательство. (1) Случай $\mathrm{cov}(X,\varepsilon) = \infty$ очевиден. Пусть теперь $m := \mathrm{cov}(X,\varepsilon) < \infty$ и $\bigl\{U_\varepsilon(x_i)\bigr\}_{i=1}^m$ — покрытие X. По теореме 6.13, существует $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $\mathrm{dis}\, R < 2\delta$. Для каждого i выберем произвольное $y_i \in R(x_i)$ и покажем, что множество $\{y_i\}_{i=1}^m$ является $(\varepsilon + 2\delta)$-сетью, откуда мгновенно получим $\mathrm{cov}(Y, \varepsilon + 2\delta) \le m = \mathrm{cov}(X,\varepsilon)$. Итак, берем произвольное $y \in Y$ и выбираем любое $x \in R^{-1}(y)$. Тогда для некоторого j имеем $|xx_j| \le \varepsilon$. Так как $\mathrm{dis}\, R < 2\delta$, то $|yy_j| < \varepsilon + 2\delta$, что и требовалось.

(2) Так как случай $\mathrm{pack}(Y, 2\varepsilon + 4\delta) = \infty$ тривиален, будем предполагать, что $n := \mathrm{pack}(Y, 2\varepsilon + 4\delta) < \infty$ и $\bigl\{U_{\varepsilon+2\delta}(y_i)\bigr\}_{i=1}^n$ — дизъюнктное семейство шаров в Y. Тогда для любых $i \ne j$ имеем $|y_iy_j| \ge \varepsilon + 2\delta$. Для каждого i выберем произвольное $x_i \in R^{-1}(y_i)$. Так как $\mathrm{dis}\, R < 2\delta$, имеем $|x_ix_j| > \varepsilon$, поэтому семейство $\bigl\{U_{\varepsilon/2}(x_i)\bigr\}_{i=1}^n$ является дизъюнктным и, значит, $\mathrm{pack}(X,\varepsilon) \ge n = \mathrm{pack}(Y, 2\varepsilon + 4\delta)$. $\square$

7.2 Вполне ограниченные семейства метрических компактов

Перейдем теперь к изучению семейств компактных метрических пространств. Нас будет интересовать, когда то или иное семейство является вполне ограниченным. Начнем со следующего вспомогательного утверждения, которое понадобится нам ниже. Напомним, что через $\mathcal{M}$ мы обозначаем метрическое пространство классов изометрии метрических компактов с метрикой Громова–Хаусдорфа. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$ множество всех метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем n точек, а через $\mathcal{M}_{[n]} \subset \mathcal{M}$ — ровно n точек. Для $D \ge 0$ через $\mathcal{M}(D) \subset \mathcal{M}$ обозначим множество всех метрических компактов, диаметры которых не превосходят D. Положим также $\mathcal{M}_n(D) = \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}(D)$ и $\mathcal{M}_{[n]}(D) = \mathcal{M}_{[n]} \cap \mathcal{M}(D)$. Ясно, что $\mathcal{M}_n = \cup_{k\le n}\mathcal{M}_{[k]}$ и $\mathcal{M}_n(D) = \cup_{k\le n}\mathcal{M}_{[k]}(D)$.

Предложение 7.7. *Множество* $\mathcal{M}_{[n]}(D)$ *вполне ограничено.*

Доказательство. Для $M \in \mathcal{M}_{[n]}(D)$ рассмотрим всевозможные биекции $\nu\colon M \to \{1,\ldots,n\}$, и по каждому такому ν построим матрицу расстояний $f(M,\nu) = \rho = (\rho_{ij})$, положив $\rho_{ij} = \bigl|\nu^{-1}(i)\nu^{-1}(j)\bigr|$. Пусть T — множество всех таких матриц. Ясно, что отображение $f(M,\nu) \mapsto M$ является некоторой сюръекцией $g\colon T \to \mathcal{M}_{[n]}(D)$.

Зададим на T функцию расстояния, порожденную ℓ^∞-нормой, так что T будем рассматривать как подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}_\infty$. Так как для каждых i,j имеем $|\rho_{ij}| \le D$, то T является ограниченным и, значит, вполне ограниченным подмножеством $\mathbb{R}^{n^2}_\infty$.

Если $M, M' \in \mathcal{M}_{[n]}(D)$, $\rho = f(M,\nu)$ и $\rho' = f(M',\nu')$, то $R = (\nu')^{-1} \circ \nu$ — биективное соответствие между M и M', причем $|\rho\rho'|_\infty = \mathrm{dis}\, R \ge 2d_{GH}(M,M')$. Таким образом, сюръекция g является липшицевым отображением и, значит, $\mathcal{M}_{[n]}(D) = g(T)$ — также вполне ограничено. $\square$

Следствие 7.8. *Множество* $\mathcal{M}_n(D)$ *вполне ограничено.*

Упражнение 7.9. Докажите, что множество $\mathcal{M}_n(D)$ компактно, а $\mathcal{M}_{[n]}(D)$ при $n > 1$ — нет.

Теорема 7.10. *Пусть $\mathcal{C}$ — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется* $\operatorname{diam} X \le D$ *и* $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.

(2) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется* $\operatorname{diam} X \le D$ *и* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.

(3) *Пространство $\mathcal{C}$ с метрикой d_{GH} вполне ограничено.*

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1) Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующие D и $N(\varepsilon)$. Так как $\mathcal{C}$ — вполне ограничено, то для любого $\delta > 0$ существует конечная δ-сеть $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Выберем δ так, чтобы выполнялось $4\delta < \varepsilon$. Так как все пространства, лежащие в $\mathcal{C}'$, — вполне ограничены, то, по предложению 7.5, их числа упаковки конечны. Кроме того, конечны и их диаметры. Положим $D' = \max_{C\in\mathcal{C}'} \operatorname{diam} C$ и $N'(X,\varepsilon) = \max_{C\in\mathcal{C}'} \operatorname{pack}(C,\varepsilon)$. Для произвольного $X \in \mathcal{C}$ существует такое $C \in \mathcal{C}'$, что $d_{GH}(X,C) < \delta$. Легко видеть, что $\operatorname{diam} X \le \operatorname{diam} C + 2\delta \le D' + 2\delta$, так что можно положить $D = D' + 2\delta$. Кроме того, по предложению 7.6, $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \le \operatorname{pack}(C,\varepsilon/2 - 2\delta) \le N'(\varepsilon/2 - 2\delta)$, так что можно положить $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon/2 - 2\delta)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Это мгновенно вытекает из предложения 7.3.

(2) $\Rightarrow$ (3) Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$, и для каждого $X \in \mathcal{C}$ рассмотрим конечное покрытие пространства X открытыми шарами радиуса ε, состоящее не более чем из $n = N(\varepsilon)$ точек. Через F_X^ε обозначим множество центров этих шаров, тогда $d_{GH}(X, F_X^\varepsilon) \le \varepsilon$. Кроме того, $F_X^\varepsilon \in \mathcal{M}_n(D)$, поэтому, в силу следствия 7.8, семейство $\mathcal{F}^\varepsilon = \{F_X^\varepsilon\}_{X\in\mathcal{C}} \subset \mathcal{M}_n(D)$ — вполне ограничено. Кроме того, как только что было показано, для любого $\varepsilon' > \varepsilon$ имеем $\mathcal{C} \subset U_{\varepsilon'}(\mathcal{F}^\varepsilon)$, где через $U_{\varepsilon'}(\mathcal{F}^\varepsilon)$ мы обозначили открытую ε'-окрестность множества $\mathcal{F}^\varepsilon \subset \mathcal{M}$ в пространстве $\mathcal{M}$. Так как ε и ε' — произвольны, заключаем, что $\mathcal{C}$ также является вполне ограниченными (убедитесь в этом). □

Следующая теорема позволяет реализовать все метрические пространства, входящие во вполне ограниченное подмножество $\mathcal{M}$, в виде подмножеств некоторого компактного подмножества ℓ^∞.

Теорема 7.11 (Громов). *Для каждого вполне ограниченного подмножества $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ существует компакт $K \subset \ell^\infty$ такой, что каждое $X \in \mathcal{C}$ изометрично вкладывается в K.*

Доказательство. Компакт K строится следующим образом. По теореме 7.10, существуют $D \ge 0$ и $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ и $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$. Выберем произвольную убывающую последовательность положительных чисел $E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$ такую, что $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i < \infty$. Эта последовательность и функция $N(\varepsilon)$ порождают последовательность натуральных чисел $N_i = N(\varepsilon_i)$. Эти две последовательности, вместе с числом D, определяют множество $F_{D,E} \subset \ell^\infty$ следующим образом.

Конструкция 7.12. Положим $A = \cup_{j=1}^\infty \bigl(\{1,\ldots,N_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,N_j\}\bigr)$. Ясно, что A — счетное множество, поэтому $\ell^\infty(A)$ изометрично ℓ^∞. Элементы пространства $\ell^\infty(A)$ являются ограниченными функциями $f\colon A \to \mathbb{R}$. Для краткости, вместо $f\bigl((n_1,\ldots,n_j)\bigr)$ мы будем писать $f(n_1,\ldots,n_j)$.

Определим теперь множество $F_{D,E}$, составив его из всех $f\colon A \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $0 \le f(n_1) \le D$ для всех $1 \le n_1 \le N_1$;

(2) $\bigl|f(n_1,\ldots,n_j,n_{j+1}) - f(n_1,\ldots,n_j)\bigr| \le \varepsilon_j$ для всех элементов $(n_1,\ldots,n_j,n_{j+1}) \in A$.

Лемма 7.13. *Определенное выше множество $F_{D,E}$ является компактным подмножеством в $\ell^\infty(A)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что для каждой функции $f \in F_{D,E}$ выполняется $\sup_{a\in A}\bigl|f(a)\bigr| \le D + \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i < \infty$, поэтому $f \in \ell^\infty(A)$. Далее, так как все неравенства, определяющие $F_{D,E}$, — нестрогие, множество $F_{D,E}$ замкнуто в $\ell^\infty(A)$. Так как $\ell^\infty(A)$ — полное, то $F_{D,E}$ также полное. Кроме того, диаметр $F_{D,E}$ конечен (ограничен числом $D + 2\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i$).

Положим $A_{[k]} = \bigl\{(n_1,\ldots,n_k) \in A\bigr\}$ и $A_k = \cup_{j=1}^k A_j$. Обозначим через $\pi_k\colon \ell^\infty(A) \to \ell^\infty(A_k)$ каноническую проекцию, сопоставляющую каждой функции $f\colon A \to \mathbb{R}$ ее ограничение на $A_k \subset A$, и пусть $F_k = \pi_k(F_{D,E})$. Заметим, что F_k является замкнутым и ограниченным подмножеством конечномерного векторного пространства $\ell^\infty(A_k)$, поэтому F_k — компакт.

Определим отображение $\nu\colon F_k \to \ell^\infty(A)$, распространив каждую функцию $f_k \in F_k$ на все множество A так:

$$f_k(n_1,\ldots,n_k,n_{k+1},\ldots) = f_k(n_1,\ldots,n_k).$$

Ясно, что ν изометрично, поэтому $F'_k = \nu(F_k)$ также является компактом.

Положим $e_k = \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots$, тогда $e_k \to \emptyset$ при $k \to \infty$. По условию (2), имеем $F_{D,E} \subset U_{e_k}(F'_k)$ при всех $k \ge 2$, откуда мгновенно вытекает полная ограниченность пространства $F_{D,E}$. □

Возьмем теперь в качестве K множество $F_{D,2E}$ и покажем, что каждое пространство $X \in \mathcal{C}$ можно изометрично вложить в такой K. Мы будем рассматривать точки вида x_a, $a \in A$, и снова, для краткости, вместо $x_{(n_1,\ldots,n_j)}$ будем писать $x_{n_1\cdots n_j}$.

Покроем каждое пространство $X \in \mathcal{C}$ шарами $U_{\varepsilon_1}(x_{n_1})$, $1 \le n_1 \le N_1$. Затем покроем каждый шар $U_{\varepsilon_1}(x_{n_1})$ шарами $U_{\varepsilon_2}(x_{n_1 n_2}) \subset X$, $1 \le n_2 \le N_2$ (отметим, что центры некоторых шаров $U_{\varepsilon_2}(x_{n_1 n_2})$ могут совпадать). Ясно, что $|x_{n_1} x_{n_1 n_2}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_1$. Продолжив этот процесс, на j-ом шаге получим семейство шаров $\bigl\{U_{\varepsilon_j}(x_a)\bigr\}_{a \in A_{[j]}}$, причем $|x_{n_1\cdots n_j} x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}}| < 2\varepsilon_j$.

Легко видеть, что множество $\{x_a\}_{a\in A}$ центров этих шаров — счетное всюду плотное подмножество X (некоторые x_a могут совпадать друг с другом). По теореме 2.3, пространство X можно изометрично вложить в $\ell^\infty(A)$, поставив в соответствие каждой точке x функцию $f_x\colon A \to \mathbb{R}$, определенную так: $f_x(a) = |x x_a|$ (проверьте, что не смотря на совпадение некоторых точек x_a, эта конструкция по-прежнему дает изометричное вложение).

Лемма 7.14. *При каждом $x \in X$ имеем $f_x \in F_{D,2E}$.*

Доказательство. Ясно, что $0 \le f_x \le D$, так что пункт (1) из определения множества $F_{D,2E}$ выполнен. Далее, для каждого $(n_1,\ldots,n_j,n_{j+1})$ точка $x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}}$ лежит в $U_{\varepsilon_j}(x_{n_1\cdots n_j})$, поэтому для каждого $x \in X$ выполняется

$$\bigl|f_x(n_1,\ldots,n_j,n_{j+1}) - f_x(n_1,\ldots,n_j)\bigr| = \bigl||x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}} x| - |x_{n_1\cdots n_j} x|\bigr| \le |x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}} x_{n_1\cdots n_j}| < 2\varepsilon_j,$$

поэтому и пункт (2) из определения множества $F_{D,2E}$ тоже выполнен. □

Тем самым, отображение $x \mapsto f_x$ изометрично вкладывает X в K. □

7.3 Другие свойства пространства $\mathcal{M}$

В этом разделе мы приведем ряд свойств пространства $\mathcal{M}$.

7.3.1 Полнота пространства $\mathcal{M}$

Теорема 7.11 позволяет доказать следующий результат.

Теорема 7.15. *Пространство $\mathcal{M}$ — полное.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{X_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$. Тогда $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ — вполне ограниченное подмножество $\mathcal{M}$. По теореме 7.11, существует такой компакт $K \subset \ell^\infty$, в который все X_i изометрично вкладываются. Обозначим образ X_i через Y_i. По теореме 2.13, пространство $\mathcal{H}(K)$ всех замкнутых ограниченных подмножеств K также компактно, поэтому последовательность Y_i точек из $\mathcal{H}(K)$ содержит сходящуюся подпоследовательность Y_{n_i}. Пусть Y — предел этой подпоследовательности. Тогда Y — непустое компактное метрическое пространство и

$$d_{GH}(X_{n_i}, Y) = d_{GH}(Y_{n_i}, Y) \le d_H(Y_{n_i}, Y) \to 0 \ \text{ при } i \to \infty,$$

поэтому $X_{n_i} \xrightarrow{\text{GH}} Y$ и, в силу фундаментальности последовательности X_i, имеем $X_i \xrightarrow{\text{GH}} Y$, что и требовалось. □

7.3.2 Критерий Громова предкомпактности

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно. Теорема 7.10 формулирует необходимые и достаточные условия полной ограниченности подмножества пространства Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$. Теорема 7.15 утверждает, что $\mathcal{M}$ — полное пространство и, значит, таким же является и любое его замкнутое подмножество. Следовательно, замыкание произвольного вполне ограниченного $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ является вполне ограниченным и полным, что, в силу пункта (9) из определений и фактов 2.1, влечет компактность $\mathcal{C}$. Таким образом, в теореме 7.10 полную ограниченность можно заменить на предкомпактность. Итак, доказана следующая теорема, которая и называется *критерием Громова предкомпактности семейства метрических компактов.*

Теорема 7.16. *Пусть $\mathcal{C}$ — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ и $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.*

(2) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ и $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.*

(3) *Семейство $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ предкомпактно.*

7.3.3 Сепарабельность пространства $\mathcal{M}$

Теорема 7.17. *Пространство $\mathcal{M}$ — сепарабельное.*

Доказательство. По следствию 7.8, каждое пространство $\mathcal{M}_n(D)$ вполне ограничено и, значит, сепарабельно. Но $\mathcal{M}_n = \cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_n(k)$, поэтому и все $\mathcal{M}_n$, а также их объединение $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_n$, — сепарабельны. Но это последнее объединение есть в точности множество всех конечных метрических пространств, которое, как было отмечено в примере 6.17, является всюду плотным подмножеством $\mathcal{M}$, так что и $\mathcal{M}$ — сепарабельно. □

Напомним, что полное сепарабельное метрическое пространство называется *польским*. Тем самым, имеет место следующий результат.

Следствие 7.18. *Пространство $\mathcal{M}$ — польское.*

Напомним также, что топологическое пространство *удовлетворяет второй аксиоме счетности*, если оно имеет счетную базу. Для метрического пространства это условие эквивалентно сепарабельности.

Следствие 7.19. *Пространство $\mathcal{M}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

7.3.4 Существование оптимальных соответствий между метрическими компактами

Материал, обсуждаемый в настоящем разделе, опубликован в [18]. Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. По теореме 6.13,

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

Определение 7.20. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$.

Отметим, что $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ может быть пустым. Например, в силу замечания 6.12, это всегда имеет место, если $d_{GH}(X,Y) = 0$, но X и Y не изометричны, скажем, для $X = [0,1]$ и $Y = (0,1)$, или для ограниченно компактных метрических пространств, описанных в замечании 6.9. Однако, для компактных метрических пространств X и Y, как будет показано в этом разделе, множество $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ непусто, т.е. в этом случае всегда существует соответствие, на котором достигается расстояние Громова–Хаусдорфа.

Соглашение 7.21. На протяжении этого раздела, говоря про метрическое пространство $X \times Y$, мы всегда будем считать, что на нем задано расстояние

$$\bigl|(x,y)(x',y')\bigr| = \max\bigl\{|xx'|,\,|yy'|\bigr\},$$

которое, в частности, порождает расстояние Хаусдорфа на $\mathcal{P}(X,Y)$. Тем самым, пространство $\mathcal{P}(X,Y)$ и все его подпространства, например $\mathcal{R}(X,Y)$, будут рассматриваться с функциями расстояния из $\mathcal{P}(X,Y)$.

Предложение 7.22. *Для $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ обозначим через $\bar\sigma$ его замыкание, тогда $\operatorname{dis}\bar\sigma = \operatorname{dis}\sigma$.*

Доказательство. В силу того, что $\sigma \subset \bar\sigma$, имеем $\operatorname{dis}\sigma \le \operatorname{dis}\bar\sigma$, поэтому осталось проверить обратное неравенство.

Так как $\bar\sigma$ состоит из точек прикосновения множества σ, то для любых $(\bar x,\bar y)$, $(\bar x',\bar y') \in \bar\sigma$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие (x,y), $(x',y') \in \sigma$, что $\bigl|(\bar x,\bar y)(x,y)\bigr| < \varepsilon/6$ и $\bigl|(\bar x',\bar y')(x',y')\bigr| < \varepsilon/6$, то есть

$$\max\bigl\{|\bar x x|,|\bar y y|\bigr\} < \varepsilon/6 \quad \text{и} \quad \max\bigl\{|\bar x' x'|,|\bar y' y'|\bigr\} < \varepsilon/6.$$

Отсюда вытекает, что $\big||\bar{x}\bar{x}'|-|xx'|\big|\le|\bar{x}x|+|\bar{x}'x'|<\varepsilon/3$ и, аналогично, $\big||\bar{y}\bar{y}'|-|yy'|\big|<\varepsilon/3$, поэтому

$$\big||\bar{x}\bar{x}'|-|\bar{y}\bar{y}'|\big|<\big||xx'|-|yy'|\big|+2\varepsilon/3\le\operatorname{dis}\sigma+2\varepsilon/3.$$

Переходя к супремуму по всем $(\bar{x},\bar{y})$, $(\bar{x}',\bar{y}')\in\bar{\sigma}$, заключаем, что $\operatorname{dis}\bar{\sigma}\le\operatorname{dis}\sigma+2\varepsilon/3$. Так как ε произвольно, имеем $\operatorname{dis}\bar{\sigma}\le\operatorname{dis}\sigma$. □

Множество всех замкнутых непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}_c(X,Y)$; аналогично, через $\mathcal{R}_c(X,Y)$ будем обозначать множество всех замкнутых соответствий между X и Y.

Из 7.22 и 6.13 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 7.23. *Для любых X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}_c(X,Y)\big\}.$$

Замечание 7.24. Если X, $Y\in\mathcal{M}$, то $X\times Y\in\mathcal{M}$, и, в силу теоремы 2.13, выполняется $\mathcal{P}_c(X,Y)=\mathcal{H}(X\times Y)\in\mathcal{M}$.

Предложение 7.25. *Для X, $Y\in\mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}_c(X,Y)$ замкнуто в $\mathcal{P}_c(X,Y)$ и, значит, $\mathcal{R}_c(X,Y)\in\mathcal{M}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого соответствия $\sigma\in\mathcal{P}_c(X,Y)\setminus\mathcal{R}_c(X,Y)$ существует окрестность U, не пересекающая $\mathcal{R}_c(X,Y)$. Так как $\sigma\notin\mathcal{R}(X,Y)$, то или $\pi_X(\sigma)\ne X$, или $\pi_Y(\sigma)\ne Y$, где π_X и π_Y — канонические проекции. Пусть, для определенности, выполняется первое условие, т.е. существует $x\in X\setminus\pi_X(\sigma)$. Так как множество σ замкнуто в компакте $X\times Y$, оно является компактом, поэтому $\pi_X(\sigma)$ компактно в X и, значит, замкнуто в нем. Следовательно, существует открытый шар $U_\varepsilon(x)$ такой, что $U_\varepsilon(x)\cap\pi_X(\sigma)=\emptyset$. И сказанного вытекает, что в качестве U можно взять $U_\varepsilon(x)\times Y$. □

Определим функцию $f\colon(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$, положив $f(x,y,x',y')=\big||xx'|-|yy'|\big|$. Ясно, что f непрерывна. Отметим, что для каждого $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ имеем

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\big\{f(x,y,x',y'):(x,y),\,(x',y')\in\sigma\big\}=\sup f|_{\sigma\times\sigma}.$$

Предложение 7.26. *Если X, $Y\in\mathcal{M}$, то функция искажения* $\operatorname{dis}\colon\mathcal{P}_c(X,Y)\to\mathbb{R}$ *— непрерывна.*

Доказательство. Так как $(X\times Y)\times(X\times Y)$ — компакт, то определенная выше функция f равномерно непрерывна, поэтому для любого $\sigma\in\mathcal{P}_c(X,Y)$ и любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для открытого шара $U=U_\delta^{X\times Y}(\sigma)\subset X\times Y$ радиуса δ с центром в σ выполняется

$$\sup f|_{U\times U}\le\sup f|_{\sigma\times\sigma}+\varepsilon.$$

Обозначим через V открытый шар $U_\delta^{\mathcal{P}_c(X,Y)}(\sigma)\subset\mathcal{P}_c(X,Y)$ радиуса δ с центром в σ. Так как для любого $\sigma'\in V$ выполняется $\sigma'\subset U$, то из сказанного выше вытекает, что

$$\operatorname{dis}\sigma'=\sup f|_{\sigma'\times\sigma'}\le\sup f|_{U\times U}\le\sup f|_{\sigma\times\sigma}+\varepsilon=\operatorname{dis}\sigma+\varepsilon.$$

Меняя местами σ и σ', получаем, что $|\operatorname{dis}\sigma-\operatorname{dis}\sigma'|\le\varepsilon$, а это означает непрерывность отображения dis. □

Теорема 7.27. *Для любых X, $Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)\ne\emptyset$.*

Доказательство. По 7.26, функция $\operatorname{dis}\colon\mathcal{R}_c(X,Y)\to\mathbb{R}$ непрерывна, а по 7.25 пространство $\mathcal{R}_c(X,Y)$ компактно, поэтому dis достигает своего наименьшего значения, половина которого, в силу 7.23, равна $d_{GH}(X,Y)$. Следовательно, соответствие R, на котором это наименьшее значение достигается, — оптимальное. □

Следствие 7.28. *Для любых X, $Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)\cap\mathcal{R}_c(X,Y)\ne\emptyset$, т.е. между любыми метрическими компактами существует замкнутое оптимальное соответствие.*

Доказательство. Это мгновенно вытекает из теоремы 7.27 и предложения 7.22. □

7.3.5 Метрика Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{M}$ — строго внутренняя

Пусть X, Y — произвольные метрические пространства. При каждом $t \in (0,1)$ определим на $X \times Y$ функцию расстояния, положив
$$\big|(x,y)(x',y')\big|_t = (1-t)|xx'| + t\,|yy'|.$$

Следующее предложение доказывается стандартным образом.

Предложение 7.29. *Определенная выше функция $|\cdot|_t$ является метрикой при всех $t \in (0,1)$, а порожденная ей метрическая топология на $X \times Y$ совпадает с топологией декартова произведения.*

Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$, метрическое пространство $\big(\sigma, |\cdot|_t\big)$ обозначим через σ_t.

Предложение 7.30. *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого $\sigma \in \mathcal{P}_c(X,Y)$ имеем $\sigma_t \in \mathcal{M}$ при каждом $t \in (0,1)$.*

Доказательство. Так как $X \times Y$ — хаусдорфов компакт, а σ — замкнутое подмножество $X \times Y$, то σ также является компактом. □

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и доопределим семейство R_t, $t \in (0,1)$, в точках $t = 0, 1$, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

Предложение 7.31. *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$, $R \in \mathcal{R}_c(X,Y)$ и любых $t, s \in [0,1]$ имеем $2d_{GH}(R_t, R_s) \le |t-s| \operatorname{dis} R$. Таким образом, кривая $t \mapsto R_t$ в $\mathcal{M}$ — непрерывна.*

Доказательство. Пусть сначала $t, s \in (0,1)$. Оценим расстояние $d_{GH}(R_t, R_s)$, используя тождественное соответствие $\operatorname{id} \in \mathcal{R}(R_t, R_s)$. Имеем

$$2d_{GH}(R_t,R_s) \le \operatorname{dis}\operatorname{id} = \sup\Big\{\big||(x,y)(x',y')|_t - |(x,y)(x',y')|_s\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} =$$
$$= |t-s| \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} = |t-s| \operatorname{dis} R.$$

Оценим теперь расстояние $d_{GH}(X, R_t)$, $t \in (0,1)$, с помощью соответствия

$$R' = \Big\{\big(x,(x,y)\big) : (x,y) \in R\Big\} \in \mathcal{R}(X, R_t).$$

Имеем

$$2d_{GH}(X,R_t) \le \operatorname{dis} R' = \sup\Big\{\big||xx'| - |(x,y)(x',y')|_t\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} =$$
$$= t \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} = t \operatorname{dis} R.$$

Аналогично получаем, что $2d_{GH}(R_t, Y) \le (1-t)\operatorname{dis} R$. Осталось заметить, что две последние оценки являются частными случаями следующей общей формулы:

$$2d_{GH}(R_t,R_s) \le |t-s| \operatorname{dis} R,$$

где $t, s \in [0,1]$. □

Теорема 7.32. *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y)$, существующего в силу следствия 7.28, кривая $t \mapsto R_t$, $t \in [0,1]$, соединяющая X и Y, является кратчайшей, причем ее длина равна $d_{GH}(X,Y)$. Тем самым, метрика пространства $\mathcal{M}$ — строго внутренняя.*

Доказательство. В силу предложения 7.31, кривая R_t — непрерывна, и для любых $t, s \in [0,1]$ выполняется

$$d_{GH}(R_t,R_s) \le \frac{1}{2}|t-s| \operatorname{dis} R = |t-s|\, d_{GH}(X,Y),$$

так что эта кривая является липшицевой с константой Липшица $d_{GH}(X,Y)$. В силу примера 3.2, длина этой кривой не превосходит $d_{GH}(X,Y)$, а в силу предложения 3.4, эта длина не меньше $d_{GH}(X,Y)$. □

7.4 О работа Д. Эдвардса "The Structure of Superspace"

Как мы уже упоминали в пункте (13) примера 1.4, расстояние Громова–Хаусдорфа между компактными метрическими пространствами было определено Д. Эдвардсом в работе [3], опубликованной в 1975 году, тогда как первые работы М. Громова [4], [5], в которых появилось это расстояние, относятся к 1981 году. Опишем кратко содержание работы Эдвардса [3], см. также [22] и [23].

В этой статье автор определяет два расстояния между компактными метрическими пространствами. В определении первого из них он использует понятие ε-изометрии $f\colon X \to Y$, отличающееся от принятого в настоящее время и приведенного в определении 6.15: у Эдвардса требуется лишь $\operatorname{dis} f \le \varepsilon$, но не предполагается, что $f(X)$ является ε-сетью в Y. Мы обозначим это расстояние через d_E и дадим его формальное определение.

Определение 7.33. *Первым расстоянием Эдвардса* между компактными метрическими пространствами X и Y назовем точную нижнюю грань $d_E(X,Y)$ тех $\varepsilon > 0$, для каждого из которых существуют ε-изометрии в смысле Эдвардса $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$.

Затем Эдвардс показывает, что

(1) расстояние d_E является метрикой на семействе $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств;

(2) пространство $(\mathcal{M}, d_E)$ стягиваемо;

(3) конечные метрические пространства всюду плотны в $(\mathcal{M}, d_E)$;

(4) пространство $(\mathcal{M}, d_E)$ сепарабельно;

(5) компактные связные метрические полиэдры всюду плотны в замкнутом подпространстве $(\mathcal{M}, d_E)$, состоящем из связных метрических пространств;

(6) луч $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ изометрически вкладывается в $(\mathcal{M}, d_E)$, поэтому пространство $(\mathcal{M}, d_E)$ некомпактно;

(7) гильбертов куб топологически вкладывается в $(\mathcal{M}, d_E)$, поэтому пространство $(\mathcal{M}, d_E)$ бесконечномерно;

(8) в $(\mathcal{M}, d_E)$ нет ни одной вполне ограниченной окрестности, в частности, $(\mathcal{M}, d_E)$ не является локально компактным.

Эдвардс также определяет второе расстояние. Для этого он напоминает, что каждое компактное метрическое пространство изометрически вкладывается в пространство ℓ^∞ ограниченных последовательностей (см. теорему 2.3).

Определение 7.34. *Вторым расстоянием Эдвардса* между компактными метрическими пространствами X и Y назовем точную нижнюю грань $d_E^H(X,Y)$ расстояний Хаусдорфа между подмножествами $A, B \subset \ell^\infty$, изометричными соответственно X и Y.

Затем Эдвардс показывает, что

(1) расстояние d_E^H является метрикой на семействе $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств;

(2) $d_E^H \ge \frac{1}{2} d_E$;

(3) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ стягиваемо;

(4) конечные метрические пространства всюду плотны в $(\mathcal{M}, d_E^H)$;

(5) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ сепарабельно;

(6) компактные связные метрические полиэдры всюду плотны в замкнутом подпространстве $(\mathcal{M}, d_E^H)$, состоящем из связных метрических пространств;

(7) луч $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ изометрически вкладывается в $(\mathcal{M}, d_E^H)$, поэтому $(\mathcal{M}, d_E^H)$ некомпактно;

(8) в $(\mathcal{M}, d_E^H)$ нет ни одной вполне ограниченной окрестности, в частности, $(\mathcal{M}, d_E^H)$ не является локально компактным;

(9) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ — полное.

Заметим, что, в силу предложения 6.10, на пространстве $\mathcal{M}$ классов изометрии метрических компактов **второе расстояние Эдвардса совпадает с расстоянием Громова–Хаусдорфа**. Кроме того, как было продемонстрировано выше, Эдвардс в работе [3] не только определил это расстояние, но и заложил основы теории, доказав целый ряд важных теорем, описывающих свойства этого расстояния.

Упражнение 7.35. Через $\widehat{d_{GH}}$ обозначим расстояние между метрическими компактами, определенное так же, как и в 7.33, только вместо ε-изометрий в смысле Эдвардса используя ε-изометрии в смысле определения 6.15. Выясните, как соотносятся между собой функции расстояния d_{GH}, $\widehat{d_{GH}}$ и d_E, рассматриваемые на пространстве $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств.

Литература

[1] Deza M.M., Deza E. *Encyclopedia of Distances.* Springer, 2009.

[2] Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.-Л.: ОНТИ, 1937.

[3] Edwards D.A. “The Structure of Superspace.” In: *Studies in Topology*, Academic Press, 1975.

[4] Gromov M.L. *Structures metriques pour les varietes riemanniennes*, Textes mathematiques. Recherche (v. 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.

[5] Gromov M.L. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps*, Publications mathematiques I.H.E.S., v. 53, 1981.

[6] Gromov M.L. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, with Appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes. Boston, MA: Birkhauser, 2007.

[7] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[8] Burago D., Burago Yu., Ivanov S. *A Course in Metric Geometry.* Graduate Studies in Mathematics, vol.33, A.M.S., Providence, RI, 2001.

[9] Braun D., Mayberry J., Powers A., Schlicker S. “A Singular Introduction to the Hausdorff Metric Geometry”. Pi Mu Epsilon Journal, 2005, v. 12 (3), pp. 129–138.

[10] Bogdewicz A. “Some Metric Properties of Hyperspaces”. Demonstratio Mathematica, 2000, v. 33, pp. 135-149.

[11] Bay C., Lembcke A., Schlicker S. “When Lines go bad in hyperspace”. Demonstratio Mathematica, 2005, v. 38 (3), pp. 689–701.

[12] Bay C., Lembcke A., Schlicker S. “Correcting Theorem 1 from *When Lines go bad in hyperspace*”. Demonstratio Mathematica, 2009, v. 42 (2), pp. 237–240.

[13] Blackburn C.C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. “A missing prime configuration in the Hausdorff metric geometry”. Journal of Geometry, 2009, v. 92, pp. 28–59.

[14] Honigs K. “Missing edge coverings of bipartite graphs and the geometry of the Hausdorff metric”. J. Geom., 2013, v. 104, pp. 107–125.

[15] Cristina J. *Gromov-Hausdorff convergence of metric spaces*, 2008, `http://www.helsinki.fi/~cristina/pdfs/gromovHausdorff.pdf`

[16] Hosoya H. “Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons”. Bulletin of the Chemical Society of Japan, 1971, v. 44 (9), pp. 2332–2339.

[17] Gutman I. “Polynomials in graph theory”. In: Bonchev D., Rouvray D.H., Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals, Mathematical Chemistry 1, Taylor & Francis, 1991, pp. 133–176.

[18] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. “Realizations of Gromov-Hausdorff Distance”. `ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850`, 2016.

[19] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. "The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic". `ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830`, 2015 [Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. "Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов – строго внутренняя". Мат. заметки, 2016, т. 100 (6), сс. 947–950].

[20] Овсянников З.Н., "Количество реберных покрытий двудольных графов или кратчайших с фиксированнми концами в пространстве компактов в $\mathbb{R}^n$." Доклады Академии Наук, 2016, т. 466 (4), сс. 402–405.

[21] Ghanaat P. "Gromov-Hausdorff distance and applications". In: Summer school "Metric Geometry", Les Diablerets, August 25–30, 2013, `https://math.cuso.ch/fileadmin/math/document/gromov-hausdorff.pdf`

[22] Tuzhilin A.A. "Who Invented the Gromov-Hausdorff Distance?" `ArXiv e-prints, arXiv:1612.00728`, 2016.

[23] Тужилин А.А. "Кто придумал расстояние Громова–Хаусдорфа?" 2016, `http://dfgm.math.msu.su/files/tuzhilin/Edwards.pdf`