Исследовательские задачи по минимальным сетям и минимальны заполнениям

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Мы будем рассматривать разные граничные задачи в теории графов. Для этого мы всегда будем предполагать, что у каждого из рассматриваемых нами графов G заранее задано некоторое подмножество множества вершин, которое называется *границей* и обозначается через ∂G. Отметим, что граница графа может быть пустой (такие графы иногда называются *замкнутыми*). Вершины из ∂G называются *граничными*, а все остальные вершины графа G — *внутренними*. Если M — граница графа G, то принято говорить, что G *соединяет* M.

Мы будем иметь дело с метрическими свойствами графов. Связать графы с метрикой можно многими разными способами. Нам будут нужны следующие.

(1) Рассмотрим граф G с множеством ребер E, и пусть $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа. Такие отображения называются *весовыми функциями*. Если для графа задана весовая функция, то такой граф называют *взвешенным*. Если H — подграф взвешенного графа G с весовой функцией ω, то сумма весов ребер графа H называют *весом* $\omega(H)$ *графа* H. В частности, так определяются *вес* $\omega(G)$ *всего графа* G и *веса путей в* G.

Пусть G — связный взвешенный граф с весовой функцией ω, а u и v — его вершины. Тогда наименьший вес путей, соединяющих u и v, обозначим через $d_\omega(u,v)$. Легко проверяется, что d_ω — псевдометрика на множестве вершин графа G (в отличие от метрики, расстояние между разными вершинами может равняться нулю). Итак, весовая функция ω на графе G превращает его множество вершин в псевдометрическое пространство.

(2) Пусть X — некоторое псевдометрическое пространство. Рассмотрим граф G с множеством вершин V, для которого $V \subset X$. Такие G обычно называют *графами в пространстве* X. Если G — такой граф, а ρ — функция расстояния на X, то для каждого ребра $uv \in E$, соединяющего вершины u и v графа G, естественно положить $\omega(uv) = \rho(u,v)$. Величина $\omega(G)$ называется *длиной графа* G и обозначается также через $\rho(G)$.

(3) Предыдущую конструкцию можно обобщить. Пусть G — произвольный граф с множеством вершин V, и X — псевдометрическое пространство с функцией расстояния ρ. Каждое отображение $\Gamma\colon V \to X$ называется *сетью на* X *типа* G, при этом G называется *параметризующим графом* этой сети. Для такой сети естественно определяется весовая функция ω_Γ по фор-

муле $\omega_\Gamma(uv) = \rho\bigl(\Gamma(u), \Gamma(v)\bigr)$. Величина $\omega_\Gamma(G)$ называется *длиной сети* Γ и обозначается через $\rho(\Gamma)$. Традиционно, в определении сетей предполагается, что граф G — связный. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда будем считать, что **тип G каждой из рассматриваемых сетей — связный граф**.

(4) Будем рассматривать граф G как конечный одномерный клеточный комплекс (нульмерные клетки — вершины, одномерные — ребра) и называть такой G *геометрическим графом. Геометрической сетью типа G в топологическом пространстве* X назовем непрерывное отображение Γ графа G в X, при этом G так же будем называть *параметризующим графом.* Если топология пространства X порождена псевдометрикой ρ, то ребра геометрической сети, т.е. ограничения отображения Γ на ребра графа G, имеют длину (возможно, бесконечную). Сумма длин ребер сети Γ называется *длиной* этой сети и обозначается через $\rho(\Gamma)$.

Естественным примером геометрических сетей являются плоские графы, для которых дополнительно предполагается, что все кривые, соответствующие ребрам сети, не имеют самопересечений, и что внутренность каждого ребра не пересекает оставшиеся ребра. Геометрические сети в произвольном топологическом пространстве, удовлетворяющие только что описанному условию, обычно называют *вложенными.* Таким образом, плоские графы — это вложенные геометрические сети на евклидовой плоскости.

Отметим, что геометрическая сеть $\Gamma\colon G \to X$, ограниченная на множество вершин графа G, является сетью в смысле (3). Если метрическое пространство X наделено строго внутренней метрикой, т.е. любые две точки такого пространства соединяются кратчайшей кривой, причем длина кривой равна расстоянию между этими точками, то длина последней такая же, как и у Γ. Обратно, если для сети в смысле (3) превратить ее параметризующий граф в геометрический, а затем соединить образы смежных вершин кратчайшими кривыми, параметризованными отрезками, соответствующими ребрам полученного геометрического графа, то мы получим геометрическую сеть, длина которой совпадает с длиной исходной сети. В дальнейшем мы будем часто пользоваться описанным только что отождествлением сетей и геометрических сетей, не оговаривая это каждый раз.

Как и выше, говоря про геометрические сети типа G мы, если не оговорено противно, **всегда будем считать граф G связным**.

1 Минимальные сети

Сформулируем теперь следующую граничную задачу, называемую *обобщенной проблемой Штейнера.*

Пусть X — псевдометрическое пространство и M — его конечное подмножество. Обозначим через $\mathcal{G}_c(M)$ все связные графы в X, соединяющие M. Точную нижнюю грань длин графов из $\mathcal{G}_c(M)$ обозначим через $\mathrm{smt}(M)$. Каждый граф $G \in \mathcal{G}_c(M)$, для которого $\rho(G) = \mathrm{smt}(M)$, называется *кратчайшим графом в X, соединяющим M*. Задача изучения таких графов называется *обобщенной проблемой Штейнера.* Отметим, что если длины всех ребер кратчайшего графа G отличны от нуля (это имеет место, например, в метрическом пространстве X), то G является деревом, которое принято называть *минимальным деревом Штейнера* (отсюда — сокращение smt, обозначающее “Steiner Minimal Tree”).

Альтернативная постановка обобщенной проблемы Штейнера может быть дана в терминах сетей. При тех же X, ρ и M, обозначим через $\mathcal{N}_c(M)$ множество всех сетей $\Gamma\colon V \to X$, для которых $M \subset \Gamma(V)$. Тогда точная нижняя грань длин всех сетей $\Gamma \in \mathcal{N}_c(M)$, равна $\mathrm{smt}(M)$. Каждая сеть $\Gamma \in \mathcal{N}_c(M)$, длина которой равна $\mathrm{smt}(M)$, называется *кратчайшей сетью* или *минимальной сетью Штейнера с границей M*.

Локальная структура кратчайших деревьев на полных римановых многообразиях хорошо известна. При описании локальной структуры обычно рассматривают геометрические сети. У таких сетей ребра обязаны являться кратчайшими кривыми, стыкующимися под углами, не превосходящими 120°, в частности, степени вершин таких деревьев не превосходит 3. Кроме того, вершины степени 1 всегда являются граничными, а во внутренних вершинах степени 2 ребра стыкуются под углами в 180°, так что такие вершины можно выкинуть из множества вершин, склеив выходящие из них ребра. Последнее приводит к соглашению считать, что таких вершин у рассматриваемых сетей нет.

Геометрические сети, каждый достаточно малый фрагмент которых является кратчайшим деревом, называются *локально минимальными.* В случае римановых многообразий локальная минимальность равносильна тому, что локальная структура сети удовлетворяет описанным выше свойствам.

Следующая группа задач касается изучения глобальной структуры кратчайших деревьев.

Задача 1.1. *Описать кратчайшие деревья, соединяющие вершины различных классов граничных множеств.*

Приведем примеры некоторых конкретных классов. Для начала рассмотрим случай евклидовой плоскости.

Пусть G — произвольное плоское дерево с границей ∂G. Будем говорить, что G имеет *выпуклую локально минимальную реализацию*, если G планарно эквивалентно некоторому локально минимальному плоскому дереву G_m, граница которого является множеством вершин некоторого выпуклого многоугольника W. Если W является правильным многоугольников, то в предыдущем названии заменим слово “выпуклый” на “правильный”. Если G_m является кратчайшим деревом, то в заменим слово “локально” на слово “глобально”.

Мы назовем дерево *бинарным*, если степени вершин этого дерева равны 1 или 3, а граница дерева состоит в точности из всех вершин степени 1. В [3] описаны планарные типы (т.е. классы планарной эквивалентности) плоских бинарных деревьев, имеющих выпуклые локально минимальные реализации.

Задача 1.2. *Описать планарные типы всех плоских деревьев (не обязательно бинарных), имеющих выпуклую локально минимальную реализацию.*

Задача 1.3. *Описать планарные типы всех плоских деревьев, имеющих выпуклую глобально минимальную реализацию. Верно ли, что эти классы такие же, как и в задаче 1.2.*

В [3] описаны все плоские бинарные деревья типа скелет, имеющие правильную локально минимальную реализацию.

Задача 1.4. *Описать планарные типы всех плоских деревьев, имеющих правильную локально минимальную реализацию.*

В [3] также получены необходимые условия на структуру произвольной локально минимальной сети (возможно, с циклами) с выпуклой границей. Если в случае деревьев полученные условия являются также и достаточными (т.е. получен критерий), то для сетей с циклами достаточность не доказана.

Задача 1.5. *Описать планарные типы всех связных плоских графов, имеющих выпуклую локально минимальную реализацию.*

Более общий вопрос такой.

Задача 1.6. *Описать планарные типы всех связных плоских графов, имеющих локально минимальную реализацию.*

Последняя задача является частным случаем следующей общей проблемы. Пусть задан плоский граф G. Каждая грань f такого графа представляет собой топологический многоугольник на плоскости (на самом деле, в силу теоремы Вагнера, без ограничения общности можно считать, что все ребра графа — прямолинейные отрезки). Пусть в каждой вершине v этого многоугольника задано вещественное число $\alpha(v,f) \in (0,2\pi)$. Мы назовем величину $\alpha(v,f)$ *априорным углом.* Общий вопрос: при каких ограничениях на априорные углы существует вложение графа G в плоскость такое, что все ребра — прямолинейные отрезки, а все углы граней-многоугольников равны соответствующим априорным углам? Ясно, что должны быть выполнены естественные ограничения вида

$$\sum_{v:v\in f} \alpha(v,f) = \pi\big(|f|-2\big), \qquad \sum_{f:f\ni v} \alpha(v,f) = 2\pi,$$

где через $|f|$ обозначено количество вершин грани f, причем первое равенство должно иметь место для произвольной ограниченной грани f, а второе — для произвольной вершины v. Отметим, что существуют плоские графы с заданными априорными углами, для которых эти условия выполнены, но соответствующей реализации нет.

Задача 1.7. *Сформулировать и доказать критерий реализуемости плоского графа с заданными априорными углами.*

В [1] и [2] описаны все плоские деревья, имеющие правильную глобально минимальную реализацию.

Задача 1.8. *Описать кратчайшие деревья, соединяющие вершины правильных многоугольников на сфере и на плоскости Лобачевского. Более общо, описать кратчайшие деревья на замкнутых двумерных многообразиях постоянной кривизны, соединяющие точки, равномерно расположенные на данной замкнутой геодезической.*

Задача 1.9. *Описать все планарные типы кратчайших деревьев на евклидовой плоскости, границы которых лежат на окружности. Верно ли, что эти классы такие же, как и в задаче 1.2.*

Замкнутую несамопересекающуюся кривую γ на евклидовой плоскости назовем *штейнерово выпуклой*, если в каждом классе планарной эквивалентности из задачи 1.2 существует кратчайшее дерево с границей, лежащей на γ.

Задача 1.10. *Описать штейнерово выпуклые кривые.*

Задача 1.11. *Описать кратчайшие деревья на поверхностях выпуклых многогранников, соединяющие множества вершин этих многогранников.*

Пусть X — метрическое пространство с функцией расстояния ρ. Для произвольного непустого $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $U_\varepsilon(A)$ объединение всех открытых шаров $U(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$ радиуса ε с центрами в точках $x \in A$. Множество $U_\varepsilon(A)$ называется *ε-окрестностью для A*. Пусть теперь A и B — непустые подмножества X. Положим $\rho_H(A,B)$ равным точной нижней грани тех ε, для которых $A \subset U_\varepsilon(B)$ и $B \subset U_\varepsilon(A)$. Число $\rho_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между множествами A и B*. Если $\mathcal{K}(X)$ обозначает множество непустых компактов в X, то ρ_H является метрикой на $\mathcal{K}(X)$.

Задача 1.12. *Построить теорию кратчайших сетей в $\mathcal{K}(X)$.*

Пусть A и B — два произвольных метрических пространства. Через $\rho_{GH}(A,B)$ обозначим точную нижнюю грань числе $\rho_H\big(f(A), f(B)\big)$, взятую по всевозможным изометрическим вложением f пространств A и B во всевозможные метрические пространства X. Число $\rho_{GH}(A,B)$ называется *расстоянием Громова-Хаусдорфа между метрическими пространствами A и B*. Обозначим через $\mathcal{K}$ множество классов изометрии всевозможных компактных метрических пространств. Тогда ρ_{GH} является метрикой на $\mathcal{K}$.

Задача 1.13. *Построить теорию кратчайших сетей в $\mathcal{K}$.*

Пусть X — псевдометрическое пространство и M — его конечное подмножество. Обозначим через $\mathcal{S}_c(M)$ все деревья на X, множества вершин которых совпадает с M. Точную нижнюю грань длин деревьев из $\mathcal{S}_c(M)$ обозначим через $\mathrm{mst}(M)$. Каждое дерево $D \in \mathcal{S}_c(M)$, для которого $\rho(D) = \mathrm{mst}(M)$, называется *минимальным остовным деревом на M* (сокращение mst расшифровывается как “Minimal Spanning Tree”).

Конечное подмножество M псевдометрического пространства X, для которого $\operatorname{mst}(M) \neq 0$, будем называть *невырожденным*. Для каждого невырожденного $M \subset X$ определено *отношение Штейнера*

$$\operatorname{sr}(M) = \operatorname{smt}(M)/\operatorname{mst}(M)$$

(измеряет степень пригодности минимального остовного дерева в качестве приближенного решения проблемы Штейнера для множества M). Точная нижняя грань чисел $\operatorname{sr}(M)$ по всем невырожденным подмножествам M пространства X называется *отношением Штейнера* $\operatorname{sr}(X)$ *пространства* X.

Вычисление отношение Штейнера — нетривиальная задача, см. [4] и [3]. Даже в случае евклидовой плоскости отношение Штейнера до сих пор не известно.

Задача 1.14. *Научиться вычислять отношение Штейнера различных псевдометрических пространств.*

Согласно гипотезе Гилберта–Поллака, отношение Штейнера евклидовой плоскости должно достигаться на множестве вершин правильного треугольника. В многомерном евклидовом пространстве, однако, несложно показать, что отношение Штейнера не достигается на множестве вершин правильного симплекса. Более того, как показали Ду и Смит [7], если отношение Штейнера для евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ достигается на некотором конечном подмножестве $M \subset \mathbb{R}^n$, то количество элементов этого подмножества ограничено снизу некоторой быстро растущей функцией $f(n)$ от размерности пространства. Это породило гипотезу о том, что в больших размерностях отношение Штйнера не достигается на конечном граничном множестве.

Задача 1.15. *Что можно сказать о множествах, на которых может достигаться отношение Штейнера, на нормированной плоскости? В нормированном пространстве? В других метрических пространствах?*

Замечание 1.1. Очевидно, отношение Штейнера равно 1, если и только если оно достигается на любом конечном множестве. Для манхеттанской плоскости (т.е. плоскости, на которой норма вектора v с координатами (x, y) в стандартной системе координат равна $|x| + |y|$) отношение Штейнера равно $2/3$, см. [8], и достигается, например, на множестве вершин соответствующей окружности, которая в этом случае представляет собой квадрат с диагоналями, параллельными координатным осям. Аналогичный результат верен для любой плоскости Минковского (т.е. плоскости с нормой), окружность на которой представляет собой параллелограмм, см. [9].

Замкнутые локально минимальные сети на полных римановых многообразиях, а также на выпуклых многогранниках, состоят из конечных семейств геодезических, стыкующихся в вершинах сети по три под равными

120° углами. Такие сети полностью описаны на замкнутых двумерных многообразиях постоянной неотрицательной кривизны, а также на равногранных тетраэдрах, см. [3].

Задача 1.16. *Описать замкнутые локально минимальные сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, а также на поверхностях выпуклых двумерных многогранников, в частности, на поверхностях платоновых тел, отличных от правильного тетраэдра.*

Отметим, что случай поверхностей постоянной отрицательной кривизны существенно сложнее случая поверхностей нулевой кривизны. Здесь, практически, ничего не известно, за исключением нескольких серий примеров, см. например [10]. Поэтому вместо общей проблемы описания замкнутых локально минимальных сетей, можно ставить более частные, но не менее интересные, задачи. Приведем здесь далеко не полный список вопросов, ответы на которые не известны.

Задача 1.17. *Показать, что на любой поверхности постоянной отрицательной кривизны существует замкнутая локально минимальная сеть, все ячейки которой гомеоморфны диску.*

Задача 1.18. *Верно ли, что на любой поверхности постоянной отрицательной кривизны существует конечное число замкнутых локально-минимальных сетей?*

Напомним, что на плоскости Лобачевского площадь многоугольника определяется величинами его углов. Хорошо известно, что каждая ориентируемая поверхность M_g рода $g \geq 2$ и постоянной отрицательной кривизны может быть склеена из $4g$ угольника на плоскости Лобачевского, сумма углов которого равна 2π, поэтому площадь любой такой поверхности M_g равна $4\pi(g-1)$. Аналогично, площадь k-угольника с углами $2\pi/3$ равна $\pi(k-6)/3$, поэтому $7 \leq k \leq 12g-6$. Кроме того, если количество k-угольных ячеек сети равно n_k, то, очевидно,

$$\sum_{k=7}^{12g-6} n_k \frac{\pi(k-6)}{3} = 4\pi(g-1).$$

(Такое же линейное соотношение на n_k можно получить из формулы Эйлера.) Например, для $g = 2$ имеется 77 решений, из которых “крайние” — один 18-угольник (других ячеек нет) и 12 семиугольников (других ячеек нет). Кроме того, если фиксировано решение $(n_7, \ldots, n_{12g-6})$, то соответствующий набор многоугольников можно, вообще говоря, пытаться склеивать в поверхность рода g разными способами. Каждая склейка задается разбиением сторон многоугольников на непересекающиеся пары.

Задача 1.19. *Описать все возможные склейки поверхности M_g из многоугольников с углам по $2\pi/3$. В частности, выяснить, имеются ли какие-нибудь ограничения на такие склейки, кроме топологических (другими* *словами, если поверхность M_g может быть склеена из данного набора многоугольников с произвольными углами, верно ли, что можно сделать все углы по* $120°$*?).*

Замечание 1.2. Для так называемых регулярных разбиений (т.е. таких, что все ячейки сети имеют одинаковое число сторон) положительный ответ на этот вопрос вытекает из работы [11].

2 Минимальные заполнения

Пусть M — конечное псевдометрическое пространство с функцией расстояния ρ, и пусть G — связный взвешенный граф с весовой функцией ω, соединяющий M. Назовем G — *заполнением пространства* M, если для любых двух вершин u и v графа G, лежащих в M, выполняется $\rho(u,v) \le d_\omega(u,v)$. Обозначим через $\mathrm{mf}(M)$ точную нижнюю грань весов $\omega(G)$ всех заполнений G пространства M. Каждое заполнение G пространства M, для которого $\omega(G) = \mathrm{mf}(M)$, называется *минимальным заполнением пространства* M.

Если же фиксировать связный граф G, соединяющий M, и рассмотреть точную нижнюю грань чисел $\omega(G)$ по всем весовым функциям, для которых взвешенный граф G — заполнение пространства M, то полученную величину обозначим через $\mathrm{mpf}(M)$, а каждое заполнение G, для которого $\omega(G) = \mathrm{mpf}(M)$, будем называть *минимальным параметрическим заполнением типа* G *пространства* M.

Теория минимальных заполнений конечных метрических пространств возникла в [5] и [6].

Задача 2.1. *Описать минимальные заполнения, соединяющие вершины правильных многоугольников на евклидовой плоскости, стандартной сфере и на плоскости Лобачевского. Более общо, описать минимальные заполнения, соединяющие точки, равномерно расположенные на данной замкнутой геодезической полного риманова многообразия постоянной кривизны.*

Минимальные заполнения оказались тесно связаны с кратчайшими деревьями. Как показано в [6], вес минимального заполнения конечного метрического пространства M равен точной нижней длин кратчайших деревьев, затягивающих образы $\varphi(M)$ пространства M при его изометричных вложениях $\varphi\colon M \to X$ во всевозможные объемлющие пространства X. Этот инфимум достигается, в частности, на вложении Куратовского в нормированное пространство $\mathbb{R}^{|M|}_\infty$ с max-нормой $\|\cdot\|_\infty$, которая, напомним, для вектора $x = (x^1, \dots, x^m)$ вычисляется по формуле $\|x\|_\infty = \max_i |x^i|$. Недавно З. Овсянников показал, что и для произвольного граничного множества $M \subset \mathbb{R}^m_\infty$ кратчайшее дерево, соединяющее M в $\mathbb{R}^m_\infty$ является его минимальным заполнением.

Задача 2.2. *Описать метрические пространства* X*, в которых кратчайшие деревья являются минимальными заполнениями своих границ.*

Замечание 2.1. Здесь возможны разные формулировки. Можно требовать, чтобы свойство было выполнено или для всех конечных подмножеств $M \subset X$, или для подмножеств, состоящих не более чем из k элементов.

Для минимальных заполнений определяются аналоги отношения Штейнера по тому же алгоритму. Если рассматривать величины $\mathrm{mf}(M)/\operatorname{mst}(M)$, то получаем *суботношение Штейнера*, а если величины $\mathrm{mf}(M)/\operatorname{smt}(M)$, то — *отношение Штейнера–Громова.*

Задача 2.3. *Научиться вычислять суботношение Штейнера и отношение Штейнера–Громова различных псевдометрических пространств.*

В предыдущем разделе мы уже говорили об изучении множеств, на которых может достигаться обычное отношение Штейнера, см. задачу 1.15. Аналогичный вопрос можно поставить и для отношений, связанных с минимальными заполнениями.

Задача 2.4. *Что можно сказать о граничных множествах, на которых может достигаться суботношение Штейнера и/или отношение Штейнера–Громова?*

Список литературы

[1] Jarnik V., Kössler O. *O minimálních grafech obsahujících n daných bodu*, Cas Pêstování Mat. (Essen), 1934, v. 63, pp. 223–235.

[2] Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F. *Steiner minimal trees for regular polygons*, Discrete and Computational Geometry, 1987, v. 2, N 1, pp. 65-84.

[3] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[4] Cieslik D. *The Steiner Ratio. A Report.* University of Greifswald.

[5] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *One-dimensional Gromov minimal filling.* arXiv:1101.0106v2 [math.MG] (http://arxiv.org)

[6] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении.* Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, сс. 65 – 118.

[7] D. Z. Du, W. D. Smith, *Disproofs of generalized Gilbert–Pollack conjecture on the Steiner ratio in three or more dimensions*, J. Combin. Theory, **74** Ser. A, pp. 115–130, 1996.

[8] F. K. Hwang, *On Steiner Minimal Trees with Rectilinear Distance*, SIAM Journal on Applied Mathematics, bf 30, No. 1, pp. 104–114, 1976.

[9] B. Gao, D.-Z. Du, R. L. Graham, *A Tight lower bound for the Steiner ratio in Minkowski planes*, Disc. Math., **142**, pp. 49–63, 1995.

[10] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations*, CRC. Press, Boca Raton, 1994.

[11] A. L. Edmonds, J. H. Ewing and R. S. Kulkarni, *Regular Tessellations of Surfaces and $(p, q, 2)$-Triangle Groups*, The Annals of Mathematics, Second Series, **116**, No. 1 (1982), pp. 113–132.