Задачи для исследования геометрии расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Мы расскажем об интересных нам задачах, связанных с изучением геометрии расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. Мы приведем лишь самые необходимые определения. Детали можно почитать здесь [1], куда мы выложили конспекты наших спецкурсов по метрической геометрии, геометрической теории графов и геометрической теории меры.

1 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$.

Пусть $x \in X$. Для $r > 0$ *открытый шар с центром в x и радиусом r* — это множество $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$. Для каждого непустого $A \subset X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$ и $U_r(A) = \{y \in X : |Ay| < r\}$. Отметим, что $U_r(A) = \cup_{a \in A} U_r(a)$.

Для непустых A, $B \subset X$ пусть

$$d_H(A,B) = \max\Big[\sup\big\{|aB| : a \in A\big\}, \sup\big\{|Ab| : b \in B\big\}\Big] = \inf\big\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\big\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Пусть $\mathcal{H}(X)$ обозначает семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.

Теорема 1.1 (см. [2]). *Для каждого метрического пространства X расстояние Хаусдорфа d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Напомним, что метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность сходится; *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть (т.е. такое конечное подмножество S, что для каждого $x \in X$ существует $s \in S$, для которого $|xs| < \varepsilon$); *компактным*, если из каждого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 1.2 (см. [2]). *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Тогда пространство $\mathcal{H}(X)$ — полное* (*вполне ограниченное, компактное*)*, если и только если X обладает этим же свойством.*

Напомним, что метрическое пространство называется *ограниченно компактным*, если каждый замкнутый шар в нем компактен.

Следствие 1.3. *Метрическое пространство X — ограниченно компактное, если и только если $\mathcal{H}(X)$ ограниченно компактно.*

Задача 1.1. Изучить геометрию пространств $\mathcal{H}(X)$ с метрикой Хаусдорфа, в частности, построить теорию экстремальных сетей в этих пространствах.

Приведем некоторые результаты, полученные в [3]. Несложно показать, что для каждого ограниченно компактного пространства X и произвольного конечного подмножества $M \subset X$ существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее M. В частности, в силу следствия 1.3, это верно и для $\mathcal{H}(X)$.

В [3] была развита общая теория *компактов Штейнера*, т.е. таких компактов, которые находятся на минимальном суммарном расстоянии от конечного непустого семейства M компактных подмножеств метрического пространства X. Показано, что в случае ограниченно компактного пространства X, множество компактов

Штейнера непусто для каждого M, и что все компакты Штейнера разбиваются на семейства, каждое из которых однозначно определяется парой, состоящей из минимального и максимального компактов Штейнера: остальные компакты этого семейства — всевозможные "промежуточные" компакты.

Кроме того, было продемонстрировано (А.М.Тропин [3]), насколько интуитивно нетривиальна задача 1.1 даже в случае, когда X — евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим граничное множество $M = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, состоящее из трех непересекающихся элементов, где каждый A_i состоит из двух смежных вершин a_i и b_i правильного шестиугольника. Несмотря на то, что граница представляет собой правильный треугольник в пространстве $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и инвариантна относительно поворотов вокруг центра шестиугольника на 120°, имеется три семейства компактов Штейнера, и все эти компакты не инвариантны относительно таких поворотов. На рис. 1 изображены минимальные и максимальные компакты Штейнера: первые из них — пары черных точек вблизи центра шестиугольника, вторые — криволинейные четырехугольники (на самом деле стороны этих четырехугольников — дуги окружностей).

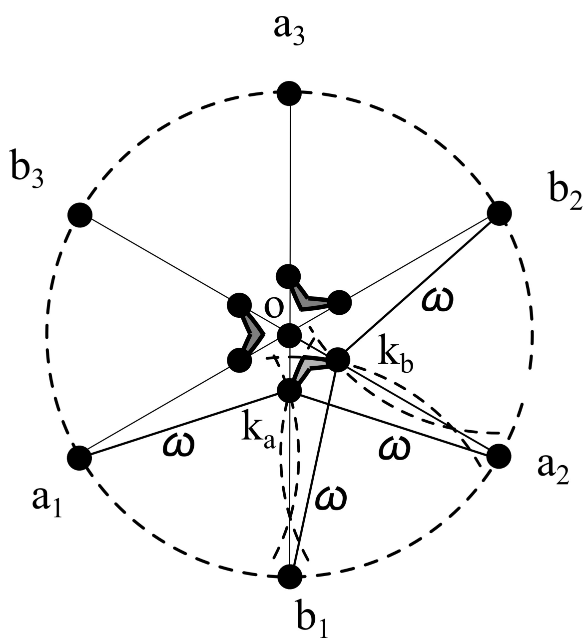

Рис. 1: Граничные компакты $A_i = \{a_i, b_i\}$, три максимальных компакта Штейнера (закрашены серым), три минимальных компакта Штейнера (пары жирных черных точек по углам максимальных компактов).

2 Расстояние Громова–Хаусдорфа

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *Громова–Хаусдорфа между* X *и* Y называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой. Кроме того, также известно, что пространство $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное и сепарабельное (содержит счетное всюду плотное подмножество). Недавно было показано (см. [4] и [5]), что оно также является геодезическим, т.е. любые две его точки соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками. Кроме того, было выяснено, что пространство Громова-Хаусдорфа глобально неоднородно, т.е. его группа изометрий тривиальна [6], [7], однако локально имеется много нетривиальных изометрий.

Задача 2.1. Изучить геометрию пространства $\mathcal{M}$.

Приведем ряд подзадач, которыми занимаются наши ученики [9].

Задача 2.1.1 (Р.А.Цветников)**.** Выяснить, являются ли сферы в пространстве $\mathcal{M}$ линейно связными.

Задача 2.1.2 (Д.П.Клибус)**.** Выяснить, являются ли шары в пространстве $\mathcal{M}$ выпуклыми в слабом смысле (любые две точки шара можно соединить кратчайшей кривой, лежащей в шаре).

Задача 2.1.3 (С.И.Борзов)**.** Выяснить, какие кратчайшие геодезические отрезки и на сколько продолжаются за свои граничные точки до кратчайших геодезических.

Задача 2.1.4 (А.М.Филин)**.** Какие метрические пространства изометрично вкладываются в $\mathcal{M}$?

Замечание 2.1. В [10] было показано, что каждое конечное метрическое пространство можно изометрично вложить в $\mathcal{M}$.

Задача 2.1.5 (И.А.Михайлов)**.** Изучить свойства отображения $f\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$, $f\colon X\mapsto\mathcal{H}(X)$. Например, выяснить, изометрично ли оно. Вариант — вместо $\mathcal{H}(X)$ рассмотреть классы изометрии элементов из $\mathcal{H}(X)$. Задача также расширяется на разные другие "естественные" отображения этого типа.

Задача 2.1.6 (Д.С.Григорьев)**.** Вычислить расстояния Громова-Хаусдорфа от метрических компактов до бесконечных симплексов, т.е. до бесконечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы.

Задача 2.1.7 (О.Б.Борисова)**.** Выяснить, являются ли компактными сегменты в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Другой вариант расстояния Громова–Хаусдорфа получается, если ограничиться изометрическими вложениями в данное объемлющее метрическое пространство W, обладающее, как правило, большой группой изометрий, например, в однородное пространство. Так возникает *расстояние Громова–Хаусдорфа в* W.

Задача 2.2. Изучить геометрию расстояния Громова–Хаусдорфа в односвязном пространстве постоянной кривизны.

Задача 2.2.1 (О.С.Малышева)**.** Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа в евклидовом пространстве между компактными подмножествами из конкретных классов, скажем, между одноточечным подмножеством и произвольным компактом (связь с чебышевским радиусом), между двухточечным пространством и произвольным компактом (существенно сложнее), между шаром и компактом, и т.д. Свойства этого расстояния, связь с общим расстоянием Громова–Хаусдорфа.

Имеется много нерешенных проблем. Приведем несколько примеров.

Задача 2.2.2. Верно ли, что каждое конечное подмножество M в $\mathcal{M}$ можно соединить кратчайшим деревом (минимальным деревом Штейнера)?

Замечание 2.2. Задачей 2.2.2 занималась Н.К.Николаева. Было показано, что ответ положительный для M, состоящих из конечных метрических пространств [12]. В случае, когда граница состоит из произвольных метрических компактов, ответ не известен.

Задача 2.2.3. Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными пространствами (классами пространств).

Замечание 2.3. Здесь имеется ряд результатов, в основном касающихся расстояний до *симплексов* [13], т.е. до конечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы. Тем не менее, даже при таком упрощении эта задача полностью не решена.

Задача 2.2.4. При каких условиях на граничное множество минимальное дерево Штейнера в $\mathcal{M}$ является минимальным заполнением?

Замечание 2.4. Из [10] мгновенно вытекает, что каждое одномерное минимальное заполнение может быть реализовано в $\mathcal{M}$. В [15] построен пример трехточечных границ, для которых минимальное дерево Штейнера не является минимальным заполнением. А в работе [14] рассмотрен ряд частных случаев, в которых минимальное дерево Штейнера является минимальным заполнением.

Список литературы

[1] `http://dfgm.math.msu.su/courses.php?comments=19`

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Tropin A.M., Tuzhilin A.A. *Fermat-Steiner Problemin the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance.* Journal of Geometry, Birkhauser Verlag, Switzerland, 2016, DOI: 10.1007/s00022-016-0360-0.

[4] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[5] Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А. *Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя.* Математические заметки, 2016, т. 100, N 6, с. 947-950.

[6] `http://mathoverflow.net/questions/212364/on-the-global-structure-of-the-gromov-hausdorff-metric-space`

[7] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Isometry Group of Gromov-Hausdorff Space.* ArXiv e-prints, arXiv:1806.02100, 2018.

[8] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Local Structure of Gromov-Hausdorff Space near Finite Metric Spaces in General Position*, ArXiv e-prints, arXiv:1611.04484б 2015.

[9] `http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part7.php`

[10] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Local structure of Gromov–Hausdorff space and isometric embeddings of finite metric spaces into the former space*, ArXiv e-prints, `arXiv:1604.07615` (2016).

[11] Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. *Local Structure of Gromov-Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space.* Topology and its Applications, Elsevier BV, Netherlands, 2017, v. 221, pp. 393-398, DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.050.

[12] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *Steiner Problem in Gromov–Hausdorff Space: the case of finite metric spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.02170, 2016.

[13] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes.* ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.

[14] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Steiner Ratio and Steiner-Gromov Ratio of Gromov-Hausdorff Space.* ArXiv e-prints, arXiv:1605.01094, 2016.

[15] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116, 2016.