Задачи для исследования геометрии расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Мы расскажем об интересных нам задачах, связанных с изучением геометрии расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. Мы приведем лишь самые необходимые определения. Детали можно почитать здесь [1], куда мы выложили конспекты наших спецкурсов по метрической геометрии, геометрической теории графов и геометрической теории меры.

1 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$.

Пусть $x \in X$. Для $r > 0$ *открытый шар с центром в x и радиусом r* — это множество $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$. Для каждого непустого $A \subset X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$ и $U_r(A) = \{y \in X : |Ay| < r\}$. Отметим, что $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

Для непустых A, $B \subset X$ пусть

$$d_H(A,B) = \max\Big[\sup\big\{|aB| : a \in A\big\}, \sup\big\{|Ab| : b \in B\big\}\Big] = \inf\big\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\big\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Пусть $\mathcal{H}(X)$ обозначает семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.

Теорема 1.1 (см. [2]). *Для каждого метрического пространства X расстояние Хаусдорфа d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Напомним, что метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность сходится; *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть (т.е. такое конечное подмножество S, что для каждого $x \in X$ существует $s \in S$, для которого $|xs| < \varepsilon$); *компактным*, если из каждого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 1.2 (см. [2]). *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Тогда пространство $\mathcal{H}(X)$ — полное* (*вполне ограниченное, компактное*)*, если и только если X обладает этим же свойством.*

Напомним, что метрическое пространство называется *ограниченно компактным*, если каждый замкнутый шар в нем компактен.

Следствие 1.3. *Метрическое пространство X — ограниченно компактное, если и только если $\mathcal{H}(X)$ ограниченно компактно.*

Задача 1.1. Изучить геометрию пространств $\mathcal{H}(X)$ с метрикой Хаусдорфа, в частности, построить теорию экстремальных сетей в этих пространствах.

Приведем некоторые результаты, полученные в [3]. Несложно показать, что для каждого ограниченно компактного пространства X и произвольного конечного подмножества $M \subset X$ существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее M. В частности, в силу следствия 1.3, это верно и для $\mathcal{H}(X)$.

В [3] была развита общая теория *компактов Штейнера*, т.е. таких компактов, которые находятся на минимальном суммарном расстоянии от конечного непустого семейства M компактных подмножеств метрического пространства X. Показано, что в случае ограниченно компактного пространства X, множество компактов

Штейнера непусто для каждого M, и что все компакты Штейнера разбиваются на семейства, каждое из которых однозначно определяется парой, состоящей из минимального и максимального компактов Штейнера: остальные компакты этого семейства — всевозможные "промежуточные" компакты.

Кроме того, было продемонстрировано (А.М.Тропин [3]), насколько интуитивно нетривиальна задача 1.1 даже в случае, когда X — евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим граничное множество $M = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, состоящее из трех непересекающихся элементов, где каждый A_i состоит из двух смежных вершин a_i и b_i правильного шестиугольника. Несмотря на то, что граница представляет собой правильный треугольник в пространстве $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и инвариантна относительно поворотов вокруг центра шестиугольника на $120°$, имеется три семейства компактов Штейнера, и все эти компакты не инвариантны относительно таких поворотов. На рис. 1 изображены минимальные и максимальные компакты Штейнера: первые из них — пары черных точек вблизи центра шестиугольника, вторые — криволинейные четырехугольники (на самом деле стороны этих четырехугольников — дуги окружностей).

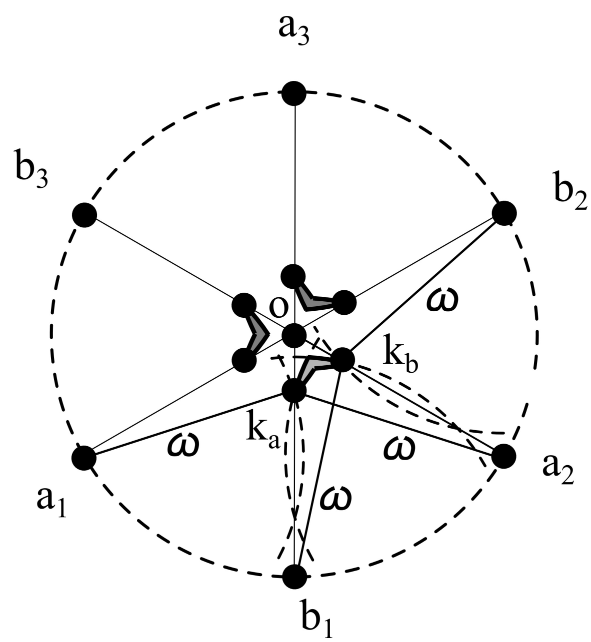

Рис. 1: Граничные компакты $A_i = \{a_i, b_i\}$, три максимальных компакта Штейнера (закрашены серым), три минимальных компакта Штейнера (пары жирных черных точек по углам максимальных компактов).

2 Расстояние Громова–Хаусдорфа

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *Громова–Хаусдорфа между* X *и* Y называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой. Кроме того, также известно, что пространство $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное и сепарабельное (содержит счетное всюду плотное подмножество). Недавно было показано (см. [4] и [5]), что оно также является геодезическим, т.е. любые две его точки соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.

Задача 2.1. Изучить геометрию пространства $\mathcal{M}$.

Приведем ряд подзадач, которыми занимаются наши ученики.

Задача 2.1.1 (Р.А.Цветников)**.** Выяснить, являются ли сферы в пространстве $\mathcal{M}$ линейно связными.

Задача 2.1.2 (Д.П.Клибус)**.** Выяснить, являются ли шары в пространстве $\mathcal{M}$ выпуклыми в слабом смысле (любые две точки шара можно соединить кратчайшей кривой, лежащей в шаре).

Задача 2.1.3 (С.И.Борзов)**.** Выяснить, какие кратчайшие геодезические отрезки и на сколько продолжаются за свои граничные точки до кратчайших геодезических.

Задача 2.1.4 (А.М.Филин)**.** Какие метрические пространства изометрично вкладываются в $\mathcal{M}$?

Замечание 2.1. В [6] было показано, что каждое конечное метрическое пространство можно изометрично вложить в $\mathcal{M}$.

Задача 2.1.5 (И.А.Михайлов)**.** Изучить свойства отображения $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $f\colon X \mapsto \mathcal{H}(X)$. Например, выяснить, изометрично ли оно. Вариант — вместо $\mathcal{H}(X)$ рассмотреть классы изометрии элементов из $\mathcal{H}(X)$. Задача также расширяется на разные другие "естественные" отображения этого типа.

Другой вариант расстояния Громова–Хаусдорфа получается, если ограничиться изометрическими вложениями в данное объемлющее метрическое пространство W, обладающее, как правило, большой группой изометрий, например, в однородное пространство. Так возникает *расстояние Громова–Хаусдорфа в* W.

Задача 2.2. Изучить геометрию расстояния Громова–Хаусдорфа в односвязном пространстве постоянной кривизны.

Задача 2.2.1 (О.С.Малышева)**.** Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа в евклидовом пространстве между компактными подмножествами из конкретных классов, скажем, между одноточечным подмножеством и произвольным компактом (связь с чебышевским радиусом), между двухточечным пространством и произвольным компактом (существенно сложнее), между шаром и компактом, и т.д. Свойства этого расстояния, связь с общим расстоянием Громова–Хаусдорфа.

Имеется много нерешенных проблем.

Задача 2.2.2. Верно ли, что каждое конечное подмножество M в $\mathcal{M}$ можно соединить кратчайшим деревом (минимальным деревом Штейнера)?

Замечание 2.2. Задачей 2.2.2 занималась Н.К.Николаева. Было показано, что ответ положительный для M, состоящих из конечных метрических пространств [8].

Задача 2.2.3. Выяснить, существуют ли нетривиальные изометрии пространства $\mathcal{M}$ на себя?

Замечание 2.3. Об этой задаче нам сообщил С.Илиадис. В [9] анонсирован ответ (таких изометрий не существует) и приведен скетч доказательства. Однако в этом скетче имеется существенная ошибка. Таким образом, задача до сих пор не решена.

Задача 2.2.4. Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными пространствами (классами пространств).

Замечание 2.4. Здесь имеется ряд результатов, в основном касающихся расстояний до *правильных симплексов* [10], т.е. до конечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы. Отметим, что эти расстояния существенно используются при изучении задачи 2.2.3. Тем не менее, даже при таком упрощении эта задача полностью не решена.

Задача 2.2.5. При каких условиях на граничное множество минимальное дерево Штейнера в $\mathcal{M}$ является минимальным заполнением?

Замечание 2.5. Из [6] мгновенно вытекает, что каждое одномерное минимальное заполнение может быть реализовано в $\mathcal{M}$. В [12] построен пример трехточечных границ, для которых минимальное дерево Штейнера не является минимальным заполнением. А в работе [11] рассмотрен ряд частных случаев, в которых минимальное дерево Штейнера является минимальным заполнением.

Список литературы

[1] `http://dfgm.math.msu.su/courses.php?comments=19`

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Tropin A.M., Tuzhilin A.A. *Fermat-Steiner Problemin the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance.* Journal of Geometry, Birkhauser Verlag, Switzerland, 2016, DOI: 10.1007/s00022-016-0360-0.

[4] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[5] Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А. *Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов —- строго внутренняя.* Математические заметки, 2016, т. 100, N 6, с. 947-950.

[6] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Local structure of Gromov–Hausdorff space and isometric embeddings of finite metric spaces into the former space*, ArXiv e-prints, `arXiv:1604.07615` (2016).

[7] Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. *Local Structure of Gromov-Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space.* Topology and its Applications, Elsevier BV, Netherlands, 2017, v. 221, pp. 393-398, DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.050.

[8] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *Steiner Problem in Gromov–Hausdorff Space: the case of finite metric spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.02170, 2016.

[9] `http://mathoverflow.net/questions/212364/on-the-global-structure-of-the-gromov-hausdorff-metric-space`

[10] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes.* ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.

[11] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Steiner Ratio and Steiner-Gromov Ratio of Gromov-Hausdorff Space.* 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1605.01094.

[12] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116, 2016.