Введение в геометрическую теорию меры. Часть I.

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Оглавление

Тема 1

Теоремы Витали и Безиковича.

Основные факты теории метрических и топологических пространств, а также многочисленные примеры можно найти в [1], [2], [3], [4], [5].

Напомним, что *метрическим пространством* называется пара (X,d), где X — некоторое множество, и $d(x,y)$ — неотрицательная невырожденная симметричная функция от пар точек из X, удовлетворяющая неравенству треугольника. Функция d называется *метрикой*. Если отказаться от невырожденности, т.е. разрешать $d(x,y)=0$ при $x\neq y$, то такую d называют *псевдометрикой* или *полуметрикой*, а соответствующее пространство (X,d) — *псевдометрическим* или *полуметрическим*. Часто нам будет удобно вместо $d(x,y)$ писать $|xy|$, причем даже в случае, когда рассматривается несколько метрических пространств (если, конечно, из контекста понятно, где лежат x и y).

Открытый (*замкнутый*) *шар радиуса r с центром в точке* $x\in X$ будем обозначать через $U_r(x)=U(x,r)$ (соответственно, через $B_r(x)=B(x,r)$); *сферу радиуса r с центром в точке* $x\in X$ обозначим через $S_r(x)=S(x,r)$. Замкнутый шар назовем *невырожденным*, если его радиус отличен от нуля (шар отличен от точки). Если $Y\subset X$ — шар или сфера радиуса r, то для $\lambda>0$ через λY обозначим тот же объект с тем же центром, но уже радиуса λr. Если $\mathcal{C}=\{Y_\alpha\}$ — семейство шаров или сфер в X, то через $\lambda\mathcal{C}$ будем обозначать семейство $\{\lambda Y_\alpha\}$.

Замечание 1.1. В метрических пространствах общего вида возможен ряд явлений, существенно отличающихся от того, что мы наблюдаем в $\mathbb{R}^n$. Например, если положить $d(x,y)=1$ для любых $x\neq y$, то все шары $B_r(x)$ радиуса меньше 1 будут совпадать с $\{x\}$. В частности, $B_{1/3}(x)=2B_{1/3}(x)$. Тем не менее, в любом метрическом пространстве для шаров $B_r(x)$, $B_\rho(y)$ и числа $\lambda=\bigl(|xy|+\rho\bigr)/r$ выполняется $B_\rho(y)\subset\lambda B_r(x)$ (проверьте).

Если $\mathcal{C}=\{X_\alpha\}$ — семейство, составленное из некоторых подмножеств X_α множества X, то через $\cup\mathcal{C}$ обозначим множество $\cup_\alpha X_\alpha$, а через $\cap\mathcal{C}$ — множество $\cap_\alpha X_\alpha$. Напомним, что семейство $\mathcal{C}$ *покрывает* $A\subset X$ или *является покрытием* A, если $A\subset\cup\mathcal{C}$.

Определение 1.2. Семейство $\mathcal{C}$ назовем *дизъюнктным*, если никакие два его элемента не пересекаются. Для указания того, что семейство $\mathcal{C}$ дизъюнктное, вместо $\cup\mathcal{C}$ и $\cup_\alpha X_\alpha$ пишут $\sqcup\mathcal{C}$ и $\sqcup_\alpha X_\alpha$ соответственно. Дизъюнктное покрытие $\mathcal{C}$ множества $\cup\mathcal{C}$ непустыми подмножествами называется *разбиением* этого множества.

Детали обсуждения приводимых ниже теорем Витали и Безиковича можно найти в [6]–[13].

Теорема 1.3 (Витали). *Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство замкнутых невырожденных шаров в X, радиусы которых ограничены в совокупности, т.е. все радиусы не превосходят некоторого числа R. Тогда в $\mathcal{B}$ можно найти дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'$ такое, что для каждого $B\in\mathcal{B}$ существует $B'\in\mathcal{B}'$, для которого $B\cap B'\neq\emptyset$ и $B\subset 5B'$. В частности, $\cup\mathcal{B}\subset\cup 5\mathcal{B}'$. Если пространство X сепарабельно, то каждое такое $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно.*

Начнем с иллюстрации 1.1.

Доказательство. Разобьем $\mathcal{B}$ на подсемейства $\mathcal{B}_j$, $j\in\mathbb{N}$, положив в $\mathcal{B}_j$ все $B\in\mathcal{B}$, радиусы r которых удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{R}{2^j}<r\le\frac{R}{2^{j-1}}.$$

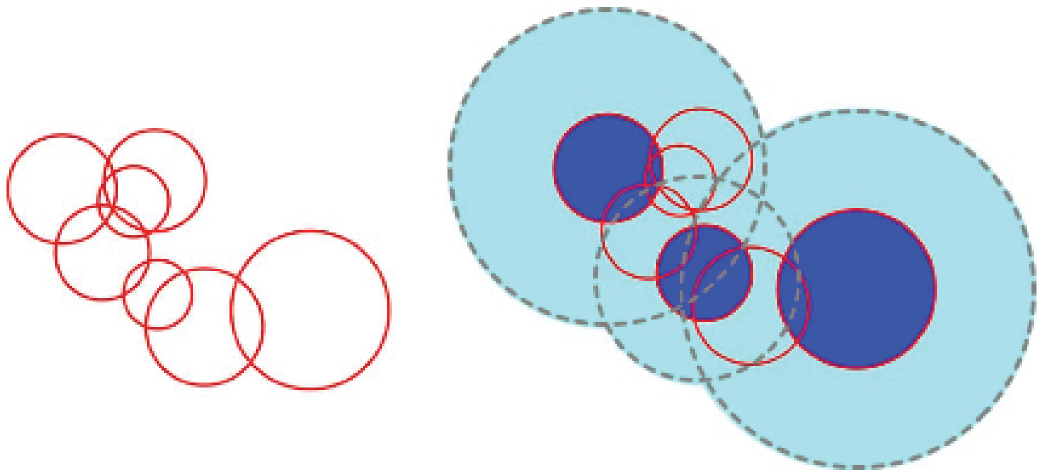

Рис. 1.1: Теорема Витали: слева — шары из семейства $\mathcal{B}$, справа выделены шары подсемейства $\mathcal{B}'$ и их «раздутия», покрывающие все $\cup\mathcal{B}$.

Теперь выберем максимальное дизъюнктное объединение в $\mathcal{B}$ специального вида. Чтобы это сделать, нам понадобится лемма Цорна. Напомним, в чем она заключается.

Пусть X — множество, на котором задан частичный порядок, т.е., вообще говоря, не все пары элементов сравнимы. Типичные пример — семейство подмножеств некоторого множества, где порядок задается отношением включения: одно подмножество не превосходит другого, если оно содержится в этом другом (порядок частичный, так как ни для всякой пары подмножеств верно, что одно из них принадлежит другому).

Порядок называется *линейным*, если сравнима любая пара элементов. *Цепочкой в* X называется каждое подмножество в X, порядок на котором — линейный. Элемент частично упорядоченного множества называется *максимальным*, если все остальные элементы или его не превосходят, или несравнимы с ним. Элемент x называется *верхней гранью для* $Y \subset X$, если для каждого $y \in Y$ выполняется $y \leq x$. В этом случае будем писать $Y \leq x$.

Лемма 1.4 (Цорн). *Если в частично упорядоченном множестве каждая цепочка имеет верхнюю грань, то каждый элемент этого множества не превосходит некоторого максимального.*

Применим теперь лемму Цорна для наших целей. Рассмотрим всевозможные дизъюнктные подсемейства в $\mathcal{B}_1$. На этих подсемействах имеется естественный частичный порядок, заданный отношением включения одного подсемейства в другое. Если $\mathcal{D}$ — цепочка таких подсемейств, то $\cup\mathcal{D}$ также представляет собой дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}_1$ (проверьте). Но тогда $\cup\mathcal{D}$ является верхней гранью цепочки $\mathcal{D}$. Тем самым, каждая цепочка имеет верхнюю грань, значит, по лемме Цорна, семейство дизъюнктных подсемейств в $\mathcal{B}_1$ имеет максимальный элемент. Иными словами, в $\mathcal{B}_1$ имеется максимальное дизъюнктное подсемейство. Выберем одно из таких семейств и обозначим его через $\mathcal{B}_1'$.

Теперь добавим к $\mathcal{B}_1$ семейство $\mathcal{B}_2$, и в $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$, пользуясь леммой Цорна, выберем максимальное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}_2'$, содержащее $\mathcal{B}_1'$. Продолжим этот процесс, и для каждого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, построим максимальное в $\cup_{i=1}^{j}\mathcal{B}_i$ дизъюнктное подсемейство, содержащее $\mathcal{B}_j'$. Наконец, положим $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j'$ и получим, очевидно, дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}$.

Замечание 1.5. Можно было бы сразу выбрать максимальное дизъюнктивное подмножество во всем $\mathcal{B}$. Конечно, при такое выборе каждый $B \in \mathcal{B}$ будет пересекать некоторый $B' \in \mathcal{B}'$ в силу максимальности $\mathcal{B}'$, однако мы не гарантированы, что $B \subset 5B'$. Чтобы добиться последнего, приходится выбирать $\mathcal{B}'$ более тонким образом.

Покажем, что $\mathcal{B}'$ — искомое. Возьмем произвольное $B \in \mathcal{B}$, тогда для некоторого j выполняется $B \in \mathcal{B}_j$. Тогда существует $B' \in \mathcal{B}_j'$, для которого $B' \cap B \neq \emptyset$. Действительно, если такого нет, то, добавив B к $\mathcal{B}_j'$, получим также дизъюнктное подсемейство, что противоречит максимальности $\mathcal{B}_j'$.

Далее, радиус шара B' больше $R/2^j$, а радиус шара B не превосходит $R/2^{j-1}$, поэтому $B \subset 5B'$ (проверьте), откуда, в частности, вытекает, что $\cup\mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$.

Пусть теперь X сепарабельно, и подмножество $Y \subset X$ — всюду плотное и не более чем счетное. Так как все шары из $\mathcal{B}'$ имеют положительные радиусы, в каждом из них можно выбрать по одной точке из Y. Так как семейство $\mathcal{B}'$ дизъюнктно, количество элементов в $\mathcal{B}'$ такое же, как и число выбранных точек из Y, поэтому семейство $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно. □

Определение 1.6. Будем говорить, что семейство шаров $\mathcal{B}$ *сгущается* в некоторой точке $x \in X$, если для каждого каждого $\varepsilon > 0$ существует содержащий x шар $B \in \mathcal{B}$ радиуса меньше ε.

Следствие 1.7. *Предположим, что семейство $\mathcal{B}$ невырожденных шаров в X с ограниченными в совокупности радиусами сгущается в каждой точке множества $A \subset X$ центров этих шаров. Тогда семейство $\mathcal{B}'$, построенное в теореме 1.3, удовлетворяет следующему свойству: для любого конечного набора $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{B}$ имеем*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}} 5B'.$$

Доказательство. Если $A \subset \cup_{i=1}^{m} B_i$, то все доказано. Пусть теперь существует $x \in A \setminus \cup_{i=1}^{m} B_i$. Так как покрытие $\mathcal{B}$ сгущается в x, можно найти $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $B \cap B_i = \emptyset$ при всех i. По свойству семейства $\mathcal{B}'$, существует $B' \in \mathcal{B}'$ такой, что $B \cap B' \neq \emptyset$ и $B \subset 5B'$. Осталось заметить, что B' отличен от шаров B_i, так как последние не пересекают B, а B' — пересекает; следовательно, $B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}$. □

Теорема 1.8 (Безикович)**.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $N = N_n \in \mathbb{N}$, что выполняется следующее утверждение. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство замкнутых невырожденных шаров в $\mathbb{R}^n$, радиусы которых ограничены в совокупности. Обозначим через A множество центров всех шаров из $\mathcal{B}$. Тогда существует набор $\mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_N$ дизъюнктных подсемейств $\mathcal{B}$ (и, значит, каждое $\mathcal{B}'_i$ — не более чем счетное), покрывающих в совокупности множество A:*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \sqcup \mathcal{B}'_i$$

(*некоторые из $\mathcal{B}'_i$ могут быть пустыми*).

Доказательство. Без ограничения общности, предположим, что центры всех шаров семейства $\mathcal{B}$ различны. Сначала мы рассмотрим случай ограниченного A, а затем разберем и общий случай.

Итак, пусть A ограничено. Мы построим не более чем счетное подсемейство $\mathcal{B}' = \{B_j\}_{j \in J}$ семейства $\mathcal{B}$, где или $J = \{1, \ldots, m\}$, или $J = \mathbb{N}$, и покажем, что $\mathcal{B}'$ покрывает A, и что для некоторой константы $N = N_n$, зависящей только от размерности n объемлющего пространства, для каждого $j \in J$ количество B_i, $i < j$, пересекающих B_j, строго меньше N. Последнее даст нам возможность построить семейства $\mathcal{B}'_i \subset \mathcal{B}'$ по следующему правилу: первые N шаров B_i мы разложим по последовательным $\mathcal{B}'_i$ (если шаров меньше N, то оставшиеся $\mathcal{B}'_i$ полагаем равными пустому множеству); каждый шар B_j, $j > N$, пересекает меньше чем N предыдущих шаров, поэтому по крайней мере для одного из текущих $\mathcal{B}'_i$ шар B_j не пересекает ни один из шаров, лежащих в этом $\mathcal{B}'_i$; шар B_j положим в $\mathcal{B}'_i$. Тем самым, мы разобьем $\mathcal{B}'$ на не более чем N дизъюнктных подсемейств, что и завершит доказательство теоремы в случае ограниченного A. Наконец, из полученных результатов мы выведем справедливость теоремы в случае неограниченного A.

Перейдем теперь к построению семейства $\mathcal{B}'$. Обозначим через R точную верхнюю грань радиусов шаров из $\mathcal{B}$. В силу сделанных предположений, $R < \infty$. По определению, в $\mathcal{B}$ существует шар $B_{r_1}(a_1) \in \mathcal{B}$ с $r_1 \geq (3/4)R$. Выберем его в качестве B_1.

Будем последовательно выбирать B_j по следующему правилу. Если шары $B_1, \ldots, B_{j-1}$ уже выбраны, то положим $A_j = A \setminus \cup_{i=1}^{j-1} B_i$. Если $A_j = \emptyset$, то больше шаров B_i искать не будем, и положим $J = \{1, \ldots, j-1\}$. Если же $A_j \neq \emptyset$, то обозначим через R_j точную верхнюю грань радиусов шаров из $\mathcal{B}$ с центрами, лежащими в A_j. По определению R_j, существует шар $B_{r_j}(a_j) \in \mathcal{B}$ с центром в некоторой точке $a_j \in A_j$ и радиуса $r_j \geq (3/4)R_j$. Этот шар мы выберем в качестве B_j. Если при каждом j выполняется $A_j \neq \emptyset$, то положим $J = \mathbb{N}$.

Лемма 1.9. *Для каждых $j > i$ имеем $a_j \in A_i$ и $r_i \geq (3/4)r_j$.*

Доказательство. Для проверки первого утверждения, заметим, что

$$a_j \in A_j = A \setminus \cup_{k=1}^{j-1} B_k \subset A \setminus \cup_{k=1}^{i-1} B_k = A_i.$$

Второе утверждение вытекает из первого:

$$r_i \geq \frac{3}{4}R_i = \frac{3}{4}\sup\{r : B_r(a) \in \mathcal{B},\ a \in A_i\} \geq \frac{3}{4}r_j.$$

□

Лемма 1.10. *Шары $(1/3)B_j$, $j \in J$, попарно не пересекаются.*

Доказательство. Так как при $j > i$ имеем $a_j \in A \setminus \cup_{k=1}^{j-1} B_k$, то $a_j \notin B_i$. Отсюда вытекает, что

$$|a_i a_j| > r_i = \frac{1}{3}\,r_i + \frac{2}{3}\,r_i \geq \frac{1}{3}\,r_i + \frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\,r_j > \frac{1}{3}\,r_i + \frac{1}{3}\,r_j.$$

□

Лемма 1.11. *Если $J = \mathbb{N}$, то $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$ и, значит, $\lim_{j\to\infty} R_j = 0$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $\cup_{j\in J} B_j \subset \cup\mathcal{B}$, а последнее множество ограничено, так как ограничено множество A центров шаров из $\mathcal{B}$, а радиусы шаров из $\mathcal{B}$ ограничены в совокупности. Отсюда вытекает, что объем множества $\cup\mathcal{B}$ ограничен, поэтому ограничен также и объем множества $\cup\mathcal{B}'$. Но если $r_j \not\to 0$ при $j \to \infty$, то для некоторого $r > 0$ имеется бесконечно много шаров $(1/3)B_j$ таких, что $r_j \geq r > 0$, и так как эти шары попарно не пересекаются, то объем их объединения равен ∞, противоречие. Таким образом, $r_j \to 0$ при $j \to \infty$, и, так как $0 \leq R_j \leq (4/3)r_j$, то и $R_j \to 0$. □

Лемма 1.12. *Семейство $\mathcal{B}'$ покрывает A.*

Доказательство. Если $J \neq \mathbb{N}$, то все очевидно.

Пусть теперь $J = \mathbb{N}$. Если утверждение леммы неверно, то существует такое $a \in A$, которое не принадлежит ни одному B_j, и, значит, $a \in A_j$ при всех j. По определению A, существует $B_r(a) \in \mathcal{B}$, и $r > 0$, так как все шары из $\mathcal{B}$ — невырождены. По определению R_j, имеем $R_j \geq r > 0$ при всех j, однако последнее противоречит лемме 1.11, в силу которой $R_j \to 0$ при $j \to \infty$. □

Лемма 1.13. *Для некоторой константы $N = N_n$, зависящей только от размерности n объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$, для каждого $j \in J$ количество B_i, $i < j$, пересекающих B_j, строго меньше N.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}_j$ семейство всех шаров B_i, $i < j$, каждый из которых пересекает B_j.

Пусть M — положительное число. Разобьем семейство всех шаров $\mathcal{S}_j$ на два подсемейства, зависящие от M. В первое из них, которое мы обозначим через $\mathcal{S}_j(M)$, положим все шары из $\mathcal{S}_j$, радиусы которых не превосходят $(3/4)Mr_j$. Второе семейство — дополнение до $\mathcal{S}_j(M)$ в $\mathcal{S}_j$, — обозначим через $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$. В дальнейшем мы подберем значение M так, чтобы число элементов в $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$ оценивалось через величину, зависящую только от размерности n объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$. Что касается семейства $\mathcal{S}_j(M)$, то число его элементов оценивается некоторой функцией от M и n. А именно, имеет место следующий результат.

Лемма 1.14. *При каждом M семейство $\mathcal{S}_j(M)$ состоит не более чем из $4^n(M+1)^n$ элементов.*

Доказательство. Заметим сначала, что при каждом $i < j$, для которого $B_i \in \mathcal{S}_j(M)$, выполняется $(1/3)B_i \subset (M+1)B_j$. Действительно, так как $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, имеем

$$|a_i a_j| \leq r_i + r_j \leq \left(\frac{3}{4}M + 1\right) r_j,$$

поэтому расстояние от каждой точки шара $(1/3)B_i$ до a_j не больше, чем

$$\left(\frac{3}{4}M + 1\right) r_j + \frac{1}{3}r_i \leq \left(\frac{3}{4}M + 1\right) r_j + \frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,Mr_j = (M+1)r_j.$$

Далее, так как все шары $(1/3)B_i$ попарно не пересекаются в силу леммы 1.10, их суммарный объем не превосходит объема шара $(M+1)B_j$. Чтобы оценить снизу суммарный объем шаров $(1/3)B_i$, $B_i \in \mathcal{S}_j(M)$, воспользуемся леммой 1.9. В соответствии с этой леммой $r_i \geq (3/4)r_j$, так что если p обозначает количество шаров в $\mathcal{S}_j(M)$, а ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, то

$$\omega_n(M+1)^n r_j^n \geq \sum_{B_i \in \mathcal{S}_j(M)} \omega_n\Big(\frac{r_i}{3}\Big)^n \geq \omega_n\Big(\frac{3}{4}\,\frac{r_j}{3}\Big)^n p = \omega_n\Big(\frac{r_j}{4}\Big)^n p\,,$$

откуда и вытекает искомое неравенство. □

Чтобы оценить количество элементов в $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$, докажем следующую лемму.

Лемма 1.15. *Пусть i, $k < j$ таковы, что $i \neq k$ и B_i, $B_k \in \bar{\mathcal{S}}_j(M)$. Тогда*

$$\cos \widehat{a_i a_j a_k} \leq \frac{2}{3} + \frac{8}{3M} + \Big(\frac{4}{3M}\Big)^2.$$

Доказательство. Нам понадобятся неравенство

$$\frac{3}{4} M r_j < r_i < |a_i a_j| \leq r_i + r_j,$$

а также неравенство, полученное из предыдущего заменой i на k. Здесь первое неравенство вытекает из определения $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$, второе — из леммы 1.9, третье — из того, что B_i и B_j пересекаются (определение семейства $\mathcal{S}_j$). Кроме того, предположим для определенности, что $i < k$, тогда лемма 1.9 дает $r_i \geq (3/4)r_k$ и $r_i < |a_i a_k|$.

Воспользуемся теперь теоремой косинусов. Имеем

$$\cos \widehat{a_i a_j a_k} = \frac{|a_i a_j|^2 + |a_k a_j|^2 - |a_i a_k|^2}{2|a_i a_j||a_k a_j|} < \frac{(r_i + r_j)^2 + (r_k + r_j)^2 - r_i^2}{2 r_i r_k} = \frac{2 r_i r_j + 2 r_j^2 + r_k^2 + 2 r_k r_j}{2 r_i r_k} =$$
$$= \frac{r_j}{r_k} + \frac{r_j}{r_i}\frac{r_j}{r_k} + \frac{1}{2}\frac{r_k}{r_i} + \frac{r_j}{r_i} < \frac{4}{3M} + \Big(\frac{4}{3M}\Big)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3} + \frac{4}{3M} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3M} + \Big(\frac{4}{3M}\Big)^2,$$

что и требовалось. □

Выберем M так, чтобы правая часть неравенства из леммы 1.15 стала меньше $5/6$. Тогда все углы вида $\widehat{a_i a_j a_k}$ не меньше, чем $\alpha = \arccos(5/6)$. Рассмотрим лучи, идущие из a_j в те точки a_i, для которых $B_i \in \bar{\mathcal{S}}_j(M)$. Эти лучи пересекают единичную сферу $S^{n-1}(a_j)$ с центром в a_j в точках P_i, угловые расстояния между которыми не меньше α. Однако количество таких точек не больше некоторого числа M_n, зависящего исключительно от n: доказательство получается сравнением объема сферы $S^{n-1}(a_j)$ и суммарного объема сферических кругов радиуса $\alpha/2$ с центрами в точках P_i.

Положим $N_n = 4^n(M+1)^n + M_n + 1$ для выбранного выше M. Тогда такое N_n не зависит от выбора семейства $\mathcal{B}$, а зависит только от размерности n (мы считаем, что M раз и навсегда фиксировано). Из приведенных выше рассуждений вытекает, что число точек в $\mathcal{S}_j$ строго меньше N_n. Лемма 1.13 доказана. □

Итак, нам осталось рассмотреть случай, когда множество A неограничено. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозначим через W_i подмножество $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех x таких, что $3R(i-1) \leq |x| < 3Ri$. Ясно, что множества W_i попарно не пересекаются и покрывают все $\mathbb{R}^n$. Положим $A_i = A \cap W_i$ (не путать с A_i из предыдущих рассуждений) и $\mathcal{B}_i = \{B_r(a) \in \mathcal{B} : a \in A_i\}$, тогда $A = \sqcup A_i$, $\mathcal{B} = \sqcup \mathcal{B}_i$, и если $|i - j| > 1$, а $B \in \mathcal{B}_i$ и $B' \in \mathcal{B}_j$, то $B \cap B'$ не пересекаются.

Для каждого $\mathcal{B}_i$ построим, как это было сделано выше, набор дизъюнктных семейств $\mathcal{B}'_{ik}$, $k = 1, \ldots, N_n$, покрывающих, при каждом фиксированном i, множество A_i. Тогда если $|i - j| > 1$, то семейство $\mathcal{B}'_{ik} \cup \mathcal{B}'_{jk}$ также дизъюнктно, как следует и приведенного выше рассуждения. Отсюда вытекает, что дизъюнктным является каждое семейство $\cup_{i \in 2\mathbb{N}} \mathcal{B}'_{ik}$, $k = 1, \ldots, N_n$, а также каждое семейство $\cup_{i \in 2\mathbb{N}-1} \mathcal{B}'_{ik}$, $k = 1, \ldots, N_n$. При этом, конечно же, каждое из этих $2N_n$ семейств не более чем счетно, и они в совокупности покрывают все A. Тем самым, увеличив предыдущее N_n вдвое, получим доказательство теоремы и в случае неограниченного A. Теорема полностью доказана. □

Тема 2

Меры на сигма-алгебрах.

Идея меры является далеко идущим обобщением первоначального представления о площади и объеме подмножеств $\mathbb{R}^n$. Естественные требования, предъявляемые к объему, таковы: объем ограниченного множества — конечное неотрицательное число; объем аддитивен, т.е. объем объединения непересекающихся ограниченных множеств равен сумме объемов этих множеств; если множества получаются друг из друга движением, то их объемы равны; объем единичного куба равен 1.

Оказывается, эти требования противоречивы.

Теорема 2.1 (парадокс Банаха–Тарского). *Можно разбить стандартный шар $B \subset \mathbb{R}^3$ на пять частей A_i так, что для некоторых B_i, получающихся из A_i движением, выполняется следующее*: $B = B_1 \sqcup B_2 = B_3 \sqcup B_4 \sqcup B_5$. *Иными словами, шар B можно удвоить.*

Из этой теоремы вытекает, что если бы мы смогли определить объем в соответствии с описанными выше требованиями, то объем шара равнялся бы удвоенному объему этого шара, откуда объем шара должен был бы равняться нулю. Однако последнее противоречит тому, что объем единичного куба ненулевой.

Одним из возможных выходов является рассмотрение не всех ограниченных подмножеств, а только тех, для которой определение объема не приводит к противоречиям. Естественное во многих приложениях требование распространения аддитивности на счетные объединения, вместе с остальными свойствами объема, приводит к понятию σ-алгебры.

Наше изложение общей теории меры является переработанной компиляцией текстов [6]–[11].

2.1 Определение сигма-алгебры

Пусть X — произвольное множество.

Определение 2.2. Семейство $\mathcal{M}$ подмножеств X называется *σ-алгеброй*, если оно, как и топология, содержит $\emptyset$ и X, замкнуто относительно не более чем счетных объединений (ослабление по сравнению с топологией, где требуется замкнутость относительно произвольных объединений), а также теоретико-множественной разности (новое по сравнению с топологией).

Последние два свойства приводят к тому, что σ-алгебра оказывается замкнутой и относительно счетных пересечений (усиление соответствующего топологического свойства).

Замечание 2.3. Отметим, что некоторые авторы, см. например [12], называют σ-алгебру *борелевским семейством.*

Замечание 2.4. Если в определении σ-алгебры заменить замкнутость относительно разности на замкнутость относительно не более чем счетных пересечений, то получается другой объект. Например, на отрезке $[0,1]$ рассмотрим семейство $\mathcal{M}$, состоящее из $\emptyset$ и всех отрезков и полуинтервалов вида $[0,a]$ и $[0,a)$ соответственно. Тогда полученное семейство замкнуто относительно объединений и пересечений, но не содержит дополнений.

Упражнение 2.5. Проверьте, что пересечение любого числа σ-алгебр на X вновь является σ-алгеброй.

Упражнение 2.5 позволяет говорить про наименьшую σ-алгебру, содержащую данное семейство подмножеств S множества X.

Определение 2.6. Наименьшая σ-алгебра, содержащая семейство подмножеств S множества X, называется *σ-алгеброй, порожденной семейством* S, и обозначается через $\sigma(S)$.

Упражнение 2.7. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная σ-алгебра на X, и $Y \subset X$. Рассмотрим семейство $\mathcal{M}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{M}\}$. Докажите, что $\mathcal{M}_Y$ является σ-алгеброй.

Определение 2.8. Определенная в упражнении 2.7 σ-алгебра $\mathcal{M}_Y$ называется σ-алгеброй *индуцированной на* Y из σ-алгебры $\mathcal{M}$.

Упражнение 2.9.

(1) Пусть S и M — два семейства подмножеств в X, причем $S \subset M$. Предположим, что для каждого $A \in S$ его дополнение $X \setminus A$ лежит в M, а также что M замкнуто относительно счетных объединений и счетных пересечений. Докажите, что M содержит подсемейство $H \supset S$, замкнутое относительно взятия дополнений, счетных пересечений и счетных объединений. В частности, если $\emptyset \in S$ или $X \in S$, то M содержит $\sigma(S)$.

(2) Условие и утверждение такие же, как и в предыдущем пункте, с заменой счетных объединений на счетные дизъюнктные объединения.

Определение 2.10. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ, тогда σ-алгебра $\sigma(\tau)$, порожденная топологией τ, называется *борелевской*, соответствующей τ, а элементы σ-алгебры $\sigma(\tau)$ называются *борелевскими множествами.*

Упражнение 2.11.

(1) Пусть X — топологическое пространство с топологией τ. Предположим, что каждое открытое множество представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств. Тогда наименьший класс $\mathcal{M}$ подмножеств X, содержащий семейство $\mathcal{F}$ замкнутых множеств и замкнутый относительно счетных объединений и счетных пересечений, является борелевской σ-алгеброй.

(2) Условие и утверждение такие же, как и в предыдущем пункте, с заменой счетных объединений на счетные дизъюнктные объединения.

Упражнение 2.12.

(1) Покажите, что в метрическом пространстве каждое открытое множество представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств.

(2) Докажите, что наименьший класс подмножеств метрического пространства, содержащий семейство всех замкнутых множеств и замкнутый относительно счетных объединений и счетных пересечений, является борелевской σ-алгеброй.

(3) Докажите, что наименьший класс подмножеств метрического пространства, содержащий семейство всех замкнутых множеств и замкнутый относительно счетных дизъюнктных объединений и счетных пересечений, является борелевской σ-алгеброй.

Пример 2.13. Пусть X — произвольное множество. Приведем примеры σ-алгебр.

(1) Антидискретная $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$.

(2) Дискретная $\mathcal{M} = 2^X$.

(3) Индуцированная на $Y \subset X$: состоит из пересечений элементов σ-алгебры на X с Y.

(4) Пусть $A \subset X$, тогда $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$. Более общо, пусть $\mathcal{P} = \{A_i\}$ — не более чем счетное разбиение множества X. Тогда в качестве σ-алгебры можно взять всевозможные объединения множеств A_i.

(5) Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, порожденная стандартной топологией. Более общо, борелевская σ-алгебра на произвольном топологическом пространстве.

Упражнение 2.14. Верно ли, что если X — не более чем счетное множество, то любая σ-алгебра порождается некоторым разбиением множества X так, как описано в примере 2.13, (4)?

2.2 Мера на сигма-алгебре

Определение 2.15. Функция $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ называется *мерой на σ-алгебре* $\mathcal{M}$, если $\mu(\emptyset) = 0$ и μ является σ-аддитивной: мера не более чем счетного дизъюнктного объединения множеств из $\mathcal{M}$ равна сумме мер этих множеств.

Замечание 2.16. Условие $\mu(\emptyset) = 0$ добавляется для того, чтобы отсеять единственный случай $\mu(\emptyset) = +\infty$. Иными словами, если некоторая счетно-аддитивная функция на σ-алгебре не принимает значение $+\infty$, то $\mu(\emptyset) = 0$ (так как $\emptyset$ можно добавлять в любом количестве, не меняя множество).

Определение 2.17. Тройка $(X, \mathcal{M}, \mu)$, состоящая из множества X, σ-алгебры $\mathcal{M}$ на X и меры μ на $\mathcal{M}$, называется *пространством с мерой*; при этом элементы σ-алгебры $\mathcal{M}$ называются *измеримыми множествами*, а если требуется указать, какая мера порождает рассматриваемую σ-алгебру, то — *μ-измеримыми множествами.*

Пример 2.18. Приведем примеры мер и σ-алгебр.

(1) На $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ положим $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(X) = a$, где $a \in [0, +\infty]$.

(2) На $\mathcal{M} = 2^X$ определим *считающую меру*, положив $\mu(A)$ равным числу элементов в A, если A — конечно, и $+\infty$ в противном случае.

(3) На $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ положим $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = a$, $\mu(X) = b$, $\mu(X \setminus A) = b - a$ для некоторых $a, b \in [0, +\infty]$, $a \le b$. Более обще, если $\mathcal{M}$ порождено разбиением $\mathcal{P} = \{A_i\}$ (см. пример 2.13), то каждая мера μ однозначно задается своими значениями на элементах разбиения $\mathcal{P}$, причем на этих элементах μ может принимать любые значения из $[0, +\infty]$ (на все остальные элементы μ продолжается по σ-аддитивности).

(4) На произвольной σ-алгебре $\mathcal{M}$ на X и для произвольной фиксированной точки $x \in X$, определим *δ-меру Дирака* μ_x, положив $\mu_x(Y) = 1$, если $x \in Y$, и $\mu_x(Y) = 0$ в противном случае.

(5) Положим меру не более чем счетного множества равной 0, а любого бесконечного несчетного множества равной $+\infty$.

(6) Если $\mu(X) = 1$, то пространство $(X, \mathcal{M}, \mu)$ называется *вероятностным*, а μ — вероятностью.

(7) Если μ_1 и μ_2 — произвольные меры на σ-алгебре $\mathcal{M}$, то их линейная комбинация $a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ с неотрицательными коэффициентами a_1 и a_2 также является мерой на $\mathcal{M}$.

Теорема 2.19. *Пусть μ — мера на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) ***Монотонность***: *если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

(2) ***Субаддитивность***: *для любых измеримых множеств A и B имеем $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$.*

(3) ***Счетная субаддитивность***: *$\mu(\cup A_i) \le \sum \mu(A_i)$ для любого счетного набора $\{A_i\}$ измеримых множеств.*

(4) ***Непрерывность снизу***: *пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ — неубывающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cup A_i)$.*

(5) ***Непрерывность сверху***: *пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Предположим, что $\mu(A_1) < \infty$. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ — невозрастающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cap A_i)$.*

(6) *Условие $\mu(A_1) < \infty$ в предыдущем пункте — существенно.*

Доказательство. (1) Действительно, $B = A \sqcup (B \setminus A)$, откуда, в силу аддитивности и неотрицательности меры, имеем

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A).$$

(2) Так как σ-алгебра замкнута относительно пересечения и разности, множества $C = A \cap B$, $A \setminus C$ и $B \setminus C$ измеримы. Из аддитивности меры вытекает, что $\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(C)$, $\mu(B) = \mu(B \setminus C) + \mu(C)$, $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus C) + \mu(C) + \mu(B \setminus C) \le \mu(A \setminus C) + 2\mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(A) + \mu(B)$.

(3) Положим $A = \cup_{i\geq 1} A_i$, $A'_1 = A_1$ и $A'_n = A_n \setminus \cup_{i<n} A_i$ при $n > 1$. Ясно, что $A = \sqcup_{i\geq 1} A'_i$ и все A'_i — измеримы. В силу σ-аддитивности и того, что $A'_i \subset A_i$, откуда $\mu(A'_i) \leq \mu(A_i)$, имеем

$$\mu(A) = \sum_{i\geq 1} \mu(A'_i) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

(4) То, что последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая, вытекает и пункта (1). Поэтому у $\mu(A_i)$ существует предел при $i \to \infty$.

Далее, положив $A = \cup_{i\geq 1} A_i$, получим $A = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \cdots$ и $A_n = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \cdots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1})$. Из σ-аддитивности меры вытекает, что

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{i\geq 1} \mu(A_{i+1} \setminus A_i),$$

а также, что

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{1\leq i\leq n-1} \mu(A_{i+1} \setminus A_i).$$

Но, по определению, сумма ряда — это предел частичных сумм, откуда $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$.

(5) То, что последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая, снова вытекает из пункта (1). Далее, положив $A = \cap_{i\geq 1} A_i$, получим $A_1 = A \sqcup (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_3) \cdots$, откуда

$$\mu(A_1) = \mu(A) + \sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1}).$$

Так как $\mu(A_1) < \infty$, то $\mu(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty$ и ряд $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1})$ сходится. Таким образом,

$$\mu(A) = \mu(A_1) - \sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = \mu(A_1) - \sum_{1\leq i\leq n-1} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) - \\ - \sum_{i\geq n} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = \mu(A_n) + \sum_{i\geq n} \mu(A_i \setminus A_{i+1}).$$

Так как ряд $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1})$ сходится, то $\sum_{i\geq n} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$.

(6) На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел рассмотрим считающую меру μ. Пусть $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Тогда $A_1 \supset A_2 \cdots$, и $\mu(A_i) = +\infty$, поэтому $\lim \mu(A_i) = +\infty$, но, с другой стороны, $A = \cap_{i\geq 1} A_i = \emptyset$, откуда $\mu(A) = 0$. $\square$

Упражнение 2.20. Предположим, что $\mu(X) < \infty$. *Верхним пределом* последовательности A_i измеримых множеств назовем $A \subset X$, состоящее из всех точек, каждая из которых встречается в бесконечном числе A_i. Докажите, что множество A измеримо, и что $\mu(A) \geq \limsup \mu(A_i)$.

Замечание 2.21. Приведем несколько простых, но полезных наблюдений.

(1) Выбрасывание множества меры ноль из любого измеримого множества не меняет меру.

(2) Добавление множества меры ноль к любому измеримому множеству не меняет меру.

(3) Пусть A и B — измеримые множества, пересекающиеся по множеству меры ноль. Тогда мера $A \cup B$ равна сумме мер A и B.

2.3 Мера Лебега

В дальнейшем через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать борелевскую σ-алгебру, порожденную стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.22 (Лебег). *Существует единственная мера $\mathcal{L}^n$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантная относительно параллельных переносов (сдвигов) и такая, что*

$$\mathcal{L}^n\big([0,1]^n\big) = 1.$$

Определение 2.23. Мера из теоремы 2.22 называется *n-мерной мерой Лебега* или *n-мерным евклидовым объемом.*

Замечание 2.24. Из теоремы 2.22 мгновенно вытекает существование и единственность меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантной относительно сдвигов и такой, что $\mu\big([0,1]^n\big)=a$ для произвольного $a\ge 0$. Эта мера равна $a\,\mathcal{L}^n$.

Замечание 2.25. На самом деле, при определении меры Лебега обычно рассматривают большую σ-алгебру.

В дальнейшем, для краткости, единичный куб $[0,1]^n$ будем обозначать через I.

Пример 2.26. Вычислим n-мерную меру Лебега разных подмножеств евклидова пространства.

(1) Мера точки равна нулю, так как куб I содержит бесконечно много точек. Поэтому мера объединения не более чем счетного числа точек также равна нулю. В частности, мера множества всех рациональных точек пространства $\mathbb{R}^n$ равна нулю. Мера множества всех нерациональных точек куба I равна 1.

(2) Мера любого (измеримого) подмножества единичного куба, копии которого сдвигами можно превратить в бесконечное дизъюнктное семейство, содержащееся в кубе, равна нулю. Не более чем счетное объединение таких множеств также имеет меру ноль.

(3) Куб I можно составить из k^n кубов A_i, полученных из I сжатием в k раз. Все эти кубы имеют одинаковую меру и каждая пара из них пересекается по множеству меры ноль, поэтому n-мерный объем A_i равен $1/k^n$.

(4) *Кирпичом в* $\mathbb{R}^n$ назовем множество вида $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, а отрезки $[a_i,b_i]$ — *сторонами* этого кирпича. Соображения, аналогичные приведенным в предыдущем примере, показывают, что n-мерный объем кирпича, длины сторон которого — рациональные числа $a_1,\dots,a_n$, равен $a_1\cdots a_n$.

(5) Пусть теперь задан кирпич K, длины сторон которого — произвольные числа $a_1,\dots,a_n$. Разместим внутри K кирпич K' с рациональными длинами сторон $a_1',\dots,a_n'$, и поместим K в кирпич K'' с рациональными длинами сторон $a_1'',\dots,a_n''$. Из монотонности меры вытекает, что $\mathcal{L}^n(K')\le\mathcal{L}^n(K)\le\mathcal{L}^n(K'')$. Более того, если устремить a_i' и a_i'' к a_i, то
$$\mathcal{L}^n(K')=a_1'\cdots a_n'\to a_1\cdots a_n\leftarrow a_1''\cdots a_n''=\mathcal{L}^n(K''),$$
поэтому $\mathcal{L}^n(K)=a_1\cdots a_n$.

(6) Пусть $L\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — произвольное ортогональное преобразование. Обозначим той же буквой L его продолжение на $2^{\mathbb{R}^n}$. Тогда *для каждого* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *имеем* $L(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{L}^n\big(L(A)\big)=\mathcal{L}^n(A)$. Действительно, так как $L\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ биективно, то $L\colon 2^{\mathbb{R}^n}\to 2^{\mathbb{R}^n}$ также биективно и сохраняет операции объединения, пересечения, разности; кроме того, $L(\emptyset)=\emptyset$. Так как L — гомеоморфизм, то L отображает стандартную топологию на себя биективно. Из сказанного выше вытекает, что L отображает также биективно $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ на себя, и что функция $\mu\colon\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to[0,+\infty]$, определенная как $\mu(A)=\mathcal{L}^n\big(L^{-1}(A)\big)$, является мерой (проверьте). Легко видеть, что мера μ инвариантна относительно сдвигов. По замечанию 2.24, имеем $\mu=a\,\mathcal{L}^n$ для некоторого $a\ge0$. Однако L переводит шар $B=B_1(0)$ в себя биективно, причем $\mathcal{L}^n(B)\ne0$, поэтому
$$a\,\mathcal{L}^n(B)=\mu(B)=\mathcal{L}^n\big(L^{-1}(B)\big)=\mathcal{L}^n(B)$$
и, значит, $a=1$.

(7) Пусть $L\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — растяжение с коэффициентом $a>0$. Тогда *для каждого* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *имеем* $L(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{L}^n\big(L(A)\big)=a^n\mathcal{L}^n(A)$ (доказательство аналогично предыдущему пункту).

Упражнение 2.27. Пусть $L\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — произвольное линейное преобразование. Докажите, что для любого $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ выполняется $L(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{L}^n\big(L(A)\big)=|\det L|\,\mathcal{L}^n(A)$.

Упражнение 2.28. Покажите, что мера Лебега канторова множества равна нулю.

Пример 2.29. Построим пример замкнутого подмножества отрезка, которое не содержит интервалов, но имеет положительную меру Лебега.

Построим аналог канторова множества, изменив величины выбрасываемых отрезков. Заметим, что в случае стандартного канторова множества из каждого отрезка $[a,b]$ длины $\ell=1/3^n$, полученного на n-ом шаге, выбрасывается интервал вида $(m-\ell/6,m+\ell/6)$, где $m=(a+b)/2$ — середина этого отрезка. Рассмотрим теперь произвольное $0 < \beta < 1$ и разложим его в ряд с положительными коэффициентами β_i: $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \beta_i$. Удалим из $[0,1]$ интервал длины β_0, центр которого совпадает с центром отрезка $[0,1]$. Оставшиеся интервалы имеют длину

$$(1-\beta_0)/2 > (\beta-\beta_0)/2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}\beta_i = \beta_1 + ...,$$

поэтому длина каждого из оставшихся отрезков больше β_1. Теперь из оставшихся отрезков выкинем интервалы длины β_1 с центрами в центрах этих отрезков. Аналогично показывается, что полученные отрезки будут длиннее β_2. На n-ом шаге длина отрезков будет равна

$$\Bigg(\bigg(\cdots\Big(\big((1-\beta_0)/2-\beta_1\big)/2-\beta_2\Big)/2\cdots\bigg)-b_{n-1}\Bigg)/2 = \Big(1-\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\beta_i\Big)\Big/2^n,$$

а количество отрезков равно 2^n, поэтому их суммарная длина равна $1 - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \beta_i$. Продолжая этот процесс до бесконечности, в результате получим множество, мера которого (в силу предельного перехода в монотонной последовательности) будет равна $1 - \beta > 0$. Это множество замкнуто как дополнение до открытого. Так как длины отрезков, оставшихся на n-ом шаге, стремятся к 0 при $n \to \infty$, то предельное множество не содержит интервалов.

2.4 Приложение теоремы Витали

Теорема 2.30. *Пусть U — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, и $\delta > 0$. Тогда существует дизъюнктное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых невырожденных шаров таких, что радиус каждого шара не превосходит δ, каждый из шаров лежит в U и*

$$\mathcal{L}^n(U \setminus \cup\mathcal{F}) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathcal{L}^n(U) < \infty$. Выберем произвольное $1 - 1/5^n < \theta < 1$.

Лемма 2.31. *Существует конечное дизъюнктное семейство $\{B_i\}_{i=1}^{M_1}$ невырожденных шаров $B_i \subset U$, радиусы которых не превосходят δ и*

$$\mathcal{L}^n\big(U \setminus \cup_{i=1}^{M_1} B_i\big) < \theta\mathcal{L}^n(U).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство замкнутых невырожденных шаров, каждый из которых лежит в U и имеет не превосходящий δ радиус. Ясно, что $U = \cup\mathcal{B}$. По теореме Витали (теорема 1.3) в $\mathcal{B}$ существует дизъюнктное (и, значит, не более чем счетное) подсемейство $\mathcal{B}'$, для которого $\mathcal{B} \subset 5\mathcal{B}'$, в частности, $U \subset \cup 5\mathcal{B}'$. Отсюда вытекает, что

$$\mathcal{L}^n(U) \le \sum_{B\in\mathcal{B}'} \mathcal{L}^n(5B) = 5^n \sum_{B\in\mathcal{B}'} \mathcal{L}^n(B) = 5^n \mathcal{L}^n(\cup\mathcal{B}'),$$

поэтому

$$\mathcal{L}^n(U \setminus \cup\mathcal{B}') = \mathcal{L}^n(U) - \mathcal{L}^n(\cup\mathcal{B}') \le (1 - 1/5^n)\mathcal{L}^n(U) < \theta\mathcal{L}^n(U).$$

Так как семейство $\mathcal{B}'$ не более чем счетное, в нем существует искомое конечное подсемейство. □

Далее, положим $U_1 = U \setminus \cup_{i=1}^{M_1} B_i$, тогда U_1 — ограниченное открытое множество, и, по лемме 2.31, существует конечное семейство $\{B_i\}_{i=M_1+1}^{M_2}$ невырожденных замкнутых шаров $B_i \subset U_1$, радиусы которых не превосходят δ и

$$\mathcal{L}^n\big(U \setminus \cup_{i=1}^{M_2} B_i\big) = \mathcal{L}^n\big(U_1 \setminus \cup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i\big) < \theta\mathcal{L}^n(U_1) < \theta^2\mathcal{L}^n(U).$$

Продолжая этот процесс, мы в результате построим не более чем счетное дизъюнктное семейство $\mathcal{F} = \{B_i\}$, состоящее из лежащих в U невырожденных замкнутых шаров, радиусы которых не больше δ и для которых выполняется $\mathcal{L}^n\big(U \setminus \cup\mathcal{F}\big) = 0$.

Чтобы получить доказательство в случае $\mathcal{L}^n(U) = \infty$, применим предыдущие рассуждения к множествам $U \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : m-1 < |x|_\infty < m\big\}$, где $m \in \mathbb{N}$ и $\big|(x^1,\dots,x^n)\big| = \max\{|x^i|\}_{i=1}^n$, заметив при этом, что не попавшие в U множества $U \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty = m-1\big\}$ имеют меру ноль (при $m=1$ это — точка или пустое множество; при $m > 1$ эти множества лежат в конечных объединениях граней соответствующих кубов). □

2.5 Пример неизмеримого подмножества отрезка

Как было отмечено выше, мера Лебега не может быть распространена на все подмножества $\mathbb{R}^n$ (парадокс Банаха–Тарского). Построим более простой пример множества, которое не может быть измеримым ни для какого продолжения меры Лебега на бóльшую σ-алгебру до меры, инвариантной относительно сдвигов. Построение будем проводить для случая $n = 1$. Этот пример был придуман Витали.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ отношение ν: точки x и y находятся в отношении ν, если и только если $x-y \in \mathbb{Q}$. Ясно, что ν — отношение эквивалентности, поэтому отрезок $[0, 1]$ разбивается на (континуальное) число счетных классов эквивалентности. Выберем в каждом из этих классов по одной точке (с помощью аксиомы выбора) и полученное (континуальное) множество обозначим через E.

Далее, для каждого $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ положим $E_q = q + E$. Тогда при разных q множества E_q не пересекаются. Действительно, если $x \in E_{q_1} \cap E_{q_2}$, то $x = y + q_1 = z + q_2$, где y, $z \in E$, поэтому $y - z \in \mathbb{Q}$, откуда $y = z$ и, значит, $q_1 = q_2$.

Далее, заметим, что каждая точка из $[0, 1]$ лежит в некотором E_q. Действительно, для $x \in [0, 1]$ обозначим через $[x]$ класс ν-эквивалентности, которому x принадлежит. Тогда $[x] \cap E = \{y\}$ для некоторого $y \in [0, 1]$, откуда $x - y = q \in \mathbb{Q}$, так что $|q| \leq 1$, т.е. $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, и, значит, $x = q + y \in q + E = E_q$.

Так как $E \subset [0, 1]$, то $E_q \subset [-1, 2]$ при всех $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Таким образом, если $A = \sqcup\{E_q : q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]\}$, то $[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$.

Покажем теперь, что для каждого инвариантного продолжения μ меры Лебега множество E неизмеримо. Предположим противное. Если $\mu(E) = 0$, то $\mu(E_q) = 0$ (в силу инвариантности μ относительно сдвигов) и, значит, $\mu(A) = 0$ в силу σ-аддитивности. Однако $[0, 1] \subset A$, поэтому $\mu(A) \geq 1$. Пусть теперь $\mu(E_q) > 0$, тогда, по тем же соображениям, $\mu(A) = \infty$, однако $A \subset [-1, 2]$, так что $\mu(A) \leq 3$.

Тема 3

Внешние меры (по Каратеодори).

При задании меры часто бывает удобно не ограничивать класс рассматриваемых множеств до подходящей σ-алгебры, а, вместо этого, ослабить требование аддитивности. Таким образом возникает понятие внешней меры, заданной на всех подмножествах некоторого множества, но аддитивной только на некоторой σ-алгебре, элементы которой называются измеримыми множествами. Перейдем к подробностям.

Определение 3.1. *Внешней мерой* на множестве X называется произвольное отображение $\mu\colon 2^X \to [0,+\infty]$ такое, что

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) для любого не более чем счетного семейства $\mathcal{C}$ подмножеств из X и любого $A \subset X$, для которого $A \subset \cup\mathcal{C}$, выполняется $\mu(A) \le \sum_{B\in\mathcal{C}} \mu(B)$ (субаддитивность или полуаддитивность).

Ясно, что если в (2) выбрать в качестве $\mathcal{C}$ одноэлементное множество $\{B\}$ такое, что $A \subset B$, то из субаддитивности вытекает, что $\mu(A) \le \mu(B)$. Это свойство обычно называют *монотонностью.*

Замечание 3.2. Вместо пункта (2) часто пишут два условия: монотонность, т.е. $\mu(A) \le \mu(B)$ для $A \subset B$, и субаддитивность в форме $\mu(\cup\mathcal{C}) \le \sum_{B\in\mathcal{C}} \mu(B)$. Приведем пример, который показывает, что из приведенной только что формы субаддитивности монотонность не вытекает. Пусть $X = \{a, b\}$. Положим $\mu\big(\{a\}\big) = 2$, $\mu\big(\{b\}\big) = 1$, $\mu\big(\{a, b\}\big) = 1$. Тогда эта функция субаддитивна, но $\mu\big(\{a\}\big) > \mu\big(\{a, b\}\big)$.

Замечание 3.3. Если μ — произвольная внешняя мера на X, а $Y \subset X$ — произвольное подмножество, то ограничение функции μ на 2^Y является внешней мерой на Y.

Приведем два важных примера построения внешней меры. В первом из них внешняя мера естественным образом продолжает меру, заданную на некоторой σ-алгебре множеств. Во втором примере внешняя мера порождается произвольной неотрицательной функцией на произвольном семействе подмножеств объемлющего пространства, содержащем $\emptyset$, причем на $\emptyset$ эта функция равна нулю.

Пример 3.4. Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{M} \subset 2^X$. Определим функцию $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$, положив

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(B) \mid A \subset B \in \mathcal{M}\big\}.$$

Теорема 3.5. *Определенная только что функция μ^* является внешней мерой, продолжающей μ.*

Доказательство. Покажем сначала, что μ^* продолжает μ. Пусть $A \in \mathcal{M}$. В силу 2.19 (1), для любого $B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, имеем $\mu(A) \le \mu(B)$, поэтому $\mu^*(A) = \mu(A)$, что и требовалось. В частности, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Далее, покажем, что функция μ^* монотонна (нам это понадобится для доказательства субаддитивности). Пусть $A \subset B$, тогда

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(C) \mid C \in \mathcal{M}, B \subset C\} \ge \inf\big\{\mu(C) \mid C \in \mathcal{M}, A \subset C\big\} = \mu^*(A),$$

так как если $C \supset B$, то также $C \supset A$, поэтому первый inf берется по меньшему или такому же множеству, что и второй.

Наконец, проверим, что функция μ^* субаддитивна. Пусть $\{A_i\}$ — произвольное не более чем счетное покрытие произвольного множества $A \subset X$. Для каждого i рассмотрим произвольное $B_i \supset A_i$, $B_i \in \mathcal{M}$, тогда $B = \cup_i B_i \in \mathcal{M}$ и $A \subset B$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) = \mu(B) \le \sum_i \mu(B_i).$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для каждого i существует такое $B_i^\varepsilon \in \mathcal{M}$, $A_i \subset B_i^\varepsilon$, что $\mu(B_i^\varepsilon) \le \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \sum_i \mu(B_i^\varepsilon) \le \varepsilon + \sum_i \mu^*(A_i).$$

В силу произвольности ε, получаем требуемое. □

Определение 3.6. Описанное в примере 3.4 продолжение меры μ до внешней меры μ^* называется *продолжением Лебега меры* μ.

Пример 3.7. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное семейство подмножеств из X, содержащее $\emptyset$, и $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ — произвольное отображение, причем $\mu(\emptyset) = 0$. Имея в виду соглашение $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, определим функцию $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$, положив

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_i \mu(A_i) \mid A \subset \cup_i A_i,\ A_i \in \mathcal{M}\Big\}$$

(таким образом, если A не содержится в объединении не более чем счетного семейства множеств из $\mathcal{M}$, то мы полагаем $\mu^*(A) = +\infty$).

Утверждение 3.8. *Определенная только что функция μ^* является внешней мерой.*

Доказательство. Так как $\mu(A) \ge 0$ для любого A, а $\emptyset \in \mathcal{M}$ и $\mu(\emptyset) = 0$, имеем

$$\mu^*(\emptyset) = \inf\Big\{\sum_i \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{M}\Big\} \le \mu(\emptyset) = 0.$$

Далее, пусть $A \subset B$. Если для B не существует не более чем счетного покрытия множествами из $\mathcal{M}$, то $\mu^*(B) = +\infty$ и неравенство $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ выполнено автоматически. Если такие покрытия есть, что каждое из них является также покрытием множества A, поэтому снова $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

Наконец, пусть $\{A_i\}$ — произвольное не более чем счетное покрытие произвольного множества $A \subset X$. Если для некоторого i множество A_i не имеет не более чем счетного покрытия множествами из $\mathcal{M}$, то $\mu^*(A_i) = +\infty$ и, поэтому, неравенство $\mu^*(A) \le \sum_i \mu^*(A_i)$ имеет место. Пусть теперь для каждого i имеется не более чем счетное покрытие $\{A_i^j\}_j$ множества A_i элементами из $\mathcal{M}$. Тогда $\{A_i^j\}_{i,j}$ — не более чем счетное покрытие множества A, поэтому $\mu^*(A) \le \sum_{i,j} \mu(A_i^j)$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \sum_i \inf\Big\{\sum_j \mu(A_i^j) \mid A_i \subset \cup_j A_i^j,\ A_i^j \in \mathcal{M}\Big\} = \sum_i \mu^*(A_i).$$

□

Упражнение 3.9. Проверьте, что если в примере 3.7 в качестве $\mathcal{M}$ взять произвольную σ-алгебру, а в качестве μ — меру на ней, то внешняя мера μ^* совпадет с продолжением Лебега меры μ, описанным в примере 3.4.

Замечание 3.10. Существует, вообще говоря, много продолжений меры μ до внешней меры. Например, если X состоит из $n > 1$ элементов, σ-алгебра $\mathcal{M}$ равна $\{\emptyset, X\}$, а мера μ на $\mathcal{M}$ однозначно определяется условием $\mu(X) = n$, то для каждого непустого множества $A \subset X$ имеем $\mu^*(A) = n$, однако легко построить и другие продолжения меры μ, скажем, можно рассмотреть считающую меру, т.е. $\mu(A) = \#A$.

Пусть μ — внешняя мера на X.

Определение 3.11. Подмножество $A \subset X$ назовем *измеримым относительно* μ или μ-*измеримым* (по Каратеодори), если для любого $Y \subset X$ выполняется $\mu(Y) = \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A)$. Если из контекста понятно, какая внешняя мера μ имеется в виду, то μ-измеримое множество будем называть просто *измеримым*.

Можно сказать, что измеримыми являются такие множества, которые разбивают все остальные множества μ-аддитивно.

Утверждение 3.12. *Пусть μ — внешняя мера. Тогда*

(1) *множество A измеримо, если и только если для любого $Y \subset X$ такого, что $\mu(Y) < \infty$, выполняется*

$$\mu(Y) \geq \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A).$$

(2) *если μ — считающая мера или любая другая мера, определенная на σ-алгебре всех подмножеств, то все множества измеримы*;

(3) *множества $\emptyset$ и X измеримы всегда*;

(4) *если $\mu(A) = 1$ для каждого непустого $A \subset X$, то единственными измеримыми множествами являются $\emptyset$ и X*;

(5) *если $\mu(A) = 0$, то A измеримо.*

Доказательство. (1) Если A измеримо, то утверждение имеет место по определению. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для каждого множества Y конечной меры выполняется неравенство $\mu(Y) \geq \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A)$. Но для множества Y бесконечной меры это неравенство выполняется автоматически. Тем самым, это неравенство выполняется для всех множеств. Далее, в силу того, что внешняя мера — субаддитивная функция по определению, имеет место и противоположное неравенство, поэтому для всех множеств Y имеем $\mu(Y) = \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A)$, а это и есть определение измеримости.

(2) Мера аддитивна по определению.

(3) Покажем, что $\emptyset$ является измеримым. Действительно, для любого $B \subset X$ имеем $\mu(B \cap \emptyset) + \mu(B \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(B) = \mu(B)$, так как $\mu(\emptyset) = 0$ по определению внешней меры.

Покажем теперь, что X измеримо. Действительно, для любого $B \subset X$ имеем $\mu(B \cap X) + \mu(B \setminus X) = \mu(B) + \mu(\emptyset) = \mu(B)$, так как $\mu(\emptyset) = 0$.

(4) Пусть $A \subset X$ отлично от $\emptyset$ и X. Тогда $B = X \setminus A \neq \emptyset$. Поэтому $\mu(X \cap A) + \mu(X \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) = 2 \neq 1 = \mu(X)$ и, значит, A не является измеримым.

(5) Пусть $\mu(A) = 0$ и Y — произвольно. В силу монотонности имеем $\mu(Y \cap A) = 0$ и $\mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A) = \mu(Y \setminus A) \leq \mu(Y)$, поэтому, в силу пункта (1), A — измеримо. □

Пусть μ — внешняя мера на множестве X, а Y — произвольное подмножество X. Определим функцию $\mu \llcorner Y \colon 2^X \to [0, +\infty]$, положив $(\mu \llcorner Y)(A) = \mu(A \cap Y)$ для любого $A \subset X$.

Замечание 3.13. Иногда вместо $\mu \llcorner Y$ бывает удобно писать μ_Y.

Предложение 3.14. *Функция $\mu \llcorner Y$ является внешней мерой на X и, значит, на Y.*

Доказательство. Покажем, что $(\mu \llcorner Y)(\emptyset) = 0$.

$$(\mu \llcorner Y)(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap Y) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Проверим субаддитивность. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие множества $A \subset X$, тогда $\{A_i \cap Y\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие $A \cap Y$, поэтому

$$(\mu \llcorner Y)(A) = \mu(A \cap Y) \leq \sum_i \mu(A_i \cap Y) = \sum_i (\mu \llcorner Y)(A_i),$$

что и требовалось.

Определение 3.15. Определенную выше внешнюю меру $\mu \llcorner Y$ на Y называют *индуцированной из μ*.

Предложение 3.16. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X, и A — некоторое μ-измеримое подмножество X. Тогда для произвольного $Y \subset X$ множество A и, значит, $A \cap Y$ будут также $(\mu \llcorner Y)$-измеримыми. В частности, положив $A = X$, заключаем, что Y всегда является $(\mu \llcorner Y)$-измеримым.*

Доказательство. Для произвольного множества $B \subset X$ имеем

$$(\mu \llcorner Y)(B) = \mu(B \cap Y) = \mu\big((B \cap Y) \cap A\big) + \mu\big((B \cap Y) \setminus A\big) = \\ = \mu\big((B \cap A) \cap Y\big) + \mu\big((B \setminus A) \cap Y\big) = (\mu \llcorner Y)(B \cap A) + (\mu \llcorner Y)(B \setminus A),$$

где второе равенство выполнено в силу *ти*-измеримости A, а третье следует из теоретико-множественного равенства

$$(B \cap Y) \setminus A = (B \cap Y) \cap \bar{A} = (B \cap \bar{A}) \cap Y = (B \setminus A) \cap Y,$$

что и требовалось.

Замечание 3.17. Не каждое $(\mu \llcorner Y)$-измеримое множество является μ-измеримым. Действительно, так как Y всегда $(\mu \llcorner Y)$-измеримо, даже если Y не μ-измеримо, достаточно привести пример неизмеримого Y. Рассмотрим в качестве X произвольное непустое неодноточечное множество и определим внешнюю меру μ, положив ее равной 1 на всех непустых подмножествах X. Тогда μ-измеримыми являются только $\emptyset$ и X, см. утверждение 3.12.

Следующая теорема перечисляет ряд важных свойств множеств, измеримых относительно внешней меры.

Теорема 3.18. *Пусть μ — внешняя мера на X. Тогда*

(1) *если $A \subset X$ измеримо, то $X \setminus A$ — также измеримо*;

(2) *если $\mathcal{F}$ — конечный набор измеримых подмножеств X, то $\cup\mathcal{F}$ и $\cap\mathcal{F}$ также измеримы, в частности, если измеримое множество объединить с множеством меры нуль, то вновь получится измеримое множество*;

(3) *если A и B — измеримые подмножества X, то $A \setminus B$ и $B \setminus A$ также измеримы, в частности, если из измеримого множества вычесть множество нулевой меры, то вновь получится измеримое множество*;

(4) *если $A_1, A_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся измеримые множества, то $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$*;

(5) *если $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств, то $\mu(\cup B_i) = \lim \mu(B_i)$*;

(6) *если $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ — убывающая последовательность измеримых множеств, причем $\mu(B_1) < \infty$, то $\mu(\cap B_i) = \lim \mu(B_i)$*;

(7) *если $\mathcal{F}$ — не более чем счетное семейство измеримых подмножеств X, то $\cup\mathcal{F}$ и $\cap\mathcal{F}$ также измеримы*;

(8) *если A — измеримое множество, а B — произвольное, то $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$.*

Доказательство. (1) Вытекает из того, что условие измеримости множества A по Каратеодори можно переписать в следующем симметричном относительно перехода к дополнению виде: $\mu(Y) = \mu(Y \cap A) + \mu(Y \cap \bar{A})$ для любого $Y \subset X$.

(2) Пусть для начала $\mathcal{F} = \{A_1, A_2\}$, и $B \subset X$ — произвольное. Тогда для каждого i имеем $\mu(B) = \mu(B \cap A_i) + \mu(B \setminus A_i)$, поэтому

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) = \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \\ + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2) \ge \mu\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \mu\big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big),$$

где последнее неравенство имеет место так как

$$(B \cap A_1) \cup \big((B \setminus A_1) \cap A_2\big) = \big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big), \\ (B \setminus A_1) \setminus A_2 = B \setminus (A_1 \cup A_2),$$

и в силу субаддитивности. С другой стороны, так как

$$B = \big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) \cup \big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big),$$

из субаддитивности вытекает и обратное неравенство, что влечет выполнение условия Каратеодори для $A_1 \cup A_2$. Продолжая эти рассуждения, получим доказательство для любого конечного семейства $\mathcal{F}$. Наконец, чтобы доказать измеримость $\cap\mathcal{F}$, применим (1).

Вторая часть этого пункта вытекает из 3.12 (5), утверждающего, что каждое множество меры нуль измеримо.

(3) Первая часть вытекает из пункта (1) и (2), так как $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ и, аналогично, для $B \setminus A$. Вторая часть — из 3.12 (5), утверждающего, что каждое множество меры нуль измеримо.

(4) Положим $B_j = \cup_{i \le j} A_i$. Для доказательства этого пункта достаточно проверить, что $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$. Действительно, если это равенство выполняется, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) \le \mu(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j),$$

где неравенство имеет место в силу монотонности внешней меры. Обратное неравенство и, в итоге, равенство, следует из субаддитивности внешней меры.

Чтобы доказать равенство $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$, применим индукцию по j. Начало индукции тривиально, так как $B_1 = A_1$. Шаг индукции получается из следующего рассуждения. Заметим, что $B_{j+1} \cap A_{j+1} = A_{j+1}$ и $B_{j+1} \setminus A_{j+1} = B_j$, поэтому, так как A_{j+1} измеримо, имеем:

$$\mu(B_{j+1}) = \mu(B_{j+1} \cap A_{j+1}) + \mu(B_{j+1} \setminus A_{j+1}) = \mu(A_{j+1}) + \mu(B_j).$$

Осталось воспользоваться индуктивным предположением.

(5) Этот пункт получается из предыдущего, если положить $A_1 = B_1$ и, кроме того, $A_i = B_i \setminus B_{i-1}$ при каждом $i > 1$.

(6) Доказательство такое же, как и в 2.19 (5).

(7) Пусть $\mathcal{F} = \{A_i\}$ — счетное семейство измеримых множеств. Положим $B_i = \cup_{j \le i} A_j$, тогда $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, $\cup\{B_i\} = \cup\mathcal{F}$ и, в силу пункта (2), все B_i являются измеримыми.

Пусть Y — произвольное подмножество X. Покажем, что $\cup\mathcal{F}$ разбивает Y на аддитивные части. По утверждению 3.12, (1) это достаточно проверять для множеств Y конечной меры. Итак, пусть $\mu(Y) < \infty$. Тогда, по предложению 3.16, множества B_i также являются $(\mu \llcorner Y)$-измеримыми. Поэтому

$$\begin{aligned}\mu\big(Y \cap (\cup\mathcal{F})\big) + \mu(Y \setminus \cup\mathcal{F}) &= \mu\big(Y \cap (\cup\mathcal{F})\big) + \mu\big(Y \cap (X \setminus \cup\mathcal{F})\big) = (\mu \llcorner Y)(\cup\mathcal{F}) + (\mu \llcorner Y)\big(X \setminus (\cup\mathcal{F})\big) = \\ &= (\mu \llcorner Y)(\cup B_i) + (\mu \llcorner Y)\big(\cap(X \setminus B_i)\big) = \lim (\mu \llcorner Y)(B_i) + \lim (\mu \llcorner Y)(X \setminus B_i) = \\ &= \lim (\mu \llcorner Y)(X) = \lim \mu(Y \cap X) = \mu(Y),\end{aligned}$$

где четвертое равенство выполняется в силу пунктов (5) и (6), причем, применяя пункт (6), мы пользуемся тем, что $\mu(Y) < \infty$; пятое равенство является следствием $(\mu \llcorner Y)$-измеримости каждого B_i (см. выше).

Для завершения доказательства этого пункта можно воспользоваться пунктом (1).

(8) Действительно, в силу измеримости A, имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A),$$

и

$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus A\big) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

откуда и вытекает требуемое. □

Следствие 3.19. *Для произвольной внешней меры μ семейство всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, а внешняя мера, ограниченная на эту σ-алгебру — σ-аддитивной функцией, т.е. представляет собой обычную меру на этой σ-алгебре.*

Обозначение 3.20. Для внешней меры μ семейство всех μ-измеримых множеств будем обозначать через $\sigma(\mu)$.

Из предложения 3.16 и следствия 3.19 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 3.21. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Рассмотрим произвольное $Y \subset X$, и пусть $\sigma(\mu)_Y$, как и выше, обозначает σ-алгебру на Y, индуцированную из $\sigma(\mu)$. Тогда $\sigma(\mu) \subset \sigma(\mu \llcorner Y)$ и $\sigma(\mu)_Y \subset \sigma(\mu \llcorner Y)$.*

Замечание 3.22. Теоремы 3.5 и 3.18 устанавливают связь между понятием меры на σ-алгебре и понятием внешней меры: каждая мера μ на σ-алгебре $\mathcal{M}$ канонически продолжается до внешней меры μ^*, определенной на всех подмножествах, и каждая внешняя мера, определенная на всех подмножествах, порождает σ-алгебру $\sigma(\mu^*)$ множеств, являющихся μ^*-измеримыми в смысле Каратеодори. Как связаны $\mathcal{M}$ и $\sigma(\mu^*)$?

Упражнение 3.23. Покажите, что $\mathcal{M} \subset \sigma(\mu^*)$.

Отметим, что $\mathcal{M}$ и $\sigma(\mu^*)$ могут не совпадать. Например, если μ — нулевая мера, определенная на σ-алгебре $\{\emptyset, X\}$, где X состоит более чем из одного элемента, то μ^* — также нулевая мера, поэтому все подмножества X являются μ^*-измеримыми в силу 3.12 (5).

Упражнение 3.24. Пусть $\mathcal{L}^*$ — внешняя мера, полученная продолжением меры Лебега $\mathcal{L}^n$ с помощью конструкции, описанной перед теоремой 3.5. Существуют ли не борелевские множества, измеримые относительно $\mathcal{L}^*$?

Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, и μ — внешняя мера на X. Определим функцию $f_*\mu\colon 2^Y \to [0, +\infty]$, положив $f_*\mu(A) = \mu\big(f^{-1}(A)\big)$ для каждого $A \subset Y$.

Упражнение 3.25. Докажите, что $f_*\mu$ — внешняя мера на Y.

Упражнение 3.26. Докажите, что множество $f^{-1}(A)$ является μ-измеримым, если и только если множество A является $f_*(\mu \llcorner B)$-измеримым для каждого $B \subset X$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, и μ — внешняя мера на Y. Определим функцию $f^*\mu\colon 2^X \to [0, +\infty]$, положив $f^*\mu(A) = \mu\big(f(A)\big)$ для каждого $A \subset X$.

Упражнение 3.27. Проверьте, что $f^*\mu$ — внешняя мера на X.

3.1 Типы внешних мер

В данном разделе мы приведем ряд популярных типов внешних мер и обсудим их свойства.

Определение 3.28.

(1) Внешняя мера μ на произвольном множестве X называется *регулярной*, если для каждого $A \subset X$ существует μ-измеримое множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$ (иными словами, каждое подмножество может быть расширено до μ-измеримого множества той же меры).

(2) Внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевской*, если все борелевские множества являются μ-измеримыми.

(3) Борелевская внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевски регулярной*, если для каждого $A \subset X$ существует борелевское множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$ (иными словами, каждое подмножество может быть расширено до борелевского множества той же меры).

Приведем некоторые свойства только что определенных внешних мер.

3.1.1 Регулярная внешняя мера

Предложение 3.29. *Пусть μ — регулярная внешняя мера на X, и $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — возрастающая последовательность* ***произвольных*** *множеств. Тогда $\mu(\cup A_i) = \lim \mu(A_i)$.*

Доказательство. В силу регулярности внешней меры μ, для каждого i мы можем выбрать такое измеримое множество $B_i \supset A_i$, что $\mu(B_i) = \mu(A_i)$. Положим $C_k = \cap_{i \ge k} B_i$, тогда все C_k являются измеримыми и $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$. Так как $A_k \subset A_i \subset B_i$ для каждого $i \ge k$, имеем $A_k \subset C_k$. Кроме того, $C_k \subset B_k$, поэтому, в силу монотонности, выполняется $\mu(A_k) = \mu(C_k)$.

Положим $C = \cup C_i$. Тогда, в силу 3.18 (7), множество C — измеримо, а в силу пункта (5) этой же теоремы, имеем $\mu(C) = \lim \mu(C_i)$. Положим $A = \cup A_i$. Тогда, $A \subset C$ и, из монотонности внешней меры, $\mu(A) \le \mu(C)$. С другой стороны, опять же из монотонности внешней меры заключаем, что $\mu(A_i) \le \mu(A)$, поэтому $\mu(C) = \lim \mu(C_i) = \lim \mu(A_i) \le \mu(A)$, откуда $\mu(A) = \mu(C)$, поэтому $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 3.30. Покажем, что условие регулярности в предложении 3.29 существенно. Пусть X — бесконечное множество, и μ — внешняя мера, равная 1 на всех непустых конечных подмножествах X, и 2 на всех бесконечных. Тогда если построить цепочку $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ такую, что A_i состоит из i элементов, то $\mu(A_i) = 1$, а $\mu(\cup A_i) = 2$.

Упражнение 3.31. Пусть μ — регулярная внешняя мера на X. Докажите, что

(1) если $A \cup B$ является μ-измеримым и $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) < \infty$, то A и B также μ-измеримы*;*

(2) если $\mu(X) < \infty$, $f\colon X \to Y$ и $C \subset Y$ представляет собой $f_*\mu$-измеримое множество, то $f^{-1}(C)$ является μ-измеримым*;*

(3) если $Y \subset X$ и $\mu(Y) < \infty$, то класс всех $(\mu \llcorner Y)$-измеримых множеств равен

$$\big\{(B \cap Y) \cup C \mid B \text{ является } \mu\text{-измеримым}, \ C \subset X \setminus Y\big\}.$$

В частности, для произвольного множества $Y \subset X$ конечной меры σ-алгебры $\sigma(\mu \llcorner Y)_Y$ и $\sigma(\mu)_Y$, индуцированные соответственно из $\sigma(\mu \llcorner Y)$ и $\sigma(\mu)$, совпадают (сравните со следствием 3.21).

С регулярными мерами тесно связано понятие оболочки.

Определение 3.32. Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $A \subset X$. Измеримое множество $B \supset A$ назовем *μ-оболочкой*, если для каждого μ-измеримого множества T выполняется $\mu(T \cap A) = \mu(T \cap B)$. В частности, $\mu(A) = \mu(B)$.

Утверждение 3.33. *Пусть $B \supset A$ является μ-измеримым и $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Тогда B является μ-оболочкой множества A.*

Доказательство. Пусть T — произвольное μ-измеримое множество, тогда в силу 3.18 (1) и 3.18 (2), а также монотонности внешней меры и определения измеримого множества, имеем

$$\mu(T \cap B) = \mu(B) - \mu(B \setminus T) \le \mu(A) - \mu(A \setminus T) = \mu(T \cap A),$$

т.е. $\mu(T \cap B) \le \mu(T \cap A)$. Обратное неравенство вытекает из монотонности внешней меры. Доказательство закончено. □

Упражнение 3.34. Пусть μ — регулярная внешняя мера на X. Докажите, что если A — произвольное множество конечной меры, то A имеет μ-оболочку.

Упражнение 3.35. Покажите, что утверждения из упражнений 3.31 и 3.34 могут не иметь места для нерегулярных мер.

Опишем один способ преобразования произвольной внешней меры в регулярную. Пусть μ — произвольная внешняя мера. Положим

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(B) \mid B \supset A, \ B \text{ является } \mu\text{-измеримым}\big\}.$$

То, что μ^* является внешней мерой, совпадающей с μ на всех μ-измеримых подмножествах, было показано в теоремах 3.5 и 3.18.

Упражнение 3.36. Докажите следующие утверждения:

(1) для любого множества $A \subset X$ имеем $\mu(A) \le \mu^*(A)$;

(2) внешняя мера μ^* регулярна;

(3) внешняя мера μ регулярна тогда и только тогда, когда $\mu = \mu^*$;

(4) каждое μ-измеримое множество A является также μ^*-измеримым, т.е. $\sigma(\mu) \subset \sigma(\mu^*)$;

(5) каждое μ^*-измеримое множество A конечной меры является μ-измеримым.

3.1.2 Борелевская внешняя мера

Выясним, при каком условии на внешнюю меру все борелевские множества измеримы.

Утверждение 3.37. *Внешняя мера μ на топологическом пространстве является борелевской, если и только если все открытые (все замкнутые) множества являются μ-измеримыми.*

Доказательство. Так как открытые и замкнутые множества, по определению, являются борелевскими, то измеримость всех борелевских множеств влечет измеримость и открытых множеств, и замкнутых. Обратно, пусть все открытые (замкнутые) множества измеримы. По теореме 3.18, семейство всех измеримых множеств образует σ-алгебру, которая, по условию, содержит все открытые (все замкнутые) множества. Так как борелевская σ-алгебра — наименьшая из всех, содержащих все открытые (замкнутые) множества, заключаем, что она содержится в σ-алгебре всех измеримых множеств, т.е. все борелевские множества измеримы. Доказательство закончено. □

Из предложения 3.16 мгновенно вытекает следующий полезный результат.

Следствие 3.38. *Если μ — борелевская внешняя мера на топологическом пространстве X, то для любого $Y \subset X$ внешняя мера $\mu \llcorner Y$ — также борелевская.*

Обозначение 3.39. Пусть A и B — произвольные непустые подмножества метрического пространства X. Тогда положим
$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\ b \in B\bigr\}.$$
Если $A = \{x\}$, то для краткости будем писать $\operatorname{dist}(x,B)$ вместо $\operatorname{dist}\bigl(\{x\},B\bigr)$.

Теорема 3.40 (критерий Каратеодори)**.** *Пусть X — метрическое пространство и μ — внешняя мера на X. Тогда μ — борелевская, если и только если $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых множеств A и B таких, что* $\operatorname{dist}(A,B) > 0$.

Доказательство. Пусть все борелевские множества измеримы, а расстояние между множествами A и B равно положительному ε. Положим $U = U_{\varepsilon/2}(A)$, тогда $U \cap B = \emptyset$, поэтому $(A\cup B)\cap U = A$ и $(A\cup B)\setminus U = B$. Так как множество U открыто и, значит, μ-измеримо, имеем
$$\mu(A\cup B) = \mu\bigl((A\cup B)\cap U\bigr) + \mu\bigl((A\cup B)\setminus U\bigr) = \mu(A) + \mu(B).$$

Обратно, пусть для любых A и B, находящихся на положительном расстоянии, выполняется $\mu(A\cup B) \ge \mu(A) + \mu(B)$. Покажем, что все борелевские множества измеримы. В силу утверждения 3.37, достаточно проверить измеримость всех открытых множеств.

Пусть $U \subset X$ — открытое множество. В силу 3.12 (1) достаточно показать, что $\mu(B\cap U) + \mu(B\setminus U) \le \mu(B)$ для любого множества B конечной меры μ. Для каждого натурального n положим
$$U_n = \bigl\{x \in U : \operatorname{dist}(x, X\setminus U) > 1/n\bigr\},$$
тогда $\operatorname{dist}(B\cap U_n, B\setminus U) \ge \operatorname{dist}(U_n, X\setminus U) \ge 1/n$, поэтому, в силу условия и монотонности,
$$\mu(B\cap U_n) + \mu(B\setminus U) = \mu\bigl((B\cap U_n)\cup(B\setminus U)\bigr) \le \mu(B).$$

Покажем, что $\mu(B\cap U_n) \to \mu(B\cap U)$ при $n\to\infty$, чем и завершим доказательство.

Положим $A_n = B\cap(U_{n+1}\setminus U_n)$. Пусть I — множество всех индексов n таких, что $A_{2n} \ne \emptyset$, а J — множество всех n таких, что $A_{2n-1} \ne \emptyset$. Заметим, что для любых различных $p, q \in I$ (а также $p, q \in J$) имеем $\operatorname{dist}(A_{2p}, A_{2q}) > 0$ (соответственно $\operatorname{dist}(A_{2p-1}, A_{2q-1}) > 0$), поэтому, учитывая, что $\mu(\emptyset) = 0$, для любого натурального n имеем
$$\sum_{k=1}^n \mu(A_{2k}) = \mu\bigl(\cup_{k\le n} A_{2k}\bigr) \le \mu(B),$$
$$\sum_{k=1}^n \mu(A_{2k-1}) = \mu\bigl(\cup_{k\le n} A_{2k-1}\bigr) \le \mu(B),$$
и, значит, ряд $\sum \mu(A_k)$ сходится (напомним, что $\mu(B) < \infty$).

Заметим, что $B \cap U = (B \cap U_n) \cup \big(\cup_{k \geq n} A_k\big)$. Из монотонности и субаддитивности вытекает, что

$$\mu(B \cap U_n) \leq \mu(B \cap U) \leq \mu(B \cap U_n) + \sum_{k \geq n} \mu(A_k),$$

откуда, в силу сходимости ряда $\sum \mu(A_k)$, имеем $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$. Доказательство закончено. □

Для борелевской внешней меры каждое борелевское множество конечной меры можно сколь угодно точно приблизить как содержащим его открытым, так и содержащимся в нем замкнутым множеством.

Упражнение 3.41. Пусть μ — борелевская внешняя мера на метрическом пространстве X, и $A \subset X$ — произвольное борелевское множество.

(1) Если $\mu(A) < \infty$, то
$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(F) \mid F \subset A,\ F \text{ — замкнуто в } X\big\}.$$

(2) Если A покрывается не более чем счетным семейством открытых множеств конечной меры μ, то

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) \mid U \supset A,\ U \text{ — открыто в } X\big\}.$$

Упражнение 3.42. Можно ли в 3.41 (2) ослабить условие того, что A содержится в не более чем счетном объединении открытых множеств конечной меры?

3.1.3 Приложение теоремы Безиковича

Прежде, чем доказывать основной результат этого раздела, мы покажем справедливость утверждения, обобщающего утверждение Теоремы 3.18 (4) о счетной аддитивности внешней меры для счетного дизъюнктного семейства измеримых множеств.

Предложение 3.43. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и E — произвольное множество. Рассмотрим произвольное не более чем счетное дизъюнктное семейство $\{A_i\}$ подмножеств X, являющихся μ-измеримыми. Тогда*
$$\mu\big(\cup(E \cap A_i)\big) = \sum \mu(E \cap A_i).$$

Доказательство. Действительно, по предложению 3.16, все множества $E \cap A_i$ являются $(\mu \llcorner E)$-измеримыми. Эти множества также образуют дизъюнктное семейство. Осталось применить 3.18 (4). □

Теорема 3.44. *Пусть μ — борелевская внешняя мера на $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{F}$ — семейство невырожденных замкнутых шаров такое, что*

(1) *множество A центров шаров из $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mu(A) < \infty$ (при этом A не обязано быть μ-измеримым);*

(2) *для каждого $a \in A$ выполнено* $\inf\{r : B_r(a) \in \mathcal{F}\} = 0$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество. Положим $A_U = A \cap U$ и $\mathcal{F}_U = \{B \in \mathcal{F} : B \subset U\}$. Тогда существует дизъюнктное (а, значит, счетное) подсемейство $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_U$ такое, что

$$\mu\big(A_U \setminus \cup\mathcal{F}'\big) = 0.$$

Доказательство. Пусть N_n обозначает число из теоремы 1.8. Выберем произвольное $1 - 1/N_n < \theta < 1$.

Лемма 3.45. *В $\mathcal{F}_U$ существует конечное дизъюнктное подсемейство $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ такое, что*

$$\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_1} B_i\Big) < \theta\, \mu(A_U).$$

Доказательство. Заметим сначала, что A_U — совпадает с семейством центров всех шаров из $\mathcal{F}_U$. Действительно, так как каждый шар $B_r(a) \in \mathcal{F}_U$ лежит в U, то и его центр $a \in A$ лежит в U, и, значит, в $A_U = A \cap U$. Обратно, так как U — открыто, для каждой точки $a \in A_U$ существует $U_\rho(a) \subset U$, поэтому, в силу условия $\inf\{r : B_r(a) \in \mathcal{F}\} = 0$, существует $B_r(a) \in \mathcal{F}$ такой, что $B_r(a) \subset U_\rho(a) \subset U$, откуда $B_r(a) \in \mathcal{F}_U$.

Пусть $\mathcal{B}$ — подсемейство в $\mathcal{F}_U$, состоящее из всех шаров с радиусами меньшими 1. По теореме 1.8, существует N_n дизъюнктных подсемейств $\mathcal{B}'_k \subset \mathcal{B}$, покрывающих в совокупности A_U. Отсюда вытекает, что

$$\mu(A_U) \le \sum_{k=1}^{N_n} \mu(A_U \cap \cup \mathcal{B}'_k),$$

и, значит, для некоторого $1 \le k \le N_n$ выполняется

$$\mu(A_U \cap \cup \mathcal{B}'_k) \ge \frac{1}{N_n}\mu(A_U).$$

Предположим, что семейство $\mathcal{B}'_k$ конечно, тогда его элементы можно взять в качестве B_i. Действительно, так как μ — борелевская, $\cup \mathcal{B}'_k$ является μ-измеримым, поэтому

$$\mu(A_U) = \mu(A_U \cap \cup \mathcal{B}'_k) + \mu(A_U \setminus \cup \mathcal{B}'_k),$$

откуда

$$\mu(A_U \setminus \cup \mathcal{B}'_k) \le \mu(A_U) - \frac{1}{N_n}\mu(A_U) < \theta\, \mu(A_U),$$

что и доказывает лемму в этом случае.

Пусть теперь семейство $\mathcal{B}'_k$ счетно, $\mathcal{B}'_k = \{B_1,\, B_2,\, \ldots\}$. По предложению 3.43, имеем

$$\mu(A_U \cap \cup_{i=1}^m B_i) \to \mu(A_U \cap \cup \mathcal{B}'_k) \ \text{ при } \ m \to \infty.$$

Так как, по определению, $0 < 1 - \theta < 1/N_n$, то из сказанного выше вытекает, что

$$\mu(A_U \cap \cup \mathcal{B}'_k) \ge \frac{1}{N_n}\mu(A_U) > (1-\theta)\mu(A_U),$$

поэтому, для достаточно большого m_1 имеет место

$$\mu\big(A_U \cap (\cup_{i=1}^{m_1} B_i)\big) > (1-\theta)\mu(A_U).$$

Снова, как и выше, воспользуемся μ-измеримостью семейства $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ и получим требуемое. □

Вернемся к доказательству теоремы. Выбрав предварительно семейство $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ из леммы 3.45, положим $U_2 = U \setminus \cup_{i=1}^{m_1} B_i$. Ясно, что U_2 — открытое множество. Если $U_2 = \emptyset$, то построенное семейство $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ является искомым семейством $\mathcal{F}'$. Если же $U_2 \ne \emptyset$, положим $A_U^2 = A \cap U_2$ и $\mathcal{F}_U^2 = \{B \in \mathcal{F}_U : B \subset U_2\}$. Тогда, по лемме 3.45, найдется дизъюнктное подсемейство $\{B_{m_1+1}, \ldots, B_{m_2}\} \subset \mathcal{F}_U^2$ такое, что

$$\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_2} B_i\Big) = \mu\Big(A_U^2 \setminus \cup_{i=m_1+1}^{m_2} B_i\Big) < \theta\, \mu(A_U^2) = \theta\, \mu(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_1} B_i) < \theta^2 \mu(A_U).$$

Продолжим этот процесс. Если он остановится на каком-нибудь шаге p, т.е. если мы получим $U_p = \emptyset$, то $\{B_i\}_{i=1}^{m_{p-1}}$ — искомое семейство $\mathcal{F}'$. Если же этот процесс не останавливается ни на каком конечном шаге, то получим счетную коллекцию $\{B_i\}$, для которой при каждом p выполняется

$$\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \le \mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_p} B_i\Big) < \theta^p \mu(A_U),$$

поэтому, так как $\theta \in (0,1)$, имеем $\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = 0$. Тем самым, в качестве $\mathcal{F}'$ в этом случае можно взять полученное $\{B_i\}$. Теорема полностью доказана. □

3.1.4 Борелевски регулярная внешняя мера

Выше мы определили два типа мер, названия которых очень схожи, а именно, регулярные борелевские внешние меры и борелевски регулярные внешние меры. Регулярность борелевской внешней меры означает возможность расширить каждое множество до какого-то измеримого подмножества той же меры. Борелевская регулярность внешней меры дает более жесткое условие: каждое множество расширяется до борелевского множества той же меры. Поэтому каждая борелевски регулярная внешняя мера является регулярной борелевской внешней мерой.

Упражнение 3.46. Верно ли, что каждая регулярная борелевская меря является борелевски регулярной?

Утверждение 3.47. *Пусть μ внешняя мера на топологическом пространстве X борелевски регулярна. Тогда для любого μ-измеримого $A \subset X$ с $\mu(A) < \infty$ существуют такие борелевские B и D, что $D \subset A \subset B$ и $\mu(B \setminus D) = 0$. В частности, $\mu(A \setminus D) = \mu(B \setminus A) = 0$ и $\mu(D) = \mu(A) = \mu(B)$.*

Доказательство. Так как внешняя мера μ борелевски регулярна, существует борелевское множество $B \supset A$, для которого $\mu(A) = \mu(B)$. Далее, по той же причине существует борелевское множество $E \supset B \setminus A$ такое, что $\mu(E) = \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = 0$, где среднее равенство имеет место в силу μ-измеримости множества A и того, что $A \subset B$.

Положим $D = B \setminus E$, тогда D — борелевское. Покажем, что $D \subset A$. Пусть $x \in D$, тогда $x \in B$ и $x \notin E$. Так как $E \supset B \setminus A$, имеем $x \notin B \setminus A$. Но $x \in B$, следовательно, $x \in A$.

Для завершения доказательтсва заметим, что $\mu(B \setminus D) = \mu(B \cap E) \leq \mu(E) = 0$, так что пара B, D — искомая. $\square$

Таким образом, если μ — борелевски регулярная внешняя мера, то утверждения упражнения 3.41, имевшие место только для борелевских множеств конечной меры, теперь справедливы для произвольных μ-измеримых множеств конечной меры. А именно, получаем следующий результат.

Следствие 3.48. *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на топологическом пространстве X, и $A \subset X$ — произвольное μ-**измеримое** множество.*

(1) *Если $\mu(A) < \infty$, то*
$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(F) \mid F \subset A,\ F \text{ — замкнуто в } X\big\}.$$

(2) *Если A покрывается не более чем счетным семейством открытых множеств конечной меры μ, то*
$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) \mid U \supset A,\ U \text{ — открыто в } X\big\}.$$

Идея доказательства следующей полезной теоремы взята из [8].

Теорема 3.49. *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на топологическом пространстве X, и Y — произвольное μ-измеримое множество, причем $\mu(Y) < \infty$, тогда внешняя мера $\mu \llcorner Y$ — также борелевски регулярна.*

Доказательство. Мера $\mu \llcorner Y$ — борелевская в силу следствия 3.38. Сведем доказательство регулярности к случаю борелевского Y. Так как μ — борелевски регулярна, существует $Z \in \mathcal{B}(X)$ такой, что $Y \subset Z$ и $\mu(Y) = \mu(Z)$. Мы покажем, что $\mu \llcorner Y = \mu \llcorner Z$, а для этого достаточно проверить, что $\mu \llcorner Z \leq \mu \llcorner Y$, так как обратное неравенство мгновенно вытекает из монотонности.

В силу того, что Y является μ-измеримым, имеем
$$\mu(Z) = \mu(Z \cap Y) + \mu(Z \setminus Y) = \mu(Y) + \mu(Z \setminus Y),$$
откуда $\mu(Z \setminus Y) = 0$ (здесь мы воспользовались конечностью $\mu(Y)$). Снова учитывая μ-измеримость Y, для произвольного $A \subset X$ получим
$$\begin{aligned}(\mu \llcorner Z)(A) = \mu(A \cap Z) = \mu\big((A \cap Z) \cap Y\big) + \mu\big((A \cap Z) \setminus Y\big) = \\ = \mu(A \cap Y) + \mu\big((A \cap Z) \setminus Y\big) \leq \mu(A \cap Y) + \mu\big(Z \setminus Y\big) = \mu(A \cap Y) = (\mu \llcorner Y)(A).\end{aligned}$$

Итак, нам осталось доказать теорему в предположении, что Y — борелевское. Пусть это так. Снова выберем произвольное $A \subset X$. Так как μ — борелевски регулярна, существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $A \cap Y \subset B$ и $\mu(A \cap Y) = \mu(B)$. Положим $C = B \cup (X \setminus Y)$ и покажем, что C — борелевская $\mu \llcorner Y$-оболочка множества A.

Заметим, что $C \cap Y = B \cap Y$, а также, что

$$A \subset (A \cap Y) \cup (X \setminus Y) \subset B \cup (X \setminus Y) = C.$$

Так как B и Y — борелевские, то C — также борелевское. Мы завершим доказательство, показав, что $(\mu \llcorner Y)(A) = (\mu \llcorner Y)(C)$, для чего, в силу монотонности, достаточно проверить неравенство $(\mu \llcorner Y)(C) \leq (\mu \llcorner Y)(A)$. Сделаем это:

$$(\mu \llcorner Y)(C) = \mu(C \cap Y) = \mu(B \cap Y) \leq \mu(B) = \mu(A \cap Y) = (\mu \llcorner Y)(A),$$

что и требовалось. $\square$

Упражнение 3.50. Пусть μ — борелевская внешняя мера на метрическом пространстве X. Для каждого $A \subset X$ положим

$$\nu(A) = \inf\bigl\{\mu(B) \mid B \supset A,\ B \text{ — борелевское множество}\bigr\}.$$

Докажите, что ν — борелевски регулярная внешняя мера, совпадающая с μ на борелевских множествах.

Тема 4

Измеримые отображения.

Пусть X_1 и X_2 — два пространства с заданными на них σ-алгебрами.

Определение 4.1. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется ***измеримым***, если прообраз любого измеримого множества измерим.

Имеется ряд традиционных способов введения в рассмотрение измеримых отображений, когда соответствующие σ-алгебры задаются неявно. Приведем некоторые примеры.

(1) Если X_i является топологическим (в частности, метрическим) пространством, и ничего не говорится про определенную на нем меру, то на X_i, как правило, рассматривается борелевская σ-алгебра.

(2) Например, говоря про измеримость функции $f\colon X_1 \to \mathbb{R}$, мы обычно предполагаем, что на $\mathbb{R}$ в качестве семейства измеримых множеств рассматриваемся борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(3) Аналогично определяются измеримые функции из X_1 в $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, где a может равняться $-\infty$, а b может равняться $\infty = +\infty$.

(4) Если на X_i задана (внешняя) мера μ_i, то в качестве σ-алгебры, как правило, рассматривается $\sigma(\mu_i)$, даже если X_i — топологическое пространство.

(5) Типичная ситуация: X_2 — топологическое (метрическое) пространство, а на X_1 задана (внешняя) мера μ_1. Тогда измеримое отображение в этом случае называют μ_1-***измеримым*** для акцентирования внимания на том, что на X_1 рассматривается σ-алгебра $\sigma(\mu_1)$.

Определение 4.2. Измеримые отображения $f\colon X_1 \to X_2$ топологических пространств (с борелевскими σ-алгебрами) называют ***борелевскими***.

Замечание 4.3. Измеримость отображения $f\colon X_1 \to X_2$ топологических пространств (с борелевскими σ-алгебрами) равносильна условию «прообраз открытого множества измерим» (проверьте), поэтому каждое непрерывное отображение является борелевским.

Замечание 4.4. Пусть X_1 и X_2 — топологические пространства, причем на X_1 задана борелевская внешняя мера μ_1. Тогда μ_1-измеримое отображение $f\colon X_1 \to X_2$ не обязано быть борелевским, поскольку прообраз измеримого множества $A \subset X_2$ может лежать в $\sigma(\mu_1) \setminus \mathcal{B}(X_1)$.

Следующие свойства измеримых отображений доказываются непосредственно и оставляются в качестве упражнений.

Упражнение 4.5. Докажите, что композиция измеримых отображений также измерима.

Упражнение 4.6. Пусть f, $g\colon X \to \mathbb{R}$ — две μ-измеримые функции, и пусть a и b — произвольные вещественные числа. Докажите, что μ-измеримыми являются также $a\,f + b\,g$, $f\,g$, $|f|$, $\min(f,g)$ и $\max(f,g)$; если $g \neq 0$, то f/g также μ-измерима.

Упражнение 4.7. Пусть $f_k\colon X \to [-\infty,\infty]$ — последовательность μ-измеримых функций. Докажите, что μ-измеримыми являются также $\inf_{k\ge1} f_k$, $\sup_{k\ge1} f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$.

Определение 4.8. Пусть X — произвольное множество, и $A \subset X$. Тогда функция $f\colon X \to \{0,1\}$ такая, что $f(x) = 1$, если и только если $x \in A$, называется *индикатором*, *индикаторной функцией* или *характеристической функцией множества* A и обозначается через χ_A.

Упражнение 4.9. Докажите, что если на X задана внешняя мера A, то индикаторная функция χ_A является μ-измеримой тогда и только тогда, когда множество A является μ-измеримым.

Теорема 4.10. *Любая μ-измеримая функция $f\colon X \to [0,\infty]$ может быть представлена в виде*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k},$$

где все множества $A_k \subset X$ являются μ-измеримыми.

Доказательство. Положим $A_1 = \{x \in X : f \ge 1\}$. Если уже определены все A_i, $i < k$, то положим

$$A_k = \left\{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x)\right\}.$$

Лемма 4.11. *Имеем $f \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}$.*

Доказательство. Выберем произвольное $x \in X$. Если x не принадлежит ни одному A_k, то $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) = 0$, так что неравенство имеет место.

Пусть теперь $x \in A_k$ для некоторого k. Тогда, по определению A_k, имеем

$$f(x) \ge \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x).$$

При этом, для каждого m такого, что $x \notin A_m$, также выполняется неравенство

$$f(x) \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x)$$

в силу того, что $\chi_{A_i}(x) = 0$ при всех i, для которых $x \notin A_i$. Переходя к пределу, получаем требуемое. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Если $f(x) = \infty$, то $x \in A_k$ при всех k, поэтому в этой точке доказываемое равенство имеет место (так как ряд $\sum(1/i)$ расходится).

Если же $f(x) < \infty$, то, по той же причине, для бесконечного числа k имеем $x \notin A_k$. Поэтому для бесконечного числа k выполняется

$$0 \le f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x) < \frac{1}{k},$$

где первое неравенство вытекает из леммы 4.11, а второе — из того, что $x \notin A_k$. Устремляя k к бесконечности, получаем, что и для такого x имеет место доказываемое равенство. $\square$

Теорема 4.12 (Лузин)**.** *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на метрическом пространстве X, а $f\colon X \to Y$ — некоторое μ-измеримое отображение в сепарабельное метрическое пространство Y (с борелевской σ-алгеброй). Пусть $A \in \sigma(\mu)$ таково, что $\mu(A) < \infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $C \subset A$ такое, что $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$ и $f|_C$ непрерывна.*

Доказательство. Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 4.13. *Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство. Тогда для каждого $d > 0$ пространство Y можно разбить на не более чем счетное число борелевских множеств диаметра меньше d.*

Доказательство. Выберем произвольное $0 < r < d/2$, тогда для каждого $y \in Y$ диаметр шара $B_r(y)$ меньше d. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное подмножество Y. Положим $B_k = B_r(a_k)$, $Y_k = B_k \setminus \cup_{i<k} B_i$, и пусть $Y_{k_1}, Y_{k_2}, Y_{k_3}, \ldots$, где $k_1 = 1$, — последовательные непустые Y_i. Тогда каждое Y_{k_i} является борелевским множество, диаметр которого меньше d; семейство $\{Y_{k_i}\}$ покрывает Y, и никакие два элемента этого покрытия не пересекаются. $\square$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ разобьем Y на не более чем счетное число борелевских подмножеств $Y_{i,j}$, диаметр каждого из которых меньше $1/i$. Положим $A_{i,j} = f^{-1}(Y_{i,j}) \cap A$ (будем рассматривать только непустые пересечения). Тогда каждое $A_{i,j}$ — μ-измеримое подмножество X конечной меры, причем $\{A_{i,j}\}$ — разбиение множества A. Так как мера μ — борелевски регулярная, то, по следствию 3.48, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $E_{i,j} \subset A_{i,j}$, что $\mu(A_{i,j} \setminus E_{i,j}) < \varepsilon/2^{i+j}$. Тогда

$$\mu(A \setminus \cup_j E_{i,j}) = \sum_j \mu(A_{i,j} \setminus E_{i,j}) < \varepsilon/2^i,$$

поэтому найдется такое $J(i)$, что для $D_i = \cup_{j \le J(i)} E_{i,j}$ выполняется $\mu(A \setminus D_i) < \varepsilon/2^i$. Отметим, что множество D_i замкнуто.

В каждом $Y_{i,j}$ выберем по одной точке $y_{i,j}$. Определим отображение $g_i \colon D_i \to Y$, положив $g_i(x) = y_{i,j}$ при всех $x \in E_{i,j}$. Так как $\{E_{i,j}\}_{i \le J(i)}$ — конечное дизъюнктное семейство замкнутых множеств, отображение g_i непрерывно. Кроме того, для каждого $x \in D_i$ выполнено $x \in E_{i,j}$ для некоторого j, и поэтому $\bigl|f(x)g_i(x)\bigr| = |f(x)y_{i,j}| < 1/i$, так как $f(x) \in Y_{i,j}$, а диаметр $Y_{i,j}$ меньше $1/i$.

Положим $D = \cap D_i$, тогда D — замкнутое множество и

$$\mu(A \setminus D) = \mu(A \setminus \cap D_i) = \mu\bigl(\cup(A \setminus D_i)\bigr) \le \sum \mu(A \setminus D_i) < \varepsilon.$$

Кроме того, из сказанного выше вытекает, что функции $g_i|_D$ сходятся к $f|_D$ равномерно, поэтому $f|_D$ — непрерывная функция. □

Приведем некоторые следствия из теоремы 4.12.

Определение 4.14. Пусть μ — мера (внешняя мера) на множестве X. Утверждение, содержащее фразу «μ-почти» означает, что оно имеет место всюду, за исключением некоторого множества μ-меры ноль.

Определение 4.15. Мера (внешняя мера) μ на множестве X называется *σ-конечной* или *счетно конечной*, а множество X — *счетно μ-измеримым*, если X покрывается не более чем счетным набором μ-измеримых множеств конечной меры.

Следствие 4.16. *Пусть μ — борелевски регулярная σ-конечная внешняя мера на метрическом пространстве X, а $f \colon X \to Y$ — некоторое μ-измеримое отображение в сепарабельное метрическое пространство Y (с борелевской σ-алгеброй). Тогда существует борелевское отображение $g \colon X \to Y$, совпадающее μ-почти всюду с f.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$ — не более чем счетное семейство μ-измеримых множеств конечной меры, покрывающее X (существующее в силу σ-конечности меры μ). По теореме 4.12, для каждого i существует замкнутое множество $C_i \subset A_i$ такое, что $\mu(A_i \setminus C_i) < \varepsilon/2^i$ и функция $f|_{C_i}$ непрерывна. Положим $C^\varepsilon = \cup C_i$, тогда $\mu(X \setminus C^\varepsilon) = \mu\bigl((\cup A_i) \setminus (\cup C_i)\bigr) \le \sum \mu(A_i \setminus C_i) < \varepsilon$. Если $F \subset Y$ — произвольное замкнутое множество, то из непрерывности функции $f|_{C_i}$ и замкнутости C_i вытекает, что $G_i = (f|_{C_i})^{-1}(F)$ — замкнутые подмножества X, откуда $G^\varepsilon = \cup G_i$ — борелевское множество.

Положим $C = \cup_i C^{1/i}$, тогда $\mu(X \setminus C) = 0$. С другой стороны, как было показано выше, для произвольного замкнутого $F \subset Y$ множество $G^{1/i} = (f|_{C^{1/i}})^{-1}(F)$ — борелевское, поэтому $(f|_C)^{-1}(F) = \cup_i G^{1/i}$ — также борелевское множество, откуда вытекает, что $f|_C$ — борелевская функция.

Выберем произвольное $y \in Y$ и продолжим $f|_C$ на все X до функции g, положив $g(x) = y$ для всех $x \in X \setminus C$. Так как $X \setminus C$ — борелевское множество, полученная функция g — борелевская, совпадающая с f на C, т.е. μ-почти всюду. □

Чтобы сформулировать еще одно следствие, напомним определение нормального топологического пространства и теорему Титце–Урысона.

Определение 4.17. Топологическое пространство называется *нормальным*, если каждое его одноточечное подмножество замкнуто, и каждая пара его непересекающихся замкнутых подмножеств имеет непересекающиеся открытые окрестности.

Упражнение 4.18. Докажите, что каждое метрическое пространство является нормальным.

Теорема 4.19 (Титце–Урысон)**.** *Каждая непрерывная вещественная функция, заданная на замкнутом подмножестве нормального пространства, непрерывно продолжается на всё пространство.*

Следствие 4.20. *В предположениях теоремы 4.12, пусть $Y = \mathbb{R}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$\mu\Big(\big\{x \in A : f(x) \neq g(x)\big\}\Big) < \varepsilon.$$

Теорема 4.21 (Егоров)**.** *Пусть μ — внешняя мера на некотором множестве X, а $f_1, f_2, \ldots$ и g — μ-измеримые отображения из X в сепарабельное метрическое пространство Y. Предположим, что для некоторого $A \subset X$, $\mu(A) < \infty$, отображения f_n сходятся поточечно к g почти всюду на A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует μ-измеримое множество $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$, для которого отображения $f_n|_B$ сходятся равномерно к $g|_B$.*

Доказательство. Для каждых $i, j \in \mathbb{N}$ положим

$$A_{i,n} = \left\{x \in X : \big|f_n(x)g(x)\big| \geq \frac{1}{2^i}\right\} \ \text{ и } \ C_{i,j} = \bigcup_{n=j}^{\infty} A_{i,n}.$$

В силу непрерывности метрики, а также того, что на Y рассматривается борелевская σ-алгебра, функция $h(x) = \big|f_n(x)g(x)\big|$ является μ-измеримой, поэтому все $A_{i,n}$ — μ-измеримы, и, значит, $C_{i,j}$ также μ-измеримы. Кроме того, при каждом i имеем $C_{i,1} \supset C_{i,2} \supset \cdots$. Поэтому, в силу теоремы 3.18, (6) при каждом фиксированном i имеем

$$\mu(A \cap C_{i,j}) \to \mu(A \cap \cap_j C_{i,j}) \qquad \text{при } j \to \infty.$$

Множество $A \cap \cap_j C_{i,j}$ состоит из всех $x \in A$, для которых при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\big|f_n(x)g(x)\big| \geq 1/2^i$. Однако, для μ-почти всех $x \in A$ имеем $f_n(x) \to g(x)$, поэтому $\mu(A \cap \cap_j C_{i,j}) = 0$. Отсюда вытекает, что для каждого i существует такое $J(i)$, для которого $\mu(A \cap C_{i,J(i)}) < \varepsilon/2^i$.

Рассмотрим множество $B = A \setminus \cup_i C_{i,J(i)} = \cap_i (A \setminus C_{i,J(i)})$. Заметим, что если $x \notin C_{i,j}$, то при всех $n \geq j$ выполняется $\big|f_n(x)g(x)\big| < 1/2^i$. Отсюда вытекает, что если $x \in B$, то $\big|f_n(x)g(x)\big| < 1/2^i$ при $n \geq J(i)$.

Итак, для произвольного $\delta > 0$ выберем такое i, что $1/2^i < \delta$. Тогда при всех $x \in B$ и при всех $n \geq J(i)$ выполняется $\big|f_n(x)g(x)\big| < \delta$. Последнее означает равномерную сходимость функций $f_n|_B$ к $g|_B$. Осталось заметить, что

$$\mu(A \setminus B) = \mu\big(A \cap (\cup_i C_{i,J(i)})\big) \leq \sum_i \mu(A \cap C_{i,J(i)}) < \varepsilon.$$

□

Тема 5

Интеграл Лебега.

В этом разделе мы напомним, что такое интеграл Лебега и обсудим основные его свойства. Нам понадобятся следующие естественные соглашения, одно из которых мы уже использовали.

5.1 Соглашения и обозначения

Соглашение 5.1. Положим $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$.

Замечание 5.2. Если A — непустое подмножество $[-\infty, \infty]$, то $\inf A \leq \sup A$; если же $A = \emptyset$, то это неравенство перестает быть верным в силу соглашения 5.1.

Обозначение 5.3. Пусть $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ — произвольная функция, определенная на некотором множестве X. Положим $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$.

Функции f^+ и f^- неотрицательны; кроме того, $f = f^+ - f^-$ и $|f| = f^+ + f^-$.

Утверждение 5.4. *Пусть $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ и $g\colon X \to [-\infty, \infty]$ — произвольные функции. Тогда*

(1) *если $c \in \mathbb{R}$ — произвольный не нулевой множитель, то $(c\,f)^+ = |c|\, f^{\operatorname{sign} c}$ и $(c\,f)^- = |c|\, f^{-\operatorname{sign} c}$, в частности, $f^- = (-f)^+$ и $f^+ = (-f)^-$;*

(2) *функция $f + g$ определена тогда и только тогда, когда ни в одной точке $x \in X$ функции f и g не принимают бесконечные значения разных знаков; более того, если функция $f + g$ определена, то*

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+,$$
$$(f+g)^- \leq f^- + g^-,$$
$$f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+.$$

(3) *если на X задана внешняя мера μ и функция f является μ-измеримой, то f^+, f^- и $|f| = f^+ + f^-$ также μ-измеримы.*

Доказательство. (1) Покажем справедливость равенств в каждой точке $x \in X$. Если $f(x)$ конечно, то все очевидно. Пусть теперь $f(x)$ бесконечно. Продемонстрируем доказательство первого равенства в случае $f(x) = \infty$ (остальные случаи разбираются аналогично). Если $c > 0$, то $(c\,f)^+(x) = \infty$ и $|c|\, f^{\operatorname{sign} c}(x) = |c|\, f^+(x) = \infty$. Если же $c < 0$, то $(c\,f)^+(x) = 0$ и $|c|\, f^{\operatorname{sign} c}(x) = |c|\, f^-(x) = 0$.

(2) Единственная причина, по которой может быть не определена функция $f + g$ в некоторой точке x заключается в наличии неопределенности $\infty - \infty$, которая возникает в точности тогда, когда значения в x обеих функций бесконечны и имеют разные знаки.

Из первых двух неравенств докажем первое (второе доказывается аналогично). Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то $(f+g)^+(x) = f(x) + g(x) = f^+(x) + g^+(x)$. Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \leq 0$, то $(f+g)^+(x) \leq f(x) = f^+(x) + g^+(x)$, так как $g^+(x) = 0$. Аналогично разбирается случай $f(x) \leq 0$ и $g(x) \geq 0$. Наконец, если $f(x) \leq 0$ и $g(x) \leq 0$, то $(f+g)^+(x) = 0 = f^+(x) + g^+(x)$.

Докажем теперь третье равенство. Если $f(x)$ и $g(x)$ конечны, то искомое равенство в точке x следует из очевидного равенства $f = f^+ - f^-$. Пусть одно из этих значений, скажем, $f(x)$ бесконечно, а другое, $g(x)$,

— конечно. Рассмотрим случай $f(x) = \infty$ (случай $f(x) = -\infty$ разбирается аналогично). Тогда $f^+(x) = (f + g)^+(x) = \infty$, а все остальные величины доказываемого равенства — конечны, поэтому равенство имеет место. Наконец, пусть теперь оба $f(x)$ и $g(x)$ бесконечны, тогда они имеют один знак. Рассмотрим случай $f(x) = g(x) = \infty$. Тогда $f^+(x) = g^+(x) = (f+g)^+(x) = \infty$, а все остальные члены доказываемого равенства — конечны, поэтому равенство также имеет место.

(3) Покажем, что f^+ является μ-измеримой (тогда для f^- это будет следовать из равенства $f^- = (-f)^+$ и упражнения 4.6). Пусть $A \subset [-\infty, \infty]$ — произвольное борелевское множество. Положим $A^+ = A \cap [0, \infty]$, тогда A^+ — также борелевское, поэтому $(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A^+)$ является μ-измеримым. □

5.2 Формализация суммирования

Выше мы уже неоднократно использовали понятие суммирования, апеллирую к рядам. При работе с мерами мы столкнулись с тем, что некоторые элементы ряда могут равняться ∞. При определении интеграла Лебега мы позволим элементам ряда также равняться $-\infty$. Последнее приведет к тому, что некоторые суммы будут не определены. В математическом анализе похожий феномен возникает при рассмотрении расходящихся рядов, когда результат суммирования зависит от порядка суммирования. Однако у нас теперь все будет еще хуже: если ряд содержит как ∞, так и $-\infty$, то изменение порядка суммирования не помогает. Впрочем, здесь оказывается полезным другой прием: рассматривать соответствующие функции, разрешая выкидывать из их областей определения множества меры ноль (см. ниже).

Включение в рассмотрение $\pm\infty$ в качестве элементов рядов, а также желание осуществлять алгебраические операции с рядами, значения которых могут равняться $\pm\infty$, приводит к необходимости более аккуратного манипулирования, так как, например, некоторые стандартные операции, допустимые для сходящихся рядов, тут перестают быть корректно определены. В связи с этим мы приведем здесь аксиоматическое определение оператора суммы, а также список его различных свойств. В нашем изложении мы следуем в основном [12].

Пусть X — произвольное множество, $f\colon X \to [-\infty, \infty]$, и $A \subset X$.

Определение 5.5. Определим $\sum_A f = \sum_{x\in A} f(x)$ следующим образом:

(1) если $A = \emptyset$, то $\sum_A f = 0$;

(2) если $f \ge 0$ и для некоторого конечного $B \subset A$ имеем $f|_{A\setminus B} = 0$, то $\sum_A f$ — это обычная конечная сумма $\sum_{b\in B} f(b)$;

(3) если $f \ge 0$, то $\sum_A f = \sup\bigl\{\sum_B f : B \subset A,\ \#B < \infty\bigr\}$;

(4) если $\sum_A f^+ < \infty$ или $\sum_A f^- < \infty$, то $\sum_A f = \sum_A f^+ - \sum_A f^-$;

(5) если $\sum_A f^+ = \infty$ и $\sum_A f^- = \infty$, то $\sum_A f$ не определено.

В следующем утверждении перечисляются свойства только что определенной нами операции суммирования.

Утверждение 5.6. *Пусть X — произвольное множество, $f, g\colon X \to [-\infty, \infty]$, и $A \subset X$. Тогда*

(1) $\sum_A f \in \mathbb{R}$, *если и только если* $\sum_A |f| \in \mathbb{R}$;

(2) *если* $0 \ne c \in \mathbb{R}$, *то* $\sum_A (cf) = c \sum_A f$;

(3) *при* $c = 0$ *предыдущее равенство может не иметь места*;

(4) *если величина* $\sum_A f + \sum_A g$ *определена, то* $\sum_A (f+g) = \sum_A f + \sum_A g$;

(5) *если* $f|_A \le g|_A$ *и, кроме того, или* $-\infty < \sum_A f$, *или* $\sum_A g < \infty$, *то* $\sum_A f \le \sum_A g$;

(6) *если оба условия* $-\infty < \sum_A f$ *и* $\sum_A g < \infty$ *не выполняются, то предыдущее неравенство может не иметь места*;

(7) *если* $\sum_A f$ *определено и* $h\colon A \to Y$, *то*
$$\sum_A f = \sum_{y\in Y} \sum_{h^{-1}(y)} f;$$

(8) *если* $\sum_A f$ *определено и* $A = U \times V$, *то*

$$\sum_A f = \sum_{u\in U}\sum_{v\in V} f(u,v) = \sum_{v\in V}\sum_{u\in U} f(u,v);$$

(9) *если* $A = U \times V$, $f \geq 0$ *и* $h\colon U \to \mathbb{R}$, *то*

$$\sum_{(u,v)\in A} h(u)f(u,v) = \sum_{u\in U} h(u)\sum_{v\in V} f(u,v),$$

причем здесь используется соглашение $0 \cdot \infty = 0$*;*

(10) *если* $\sum_A f \in \mathbb{R}$, *то множество* $\{f_A \neq 0\}$ *счетно*;

(11) *если* $\sum_A f$ *определено, то для каждой последовательности* $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset A$ *такой, что* $A = \cup B_i$, *определены все* $\sum_{B_n} f$ *и выполняется* $\sum_{B_n} f \to \sum_A f$.

Доказательство. (1) Пусть $\sum_A f \in \mathbb{R}$, тогда $\sum_A f^+ < \infty$ и $\sum_A f^- < \infty$, откуда $\sum_A |f| = \sum_A f^+ + \sum_A f^- < \infty$. Обратно, так как $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$, условие $\sum_A |f| < \infty$ влечет $0 \leq \sum_A f^+ < \infty$ и $0 \leq \sum_A f^- < \infty$, откуда $\sum_A f = \sum_A f^+ - \sum_A f^- \in \mathbb{R}$.

(2) Предположим сначала, что $\sum_A f$ определено. Тогда, по 5.4 (1), $\sum_A (c\,f)^{\pm} = |c| \sum_A f^{\pm \operatorname{sign} c}$, поэтому

$$\sum_A (c\,f) = \sum_A (c\,f)^+ - \sum_A (c\,f)^- = |c| \sum_A f^{\operatorname{sign} c} - |c| \sum_A f^{-\operatorname{sign} c} = c \sum_A f,$$

так что доказываемое равенство имеет место.

Если же $\sum_A f$ не определено, то $\sum_A f^+ = \sum_A f^- = \infty$ и $c\sum_A f$ также не определено. Так как $0 \neq c \in \mathbb{R}$, то $\sum_A (c\,f)^+ = \sum_A (c\,f)^- = \infty$, так что $\sum_A (c\,f)$ также не определено.

(3) Предположим, что $\sum_A f$ и, значит, $c\sum_A f$, не определены. Но $c\,f = 0 \cdot f = 0$, поэтому $\sum_A (c\,f) = 0$.

(4) В этом случае обе суммы $\sum_A f$ и $\sum_A g$ определены, причем или одна из них конечна, или обе имеют один и тот же знак. Таким образом, не существует $a \in A$, для которого $f(a)$ и $g(a)$ бесконечны и имеют разные знаки. По 5.4 (2), функция $f+g$ определена и выполняется $f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+$. Так как слева и справа все входящие функции неотрицательны, имеем

$$\sum_A f^+ + \sum_A g^+ + \sum_A (f+g)^- = \sum_A f^- + \sum_A g^- + \sum_A (f+g)^+.$$

Из сказанного выше вытекает, что одновременно конечными являются или $\sum_A f^+$ и $\sum_A g^+$, или $\sum_A f^-$ и $\sum_A g^-$. Пусть, для определенности, $\sum_A f^+$ и $\sum_A g^+$ конечны. По 5.4 (2), имеем $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$, поэтому $\sum_A (f+g)^+$ также конечна. Последнее позволяет в приведенном выше равенстве перенести $\sum_A f^+$ и $\sum_A g^+$ направо, а $\sum_A (f+g)^+$ — налево и, тем самым, получить требуемое.

(5) Пусть, для определенности, выполняется первая возможность, т.е. $-\infty < \sum_A f$. Тогда, в силу $g|_A - f|_A \geq 0$, равенство $g = f + (g-f)$ определено на A. Кроме того, определена сумма $\sum_A (g-f) \geq 0$, поэтому по пункту (4) имеем

$$\sum_A g = \sum_A \bigl[f + (g-f)\bigr] = \sum_A f + \sum_A (g-f) \geq \sum_A f.$$

Второй случай разбирается аналогично.

(6) Пусть $X = A = \mathbb{Z}$, $f(z) = z$ при каждом $z \in \mathbb{Z}$, и $g = f^+$. Тогда $f|_A \leq g|_A$, но неравенство для сумм не имеет места, так как $\sum_A f$ не определена.

(7) Так как $\sum_A f$ определено, одна из величин $\sum_A f^{\pm}$ конечна. Пусть, для определенности, конечна $\sum_A f^-$. Легко видеть, что

$$\sum_{y\in Y}\sum_{h^{-1}(y)} f = \sum_{y\in Y}\sum_{h^{-1}(y)} f^+ - \sum_{y\in Y}\sum_{h^{-1}(y)} f^-,$$

поэтому достаточно показать справедливость равенств для f^+ и f^-. Но для функция одного знака это равенство очевидно.

(8) В пункте (7) положим $h = \pi_U\colon U \times V \to U$, где $\pi_U\colon (u,v) \mapsto u$. Тогда

$$\sum_A f = \sum_{u\in U}\sum_{v\in \pi_U^{-1}(u)} f(u,v) = \sum_{u\in U}\sum_{(u,v)\in \pi_U^{-1}(u)} f(u,v) = \sum_{u\in U}\sum_{v\in V} f(u,v).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

(9) В силу сделанного соглашения, функция $h(u)f(u,v)$ определена при всех u и v. Воспользуемся пунктом (8). Применив его к $\big(h(u)f(u,v)\big)^+ = h^+(u)f(u,v)$, получим

$$a := \sum_{(u,v)\in U\times V} h^+(u)f(u,v) = \sum_{u\in U}\sum_{v\in V} h^+(u)f(u,v) = \sum_{u\in U} h^+(u)\sum_{v\in V} f(u,v).$$

Аналогично,

$$b := \sum_{(u,v)\in U\times V} \big(-h^-(u)\big)f(u,v) = \sum_{u\in U}\big(-h^-(u)\big)\sum_{v\in V} f(u,v).$$

Пусть сначала $a+b$ определено. Тогда, по пункту (4), определены

$$h^+(u)f(u,v) - h^-(u)f(u,v) = h(u)f(u,v)$$

и

$$h^+(u)\sum_{v\in V} f(u,v) - h^-(u)\sum_{v\in V} f(u,v) = h(u)\sum_{v\in V} f(u,v),$$

а также имеют место следующие равенства

$$\sum_{(u,v)\in U\times V} h(u)f(u,v) = \sum_{(u,v)\in U\times V}\big(h^+(u)f(u,v) - h^-(u)f(u,v)\big) =$$
$$= \sum_{(u,v)\in U\times V} h^+(u)f(u,v) - \sum_{(u,v)\in U\times V} h^-(u)f(u,v) = \sum_{u\in U} h^+(u)\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in U} h^-(u)\sum_{v\in V} f(u,v),$$

и поэтому

$$\sum_{(u,v)\in U\times V} h(u)f(u,v) = \sum_{u\in U}\left(h^+(u)\sum_{v\in V} f(u,v) - h^-(u)\sum_{v\in V} f(u,v)\right) = \sum_{u\in U} h(u)\sum_{v\in V} f(u,v).$$

Остается рассмотреть случай, когда $a+b$ неопределено, что может быть только при $a=\infty$ и $b=-\infty$.

(10) По пункту (1), $\sum_A |f| \in \mathbb{R}$, поэтому будем сразу предполагать, что $f \geq 0$. Заметим, что в этом случае

$$\{f|_A \neq 0\} = \{f|_A > 0\} = \{f|_A > 1\} \sqcup \Big(\sqcup_{i=1}^\infty \big\{1/(i+1) < f|_A \leq 1/i\big\}\Big).$$

Ясно, что если хотя бы одно из множеств дизъюнктного объединения, стоящего в правой части предыдущего равенства, бесконечно, то $\sum_A f = \infty$. Но если все эти множества конечны, то их объединение, а, значит, и множество точек, в которых $f|_A$ принимает ненулевые значения, не более чем счетно.

(11) Если определено $\sum_A f$, то одна из сумм $\sum_A f^+$ и $\sum_A f^-$ конечна. Пусть, например, конечна $\sum_A f^+$, тогда также конечны и все $\sum_{B_n} f^+$, так что все $\sum_{B_n} f$ определены. Так как $\sum_A f = \sup\{\sum_B f : \#B < \infty\}$, и для каждого конечного $B \subset A$ существует B_n такое, что $B \subset B_n$, так что $\sum_B f^+ \leq \sum_{B_n} f^+$ и $\sum_B f^- \leq \sum_{B_n} f^-$, имеем $\sum_{B_n} f^+ \to \sum_A f^+$ и $\sum_{B_n} f^- \to \sum_A f^-$. Отсюда и из ограниченности всех $\sum_{B_n} f^+$ мгновенно вытекает требуемое. $\square$

5.3 Простые, суммируемые и интегрируемые функции

Определение 5.7. Функция f называется *простой*, если ее образ — не более чем счетное подмножество в $\mathbb{R}$ (в частности, она нигде не равна $\pm\infty$).

Замечание 5.8. В некоторых учебниках, например в [7], под простыми понимают функции с конечными множествами значений. Мы же следуем [6], [12] и [8].

Пусть на X задана произвольная внешняя мера μ.

Определение 5.9. Простую μ-измеримую функцию будем называть *μ-простой*.

Упражнение 5.10. Докажите, что множество всех μ-простых функций замкнуто относительно линейных комбинаций и произведений. Более того, если f и g — μ-простые функции и $g \neq 0$, то f/g — также μ-простая функция.

Определение 5.11. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — произвольная μ-простая функция.

(1) Неотрицательную (неположительную) μ-простую функцию f назовем *μ-суммируемой*, если сумма

$$S(f,\mu) := \sum_{y\in\mathbb{R}} y\cdot\mu\big(f^{-1}(y)\big)$$

конечна. **Если в этой сумме встречается неопределенность $0\cdot\infty$, то мы всегда будем полагать** $0\cdot\infty = 0$ (отметим, что это – типичная ситуация, когда рассматриваются функции на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем).

(2) Произвольная (не обязательно неотрицательная или неположительная) f называется *μ-суммируемой*, если обе f^+ и f^- являются μ-суммируемыми.

(3) Если хотя бы одна из f^+ и f^- является μ-суммируемой, то такая f называется *μ-интегрируемой.*

Замечание 5.12. Для μ-интегрируемой μ-простой функции корректно определена сумма

$$S(f,\mu) := \sum_{y\in\mathbb{R}} y\cdot\mu\big(f^{-1}(y)\big),$$

которая равна $S(f^+,\mu) - S(f^-,\mu)$ и может принимать значения $\pm\infty$.

Замечание 5.13. В некоторых учебниках, например в [6], термины «интегрируемые» и «суммируемые» считаются синонимами. Мы же следуем [12] и [8], где эти термины различаются.

Упражнение 5.14.

(1) Докажите, что множество всех μ-простых μ-интегрируемых функций замкнуто относительно умножения на числа, но не замкнуто относительно операции сложения.

(2) Покажите, что если f и g — произвольные μ-простые μ-интегрируемые функции, и определена сумма $z := S(f,\mu)+S(g,\mu)$, то $f+g$ также является μ-простой μ-интегрируемой функцией, причем $z = S(f+g,\mu)$.

5.4 Почти всюду

Напомним, что выше мы договорились использовать термин μ-почти, говоря про утверждения, выполняющиеся всюду, кроме множества μ-меры 0. Введем ряд обозначений.

Если на множестве X задана внешняя мера μ, то через $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} Y$ будем обозначать отображение, *заданное почти всюду на* X: область определения этого отображения — все X, за исключением множества μ-меры 0.

Далее, если f и g — функции, определенные почти всюду на X, то через $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{>} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{<} g$ будем обозначать равенство и неравенства, имеющие место также μ-почти всюду. Кроме того, если $A, B \subset X$, то включения $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ и $B \overset{\text{п.в.}}{\supset} A$ означают, что μ-почти все элементы из A содержатся в B. В частности, $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$ эквивалентно ($A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ и $B \overset{\text{п.в.}}{\supset} A$).

Упражнение 5.15. Проверьте, что стандартные соотношения, имеющие место для обычных равенств и неравенств, взятых в не более чем счетном количестве, остаются справедливыми почти всюду. Например, если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$ и $g \overset{\text{п.в.}}{\leq} f$, то $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$; если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g \overset{\text{п.в.}}{\leq} h$, то $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} h$.

5.5 Верхние и нижние функции

Пусть X — произвольное множество, на котором задана произвольная внешняя мера μ, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ — произвольная функция.

Определение 5.16. Простая интегрируемая (относительно μ) функция $u\colon X \to \mathbb{R}$ называется *верхней* (*нижней*) для f, если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} u$ (соответственно, $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} u$).

Замечание 5.17. Не всякая функция $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ имеет верхнюю или нижнюю функции. Их может не быть, например, когда f принимает значение $\pm\infty$ на множестве ненулевой меры. В случае, если f является μ-измеримой, это — единственная причина отсутствия у f верхней или нижней функции. Чтобы это увидеть, построим по μ-измеримой функции f функции

$$u = \sum_{i\in\mathbb{N}} (-i)\cdot \chi_{f^{-1}(-i,-i+1]} \quad \text{и} \quad v = \sum_{i\in\mathbb{N}} i\cdot \chi_{f^{-1}[i-1,i)}.$$

Эти функции определены на всем X, являются μ-простыми μ-интегрируемыми, а на множестве $f^{-1}(\mathbb{R})$ выполняется $u \le f \le v$. Кроме того, $u \le f$ также на $f^{-1}(\infty)$, а $f \le v$ также на $f^{-1}(-\infty)$. Отсюда вытекает, что если $\mu\big(f^{-1}(\infty)\big) = 0$, то $u \overset{\text{п.в.}}{\le} f$, т.е. u является нижней функцией для f; аналогично, если $\mu\big(f^{-1}(-\infty)\big) = 0$, то $f \overset{\text{п.в.}}{\le} v$, т.е. v является верхней функцией для f.

Приведем примеры неизмеримых функций, для первой из которой не существует ни нижней, ни верхней функций, а для второй — существуют. Пусть $X = \mathbb{Z}$ и $\mu(A) = 1$ для каждого непустого $A \subset X$. Тогда, по 3.12 (4), единственными μ-измеримыми подмножествами X являются $\emptyset$ и все X. Поэтому если функция на X принимает по крайней мере 2 значения, то эта функция не может быть измеримой: прообразы этих значений не равны ни $\emptyset$, ни X. Таким образом, μ-измеримыми являются только константы. Кроме того, так как мера каждого непустого подмножества отлична от нуля, то неравенства из определения верхних и нижних функций должны выполняться везде.

Выберем в качестве $f\colon X \to \mathbb{R}$ вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Тогда каждая верхняя (нижняя) функция для f не может быть константой, так как f неограничена. Значит, не существует μ-измеримых функций, мажорирующих (минорирующих) f.

Пусть теперь в качестве f выбрана произвольная ограниченная функция (если она — не константа, то она неизмерима). Тогда для этой функции, очевидно, есть как верхняя, так и нижняя функции — соответствующие константы.

5.6 Верхние и нижние интегралы

Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ — **произвольная функция**.

Определение 5.18. *Верхним интегралом для функции* f называется величина

$$\int^* f\,d\mu = \inf\Big\{S(u,\mu) : u \text{ — верхняя функция для } f\Big\}.$$

Аналогично определяется *нижний интеграл для функции* f:

$$\int_* f\,d\mu = \sup\Big\{S(u,\mu) : u \text{ — нижняя функция для } f\Big\}.$$

Замечание 5.19. Если функция f не имеет верхней (нижней) функции, то, в силу соглашения 5.1, верхний интеграл равен ∞ (нижний интеграл равен $-\infty$). Таким образом, как верхний, так и нижний интегралы определены **для любой** функции f, потому что в случае, когда множество верхних (нижних) функций непусто, суммы из определения верхнего (нижнего) интегралов определены в силу μ-интегрируемости этих функций.

Упражнение 5.20. Пусть $f, g\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$. Докажите, что

(1) $\int_* f\,d\mu = -\int^*(-f)\,d\mu$;

(2) если $f \overset{\text{п.в.}}{\le} g$, то $\int^* f\,d\mu \le \int^* g\,d\mu$;

(3) если $f \overset{\text{п.в.}}{\ge} 0$, то $\int^* f\,d\mu \ge 0$;

(4) если $\int^* f\,d\mu < \infty$, то $\int^* f^+\,d\mu < \infty$ и $f \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$;

(5) если $0 < c < \infty$, то $\int^*(cf)\,d\mu = c\int^* f\,d\mu$;

(6) приведите пример, показывающий, что предыдущее равенство может не иметь места при $c = 0$;

(7) если $\int^* f\,d\mu + \int^* g\,d\mu < \infty$, то функция $f + g$ определена μ-почти всюду на X и

$$\int^* (f+g)\,d\mu \le \int^* f\,d\mu + \int^* g\,d\mu;$$

(8) $\int_* f\,d\mu \le \int^* f\,d\mu$.

Упражнение 5.21. Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для нижнего интеграла.

5.7 Интеграл Лебега

Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$ — произвольная функция.

Определение 5.22. Функция f называется *μ-интегрируемой*, если

(1) f — **μ-измерима**, и

(2) $\int^* f\,d\mu = \int_* f\,d\mu$.

В этом случае вместо верхнего и нижнего интегралов пишут $\int f\,d\mu$ и называют эту величину *интегралом Лебега* или просто *интегралом функции f по мере μ*.

Определение 5.23. Функция $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$ называется *μ-суммируемой*, если она μ-интегрируема и ее интеграл Лебега конечен.

Замечание 5.24. Для μ-простых функций мы дали два определения μ-интегрируемости и μ-суммируемости. В действительности, эти понятия равносильны, но пока мы этого не доказали, то про определения 5.11 будем говорить, что они имеют место в *узком смысле*, а про определения 5.22 и 5.23 — что они имеют место в *широком смысле.*

В следующем упражнении предполагается, что на множестве X задана внешняя мера μ, а также две функции f, $g\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$.

Упражнение 5.25.

(1) μ-простая функция f является μ-интегрируемой в узком смысле слова тогда и только тогда, когда f является μ-интегрируемой в широком смысле слова; при этом $\int f\,d\mu = S(f, \mu)$.

(2) Пусть f — μ-измеримая и $f \overset{\text{п.в.}}{\ge} 0$, тогда f — μ-интегрируемая функция и $\int f\,d\mu \ge 0$. В частности, для произвольной (μ-измеримой, но не обязательно μ-почти везде неотрицательной) функции f, обе f^+ и f^- являются μ-интегрируемыми, а их интегралы Лебега неотрицательны.

(3) При $c \ne 0$ имеем $\int (cf)\,d\mu = c\int f\,d\mu$.

(4) Приведите пример, показывающий, что предыдущее равенство может не иметь места при $c = 0$.

(5) Если сумма $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu$ корректно определена, то функция $f + g$ определена μ-почти всюду на X, является μ-интегрируемой и

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

(6) Если $f \overset{\text{п.в.}}{\le} g$ и либо $\int g\,d\mu < \infty$, либо $\int f\,d\mu > -\infty$, то $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$.

(7) $\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$.

(8) Если f является μ-интегрируемой, то $\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$.

(9) Если f является μ-суммируемой, то $|f|$ также μ-суммируема и $|f| \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$, т.е. f — μ-почти всюду конечна.

(10) Если $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} 0$, то $\int f\,d\mu = 0$ тогда и только тогда, когда $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$.

В качестве иллюстрации возможного использования упражнения 5.25, докажем, что каждая измеримая функция, отличная от нуля на множестве конечной меры и почти везде ограниченная, интегрируема по Лебегу и ее интеграл конечен. Более того, мы дадим два доказательства этого факта: второе из них будет использовать исключительно определение верхних и нижних интегралов.

Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X и $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ — некоторая μ-измеримая функция.

Определение 5.26. Будем говорить, что функция f является *μ-почти везде ограниченной*, если для некоторого $0 \leq M < \infty$ выполняется $|f| \overset{\text{п.в.}}{\leq} M$ (что равносильно $f^{\pm} \overset{\text{п.в.}}{\leq} M$).

Следствие 5.27. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X , и $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ — μ-измеримая, μ-почти везде ограниченная функция, причем $\mu\big(f \neq 0\big) < \infty$. Тогда f — μ-суммируема.*

Доказательство. (1) В этом доказательстве мы будем ссылаться исключительно на пункты упражнения 5.25. По 5.25 (2), функции f^+ и f^- являются μ-интегрируемыми. Положим $A = \{f \neq 0\}$, тогда A — μ-измеримо и $\mu(A) < \infty$. Так как f — μ-почти везде ограничена, существует такое $0 \leq M < \infty$, что $|f| \overset{\text{п.в.}}{\leq} M$ и, значит, $f^{\pm} \overset{\text{п.в.}}{\leq} M$. Из сказанного вытекает, что $f^{\pm} \overset{\text{п.в.}}{\leq} u := M\chi_A$, и так как u — неотрицательная μ-простая μ-измеримая, и, значит, μ-интегрируемая функция, то u — верхняя функция для $f^{\pm}$. По 5.25 (1), $\int u\,d\mu = S(u,\mu) = M\,\mu(A) < \infty$, откуда, применяя 5.25 (6), заключаем, что $\int f^{\pm}\,d\mu \leq \int u\,d\mu < \infty$. Осталось применить 5.25 (7).

(2) Докажем теперь это же факт только через определение верхних и нижних интегралов. Пусть $0 \leq M < \infty$ таково, что $|f| \overset{\text{п.в.}}{<} M$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$u_n = \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{i-1}{n}\,M \cdot \chi_{f^{-1}(\frac{i-1}{n}\,M,\frac{i}{n}\,M]},$$
$$v_n = \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{i}{n}\,M \cdot \chi_{f^{-1}(\frac{i-1}{n}\,M,\frac{i}{n}\,M]}.$$

Ясно, что u_n и v_n — μ-измеримы, $\big|S(u_n,\mu)\big| \leq M\mu(f \neq 0) < \infty$, $\big|S(v_n,\mu)\big| \leq M\mu(f \neq 0) < \infty$, а также, что $u_n \overset{\text{п.в.}}{\leq} f \overset{\text{п.в.}}{\leq} v_n$, так что u_n и v_n — нижняя и верхняя функции для f, интегралы от которых конечны. С другой стороны, $S(v_n,\mu) - S(u_n,\mu) = (M/n)\,\mu(f \neq 0) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\int_* f\,d\mu = \int^* f\,d\mu \leq M\,\mu(f \neq 0) < \infty$, так что функция f — μ-суммируема. $\square$

Упражнение 5.28. Покажите, что

(1) для μ-измеримого $A \subset X$ функция χ_A является μ-интегрируемой и $\int \chi_A\,d\mu = \mu(A)$;

(2) для произвольного $A \subset X$ имеем $\int_* \chi_A\,d\mu \leq \mu(A) \leq \int^* \chi_A\,d\mu$;

(3) для произвольного $A \subset X$ и регулярной меры μ имеем $\int^* \chi_A\,d\mu = \mu(A)$.

Упражнение 5.29. Пусть μ — одна из следующих внешних мер на множестве X:

(1) $\mu(A) = 1$ для любого непустого множества $A \subset X$;

(2) μ — считающая мера, т.е. $\mu(A) = \#A$ для конечного множества $A \subset X$, и $\mu(A) = \infty$ для бесконечного $A \subset X$;

(3) μ — дельта мера Дирака, т.е. для некоторого $a \in X$ и произвольного $A \subset X$ имеем $\mu(A) = 1$ в точности тогда, когда $a \in A$, а для все остальных множеств их мера равна 0.

Выясните, как устроены $\sigma(\mu)$, μ-измеримые функции, μ-простые, μ-простые μ-интегрируемые функции, μ-простые μ-суммируемые функции; какие функции имеют верхние, какие — нижние функции, чему равны верхние и нижние интегралы от функций, какие функции являются μ-интегрируемыми, какие — μ-суммируемыми и чему равны их интегралы Лебега.

5.8 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 5.30 (Фату). *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольной последовательности μ-измеримых функций $f_i\colon X \overset{n.в.}{\to} [0,\infty]$, $i \in \mathbb{N}$, выполняется*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu.$$

Доказательство. Объединение всех множеств, на которых не определены рассматриваемые функции, снова имеет μ-меру ноль. Изменим функции на этом множестве, положив их равными нулю. Тогда теорема для исходных функций верна или нет одновременно с теоремой для измененных функций.

По упражнению 4.7, функция $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ является μ-измеримой. По 5.25 (2), все функции f_i и функция f — μ-интегрируемы, поэтому достаточно проверить, что

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq \int_* f\, d\mu = \sup\{S(u,\mu) : u \text{ — нижняя для } f\}.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно проверить, что для каждой нижней для f функции u выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq S(u,\mu).$$

Более того, так как $f \geq 0$, можно ограничиться неотрицательными функциями u, что мы и будем делать. По определению, каждая такая u имеет вид $u = \sum_{i\in I} a_i\, \chi_{A_i}$, где I — не более чем счетное множество, все a_i положительны, а $\{A_i\}$ — дизъюнктное семейство μ-измеримых подмножеств X. Так как $u \geq 0$, то

$$S(u,\mu) = \sup\Big\{S\Big(\sum_{i\in B\subset I} a_i\, \chi_{A_i},\, \mu\Big) : \#B < \infty\Big\},$$

поэтому последнее неравенство достаточно проверить для функций u, принимающих лишь конечное число значений. Итак, остается проверить следующее утверждение: для каждой функции $u = \sum_{i=1}^m a_i\, \chi_{A_i}$ такой, что все a_i положительны, $\{A_i\}$ — дизъюнктное семейство μ-измеримых множеств, и $u \overset{\text{п.в.}}{\leq} f$, выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq S(u,\mu) = \sum_{i=1}^m a_i\, \mu(A_i).$$

Для произвольного $0 < t < 1$ положим

$$B_{i,n} = \{x \in A_i : f_k(x) > t\, a_i \text{ для всех } k \geq n\},$$

тогда $B_{i,1} \subset B_{i,2} \subset \cdots \subset A_i$. Более того, $A_i = \cup_{n=1}^\infty B_{i,n}$. Действительно, пусть $x \in A_i$, тогда $f(x) \geq a_i > t\, a_i$, и так как $f = \liminf_{k\to\infty} f_k$, существует n такое, что для любого $k \geq n$ выполняется $f_k(x) > t\, a_i$, так что $x \in B_{i,n}$.

Покажем теперь, что $f_n \geq \sum_{i=1}^m t\, a_i\, \chi_{B_{i,n}}$. Действительно, если $x \in B_{i,n}$, то неравенство превращается в $f_n(x) \geq t\, a_i$, что верно по определению $B_{i,n}$. Если же $x \notin B_{i,n}$ ни при каком i, то неравенство имеет вид $f_n(x) \geq 0$, что верно по определению f_n.

Из доказанного неравенства, а также 5.25 (6) и 5.25 (1) вытекает, что

$$\int f_n\, d\mu \geq \sum_{i=1}^m t\, a_i\, \mu(B_{i,n}).$$

С другой стороны, при каждом фиксированном i возрастающая последовательность $B_{i,1} \subset B_{i,2} \subset \cdots$ состоит из μ-измеримых множеств, и $A_i = \cup_{n=1}^\infty B_{i,n}$, поэтому $\mu(B_{i,n}) \to \mu(A_i)$ при $n \to \infty$, откуда $\sum_{i=1}^m a_i\, \mu(B_{i,n}) \to \sum_{i=1}^m a_i\, \mu(A_i)$ и, значит,

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq t \sum_{i=1}^m a_i\, \mu(A_i) = t\, S(u,\mu).$$

Наконец, так как t произвольно, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq S(u,\mu)$, что и требовалось. $\square$

Теорема 5.31 (Лебег, о монотонной сходимости)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольной последовательности μ-измеримых функций $f_i\colon X \overset{п.в.}{\to} [0,\infty]$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $f_1 \overset{п.в.}{\le} f_2 \overset{п.в.}{\le} \cdots$, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Доказательство. Объединение всех множеств, на которых или не определены рассматриваемые функции, или не выполняются неравенства, снова имеет μ-меру ноль. Изменим функции на этом множестве, положив их равными нулю. Тогда теорема для исходных функций верна или нет одновременно с теоремой для измененных функций, причем в последнем случае все неравенства выполнены на всем X.

Так как все f_n неотрицательны, то все они μ-интегрируемы, и их интегралы также неотрицательны в силу 5.25 (2). Так как все f_n являются μ-измеримыми, а при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполняется $0 \le \int f_n \, d\mu$ и $f_n \le f_{n+1}$, то $\int f_n \, d\mu \le \int f_{n+1} \, d\mu$ по 5.25 (5). Отсюда вытекает, что существуют пределы $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ и $\lim_{n\to\infty} f_n$, причем последний представляет собой μ-измеримую (неотрицательную) функцию в силу 4.7. Более того, так как $f_n \le \lim_{n\to\infty} f_n$ при всех n, то, в силу μ-измеримости f_n и $\lim_{n\to\infty} f_n$, а также $0 \le \int f_n \, d\mu$, снова в силу 5.25 (5) имеем $\int f_n \, d\mu \le \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$. Тем самым, мы показали, что $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \le \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$.

Обратное неравенство вытекает из теоремы 5.30. □

Следствие 5.32. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольного счетного семейства K и множества $\left\{f_k\colon X \overset{п.в.}{\to} [0,\infty]\right\}_{k\in K}$, состоящего из μ-измеримых функций, выполняется*

$$\sum_{k\in K} \int f_k \, d\mu = \int \sum_{k\in K} f_k \, d\mu.$$

Доказательство. Начнем с переопределения всех функций, как это сделано в начале доказательства теоремы 5.30. Затем перенумеруем как-нибудь функции f_k натуральными числами и положим $g_n = f_1 + \cdots + f_n$. Тогда g_n — последовательность неотрицательных μ-измеримых функций, причем $g_1 \le g_2 \le \cdots$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu,$$

где второе равенство вытекает из неотрицательности всех $\int f_k \, d\mu$ и 5.25 (5), а четвертое равенство — из теоремы 5.31. □

Следствие 5.33 (теорема Б. Леви)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для любой последовательности μ-измеримых функций $f_i\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $f_1 \overset{п.в.}{\le} f_2 \overset{п.в.}{\le} \cdots$ и $\int f_1 \, d\mu > -\infty$, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Доказательство. Начнем с переопределения всех функций, как это сделано в начале доказательства теоремы 5.31. Так как последовательность f_n монотонна, существует предельная функция $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, которая, по упражнению 4.7, является μ-измеримой. Так как $f \ge f_1$, $f_n \ge f_1$ и $\int f_1 \, d\mu > -\infty$, то, по 5.25 (6), функция f и все функции f_n — μ-интегрируемы, а также $\int f \, d\mu \ge \int f_1 \, d\mu$ и $\int f_n \, d\mu \ge \int f_1 \, d\mu$. Так как последовательность f_n не убывает и $\int f_n \, d\mu > -\infty$ для всех n, то, по 5.25 (6), последовательность $\int f_n \, d\mu$ тоже не убывает, поэтому существует $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Пусть сначала $\int f_1 \, d\mu = \infty$, тогда $\int f \, d\mu = \int f_n \, d\mu = \infty$ и $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \infty$.

Пусть теперь $\int f_1 \, d\mu < \infty$, тогда f_1 — μ-суммируема. По 5.25 (9), функция f_1 — μ-почти всюду ограничена. Вновь, не ограничивая общности, переопределим нулем все функции f_n на множестве (μ-меры ноль), где функция f_1 бесконечна. Теперь можно считать, что f_1 ограничена всюду, поэтому определены функции $g_n = f_n - f_1$. Эти функции удовлетворяют теореме 5.31, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n - f_1) \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} (f_n - f_1) \, d\mu.$$

Так как f и все f_n — μ-интегрируемы, а интеграл $\int f_1 \, d\mu$ конечен, то $\int (f_n - f_1) \, d\mu = \int f_n \, d\mu - \int f_1 \, d\mu$ и $\int (f - f_1) \, d\mu = \int f \, d\mu - \int f_1 \, d\mu$ по 5.25 (3) и 5.25 (5). Таким образом, из вышесказанного получаем следующую цепочку равенств:

$$-\int f_1\,d\mu+\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int(f_n-f_1)\,d\mu=\int\lim_{n\to\infty}(f_n-f_1)\,d\mu=-\int f_1\,d\mu+\int\lim_{n\to\infty}f_n\,d\mu,$$

откуда мгновенно получает требуемое. □

Замечание 5.34. Имеется естественный аналог теоремы Б. Леви для монотонно убывающей последовательности функций (сформулируйте и докажите).

Приводимое ниже следствие показывает, что при определении интеграла Лебега для функций f, у которых конечен верхний (или нижний) интеграл, можно не требовать измеримости f, потому что измеримость будет автоматически вытекать из совпадения верхнего и нижнего интегралов.

Следствие 5.35. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $f\colon X\to[-\infty,\infty]$ — произвольная функция. Предположим, что $-\infty<\int_* f\,d\mu=\int^* f\,d\mu<\infty$. Тогда f — μ-измерима.*

Доказательство. Так как нижние и верхние интегралы конечны, множества нижних и верхних функций для f непусты. Пусть u_n и v_n — последовательности нижних и верхних функций для f соответственно, причем такие, что

$$\sup S(u_n,\mu)=\int_* f\,d\mu,\qquad\text{и}\qquad\inf S(v_n,\mu)=\int^* f\,d\mu.$$

Тогда, начиная с некоторого n, все $S(u_n,\mu)$ и $S(v_n,\mu)$ конечны. Без ограничения общности, будем сразу предполагать, что это имеет место для $n=1$. Далее, положим $u_n'=\max\{u_1,\dots,u_n\}$ и $v_n'=\min\{v_1,\dots,v_n\}$. Тогда каждая функция u_n' и v_n' — μ-измерима по упражнению 4.6, принимает не более чем счетное число значений, причем все эти значения конечны, поэтому u_n' и v_n' являются μ-простыми; кроме того,

$$u_1=u_1'\le u_2'\le\dots\le f\le\dots\le v_2'\le v_1'=v_1,$$

следовательно, по 5.25 (6),

$$-\infty<\int u_1\,d\mu=\int u_1'\,d\mu\le\int u_2'\,d\mu\le\dots\le\int v_2'\,d\mu\le\int v_1'\,d\mu=\int v_1\,d\mu<\infty,$$

в частности, все u_n' и v_n' — μ-интегрируемы (и даже μ-суммируемы), поэтому они являются соответственно нижними и верхними функциями для f, откуда

$$\int u_n'\,d\mu\le\int_* f\,d\mu=\int^* f\,d\mu\le\int v_n'\,d\mu.$$

По следствию 5.33, $\lim_{n\to\infty}\int u_n'\,d\mu=\int\lim_{n\to\infty}u_n'\,d\mu$, в частности, функция $u=\lim_{n\to\infty}u_n'$ является μ-измеримой. Так как $u_n'\overset{\text{п.в.}}{\le}f$ при всех n, то $u\overset{\text{п.в.}}{\le}f$ и $\int u\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int u_n'\,d\mu\le\int_* f\,d\mu$. Аналогично, определена функция $v=\lim_{n\to\infty}v_n'$, причем для нее $f\overset{\text{п.в.}}{\le}v$ и $\int v\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int v_n'\,d\mu\ge\int^* f\,d\mu$.

Заметим наконец, что при каждом n выполняется $u_n\le u_n'$ и $v_n'\le v_n$, откуда, снова по 5.25 (6), $\int u_n\,d\mu\le\int u_n'\,d\mu$ и $\int v_n'\,d\mu\le\int v_n\,d\mu$, поэтому, так как $\int_* f\,d\mu=\sup_n\int u_n$ и $\int^* f\,d\mu=\inf_n\int v_n$, получаем:

$$\int u\,d\mu=\int_* f\,d\mu=\int^* f\,d\mu=\int v\,d\mu.$$

Так как эти интегралы конечны, из 5.25 (5) вытекает, что $\int(v-u)\,d\mu=0$. Так как $u\overset{\text{п.в.}}{\le}f\overset{\text{п.в.}}{\le}v$, то $v-u\overset{\text{п.в.}}{\ge}0$ и применимо 5.25 (10), в соответствии с которым $v-u\overset{\text{п.в.}}{=}0$, т.е. $u\overset{\text{п.в.}}{=}v$. Но тогда $f\overset{\text{п.в.}}{=}u$ и, значит, f — μ-измерима. □

Замечание 5.36. В следствии 5.35 нельзя отказаться от условия конечности интегралов. Действительно, пусть $X=\mathbb{R}$, μ — лебегово продолжение меры Лебега (также являющееся инвариантной мерой), $f\colon X\to[-\infty,\infty]$ — функция, определенная так: $f(x)=0$ при $x\le1$, и $f(x)=x$ при $x>1$. Определим функцию $u\colon X\to\mathbb{R}$, положив функция $u(x)=f(x)$ при $x\le1$, и $u(x)=n$ при $x\in(n,n+1]$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Тогда u является нижней для f и $S(u,\mu)=\infty$. Пусть $A\subset[0,1]$ — пример Витали μ-неизмеримого множества, описанный в разделе 2.5. Определим функцию $g\colon X\to[-\infty,\infty]$, положив ее равной f вне отрезка $[0,1]$, и равной χ_A на $[0,1]$. Тогда $g^{-1}(1)=A$, так что g не является μ-измеримой. С другой стороны, описанная выше функция u является нижней для g, откуда $\int_* g\,d\mu=\infty$, поэтому $\int^* g\,d\mu=\infty$ и, значит, g является μ-интегрируемой.

Следствие 5.37. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $f\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$ — любая неизмеримая функция. Предположим, что верхний или нижний интеграл для f конечны. Тогда эти интегралы различны. В частности, у характеристической функции неизмеримого множества конечной меры верхний и нижний интегралы различны.*

Пример 5.38. Пусть $\mu(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $A \neq \emptyset$. По 3.12 (4), $\sigma(\mu) = \{\emptyset, X\}$, поэтому если X состоит не менее чем из трех точек, то каждое $A = \{a,b\} \subset X$ — μ-неизмеримо, так что μ-неизмерима и его характеристическая функция χ_A. Из упражнения 5.29 (1) вытекает, что μ-измеримые функции — это, в точности, константы, причем верхними и нижними функциями могут быть только конечные константы. Следовательно, каждая нижняя для f функция u удовлетворяет $u \le 0$, а для каждой верхней функции v выполняется $v \ge 1$, поэтому $\int^* f\,d\mu = \sup S(u,\mu) \le 0$ и $\int_* f\,d\mu = \inf S(v,\mu) \ge 1$, в частности, эти интегралы различны.

Пример 5.39. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\mu = (\mathcal{L}^1)^*$ — продолжение Лебега меры Лебега $\mathcal{L}^1$ до внешней меры (инвариантной относительно сдвигов), см. определение 3.6. Пусть A — неизмеримое множество, описанное в разделе 2.5. Тогда, по следствию 5.37, верхние и нижние интегралы для χ_A различны.

Теорема 5.40 (Лебег, о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Пусть также даны μ-суммируемая функция $h\colon X \overset{п.в.}{\to} [0,\infty]$ и последовательность μ-измеримых функций $f_n\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $|f_n| \overset{п.в.}{\le} h$ и $f_n \overset{п.в.}{\to} g$ для некоторой функции $g\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$. Тогда функция g является μ-измеримой и*

$$\int |f_n - g|\,d\mu \to 0, \quad \textit{поэтому} \quad \int f_n\,d\mu \to \int g\,d\mu.$$

Доказательство. По упражнению 4.7, функция g является μ-измеримой. По 5.20 (4), функция h конечна μ-почти везде, поэтому также μ-почти везде конечны функции f_n. Следовательно, функция $h_n := 2h - |f_n - g|$ также определена μ-почти везде. Так как $|f_n| \overset{п.в.}{\le} h$ и $f_n \overset{п.в.}{\to} g$, имеем также $|g| \overset{п.в.}{\le} h$, поэтому $h_n \overset{п.в.}{\ge} 0$ при всех n. Кроме того, они, по упражнению 4.6, являются μ-измеримыми. Так как $f_n \overset{п.в.}{\to} g$, то $h_n \overset{п.в.}{\to} 2h$. По теореме Фату, см. 5.30, имеем

$$0 \ge \int 2h\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int \bigl(2h - |f_n - g|\bigr)\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - g| \ge \limsup_{n\to\infty} \left| \int f_n\,d\mu - \int g\,d\mu \right|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что функции f_n и g являются μ-суммируемыми, так как они мажорируются μ-суммируемой функцией h. □

5.9 Произведение мер и теорема Фубини

Пусть μ и ν — внешние меры на множествах X и Y соответственно. Определим функцию $\mu\times\nu\colon 2^{X\times Y} \to [0,+\infty]$ следующим образом (**здесь мы предполагаем, что** $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$):

$$(\mu\times\nu)(S) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\cdot\nu(B_j) \mid A_j \in \sigma(\mu),\ B_j \in \sigma(\nu),\ S \subset \bigcup_j A_j \times B_j \right\}.$$

Из упражнения 3.8 вытекает, что $\mu\times\nu$ является внешней мерой.

Определение 5.41. Внешняя мера $\mu\times\nu$ называется *прямым произведением внешних мер μ и ν.*

Ниже нам понадобятся еще несколько понятий.

Определение 5.42. Пусть μ — внешняя мера на множестве X. Подмножество $A \subset X$ называется *счетно μ-измеримым*, если $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in \sigma(\mu)$ и $\mu(A_i) < \infty$ при каждом i. Функция $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ называется *счетно μ-измеримой*, если она μ-измерима, а множество $\{f \neq 0\}$ — счетно μ-измеримо.

Обозначение 5.43. Если $S \subset X\times Y$ и $(x,y) \in X\times\ Y$, то положим $S_x = \{y : (x,y) \in S\}$, $S_y = \{x : (x,y) \in S\}$ и будем называть их *сечениями* множества S. Отметим, что сечения S_x и S_y могут быть пусты.

Обозначение 5.44. Пусть μ — внешняя мера на множестве X. Если для каждого $x \in X$ задано подмножество $A_x \subset Y$, и $\mathcal{C}$ — некоторое семейство подмножеств Y, то $A_x \overset{\text{п.в.}}{\in} \mathcal{C}$ обозначает, что A_x является элементом семейства $\mathcal{C}$ для почти всех $x \in X$.

Теорема 5.45 (Фубини)**.** *Пусть μ и ν — внешние меры на X и Y соответственно. Тогда*

(1) *если $A \in \sigma(\mu)$ и $B \in \sigma(\nu)$, то $A \times B \in \sigma(\mu \times \nu)$ и $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$;*

(2) *внешняя мера $\mu \times \nu$ регулярна;*

(3) *для каждого счетно $(\mu \times \nu)$-измеримого $S \subset X \times Y$ имеем $S_x \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\nu)$, $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и*

$$(\mu \times \nu)(S) = \int \nu(S_x)\, d\mu = \int \mu(S_y)\, d\nu\,;$$

(4) *если $f\colon X \times Y \to [-\infty, \infty]$ является счетно $(\mu \times \nu)$-измеримой и $(\mu \times \nu)$-интегрируемой (в частности, если функция $(\mu \times \nu)$-суммируема), то*

$$\int f\, d(\mu \times \nu) = \int \int f\, d\mu\, d\nu = \int \int f\, d\nu\, d\mu.$$

Замечание 5.46. В пункте (4) утверждается, в частности, что $(\mu \times \nu)$-суммируемость влечет счетную $(\mu \times \nu)$-измеримость. Покажем это. Пусть f является $(\mu \times \nu)$-суммируемой. По теореме 4.10, имеем

$$f^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \qquad \text{и} \qquad f^- = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{B_k},$$

где все A_k и B_k являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми. Из суммируемости функции f и 5.25 (7) вытекает, что оба интеграла $\int f^+\, d(\mu \times \nu)$ и $\int f^-\, d(\mu \times \nu)$ конечны. По 5.32 и 5.25 (1), имеем

$$\int f^+\, d(\mu \times \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\mu \times \nu)(A_k) < \infty$$

и

$$\int f^-\, d(\mu \times \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\mu \times \nu)(B_k) < \infty,$$

откуда при всех k получаем $(\mu \times \nu)(A_k) < \infty$ и $(\mu \times \nu)(B_k) < \infty$. Осталось заметить, что $\{f \neq 0\} \subset (\cup A_k) \cup (\cup B_k)$.

Доказательство теоремы 5.45. Рассмотрим семейство $F \subset 2^{X \times Y}$, состоящее из всех множеств S, для которых выполняется следующее *условие повторной интегрируемости*: определен «повторный интеграл»

$$\rho(S) := \int \left(\int \chi_S\, d\mu \right) d\nu.$$

Опишем необходимое и достаточно условие существования $\rho(S)$. Раз «внешний» интеграл существует, значит, его подынтегральная функция должна быть определена почти всюду и быть ν-измеримой. Таким образом, «внутренний интеграл» определен ν-почти всегда. Однако при каждом y в нем интегрируется χ_{S_y}, поэтому подынтегральная функция неотрицательна и, значит, существование интеграла равносильно ее μ-измеримости, см. 5.25 (2). Так как «внутренний интеграл» неотрицателен, то, по тем же соображениям, его ν-интегрируемость равносильна его ν-измеримости. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Лемма 5.47. *Величина $\rho(S)$ определена тогда и только тогда, когда*

(1) *$S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$, т.е. сечение S_y является ν-почти всегда μ-измеримым, и*

(2) *функция $g(y) = \mu(S_y)$ — ν-измерима.*

Более того, если $\rho(S)$ определено, то $\rho(S) = \int \mu(S_y)\, d\nu$.

Лемма 5.48. *Для любых $A \in \sigma(\mu)$ и $B \in \sigma(\nu)$ множество $S = A \times B$ принадлежит F и $\rho(S) = \mu(A)\nu(B)$.*

Доказательство. В данном случае,

$$S_y = \begin{cases} A & \text{при } y \in B, \\ \emptyset & \text{при } y \notin B, \end{cases}$$

поэтому $S_y \in \sigma(\mu)$ при всех y. Далее,

$$g(y) = \mu(S_y) = \begin{cases} \mu(A) & \text{при } y \in B, \\ 0 & \text{при } y \notin B, \end{cases}$$

то есть $g(y) = \mu(S_y) = \mu(A)\chi_B(y)$, поэтому функция g является ν-измеримой в силу того, что $B \in \sigma(\nu)$. Осталось применить лемму 5.47. $\square$

Лемма 5.49. *Пусть $S^1, S^2, \ldots$ — непересекающиеся элементы семейства F, и $S = \sqcup_{i=1}^{\infty} S^i$. Тогда $S \in F$ и $\rho(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(S^i)$.*

Доказательство. Так как при каждом i выражение $\rho(S^i)$ определено, то, по лемме 5.47, имеем $S_y^i \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и все $g^i(y) = \mu(S_y^i)$ — ν-измеримые функции. Так как S^i не пересекаются, при каждом $y \in Y$ выполняется $S_y = \sqcup_{i=1}^{\infty} S_y^i$, поэтому $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$. Более того, для каждого $y \in Y$, при котором все S_y^i являются μ-измеримыми, имеем $g(y) = \mu(S_y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_y^i)$ в силу 3.18 (4), поэтому $g \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} g^i$ и, значит, g — также ν-измерима в силу упражнений 4.6 и 4.7. Тем самым, по лемме 5.47, имеем $S \in F$. Оставшаяся часть леммы вытекает из следствия 5.32, примененного к функциям g и g^i. $\square$

Лемма 5.50. *Пусть дана последовательность $S^1, S^2, \dots \in F$ такая, что $S^1 \supset S^2 \supset \cdots$, и $S = \cap_{i=1}^{\infty} S^i$. Предположим, что $\rho(S^1) < \infty$. Тогда $S \in F$ и $\lim_{i\to\infty} \rho(S^i) = \rho(S)$.*

Доказательство. По лемме 5.47, имеем $S_y^i \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$. Кроме того, $S_y = \cap_{i=1}^{\infty} S_y^i$ и $\rho(S^1) = \int \mu(S_y^1)\, d\nu < \infty$, откуда $\mu(S_y^1) \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$ по 5.25 (9), поэтому применимо 3.18 (6), в соответствии с которым $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $g(y) = \mu(S_y) = \lim_{i\to\infty} \mu(S_y^i)$ при ν-почти всех $y \in Y$. Тем самым, $g \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{i\to\infty} g^i$, где $g^i(y) = \mu(S_y^i)$, поэтому g является ν-измеримой в силу 4.7. По лемме 5.47, имеем $S \in F$. Для завершения доказательства осталось заметить, что g^1 является по условию ν-суммируемой и $|g^i| \le g^1$, поэтому, в силу теоремы 5.40, имеем $\lim_{i\to\infty} \rho(S^i) = \rho(S)$. $\square$

Рассмотрим следующие семейства подмножеств в $X \times Y$:

$$\mathcal{P}_0 = \bigl\{A \times B : A \in \sigma(\mu),\, B \in \sigma(\nu)\bigr\};$$

$$\mathcal{P}_1 = \bigl\{\cup G : G \subset \mathcal{P}_0,\, G \text{ не более чем счетно}\bigr\};$$

$$\mathcal{P}_2 = \bigl\{\cap H : \emptyset \ne H \subset \mathcal{P}_1,\, H \text{ не более чем счетно}\bigr\}.$$

По лемме 5.48, имеем $\mathcal{P}_0 \subset F$. Далее, если $A \times B,\, C \times D \in \mathcal{P}_0$, то

$$\begin{aligned} &(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{P}_0 \\ &(A \times B) \setminus (C \times D) = \bigl[(A \setminus C) \times (B \cap D)\bigr] \sqcup \\ &\qquad \sqcup \bigl[(A \setminus C) \times (B \setminus D)\bigr] \sqcup \bigl[(A \cap C) \times (B \setminus D)\bigr] \in \mathcal{P}_1, \\ &(A \times B) \cup (C \times D) = \bigl[(A \times B) \setminus (C \times D)\bigr] \sqcup \\ &\qquad \sqcup \bigl[(A \times B) \cap (C \times D)\bigr] \sqcup \bigl[(C \times D) \setminus (A \times B)\bigr] \in \mathcal{P}_1. \end{aligned}$$

Лемма 5.51. *Пусть $A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n \in \mathcal{P}_0$, тогда множество $\cup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)$ равно объединению некоторого конечного дизъюнктного подсемейства в $\mathcal{P}_0$.*

Доказательство. Применим индукцию по n. Случай $n = 1$ тривиален. Предположим, что $\cup_{i=1}^{n-1}(A_i \times B_i) = \sqcup_{j=1}^{m}(C_j \times D_j)$ для некоторых $C_j \times D_j \in \mathcal{P}_0$. Тогда, в силу сказанного выше, каждое множество $(C_j \times D_j)$ разбивается на $(C_j \times D_j) \cap (A_n \times B_n) \in \mathcal{P}_0$ и на три элемента из $\mathcal{P}_0$, разбивающих $(C_j \times D_j) \setminus (A_n \times B_n)$. Таким образом, осталось разбить $A_n \times B_n$.

Будем это делать последовательно. Сначала разобьем его на $(A_n \times B_n) \cap (C_1 \times D_1) \in \mathcal{P}_0$ и на три множества $U_i \in \mathcal{P}_0$, дающие разбиение $(A_n \times B_n) \setminus (C_1 \times D_1)$. Множество $C_2 \times D_2$ не пересекает $C_1 \times D_1$ и, значит, его пересечение с $A_n \times B_n$ состоит из его пересечений с множествами U_i. Разобьем каждое U_i на их пересечение с $C_2 \times D_2$, а также на множества, задающие разбиение $U_i \setminus (C_2 \times D_2)$ (если они не пусты). Продолжая этот процесс, получим конечное разбиение $A_n \times B_n$ на элементы из $\mathcal{P}_0$. $\square$

Процесс построения разбиения, описанный в доказательстве леммы 5.51, можно распространить и на счетное число элементов: результирующее разбиение получается из пересечений убывающих последовательностей элементов из $\mathcal{P}_0$, дающих разбиения на каждом конечном шаге.

Следствие 5.52. *Каждый элемент из $\mathcal{P}_1$ представим в виде дизъюнктного объединения не более чем счетного числа элементов из $\mathcal{P}_0$, поэтому, в силу леммы 5.49, имеем $\mathcal{P}_1 \subset F$. Кроме того, $\mathcal{P}_1$ замкнуто относительно конечных пересечений и разностей.*

Замечание 5.53. Хотя каждый элемент из $\mathcal{P}_1$ представляет собой дизъюнктное объединение не более чем счетного числа «кирпичей» — элементов из $\mathcal{P}_0$, а пересечение конечного числа таких объединений также является объединением этого типа, тем не менее, счетные пересечения уже не обязаны представляться в этом виде. Чтобы это увидеть, заметим, что канторов дисконтинуум представляет собой как раз пересечение счетного числа множеств, каждое из которых является даже конечным объединением непересекающихся отрезков.

Докажем теперь следующий ключевой результат.

Лемма 5.54. *Для любого $S \subset X \times Y$ имеем $(\mu \times \nu)(S) = \inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\}$.*

Доказательство. По определению,

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i) : S \subset V = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \in \mathcal{P}_1\Big\}.$$

Заметим, что $\chi_V \le \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i \times B_i}$, поэтому

$$\rho(V) \le \int\!\!\int \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i \times B_i}\Big)\, d\mu\, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \int\!\!\int \chi_{A_i \times B_i}\, d\mu\, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i),$$

откуда $\inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\} \le (\mu \times \nu)(S)$.

С другой стороны, в силу следствия 5.52, каждое V можно представить в виде дизъюнктного объединения множеств $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$, и тогда $\rho(V) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)$, поэтому $(\mu \times \nu)(S) \le \inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\}$, откуда заключаем требуемое равенство. □

Следствие 5.55. *Для каждого $S \in \mathcal{P}_1$ имеем $(\mu \times \nu)(S) = \rho(S)$. В частности, для $A \times B \in \mathcal{P}_1$ имеем $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.*

Доказательство. Если $S, V \in \mathcal{P}_1$ и $S \subset V$, то $\chi_S \le \chi_V$ и, следовательно, $\rho(S) \le \rho(V)$, поэтому, по лемме 5.54, имеем

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\} = \rho(S).$$

Второе утверждение вытекает из леммы 5.48. □

Из следствия 5.55 и леммы 5.49 вытекает следующий результат.

Следствие 5.56. *Внешняя мера $\mu \times \nu$ является σ-аддитивной функцией на $\mathcal{P}_1$.*

Лемма 5.57. *Для любого $S \subset X \times Y$ существует такое $W \in \mathcal{P}_2 \cap F$, что $S \subset W$ и*

$$(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \rho(W).$$

Доказательство. По лемме 5.54, существует последовательность $V_i \in \mathcal{P}_1$ такая, что $S \subset V_i$ и $(\mu \times \nu)(S) = \inf \rho(V_i)$. Положим $W_n = \cap_{i=1}^{n} V_i$. По следствию 5.52, имеем $W_n \in \mathcal{P}_1$. Так как $S \subset W_n \subset V_n$, то $\rho(W_n) \le \rho(V_n)$ и, значит, $(\mu \times \nu)(S) = \inf \rho(W_n)$. Более того, так как $W_1 \supset W_2 \supset \cdots$, то $\rho(W_1) \ge \rho(W_2) \ge \cdots$ и, следовательно, $(\mu \times \nu)(S) = \lim_{n\to\infty} \rho(W_n)$.

Если $(\mu \times \nu)(S) < \infty$, то для некоторого n имеем $\rho(W_n) < \infty$, поэтому применима лемма 5.50, в силу которой $W = \cap W_n \in F$ и $\rho(W) = \lim_{i\to\infty} \rho(W_n)$, поэтому $(\mu \times \nu)(S) = \rho(W)$. Так как $S \subset W \subset W_n$, то $(\mu \times \nu)(S) \le (\mu \times \nu)(W) \le (\mu \times \nu)(W_n)$; из следствия 5.55 вытекает, что $\rho(W_n) = (\mu \times \nu)(W_n)$, и так как $(\mu \times \nu)(W_n) \to (\mu \times \nu)(S)$, то $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \rho(W)$.

Пусть теперь $(\mu \times \nu)(S) = \infty$, тогда положим $W = X \times Y \in \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_2$. Из монотонности внешней меры и 5.55 вытекает, что $\infty = (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \rho(W)$. □

Лемма 5.58. *Каждое $A \times B \in \mathcal{P}_0$ является $(\mu \times \nu)$-измеримым.*

Доказательство. Выберем произвольное $T \subset X \times Y$, и пусть $T \subset V \in \mathcal{P}_1$. Заметим, что $V \cap (A \times B)$, $V \setminus (A \times B) \in \mathcal{P}_1$, причем эти множества не пересекаются, поэтому из монотонности внешней меры и следствия 5.56 имеем

$$(\mu \times \nu)\big[T \cap (A \times B)\big] + (\mu \times \nu)\big[T \setminus (A \times B)\big] \leq (\mu \times \nu)\big[V \cap (A \times B)\big] + (\mu \times \nu)\big[V \setminus (A \times B)\big] = (\mu \times \nu)(V).$$

Выбирая в качестве V такие $V_i \in \mathcal{P}_1$, что $T \subset V_i$ и $(\mu \times \nu)(T) = \inf \rho(V_i) = \inf(\mu \times \nu)(V_i)$, заключаем, что

$$(\mu \times \nu)\big[T \cap (A \times B)\big] + (\mu \times \nu)\big[T \setminus (A \times B)\big] \leq (\mu \times \nu)(T).$$

Осталось применить упражнение 3.12. □

Следствие 5.55 и лемма 5.58 доказывают пункт (1) теоремы Фубини.

Лемма 5.58 влечет следующий результат.

Следствие 5.59. *Все элементы из $\mathcal{P}_2$ являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми.*

Следствие 5.60. *Мера $\mu \times \nu$ — регулярная.*

Доказательство. По следствию 5.59, все элементы из $\mathcal{P}_2$ являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми, а по лемме 5.57, для каждого $S \subset X \times Y$ существует $W \in \mathcal{P}_2$ такое, что $S \subset W$ и $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W)$, откуда и вытекает утверждение следствия. □

Следствие 5.60 доказывает пункт (2) теоремы Фубини.

Лемма 5.61. *Пусть $S \subset X \times Y$ — произвольное счетно $(\mu \times \nu)$-измеримое множество. Тогда $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $(\mu \times \nu)(S) = \int \mu(S_y)\, d\nu$.*

Доказательство. По лемме 5.57, существует такое $W \in \mathcal{P}_2$, что $S \subset W$ и $\rho(W) = (\mu \times \nu)(W) = (\mu \times \nu)(S)$. Тогда, по лемме 5.47, $W_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$, функция $\mu(W_y)$ — ν-измерима, и $\rho(W) = \int \mu(W_y)\, d\nu$.

Предположим, что $(\mu \times \nu)(S) = 0$. Тогда $0 = \rho(W) = \int \mu(W_y)\, d\nu$, откуда, по 5.25 (10), имеем $\mu(W_y) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Так как $S \subset W$, то $\mu(S_y) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, следовательно, $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ в силу 3.12 (5), а, по 5.25 (10), функция $\mu(S_y)$ — ν-интегрируема и

$$\rho(S) = \int \mu(S_y)\, d\nu = 0 = (\mu \times \nu)(S).$$

Пусть теперь $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Так как $S \in \sigma(\mu \times \nu)$, имеем

$$(\mu \times \nu)(W) = (\mu \times \nu)(S) + (\mu \times \nu)(W \setminus S),$$

откуда $(\mu \times \nu)(W \setminus S) = 0$. По доказанному выше, $\rho(W \setminus S) = 0$, $(W \setminus S)_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $\mu\big((W \setminus S)_y\big) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Как мы уже отмечали, $W_y \in \sigma(\mu)$, поэтому $S_y \overset{\text{п.в.}}{=} W_y \setminus (W_y \setminus S_y) \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$. Кроме того, $\mu(S_y) \overset{\text{п.в.}}{=} \mu(W_y) - \mu\big((W \setminus S)_y\big) \overset{\text{п.в.}}{=} \mu(W_y)$, а, значит, функция $\mu(S_y)$ — ν-измерима и

$$\rho(S) = \int \mu(S_y)\, d\nu = \int \mu(W_y)\, d\nu = \rho(W) = (\mu \times \nu)(S).$$

Наконец, пусть теперь $S = \cup_{i=n}^{\infty} S_n$, где $S_n \in \sigma(\mu \times \nu)$ и $(\mu \times \nu)(S_n) < \infty$. Положим $S'_1 = S_1$ и $S'_n = S_n \setminus \cup_{i<n} S_i$ при $n > 1$, тогда $S'_n \in \sigma(\mu \times \nu)$, $(\mu \times \nu)(S'_n) < \infty$ и $S = \sqcup S'_i$. По доказанному выше, $(S'_n)_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $S'_n \in F$, так что, в силу леммы 5.49, $S \in F$ и

$$\rho(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(S'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mu\big((S'_n)_y\big)\, d\nu = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big((S'_n)_y\big)\, d\nu = \int \mu\big(S_y\big)\, d\nu,$$

где предпоследнее равенство вытекает из следствия 5.32. □

Из леммы 5.61, а также ее «симметричной версии» (если переопределить $\rho(S)$, поменяв порядок интегрирования) получаем пункт (3) теоремы Фубини.

Наконец, докажем пункт (4). Если f — функция из этого пункта, то $S = \{f \neq 0\}$ является, по определению, счетно $(\mu\times\nu)$-измеримым, как и в пункте (3), поэтому для случая $f = \chi_S$ пункт (4) следует из пункта (3).

Пусть теперь f — произвольная неотрицательная счетно $(\mu\times\nu)$-измеримая функция. По теореме 4.10, ее можно представить в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k},$$

где все A_k являются $(\mu\times\nu)$-измеримыми. Так как $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k = \{f \neq 0\}$, то каждое A_k является счетно $(\mu\times\nu)$-измеримым, поэтому для $\frac{1}{k}\chi_{A_k}$ пункт (4) имеет место. Следствие 5.32 гарантирует, что каждый из трех интегралов в пункте (4) является счетно-аддитивным, тем самым, пункт (4) имеет место для неотрицательных функций.

Наконец, пусть f — произвольная счетно $(\mu\times\nu)$-измеримая функция, тогда f^+ и f^- являются неотрицательными счетно $(\mu\times\nu)$-измеримыми (проверьте), поэтому для них выполняется пункт (4), т.е. все три интеграла от f^+ и f^- определены и равны между собой. Так как, по условию, f является $(\mu\times\nu)$-интегрируемой, по определению имеем $\int f\,d(\mu\times\nu) = \int f^+\,d(\mu\times\nu) - \int f^-\,d(\mu\times\nu)$, причем один из интегралов в правой части конечен. Пусть для определенности конечным является $\int f^-\,d(\mu\times\nu)$. Тогда конечным также является равный ему интеграл $\int\int f^-\,d\mu\,d\nu$. По 5.25 (9), функция $\int f^-\,d\mu$ почти везде ограничена, поэтому почти везде определена функция $\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = \int f\,d\mu$; здесь равенство имеет место по 5.25 (5) и 5.25 (3). Так как $\int\int f^-\,d\mu\,d\nu$ конечен, определено выражение

$$\int\int f^+\,d\mu\,d\nu - \int\int f^-\,d\mu\,d\nu = \int\left(\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right)d\nu = \int\int f\,d\mu\,d\nu$$

Здесь мы вновь применили 5.25 (5) и 5.25 (3). Таким образом, доказано первое равенство пункта (4). Второе равенство доказывается аналогично. Теорема Фубини полностью доказана □

Приведем пример, показывающий, что требование счетной μ-измеримости в теореме 5.45 существенно.

Пример 5.62. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, внешняя мера μ — лебегово продолжение меры Лебега, а внешняя мера ν — считающая. Пусть $S = \big\{(x,x) : x \in [0,1]\big\}$ и $f = \chi_S$.

Заметим, что μ и ν являются борелевскими мерами. Отсюда вытекает, что $\mu\times\nu$ — также борелевская. Действительно, по теореме 5.45, множества вида $A\times B$, где $A \in \sigma(\mu)$ и $B \in \sigma(\nu)$, являются $(\mu\times\nu)$-измеримыми, поэтому $(\mu\times\nu)$-измеримы и все открытые множества вида $A\times B \subset \mathbb{R}^2$. С другой стороны, каждое открытое множество на плоскости является не более чем счетным объединением открытых множеств вида $A\times B$, поэтому все открытые множества на $\mathbb{R}^2$ (в стандартной топологии) также $(\mu\times\nu)$-измеримы. По 3.37, $(\mu\times\nu)$-измеримыми являются и все борелевские подмножества $\mathbb{R}^2$.

Так как S — замкнутое подмножество плоскости, S является $(\mu\times\nu)$-измеримым, поэтому и f также $(\mu\times\nu)$-измерима. В силу 5.25 (2), f также μ-интегрируема.

Так как $\mu(S_y) = 0$ при всех $y \in Y$, имеем

$$\int\int f\,d\mu\,d\nu = \int \mu(S_y)\,d\nu = \int 0\,d\nu = 0.$$

С другой стороны, $\nu(S_x) = 1$ при $x \in [0,1]$, и $\nu(S_x) = 0$ при всех остальных x, поэтому $\nu(S_x) = \chi_{[0,1]}$, откуда

$$\int\int f\,d\nu\,d\mu = \int \nu(S_x)\,d\mu = \int \chi_{[0,1]}\,d\mu = 1,$$

так что повторные интегралы для f различны, поэтому f не является счетно $(\mu\times\nu)$-измеримой. Наконец, если бы f была $(\mu\times\nu)$-суммируема, то, по той же теореме, повторные интегралы были бы равны, поэтому, в силу $f \geq 0$, имеем $\int f\,d(\mu\times\nu) = \infty$.

Тема 6

Интеграл Даниеля.

В этом разделе мы определим интеграл Лебега как функционал, заданный на некоторых семействах функций и обладающий рядом естественных свойств. Такие функционалы называются интегралами Даниеля. В качестве частного случая мы докажем теорему Рисса, представляющую линейный функционал на пространстве непрерывных функций с компактными носителями в виде интеграла от этих функций по некоторой мере.

6.1 Решетки функций

Пусть X — произвольное множество.

Определение 6.1. *Решеткой функций на* X назовем каждое (непустое) семейство L функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) для любых f, $g \in L$ и $0 \le c < \infty$ имеем

$$f+g,\ c\,f,\ \min(f,g),\ \min(f,c) \in L;$$

(2) для любых f, $g \in L$ таких, что $f \le g$, выполняется $g - f \in L$.

Замечание 6.2. Пусть L — решетка функций.

(1) Если $f \in L$, то $0 = 0 \cdot f \in L$. Таким образом, каждая решетка функций содержит 0.

(2) Если f, $g \in L$ и $g \ge 0$, то $f + g \ge \min(f,g)$, поэтому, в силу условий $f+g \in L$ и $\min(f,g) \in L$, имеем $\max(f,g) = f + g - \min(f,g) \in L$.

(3) Если $f \in L$, то $f^+ = \max(f,0) \in L$; кроме того, так как $f^+ \ge f$, то $f^- = f^+ - f \in L$.

Обозначение 6.3. Для решетки функций L положим $L^+ = \{f \in L : f \ge 0\}$.

Ясно, что L^+ также является решеткой.

Пример 6.4. Вот некоторые примеры решеток:

(1) множество всех функций $f\colon X \to \mathbb{R}$;

(2) множество всех непрерывных функций на некотором топологическом пространстве;

(3) множество всех μ-измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, где μ — некоторая внешняя мера на некотором X;

(4) в тех же предположениях, множество всех неотрицательных μ-интегрируемых функций на X;

(5) в тех же предположениях, множество всех μ-суммируемых функций на X (множество μ-интегрируемых функций решетку, вообще говоря, не образует, так как сумма μ-интегрируемых функций может быть неинтегрируемой).

Пусть μ — внешняя мера на X и L — подрешетка решетки всех μ-суммируемых функций. Тогда определено отображение

$$I\colon L \to \mathbb{R}, \quad I(f) = \int f\,d\mu.$$

Отображение I

(1) линейно по 5.6 (2) и 5.6 (4);

(2) сохраняет порядок по 5.6 (5);

(3) сохраняет монотонную сходимость в силу 5.33.

Оказывается, эти свойства полностью определяют интегрирование по Лебегу. В дальнейшем для краткости условие монотонности $f_1 \le f_2 \le \cdots$ будем записывать как $f_n \nearrow$, а то, что монотонная последовательность f_n сходится к g — как $f_n \nearrow g$.

Теорема 6.5. *Пусть L — произвольная решетка функций на множестве X, и $\Phi\colon L \to \mathbb{R}$ — отображение, обладающее следующими свойствами: для любых f, g, h_1, $h_2, \ldots \in L$*

(1) $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$;

(2) *для каждого* $0 \le c < \infty$ *имеем* $\Phi(c\,f) = c\,\Phi(f)$;

(3) *если* $f \ge g$, *то* $\Phi(f) \ge \Phi(g)$;

(4) *если* $h_n \nearrow g$ *при* $n \to \infty$, *то* $\Phi(h_n) \nearrow \Phi(g)$ *при* $n \to \infty$.

Тогда на X существует такая внешняя мера μ, что

$$\Phi(f) = \int f\,d\mu.$$

В частности, относительно этой меры μ все функции решетки L являются μ-суммируемыми и, значит, μ-измеримыми.

Определение 6.6. Отображение $\Phi\colon L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям (1)–(4) теоремы 6.5, называется *монотонным интегралом Даниеля* для решетки функций L.

Доказательство теоремы 6.5. Опишем построение искомой внешней меры μ.

Конструкция 6.7. Пусть $A \subset X$. Будем говорить, что последовательность f_1, $f_2, \ldots$ функций из L^+ *мажорирует* A, если $f_n \nearrow$ и $\lim_{n\to\infty} f_n|_A \ge 1$. Отметим, что пустое множество A мажорирует каждая последовательность $f_n \nearrow$ функций из L^+. Заметим также, что для каждой последовательности $f_n \nearrow$ функций из L^+ существует предел $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$ в силу монотонности Φ (свойство (3)).

Определим функцию $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$, учитывая соглашения $\inf\emptyset = \infty$:

$$\mu(A) = \inf\Big\{\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) : f_1,\ f_2, \ldots \text{ мажорирует } A\Big\}.$$

Лемма 6.8. *Функция μ является внешней мерой на X.*

Доказательство. (1) *Покажем, что $\mu(A) \ge 0$ для любого $A \subset X$.* По 6.2 (1), имеем $0 \in L$, поэтому $0 \in L^+$. Далее, $\Phi(0) = \Phi(0+0) = \Phi(0) + \Phi(0)$, поэтому $\Phi(0) = 0$. Наконец, для любой $f \in L^+$ выполняется $f \ge 0$, поэтому, в силу монотонности Φ, имеем $\Phi(f) \ge \Phi(0) = 0$.

(2) *Докажем, что $\mu(\emptyset) = 0$.* Для $A = \emptyset$ в качестве мажорирующей f_n можно взять последовательность из 0, откуда $\mu(A) \le \Phi(0) = 0$.

(3) *Докажем, что функция μ — σ-субаддитивна.* Пусть $A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$. Если для какого-то A_i нет мажорирующей последовательности, то $\mu(A_i) = \infty$ и все доказано. Пусть теперь для каждого A_i имеется некоторая мажорирующая последовательность.

Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого i выберем последовательность функций $f_{i,1}$, $f_{i,2}, \ldots$, мажорирующую A_i такую, что $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n}) \le \mu(A_i) + \varepsilon/2^i$. Положим $g_n = \sum_{i=1}^n f_{i,n}$, тогда $g_n \in L^+$ и $g_n \nearrow$, поэтому, в частности, существует $\lim_{n\to\infty} g_n$.

Далее, для каждого $x \in A$ существует такое A_k, что $x \in A_k$ и при каждом $n \geq k$ выполняется $g_n(x) \geq f_{k,n}(x)$, поэтому $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_{k,n}(x) \geq 1$, следовательно, $g_1, g_2, \cdots$ мажорирует A. Отсюда вытекает, что $\mu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n)$. Кроме того, при каждом n

$$\Phi(g_n) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(f_{i,n}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \Phi(f_{i,n+1}) \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \Phi(f_{i,m}),$$

поэтому

$$\mu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \Phi(f_{i,m}) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. Лемма доказана. □

Лемма 6.9. *Для каждого $A \subset X$ и $g \in L^+$ и $\varepsilon > 0$ таких, что $g \leq \varepsilon\,\chi_A$, имеем $\Phi(g) \leq \varepsilon\,\mu(A)$.*

Доказательство. Если A не имеет мажорирующей последовательности, то $\mu(A) = \infty$ и все доказано. Пусть теперь у A имеются мажорирующие последовательности. Выберем произвольное $\delta > 0$ и построим последовательность $f_1, f_2, \cdots$, мажорирующую A так, что $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) \leq \mu(A) + \delta$. Положим $h_n = \min(f_n, g/\varepsilon)$. Так как $\lim_{n\to\infty} f_n|_A \geq 1 \geq (g/\varepsilon)|_A$, то $h_n|_A \nearrow (g/\varepsilon)|_A$; кроме того, $h_n|_{X\setminus A} = 0 = (g/\varepsilon)|_{X\setminus A}$, поэтому $h_n \nearrow g/\varepsilon$. Следовательно,

$$\Phi(g/\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \Phi(h_n) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) \leq \mu(A) + \delta.$$

Для завершения доказательства воспользуемся произвольностью δ. □

Лемма 6.10. *Для каждого $A \subset X$, $g \in L^+$ и $\varepsilon > 0$ таких, что $g \geq \varepsilon\,\chi_A$, имеем $\Phi(g) \geq \varepsilon\,\mu(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим постоянную последовательность $g/\varepsilon, g/\varepsilon, \ldots$, тогда эта последовательность мажорирует A, следовательно, $\mu(A) \leq \Phi(g/\varepsilon) = \Phi(g)/\varepsilon$. □

Для дальнейшего нам понадобится следующий критерий измеримости функции.

Лемма 6.11. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X, и $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ — произвольная функция. Тогда f является μ-измеримой, если и только если для всех $T \subset X$ и $-\infty < a < b < \infty$ выполняется*

$$(*) \qquad \mu(T) \geq \mu\bigl(T \cap \{f \leq a\}\bigr) + \mu\bigl(T \cap \{f \geq b\}\bigr).$$

Доказательство. Если f является μ-измеримой, то прообразы лучей $[-\infty, a]$, $[b, \infty]$ и интервала (a, b) являются μ-измеримыми, откуда вытекает неравенство $(*)$.

Обратно, предположим, что имеет место неравенство $(*)$ и докажем μ-измеримость f. Для этого достаточно проверить μ-измеримость каждого множества $A = \{f \leq r\}$. В силу 3.12 (1) нам достаточно проверить, что для любого $T \subset X$ такого, что $\mu(T) < \infty$, выполняется $\mu(T) \geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$. Сделаем это.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$B_i = T \cap \bigl\{r + 1/(i+1) \leq f \leq r + 1/i\bigr\}.$$

Мы утверждаем, что для каждого конечного множества $K \subset \mathbb{N}$, состоящего или только из четных, или только из нечетных чисел, выполняется

$$(**) \qquad \mu\bigl(\cup_{k\in K} B_k\bigr) \geq \sum_{k\in K} \mu(B_k).$$

Для $\#K = 1$ это очевидно так. Далее воспользуемся индукцией по числу элементов в K. Пусть $\#K > 1$ и для меньшего чем $\#K$ числа элементов неравенство $(**)$ имеет место. Положим $j = \max K$, тогда

$$-\infty < a := \sup f(B_j) < \inf f\bigl(\cup_{j>k\in K} B_k\bigr) =: b < \infty.$$

Применим теперь неравенство $(*)$, выбрав в качестве T множество $B = \cup_{k\in K} B_k$. Тогда $B \cap \{f \leq a\} = B_j$ и $B \cap \{f \geq a\} = \cup_{j>k\in K} B_k$, откуда

$$\mu\bigl(\cup_{k\in K} B_k\bigr) \geq \mu(B_j) + \mu\bigl(\cup_{j>k\in K} B_k\bigr) \geq \sum_{k\in K} \mu(B_k),$$

где последнее неравенство имеет место в силу индуктивного предположения. Тем самым, неравенство $(**)$ доказано.

Из неравенства $(**)$ и монотонности μ вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_{2k-1}) \le \mu\big(\cup_{k=1}^{\infty}B_{2k-1}\big) \le \mu(T)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_{2k}) \le \mu\big(\cup_{k=1}^{\infty}B_{2k}\big) \le \mu(T),$$

откуда $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k) \le 2\mu(T) < \infty$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует n, для которого

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k) \ge \mu\big(T \cap \{r < f \le r + 1/n\}\big),$$

где последнее неравенство следует из σ-субаддитивности μ. Вновь воспользуемся σ-субаддитивностью μ и получим

$$\mu(T \setminus A) \le \mu\big(T \cap \{r < f \le r + 1/n\}\big) + \mu\big(T \cap \{f > r + 1/n\}\big) < \varepsilon + \mu\big(T \cap \{f > r + 1/n\}\big).$$

Наконец, из условия $(*)$ и монотонности внешней меры вытекает, что

$$\mu(T) \ge \mu\big(T \cap \{f \le r\}\big) + \mu\big(T \cap \{f > r + 1/n\}\big) \ge \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) - \varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε и 3.12 (1). Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.12. *Каждая $f \in L^+$ является μ-измеримой.*

Доказательство. В силу леммы 6.11, для доказательства достаточно выбрать произвольное $T \subset X$, произвольные $-\infty < a < b < \infty$, положить $A = T \cap \{f \le a\}$, $B = T \cap \{f \ge b\}$ и проверить неравенство

$$(\star) \qquad \mu(T) \ge \mu(A) + \mu(B).$$

Если $a < 0$, то так как $f \ge 0$, неравенство $(\star)$ вытекает из монотонности внешней меры.

Пусть теперь $a \ge 0$. Положим

$$h = \frac{\min(f, b) - \min(f, a)}{b - a},$$

тогда $h(x) = 0$ при $x \in A$ и $h(x) = 1$ при $x \in B$.

Если для T не существует мажорирующей последовательности, то $\mu(T) = \infty$ и все доказано. Пусть теперь такие последовательности существуют. Выберем произвольную последовательность g_1, $g_2, \ldots$, мажорирующую T, и положим $k_n = \min(g_n, h)$. Тогда последовательность k_1, $k_2, \ldots$ мажорирует B, так как, во-первых, $k_n \in L^+$, во-вторых, $k_n \nearrow$ и, в-третьих, для каждого $x \in B$ имеем $k_n(x) = \min(g_n, 1)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \lim_{n\to\infty}\min\big(g_n(x), 1\big) = \min\Big(\lim_{n\to\infty} g_n(x), 1\Big) = 1.$$

Покажем теперь, что последовательность $g_1 - k_1$, $g_2 - k_2, \ldots$ мажорирует A. Заметим, что $g_n(x) - k_n(x) = 0$ при $g_n(x) \le h(x)$, и $g_n(x) - k_n(x) = g_n(x) - h(x)$ при $g_n(x) > h(x)$, поэтому $g_n - k_n = \max(g_n - h, 0)$, следовательно, $g_n - k_n \in L^+$ и $g_n - k_n \nearrow$. Пусть теперь $x \in A$, тогда $g_n(x) - k_n(x) = \max\big(g_n(x) - h(x), 0\big) = \max\big(g_n(x), 0\big) = g_n(x)$, откуда и вытекает требуемое.

Из определения функции μ и аддитивности функционала Φ вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(g_n) = \lim_{n\to\infty}\big(\Phi(g_n - k_n) + \Phi(k_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\Phi(g_n - k_n) + \lim_{n\to\infty}\Phi(k_n) \ge \mu(A) + \mu(B).$$

Теперь неравенство $(\star)$ вытекает из произвольности последовательности g_n. $\square$

Вспоминая, что для $f \in L$ выполняется f^+, $f^- \in L^+$ и $f = f^+ - f^-$, получаем справедливость следующего результата.

Следствие 6.13. *Каждая $f \in L$ является μ-измеримой.*

Лемма 6.14. *Для* $f \in L^+$ *имеем* $\Phi(f) = \int f\,d\mu$.

Доказательство. Для каждого $t \ge 0$ положим $f_t = \min(f,t)$, тогда, по определению решетки, имеем $f_t \in L^+$.

Выберем теперь произвольные $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, тогда, как легко видеть,

$$(\star\star)\qquad \begin{aligned} &0 \le f_{k\varepsilon}(x) - f_{(k-1)\varepsilon}(x) \le \varepsilon \text{ при всех } x \in X,\\ &f_{k\varepsilon}(x) - f_{(k-1)\varepsilon}(x) = 0 \text{ при } f(x) \le (k-1)\varepsilon,\\ &f_{k\varepsilon}(x) - f_{(k-1)\varepsilon}(x) = \varepsilon \text{ при } f(x) \ge k\varepsilon. \end{aligned}$$

Положим $A_k = \bigl\{x : f(x) \ge k\varepsilon\bigr\}$. По лемме 6.10, имеем $\Phi\bigl(f_{k\varepsilon} - f_{(k-1)\varepsilon}\bigr) \ge \varepsilon\,\mu(A_k)$.

Далее, из свойств $(\star\star)$ вытекает, что

$$f_{k\varepsilon} - f_{(k-1)\varepsilon} \ge \varepsilon\,\chi_{A_k} \ge f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon} \ge \varepsilon\,\chi_{A_{k+1}} \ge f_{(k+2)\varepsilon} - f_{(k+1)\varepsilon}.$$

Применяя леммы 6.10, 6.9, а также упражнения 5.25 (1) и 5.25 (1), получим

$$\Phi\bigl(f_{k\varepsilon} - f_{(k-1)\varepsilon}\bigr) \ge \varepsilon\,\mu(A_k) = \int \varepsilon\,\chi_{A_k}\,d\mu \ge \int \bigl(f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}\bigr)\,d\mu \ge$$
$$\ge \int \varepsilon\,\chi_{A_{k+1}}\,d\mu = \varepsilon\,\mu(A_{k+1}) \ge \Phi\bigl(f_{(k+2)\varepsilon} - f_{(k+1)\varepsilon}\bigr).$$

Просуммировав эти неравенства по k от 1 до n и воспользовавшись аддитивностью функции Φ и интеграла Лебега, получим

$$\Phi\bigl(f_{n\varepsilon}\bigr) \ge \int \bigl(f_{(n+1)\varepsilon} - f_\varepsilon\bigr)\,d\mu \ge \Phi\bigl(f_{(n+2)\varepsilon} - f_{2\varepsilon}\bigr).$$

Заметим, что при $n \to \infty$ имеем $f_{n\varepsilon} \nearrow f$, $f_{(n+1)\varepsilon} - f_\varepsilon \nearrow f - f_\varepsilon$ и $f_{(n+2)\varepsilon} - f_{2\varepsilon} \nearrow f - f_{2\varepsilon}$. Следовательно, из монотонной сходимости функции Φ и интеграла Лебега вытекает, что

$$\Phi(f) \ge \int \bigl(f - f_\varepsilon\bigr)\,d\mu \ge \Phi\bigl(f - f_{2\varepsilon}\bigr).$$

Положив $\varepsilon = 1/n$ и снова воспользовавшись тем, что $f - f_{1/n} \nearrow f$ и $f - f_{2/n} \nearrow f$ при $n \to \infty$, а Φ и интеграл Лебега монотонны, получаем

$$\Phi(f) \ge \int f\,d\mu \ge \Phi(f),$$

что и требовалось. □

Нам осталось проверить, что для любой $f \in L$ также имеем $\Phi(f) = \int f\,d\mu$. Отметим, что для каждой $f \in L$ имеем f^+, $f^- \in L^+$ и $f^+ = f + f^-$, откуда $\Phi(f^+) = \Phi(f) + \Phi(f^-)$. Следовательно,

$$\Phi(f) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-) = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = \int (f^+ - f^-)\,d\mu = \int f\,d\mu,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Монотонные интегралы Даниеля удовлетворяют важному свойству, которое называется регулярностью относительно решетки L или, для краткости, L-регулярностью.

Итак, пусть L — произвольная решетка функций, определенных на некотором множестве X, и μ — внешняя мера на X. Обозначим через F_0 семейство множеств вида $\{f > t\}$ по всем $f \in L^+$ и всем $t > 0$. Далее, положим

$$F_1 = \bigl\{\cup_{n=1}^\infty A_n : A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ A_n \in F_0 \text{ при всех } n\bigr\},$$
$$F_2 = \{\cap_{n=1}^\infty A_n : A_1 \supset A_2 \supset \cdots,$$
$$A_n \in F_1 \text{ при всех } n,\ \mu(A_1) < \infty\}.$$

Определение 6.15. Внешняя мера μ называется *L-регулярной*, если для каждого $A \subset X$ такого, что $\mu(A) < \infty$, существует $W \in F_2$, для которого $A \subset W$ и $\mu(A) = \mu(W)$.

Предложение 6.16. *Внешняя мера μ, построенная в доказательстве теоремы* 6.5, *является L-регулярной, где L — решетка из этой же теоремы* 6.5.

Доказательство. Мы должны показать, что для каждого множества $A \subset X$ из условия $\mu(A) < \infty$ вытекает существование соответствующего W.

Итак, пусть
$$\mu(A) = \inf\big\{ \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) : f_1,\, f_2, \dots \text{ мажорирует } A\big\} < \infty.$$
Тогда существует набор последовательностей $f_{i,1},\, f_{i,2}, \dots$ такой, что каждая из этих последовательностей мажорирует A, и
$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n}).$$
Положим $g_{i,n} = \min\{f_{1,n}, \dots, f_{i,n}\}$, тогда $g_{i,n} \in L^+$. Далее, пусть $B_{i,n} = \{g_{i,n} > 1 - 1/i\}$, тогда, по определению, $B_{i,n} \in F_0$ при $i > 1$.

Легко видеть, что $g_{i+1,n} \le g_{i,n} \le g_{i,n+1}$ (первое неравенство вытекает из того, что при определении $g_{i+1,n}$ мы минимизируем по меньшему множеству функций, чем при определении $g_{i,n}$; второе неравенство следует из того, что мажорирующие последовательности функций монотонно не убывают). Из предыдущих неравенств и определения $B_{i,n}$ мгновенно вытекает, что $B_{i+1,n} \subset B_{i,n} \subset B_{i,n+1}$. Далее, по лемме 6.10, имеем $(1-1/i)\,\mu(B_{i,n}) \le \Phi(g_{i,n})$, а из монотонности Φ заключаем, что $\Phi(g_{i,n}) \le \Phi(f_{i,n})$.

Положим $V_i = \cup_{n=1}^{\infty} B_{i,n}$, тогда, по определению, $V_i \in F_1$ при $i > 1$; из $B_{i+1,n} \subset B_{i,n}$ вытекает, что $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$; наконец, $A \subset V_i$ при каждом i, так как для каждого $x \in A$ и каждого j, $1 \le j \le i$, существует такое n_j, что при всех $k \ge n_j$ выполняется $f_{j,k}(x) > 1 - 1/i$. Положим $n = \max\{n_1, \dots, n_i\}$, тогда при каждом $1 \le j \le i$ выполняется $f_{j,n}(x) > 1 - 1/i$, откуда $g_{i,n}(x) > 1 - 1/i$, поэтому $x \in B_{i,n}$.

По лемме 6.12, все функции из L^+ являются μ-измеримыми, поэтому множества F_0, F_1 и F_2 состоят из μ-измеримых множеств. Все множества $B_{i,j}$ также μ-измеримы (при $i > 1$ они принадлежат F_0; при $i = 1$ равны $\{g_{1,j} > 0\}$, где $g_{1,j} \in L^+$). Так как при каждом фиксированном i имеем $B_{i,1} \subset B_{i,2} \subset \cdots$ и $A_i = \cup_{i=1}^{\infty}$, то, по 3.18 (5) и доказанному выше, имеем
$$\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{i,n}) \le \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n})}{1 - 1/i}\,.$$

Положим $W = \cap_{i=1}^{\infty} V_i = \cap_{i=2}^{\infty} V_i$. Тогда $W \in F_2$. Так как $A \subset V_i$ при каждом i, имеем $A \subset W$. Так как $V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ и все V_i являются μ-измеримыми, из 3.18 (6) и доказанного выше вытекает, что
$$\mu(W) = \lim_{i\to\infty} \mu(V_i) \le \lim_{i\to\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n})}{1 - 1/i} = \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n}) = \mu(A).$$
Монотонность внешней меры μ и условие $A \subset W$ дают обратное неравенство, поэтому $\mu(A) = \mu(W)$, что и требовалось □

В следующей теореме рассматривается более широкий класс отображений решеток.

Теорема 6.17. *Пусть L — произвольная решетка функций на множестве X, и $\Psi\colon L \to \mathbb{R}$ — отображение, обладающее следующими свойствами: для любых f, g, h_1, $h_2, \dots \in L$*

(1) $\Psi(f + g) = \Psi(f) + \Psi(g)$;

(2) *для каждого $0 \le c < \infty$ имеем $\Psi(c\, f) = c\, \Psi(f)$;*

(3) $\sup\big\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \le f\big\} < \infty$;

(4) *если $h_n \nearrow g$ при $n \to \infty$, то $\Psi(h_n) \to \Psi(g)$ при $n \to \infty$.*

Положим

$$\Psi^+(f) = \sup\big\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \le f\big\},$$
$$\Psi^-(f) = -\inf\big\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \le f\big\}.$$

Тогда на X существует такие L-регулярные внешние меры ν^+ и ν^-, что для всех $f \in L^+$
$$\Psi^+(f) = \int f\, d\nu^+,\ \ \Psi^-(f) = \int f\, d\nu^-,$$
а для всех $f \in L$ имеем
$$\Psi(f) = \int f\, d\nu^+ - \int f\, d\nu^-.$$

Доказательство. Пусть $f, g \in L^+$ и $f \geq g$, тогда $f - g \in L^+$ и $f - g \leq f$. Из определения $\Psi^+(f)$ и $\Psi^-(f)$ вытекает, что

$$-\Psi^-(f) \leq \Psi(f-g) \leq \Psi^+(f),$$

поэтому

$$\Psi(g) - \Psi^-(f) \leq \Psi(g) + \Psi(f-g) = \Psi(f) \leq \Psi(g) + \Psi^+(f).$$

Отметим, что в качестве функции g можно выбирать любую функцию из L^+, для которой $g \leq f$, и при этом средняя часть предыдущих двух неравенств от g не зависит, поэтому, выбирая в качестве g функции, для которых $\Psi(g) \to \inf\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \leq f\} = -\Psi^-(f)$, получим $\Psi(f) \leq -\Psi^-(f) + \Psi^+(f)$. Аналогично, устремляя $\Psi(g)$ к $\Psi^+(f)$, получаем $\Psi^+(f) - \Psi^-(f) \leq \Psi(f)$, откуда

$$\Psi(f) = \Psi^+(f) - \Psi^-(f).$$

□

Определение 6.18. Отображение $\Psi\colon L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям (1)–(4) теоремы 6.17, называется *интегралом Даниеля* для решетки L.

Обозначение 6.19. Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $p \in [1,\infty]$. Для каждой μ-измеримой функции $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ положим

$$\mu_p(f) = \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \text{ при } p \in [1,\infty), \text{ и}$$

$$\mu_\infty(f) = \inf\Big\{r : \mu\Big(|f| > r\Big) = 0\Big\}.$$

Далее, пусть

$$L_p(\mu) = \big\{f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty] : f \text{ — } \mu\text{-измерима и } \mu_p(f) < \infty \text{ при } p \in [1,\infty)\big\},$$

$$L_\infty(\mu) = \big\{f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty] : f \text{ — счетно } \mu\text{-измерима и } \mu_\infty(f) < \infty\big\}.$$

Упражнение 6.20. Проверьте, что при каждом $p \in [1,\infty]$ пространство $L_p(\mu)$ является решеткой.

Замечание 6.21. Так как при $p \in [1,\infty)$ для каждой $f \in L_p(\mu)$ функция $|f|^p$ является μ-суммируемой, то для $|f|^p$ конечны верхний и нижний интегралы Лебега, поэтому $\mu(f = \pm\infty) = 0$. При $p = \infty$ из конечности $\mu_\infty(f)$ вытекает, что при каждом $r > \mu_\infty(f)$ выполняется $\mu\big(|f| > r\big) = 0$, в частности, $\mu(f = \pm\infty) = 0$. Так как мы предполагаем, что f определена μ-почти всюду на X, то при всех $p \in [1,\infty]$ можно сразу считать, что каждая функция из $L_p(\mu)$ принимает только конечные значения.

Кроме того, из замечания 5.46 вытекает, что для $p \in [1,\infty)$ функции $|f|^p$ являются счетно μ-измеримыми, а так как $\{f \neq 0\} = \big\{|f|^p \neq 0\big\}$, то и функции $f \in L_p(\mu)$ также счетно μ-измеримы. Таким образом, определение пространств $L_p(\mu)$ можно давать единообразно, требуя (избыточно), чтобы при всех $p \in [1,\infty]$ функции f были счетно μ-измеримы.

Следствие 6.22 (теорема Радона–Никодима). *Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X и $\Psi\colon L_\infty(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Даниеля. Тогда существует такая функция $k \in L_1(\mu)$, что $\Psi(f) = \int f\,k\,d\mu$ при всех $f \in L_\infty(\mu)$.*

Упражнение 6.23. Обобщите теорему 6.22 на оставшиеся пространства $L_p(\mu)$.

Напомним, что топологическое пространство называется *локально компактным*, если у каждой его точки существует окрестность, замыкание которой компактно.

Следствие 6.24 (теорема Рисса). *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, L — векторное пространство всех непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, носители которых компактны, и $\Psi\colon L \to \mathbb{R}$ — линейное отображение, для которого при каждом $f \in L^+$ выполняется*

$$\sup\big\{\Psi(g) : g \in L^+,\, g \leq f\big\} < \infty.$$

Тогда Ψ — интеграл Даниеля и, следовательно, существуют такие L-регулярные внешние меры ν^+ и ν^-, что

$$\Psi(f) = \int f\,d\mu^+ - \int f\,d\mu^-$$

при всех $f \in L$.

Тема 7

Дифференцирование внешних мер.

В этом разделе мы определим операцию дифференцирования одной внешней меры по другой и докажем ряд формул, являющихся аналогами интегрально-дифференциального исчисления из математического анализа.

7.1 Первообразные

Мы начнем с определения внешних мер, которые будут играть роль первообразных для определяемых ниже производных одной меры по другой.

Определение 7.1. Пусть X — топологическое пространство, а μ и ν — произвольные внешние меры на X. Положим

$$\nu_\mu(A) = \inf\big\{\nu(B) : B \in \mathcal{B}(X),\, \mu(A \setminus B) = 0\big\}.$$

Замечание 7.2. Множество в правой части определения 7.1 непусто, так как в качестве B всегда можно выбрать X.

Предложение 7.3. *Пусть μ и ν — произвольные внешние меры на топологическом пространстве X. Тогда*

(1) *ν_μ — внешняя мера на X;*

(2) *если $\mu(A) = 0$, то $\nu_\mu(A) = 0$;*

(3) *если $\mu(A \setminus B) = 0$, то $\nu_\mu(A) = \nu_\mu(A \cap B)$.*

(4) *для каждого $A \subset X$ существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(A) = \nu(B)$;*

(5) *для каждого $A \in \mathcal{B}(X)$ существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(A) = \nu(B)$;*

(6) *если X — метрическое пространство, а ν — борелевская, то ν_μ — также борелевская;*

(7) *если X — метрическое пространство, а ν — борелевская, A и B — такие, как в (5), то для любого $S \in \mathcal{B}(X)$, $S \subset A$, имеем $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$;*

(8) *если μ — борелевская, $S \subset X$ — произвольное множество, $T \in \mathcal{B}(X)$, $S \subset T$, $\mu(S) = \mu(T) < \infty$, то $\nu_\mu(S) = \nu_\mu(T)$;*

(9) *если ν — борелевски регулярная, то $\nu_\mu \le \nu$.*

Доказательство. (1) Пусть $A = \emptyset$, тогда в качестве B также можно взять $\emptyset$, поэтому $\nu_\mu(\emptyset) = 0$.

Пусть теперь $A \subset \cup_{i=1} A_i$. Мы должны показать, что $\nu_\mu(A) \le \sum_{i=1}^\infty \nu_\mu(A_i)$. По замечанию 7.2, для каждого A_i имеется такое $B_i \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(A_i \setminus B_i) = 0$. Тогда $\mu\big(\cup_i(A_i \setminus B_i)\big) = 0$, поэтому если положить $B = \cup_i B_i \in \mathcal{B}(X)$, то $A \setminus B \subset \cup_i(A_i \setminus B_i)$ и, значит, $\mu(A \setminus B) = 0$ из монотонности внешней меры. Отсюда с очевидностью вытекает σ-субаддитивность функции ν_μ.

(2) Для такого A в определении ν_μ можно в качестве B взять $\emptyset$.

(3) По пункту (2), $\nu_\mu(A \setminus B) = 0$, поэтому $\nu_\mu(A) \le \nu_\mu(A \cap B) + \nu_\mu(A \setminus B) = \nu_\mu(A \cap B)$. С другой стороны, $A \supset A \cap B$, поэтому $\nu_\mu(A) \ge \nu_\mu(A \cap B)$.

(4) По определению точной нижней грани, существует такая последовательность множеств $B_i \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(A \setminus B_i) = 0$ при каждом i и $\nu(B_i) \leq \nu_\mu(A) + 1/i$. Положим $B = \cap_{i=1}^\infty B_i$, тогда $B \in \mathcal{B}(X)$ и

$$\mu(A \setminus B) = \mu\big(A \setminus \cap_{i=1}^\infty B_i\big) = \mu\big(\cup_{i=1}^\infty (A \setminus B_i)\big) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A \setminus B_i) = 0,$$

поэтому

$$\nu_\mu(A) \leq \nu(B) \leq \nu(B_i) \leq \nu_\mu(A) + 1/i.$$

Так как это неравенство выполняется для любого $i \in \mathbb{N}$, заключаем, что $\nu_\mu(A) = \nu(B)$.

(5) По пункту (4), существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(A) = \nu(B)$. Так как $A \in \mathcal{B}(X)$, то $B' = A \cap B \subset A$ также принадлежит $\mathcal{B}(X)$. Кроме того, $\mu(A \setminus B') = \mu\big(A \setminus (A \cap B)\big) = \mu(A \cap B) = 0$, поэтому $\nu_\mu(A) \leq \nu(B') \leq \nu(B)$, откуда $\nu_\mu(A) = \nu(B')$, следовательно, B' — искомое.

(6) Для доказательства воспользуемся критерием Каратеодори (теорема 3.40). Пусть произвольные $A, B \subset X$ таковы, что $\operatorname{dist}(A, B) = r > 0$. Достаточно показать, что $\nu_\mu(A \sqcup B) = \nu_\mu(A) + \nu_\mu(B)$.

Положим $C = A \sqcup B$. Пусть $0 < \varepsilon < r/2$, тогда открытые ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $U_\varepsilon(B)$ множеств A и B не пересекаются. По пункту (4), существует $D \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(C \setminus D) = 0$ и $\nu_\mu(C) = \nu(D)$.

Положим $D_A = D \cap U_\varepsilon(A)$ и $D_B = D \cap U_\varepsilon(B)$, тогда D_A, $D_B \in \mathcal{B}(X)$ и $D_A \cap D_B = \emptyset$. Так как ν — борелевская внешняя мера, то

$$\nu(D) \geq \nu\Big(D \cap \big(U_\varepsilon(A) \sqcup U_\varepsilon(B)\big)\Big) = \nu(D_A \sqcup D_B) = \nu(D_A) + \nu(D_B).$$

Кроме того, $A \setminus D_A \subset C \setminus D$ и $B \setminus D_B \subset C \setminus D$, поэтому, из монотонности, $\mu(A \setminus D_A) \leq \mu(C \setminus D) = 0$ и $\mu(B \setminus D_B) \leq \mu(C \setminus D) = 0$, откуда $\nu_\mu(A) \leq \nu(D_A)$ и $\nu_\mu(B) \leq \nu(D_B)$. Суммируя полученные результаты, заключаем, что

$$\nu(D) = \nu_\mu(C) = \nu_\mu(A \sqcup B) \leq \nu_\mu(A) + \nu_\mu(B) \leq$$
$$\leq \nu(D_A) + \nu(D_B) \leq \nu(D),$$

откуда и заключаем требуемое.

(7) Заметим сначала, что

$$S \setminus (B \cap S) = S \setminus B \subset A \setminus B \text{ и } (A \setminus S) \setminus (B \setminus S) = (A \setminus B) \setminus S \subset A \setminus B,$$

поэтому, из монотонности, имеем $\mu\big(S \setminus (B \cap S)\big) = \mu\big((A \setminus S) \setminus (B \setminus S)\big) = 0$, откуда

$$(*) \qquad \nu_\mu(S) \leq \nu(B \cap S) \quad \text{и} \quad \nu_\mu(A \setminus S) \leq \nu(B \setminus S)$$

в силу борелевости S. Далее, по пункту (6), внешняя мера ν_μ — борелевская, поэтому

$$\nu_\mu(S) + \nu_\mu(A \setminus S) = \nu_\mu(A) = \nu(B) = \nu(B \cap S) + \nu(B \setminus S).$$

В силу неравенств $(*)$ имеем $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$ и $\nu_\mu(A \setminus S) = \nu(B \setminus S)$ (впрочем, последнее равенство получается из предпоследнего заменой S на $A \setminus S$).

(8) По пункту (4), существует $B \in \mathcal{B}(X)$, для которого $\mu(S \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(S) = \nu(B)$. По утверждению 3.33, множество T является μ-оболочкой множества S, поэтому

$$\mu(T \setminus B) = \mu\big(T \cap (T \setminus B)\big) = \mu\big(S \cap (T \setminus B)\big) = \mu(S \setminus B) = 0,$$

поэтому $\nu_\mu(T) \leq \nu(B) = \nu_\mu(S)$. С другой стороны, так как $T \supset S$, имеем $\nu_\mu(T) \geq \nu_\mu(S)$.

(9) Выберем произвольное множество $S \subset X$. Так как ν — борелевски регулярна, существует такое $T \in \mathcal{B}(X)$, что $S \subset T$ и $\nu(S) = \nu(T)$. По определению ν_μ, имеем $\nu_\mu(T) \leq \nu(T)$ (так как в качестве B можно выбрать T), поэтому $\nu_\mu(S) \leq \nu_\mu(T) \leq \nu(T) = \nu(S)$. □

Определение 7.4. Говорят, что внешняя мера α на X *абсолютно непрерывна* относительно внешней меры β на X, если для любого $A \subset X$ такого, что $\beta(A) = 0$, выполняется $\alpha(A) = 0$.

В этих терминах утверждение 7.3 (2) можно переформулировать так: *внешняя мера ν_μ всегда абсолютно непрерывна относительно внешней меры μ.*

Теорема 7.5. *Пусть μ и ν — борелевски регулярные внешние меры на метрическом пространстве X, причем X является одновременно счетно μ-измеримым и счетно ν-измеримым. Тогда существует такое $B \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(X \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu = \nu_B$.*

Доказательство. Отметим, что для борелевски регулярной внешней меры на счетно измеримом X всегда существует не более чем счетное покрытие X, состоящее из борелевских множеств конечной меры. Действительно, если $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — покрытие X, составленное из измеримых множеств конечной меры, то для каждого A_n имеется борелевское множество $B_n \supset A_n$ той же меры, поэтому $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ — искомое покрытие.

Пусть $X = \cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty A'_n$, где A_n, $A'_n \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A_n) < \infty$ и $\nu(A'_n) < \infty$ при каждом n. Семейство, составленное из всех непустых $A_n \cap A'_m$, также не более чем счетно, все его элементы — борелевские множества, причем для каждого из них его μ-мера и ν-мера конечны. Тем самым, без ограничения общности, мы будем сразу предполагать, что $X = \cup_{n=1}^\infty A_n$, где $A_n \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A_n) < \infty$ и $\nu(A_n) < \infty$ при каждом n.

Далее, рассмотрим семейство непустых $A'_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$, тогда это семейство дизъюнктно и состоит из борелевских множеств конечной μ-меры, поэтому, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что семейство $\{A_i\}$ дизъюнктно.

Заметим, что если мы докажем теорему для каждого A_n, найдя такое $B_n \in \mathcal{B}(X)$, что $B_n \subset A_n$, $\mu(A_n \setminus B_n) = 0$ и $(\nu_\mu)_{A_n} = \nu_{B_n}$, то $B = \sqcup_{n=1}^\infty B_n$ будет искомым. Действительно,

$$\mu(X \setminus B) = \mu\big(\sqcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus B_n)\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus B_n) = 0,$$

и для любого $S \subset X$, используя 3.21, получаем

$$\nu_\mu(S) = \nu_\mu\big(S \cap \sqcup_{n=1}^\infty A_n\big) = (\nu_\mu)_S\big(\sqcup_{n=1}^\infty A_n\big) = \sum_{n=1}^\infty (\nu_\mu)_S(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu_\mu(S \cap A_n) = \sum_{n=1}^\infty (\nu_\mu)_{A_n}(S) =$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \nu_{B_n}(S) = \sum_{n=1}^\infty \nu(S \cap B_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu_S(B_n) = \nu_S(\sqcup_{n=1}^\infty B_n) = \nu_S(B) = \nu(S \cap B) = \nu_B(S).$$

Итак, теорему достаточно доказать в предположении, что $\mu(X) < \infty$ и $\nu(X) < \infty$. Пусть эти условия выполняются. По 7.3 (7), существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(X \setminus B) = 0$ и для любого $S \in \mathcal{B}(X)$ имеем $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$. Нам осталось проверить, что последнее условие выполняется для любого $S \subset X$, без предположения его борелевости.

Итак, выберем произвольное $S \subset X$. Так как μ и ν — борелевски регулярные внешние меры, существуют $T_1, T_2 \subset \mathcal{B}(X)$ такие, что $S \subset T_1 \cap T_2$, $\mu(S) = \mu(T_1)$ и $\nu(S) = \nu(T_2)$. Положим $T = T_1 \cap T_2$, тогда, как уже было отмечено, $S \subset T$; кроме того, $T \in \mathcal{B}(X)$ и, в силу монотонности, $\mu(S) = \mu(T)$, а $\nu(S) = \nu(T)$.

Так как $\mu(T) \le \mu(X) < \infty$, то применимо 7.3 (8), в силу которого $\nu_\mu(S) = \nu_\mu(T)$, откуда $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap T)$. Так как $\nu(T) \le \nu(X) < \infty$, то применимо 3.33, в соответствии с которым множество T является ν-оболочкой для S, поэтому $\nu(B \cap T) = \nu(S \cap T)$, что и завершает доказательство теоремы. □

Следствие 7.6. *Пусть μ и ν — борелевски регулярные внешние меры на метрическом пространстве X, причем X является счетно μ-измеримым и счетно ν-измеримым. Обозначим через B одноименное множество из теоремы 7.5. Тогда*

(1) *внешняя мера ν_μ — борелевски регулярная, и X — счетно ν_μ-измеримо;*

(2) *функция $\nu - \nu_\mu$ — также борелевски регулярная внешняя мера, причем $\nu - \nu_\mu = \nu_{X \setminus B}$ и X — счетно $(\nu - \nu_\mu)$-измеримо;*

(3) *$\nu = \nu_\mu$, если и только если внешняя мера ν абсолютно непрерывна относительно μ. В частности, $\mu_\mu = \mu$.*

(4) *Если условие счетной измеримости для μ и ν заменить на условие того, что обе этих внешних меры конечны на ограниченных множествах, то последнее условие влечет счетную измеримость (а, значит, для таких внешних меры верны все предыдущие утверждения). Более того, внешние меры ν_μ и $\nu - \nu_\mu$ также будут конечными на ограниченных множествах.*

Доказательство. (1) По теореме 7.5, имеем $\mu(X \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu = \nu_B$. По теореме 3.49, ν_B и, значит, ν_μ являются борелевски регулярными. Так как X — счетно ν-измеримо, то, как было отмечено в доказательстве теоремы 7.5, существует $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(X)$ такое, что $X = \cup_{n=1}^\infty A_n$ и $\nu(A_n) < \infty$ при каждом n. Но тогда $\nu_\mu(A_n) = \nu(B \cap A_n) \le \nu(A_n) < \infty$. Кроме того, при каждом n имеем $A_n \sigma(\nu_\mu)$, так как ν_μ — борелевская внешняя мера, поэтому X — счетно ν_μ-измеримо.

(2) Так как B является ν-измеримым и ν_μ-измеримым, то для любого $S \subset X$ выполняется

$$\nu(S) = \nu(S \cap B) + \nu\big(S \cap (X \setminus B)\big) = \nu_\mu(S) + \nu_{X \setminus B}(S),$$

откуда $\nu_{X \setminus B} = \nu - \nu_\mu$, поэтому, в силу 3.49, $\nu - \nu_\mu$ является борелевски регулярной внешней мерой. То, что X является счетно $(\nu - \nu_\mu)$-измеримым, доказывается так же, как и в пункте (1).

(3) По теореме 7.5, существует такое борелевское множество $B \subset X$, что $\mu(X \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu = \nu_B$. Тогда для произвольного $S \subset X$ имеем $\nu(S) = \nu(S \cap B) + \nu\big(S \cap (X \setminus B)\big) = \nu_\mu(S) + \nu\big(S \cap (X \setminus B)\big)$, поэтому условие $\nu = \nu_\mu$ равносильно тому, что для любого $S \subset X$ выполняется $\nu\big(S \cap (X \setminus B)\big) = 0$. Последнее условие равносильно $\nu(X \setminus B) = 0$. Таким образом, если ν абсолютно непрерывна относительно μ, то $\nu(X \setminus B) = 0$ и, значит, $\nu_\mu = \nu_B$.

Обратно, если $\nu_\mu = \nu_B$, то $\nu(X \setminus B) = 0$ и, значит, $\nu(S) = \nu_\mu(S)$ для любого $S \subset X$. Пусть S таково, что $\mu(S) = 0$, тогда, по 7.3 (2), имеем $\nu_\mu(S) = 0$, откуда $\nu(S) = 0$, что и требовалось.

(4) Условие счетной измеримости вытекает из того, что в качестве элементов A_n не более чем счетного покрытия измеримыми множествами можно взять $A_n = U(x, n)$ для некоторой фиксированной точки $x \in X$. Далее, если $A \subset X$ — ограниченное множество, то $\nu_\mu(A) = \nu_B(A) = \nu(B \cap A) < \infty$ и, следовательно, $\nu(A) - \nu_\mu(A) < \infty$. □

7.2 Производные

Выполняя разные операции над функциями, определенными на некотором множестве X, мы иногда получаем функции, заданные на меньшем множестве. Стандартный пример дает операция деления: если через f обозначить функцию $f(x, y) = x/y$, то, в отличие, скажем, от сложения или умножения, она будет определена не на всем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а лишь на его части $\mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$. Конечно, определяя такую f, можно «честно» написать область определения, которая, впрочем, является очевидной из контекста. Чтобы не отвлекаться на такие «мелочи», мы будем писать $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{p}} \mathbb{R}$ (“p” от “partial”). С подобной операцией мы уже столкнулись: это $f\colon X \xrightarrow{\text{п.в.}} Y$. Однако теперь нам не важна мера множества, на котором функция f не определена.

Определение 7.7. Пусть X и Y — произвольные множества. Будем писать $f\colon X \xrightarrow{\text{p}} Y$, если область определения отображения f, которую мы обозначим через $\operatorname{dom} f$, может быть собственным подмножеством X. Такие f будем называть *частично определенными.*

Определение 7.8. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство подмножеств множества X и $Y \subset X$. Положим

$$\mathcal{F}(Y) = \{A \in \mathcal{F} : A \cap Y \ne \emptyset\}.$$

Если $Y = \{x\}$, то для краткости будем писать $\mathcal{F}(x)$ вместо $\mathcal{F}\big(\{x\}\big)$. Кроме того, если X — метрическое пространство, то для каждого $x \in X$ и $r > 0$ положим $\mathcal{F}_r(x) = \big\{A \in \mathcal{F}(x) : A \subset B(x, r)\big\}$, где, напомним, $B(x, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x.

Обозначение 7.9. Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{F}$ — произвольное семейство его подмножеств, $f\colon 2^X \xrightarrow{\text{p}} [-\infty, \infty]$ — частично определенная функция. Имея в виду соглашение $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$, положим

$$(\mathcal{F}) \limsup_x f = (\mathcal{F}) \limsup_{A \to x} f(A) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup\big\{f(A) : A \in \mathcal{F}_\varepsilon(x) \cap \operatorname{dom} f\big\}.$$

Аналогично определяется $(\mathcal{F}) \liminf_x f$. Если $(\mathcal{F}) \limsup_x f = (\mathcal{F}) \liminf_x f$, то вместо них пишут $(\mathcal{F}) \lim_x f$.

Определение 7.10. Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{F}$ — произвольное семейство его подмножеств, $x \in X$, а μ и ν — произвольные внешние меры на X. Тогда $\nu/\mu\colon 2^X \xrightarrow{\text{p}} [0, \infty]$. Если $(\mathcal{F}) \limsup_x(\nu/\mu) = (\mathcal{F}) \liminf_x(\nu/\mu)$, то положим

$$D(\nu, \mu, \mathcal{F})(x) = (\mathcal{F}) \lim_x(\nu/\mu).$$

Эту величину будем называть ***$\mathcal{F}$-производной внешней меры ν по внешней мере μ в точке $x \in X$.***

7.3 Покрытие Витали

Как правило, в качестве $\mathcal{F}$ рассматривают достаточно специальные семейства. По аналогии с 1.6, дадим определение сгущающегося семейства подмножеств.

Определение 7.11. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство подмножеств метрического пространства X и $x \in X$. Назовем $\mathcal{F}$ *сгущающимся в точке* x, если для каждого $r > 0$ существует такое $A \in \mathcal{F}$, что $x \in A \subset B(x, r)$. Таким образом, $\mathcal{F}$ сгущается в x, если и только если $\mathcal{F}_r(x) \neq \emptyset$ при каждом $r > 0$.

Определение 7.12. Пусть на метрическом пространстве X задана внешняя мера μ. Семейство $\mathcal{V}$ подмножеств X называется *μ-покрытием Витали*, если

(1) $X = \cup \mathcal{V}$ (семейство $\mathcal{V}$ является покрытием),

(2) $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}(X)$ (все множества семейств $\mathcal{V}$ — борелевские),

(3) семейство $\mathcal{V}$ сгущается в каждой точке $x \in X$, и

(4) для любого $Z \subset X$ и для любого $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ таких, что $\mathcal{C}(Z)$ сгущается в каждой точке $z \in Z$, в $\mathcal{C}$ имеется не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{D}$, для которого $\mu(Z \setminus \sqcup \mathcal{D}) = 0$.

Пример 7.13. Пусть μ — продолжение Лебега n-мерной меры Лебега и $\delta > 0$. Тогда семейство $\mathcal{V}$, составленное из всех замкнутых невырожденных шаров, радиусы которых не превосходят δ, является μ-покрытие Витали в силу теоремы 2.30 (проверьте).

7.4 Существование производной почти всюду

Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{R}(X)$ — множество всех борелевски регулярных внешних мер на X, причем таких, что мера каждого ограниченного множества конечна.

Замечание 7.14. По 7.6 (4), для любых $\mu, \nu \in \mathcal{R}(X)$ имеем $\nu_\mu \in \mathcal{R}(X)$ и $\nu - \nu_\mu \in \mathcal{R}(X)$. Кроме того, как было отмечено в доказательстве этого пункта, в качестве элементов не более чем счетного покрытия множества X измеримыми множествами конечной меры можно выбрать открытые шары. Тем самым, для всех мер из $\mathcal{R}(X)$ применимо 3.41 (2), а также все утверждения раздела 7.1.

Предложение 7.15. *Пусть $\mu, \alpha, \beta \in \mathcal{R}(X)$, $0 < c < \infty$, и $\mathcal{V}$ — μ-покрытия Витали. Тогда для любого $A \subset \big\{x : (\mathcal{V}) \liminf_x(\alpha/\beta) < c\big\}$ имеем $\alpha_\mu(A) \le c\, \beta_\mu(A)$.*

Доказательство. По определению меры β_μ, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\beta(B) \le \beta_\mu(A) + \varepsilon/2$. По замечанию 7.14, существует такое открытое множество $W \supset B$, что $\beta(W) \le \beta(B) + \varepsilon/2$. Таким образом, в силу монотонности внешней меры, $\mu(A \setminus W) \le \mu(A \setminus B) = 0$, т.е. $\mu(A \setminus W) = 0$, и $\beta(W) \le \beta_\mu(A) + \varepsilon$. По 7.3 (3), имеем также $\alpha_\mu(A) = \alpha_\mu(A \cap W)$.

Положим $\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{V} : S \subset W, \alpha(S)/\beta(S) < c\}$. Покажем, что $\mathcal{C}$ сгущается во всех точках $x \in A \cap W$. Действительно, в каждой такой точке конечен нижний предел $\liminf_x(\alpha/\beta)$, поэтому $\mathcal{V}(x)$ сгущается в x. Существует $\varepsilon > 0$, для которого $U_\varepsilon(x) \subset W$ и для всех $\delta \le \varepsilon$ существует $S \in \mathcal{V}(x)$ такое, что $S \subset U_\delta(x)$ и $\alpha(S)/\beta(S) < c$, т.е. $S \in \mathcal{C}_\delta(x)$. Тем самым, $\mathcal{C}$ сгущается в каждой точке $x \in A \cap W$.

По определению μ-покрытия Витали, в $\mathcal{C}(A \cap W)$ имеется такое не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{G}$, что $\mu\big((A \cap W) \setminus \sqcup \mathcal{G}\big) = 0$, откуда, по определению α_μ, имеем $\alpha_\mu(A \cap W) \le \alpha(\sqcup \mathcal{G})$. Из сказанного выше, из борелевости внешних мер α и β, а также из того, что $\sqcup \mathcal{G} \subset W$, вытекает, что

$$\alpha_\mu(A) = \alpha_\mu(A \cap W) \le \alpha(\sqcup \mathcal{G}) = \sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha(S) \le c \sum_{S \in \mathcal{G}} \beta(S) = c\, \beta(\sqcup \mathcal{G}) \le c\, \beta(W) \le c\, \big[\beta_\mu(A) + \varepsilon\big].$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. □

Следствие 7.16. *Для любых $\alpha, \mu \in \mathcal{R}(X)$, любого μ-покрытия Витали $\mathcal{V}$ и любого $0 < c < \infty$ имеем*

(1) *для любого $A \subset \{x \in X : (\mathcal{V}) \liminf_x(\alpha/\mu) < c\}$, выполнено $\alpha_\mu(A) \le c\, \mu(A)$;*

(2) *для любого $A \subset \{x \in X : (\mathcal{V}) \limsup_x(\alpha/\mu) > c\}$, выполнено $\alpha_\mu(A) \ge c\, \mu(A)$.*

Доказательство. По 7.6 (3), имеем $\mu_\mu = \mu$, так что (1) вытекает из 7.15.

Для доказательства (2) достаточно заметить, что неравенство $(\mathcal{V})\limsup_x(\alpha/\mu) > c$ влечет $(\mathcal{V})\liminf_x(\mu/\alpha) < 1/c$. Действительно, по определению $(\mathcal{V})\limsup$, существует такое $r > 0$, что при каждом $0 < \varepsilon < r$ в $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ содержится S_ε, для которого $\alpha(S_\varepsilon)/\mu(S_\varepsilon) > c$. Но тогда для тех же r и ε выполняется $\mu(S_\varepsilon)/\alpha(S_\varepsilon) < 1/c$, откуда и вытекает требуемое. □

Теорема 7.17. *Для любых μ, $\nu \in \mathcal{R}(X)$ и произвольного μ-покрытия Витали имеем*

$$0 \overset{n.в.}{\leq} D(\nu, \mu, \mathcal{V}) \overset{n.в.}{<} \infty,$$

где «почти всюду» понимается в смысле меры μ.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{V} : \mu(S) = 0\},$$
$$P = \{x \in X : \mathcal{C} \text{ сгущается в } x\},$$
$$Q = \{x \in X : (\mathcal{V})\limsup_x(\nu/\mu) = \infty\},$$

и

$$R(a,b) = \big\{x \in X : (\mathcal{V})\liminf_x(\nu/\mu) < a < b < (\mathcal{V})\limsup_x(\nu/\mu)\big\}.$$

Заметим, что производная $D(\nu, \mu, \mathcal{V})$ не определена или равна ∞ в точности на объединении P, Q и всех $R(a, b)$, соответствующих парам рациональных чисел $a < b$.

Так как $\mathcal{C}$ сгущается в каждой точке $x \in P$, то, по определению 7.12, существует дизъюнктное не более чем счетное подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, для которого $\mu(P \setminus \sqcup\mathcal{G}) = 0$. Так как $\mathcal{G}$ состоит из множеств μ-меры 0, имеем $\mu(\sqcup\mathcal{G}) = 0$, поэтому $\mu(P) \leq \mu(P \setminus \sqcup\mathcal{G}) + \mu(\sqcup\mathcal{G}) = 0$.

Пусть $A \subset Q$ — произвольное ограниченное подмножество, тогда $\nu_\mu(A) < \infty$ по 7.6 (4). С другой стороны, в силу 7.16 (2), для любого $0 < c < \infty$ выполняется $\nu_\mu(A) \geq c\,\mu(A)$. Произвольность c влечет $\mu(A) = 0$. Полагая $A_n = Q \cap U(x, n)$ и замечая, что $Q = \cup_{n=1}^\infty A_n$, получаем $\mu(Q) \leq \sum \mu(A_n) = 0$.

Наконец, выберем произвольное ограниченное $A \subset R(a, b)$. Из 7.16 вытекает, что

$$b\,\mu(A) \leq \nu_\mu(A) \leq a\,\mu(A) < \infty.$$

Но $a < b$, поэтому $\mu(A) = 0$ и, аналогично доказанному выше, имеем $\mu\big(R(a, b)\big) = 0$. □

Предложение 7.18. *Для произвольных μ, $\nu \in \mathcal{R}(X)$ и μ-покрытия Витали $\mathcal{V}$, функция $f = D(\nu, \mu, \mathcal{V})$ является μ-измеримой.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся 6.11. Для этого выберем произвольные $0 < a < b < \infty$. Мы должны показать, что для любого $T \subset X$ выполняется $\mu(T) \geq \mu\big(T \cap \{f < a\}\big) + \mu\big(T \cap \{f > b\}\big)$. В силу монотонности, это неравенство достаточно проверить для тех T, которые содержатся в $\{f < a\} \sqcup \{f > b\}$. Пусть мы выбрали такое T. Фиксируем $x \in X$ и положим $C_n = U(x, n)$, тогда $X = \cup_{n=1}^\infty C_n$ и $C_n \in \mathcal{B}(X)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A = T \cap \{f < a\}$, $B = T \cap \{f > b\}$, $A_n = A \cap C_n$, $B_n = B \cap C_n$, $T_n = T \cap C_n$, тогда T_n, A_n и B_n — ограниченные и $T_n = A_n \sqcup B_n$. В силу 3.21 и 3.18 (5), имеем

$$\mu(A_n) = \mu(A \cap C_n) = (\mu \llcorner A)(C_n) \to (\mu \llcorner A)(\cup_{n=1}^\infty C_n) = (\mu \llcorner A)(X) = \mu(A).$$

Аналогично доказывается, что $\mu(B_n) \to \mu(B)$ и $\mu(T_n) \to \mu(T)$. Таким образом, нам достаточно показать, что $\mu(T_n) \geq \mu(A_n) + \mu(B_n)$, т.е. проверить неравенство для ограниченных A_n, B_n и T_n.

Итак, пусть $A \subset \{f < a\}$, $B \subset \{f > b\}$ — ограниченные множества. Мы должны показать, что $\mu(A \sqcup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$. Так как μ, ν и μ_ν — борелевски регулярные, существуют такие борелевские $A' \supset A$ и $B' \supset B$, что $\mu(A') = \mu(A)$, $\nu(A') = \nu(A)$, $\nu_\mu(A') = \nu_\mu(A)$ и аналогично для B и B' (то, что A' и B' можно выбрать одними и теми же для всех внешних мер, мы уже показывали, например, в доказательстве теоремы 7.5).

По 3.33, A' является ν_μ- и μ-оболочкой A, а B' — ν_μ- и μ-оболочкой B, поэтому $\nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A \cap B') = \nu_\mu(A' \cap B)$ и $\mu(A' \cap B') = \mu(A \cap B') = \mu(A' \cap B)$. Применяя 7.16, заключаем, что

$$\nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A \cap B') \leq a\,\mu(A \cap B') = a\,\mu(A' \cap B'),$$
$$\nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A' \cap B) \geq b\,\mu(A' \cap B) = b\,\mu(A' \cap B'),$$

и так как $a < b$ заключаем, что $\mu(A' \cap B') = 0$. Вспоминая, что $A \cup B \subset A' \cup B'$ и что A', $B' \in \mathcal{B}(X)$, получаем

$$\mu\big((A \cup B) \cap B'\big) = \mu\big((A \cup B) \cap (B' \cap A')\big) + \mu\big((A \cup B) \cap (B' \setminus A')\big) = \mu\big((A \cup B) \cap (B' \setminus A')\big),$$

следовательно,

$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap A'\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus A'\big) = \mu\big((A \cup B) \cap A'\big) + \\ + \mu\big((A \cup B) \cap (B' \setminus A')\big) = \mu\big((A \cup B) \cap A'\big) + \mu\big((A \cup B) \cap B'\big) \geq \mu(A) + \mu(B).$$

□

Замечание 7.19. Предложение 7.18, вместе с 5.25 (2), гарантирует μ-интегрируемость функции $D(\nu, \mu, \mathcal{V})$.

Определение 7.20. Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, $A \subset X$ и $f\colon X \xrightarrow{\text{p}} [-\infty, \infty]$ такова, что $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} \operatorname{dom} f$ и функция $f\,\chi_A$ — μ-интегрируема. Тогда определено выражение $\int_A f\,d\mu = \int f\,\chi_A\,d\mu$, которое называется *интегралом Лебега функции f по множеству A*.

Замечание 7.21. Пусть на множестве X с произвольной внешней мерой μ задана μ-измеримая функция $f\colon X \to [0, \infty]$, и $A = \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \sigma(\mu)$ при всех n. Тогда $\int_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu$. Действительно, по определению $\int_{A_n} f\,d\mu = \int f\,\chi_{A_n}\,d\mu$ и $\int_A f\,d\mu = \int f\,\chi_A\,d\mu$. Осталось применить 5.32.

Теорема 7.22. *Пусть X — метрическое пространство, μ, $\nu \in \mathcal{R}(X)$, $A \subset X$ — μ-измеримое, $\mathcal{V}$ — μ-покрытие Витали. Тогда множество A также ν_μ-измеримо и*

$$\nu_\mu(A) = \int_A D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

Доказательство. Нам понадобится обобщить ряд утверждений, имеющих место для множеств конечной меры, на произвольные подмножества X в предположении, что внешняя мера принадлежит $\mathcal{R}(X)$. Для этого мы несколько раз будем использовать следующую конструкцию.

Фиксируем некоторую точку $x \in X$ и положим $C_n = \big\{y \in X : n - 1 \leq |xy| < n\big\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое C_n ограничено, поэтому $\mu(C_n) < \infty$ и $X = \sqcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Докажем первое утверждение, т.е. что множество A является ν_μ-измеримым.

Пусть $A_n = A \cap C_n$, тогда A_n — также ограничено и $\mu(A_n) < \infty$. По 3.47, существует такое $D_n \in \mathcal{B}(X)$, что $D_n \subset A_n$ и $\mu(A_n \setminus D_n) = 0$. Положим $D = \cup D_n$, тогда $D \in \mathcal{B}(X)$ и

$$\mu(A \setminus D) = \mu\Big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \cup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) \leq \mu\Big(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus D_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus D_n) = 0.$$

В силу 7.3 (2), $\nu_\mu(A \setminus D) = 0$ и, значит, $A \setminus D \in \sigma(\nu_\mu)$. Но по 7.3 (6), $D \in \sigma(\nu_\mu)$, поэтому $A = D \cup (A \setminus D) \in \sigma(\nu_\mu)$.

Докажем теперь второе утверждение. Положим

$$Z = \big\{D(\nu, \mu, \mathcal{V}) = 0\big\} \text{ и } W = \big\{D(\nu, \mu, \mathcal{V}) = \infty\big\},$$

тогда, в силу 7.17, множества Z и W являются μ-измеримыми. Пусть $Z_n = Z \cap C_n$, тогда $\mu(Z_n) < \infty$. По 7.16 (1), для любого $0 < c < \infty$ имеем $\nu_\mu(Z_n) \leq c\,\mu(Z_n)$, откуда $\nu_\mu(Z_n) = 0$. Из σ-субаддитивности внешней меры вытекает, что и $\nu_\mu(Z) = 0$, таким образом

$$\nu_\mu(Z) = 0 = \int_Z D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

Далее, по 7.17, $\mu(W) = 0$, поэтому можно считать, что $D(\nu, \mu, \mathcal{V})|_W \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Кроме того, по 7.3 (2) имеем $\nu_\mu(W) = 0$, так что

$$\nu_\mu(W) = 0 = \int_W D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

Выберем теперь произвольное $1 < t < \infty$ и положим $P_n = A \cap \{t^n \leq D(\nu, \mu, \mathcal{V}) < t^{n+1}\}$, тогда все P_n являются μ-измеримыми и $A \setminus (Z \sqcup W) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n$. Кроме того, по первому утверждению этой теоремы, все P_n являются также ν_μ-измеримыми. Из 7.16 вытекает, что

$$t^n \mu(P_n) \leq \nu_\mu(P_n) \leq t^{n+1} \mu(P_n)$$

(формально говоря, левое неравенство выполнено для $(t^n - \varepsilon)\mu(P_n)$ при каждом $0 < \varepsilon < \tau^n$, поэтому оно имеет место и при $t^n \mu(P_n)$). Использую замечание 7.21, а также 5.25 (6), получаем

$$\nu_\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{n+1}\mu(P_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t \int_{P_n} t^n \, d\mu \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} t \int_{P_n} D(\nu,\mu,\mathcal{V})\, d\mu = t \int_A D(\nu,\mu,\mathcal{V})\, d\mu,$$

и

$$\nu_\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n) \ge \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{n}\mu(P_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_{P_n} t^{n+1} \, d\mu \ge \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_{P_n} D(\nu,\mu,\mathcal{V})\, d\mu = \frac{1}{t} \int_A D(\nu,\mu,\mathcal{V})\, d\mu.$$

Осталось воспользоваться произвольностью t. □

Упражнение 7.23. Пусть $\mu \in \mathcal{R}(X)$, $\mathcal{V}$ — μ-покрытие Витали и $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ — произвольная μ-измеримая функция такая, что для каждого ограниченного μ-измеримого $A \subset X$ функция $f|_A$ — μ-суммируема. Докажите, что для μ-почти всех $x \in X$ выполняется

$$f(x) = (\mathcal{V}) \lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f\, d\mu.$$

Упражнение 7.24. Пусть X — метрическое пространство, μ, $\nu \in \mathcal{R}(X)$. Тогда

(1) если $\mathcal{V}$ — μ-покрытие Витали, то

$$D(\nu_\mu,\mu,\mathcal{V}) \overset{\text{п.в.}}{=} D(\nu,\mu,\mathcal{V}) \text{ и } D(\nu-\nu_\mu,\mu,\mathcal{V}) \overset{\text{п.в.}}{=} 0;$$

(2) если $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ — μ-покрытия Витали, то

$$D(\nu_\mu,\mu,\mathcal{V}_1) \overset{\text{п.в.}}{=} D(\nu_\mu,\mu,\mathcal{V}_2).$$

Тема 8

Мера Хаусдорфа и хаусдорфова размерность.

На протяжении всего этого раздела X обозначает метрическое пространство.

8.1 Определение меры Хаусдорфа

Напомним, что *гамма-функция*, введенная в рассмотрение Эйлером и Лежандром, определяется следующим образом:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx.$$

Для натурального t имеем $\Gamma(t) = (t-1)!$. Для нас важно, что в терминах гамма-функции вычисляется объем шара в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, а именно, объем шара радиуса R равен $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} R^k$.

Для каждого, не обязательно целого, $k \in [0, \infty)$ величину $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$ обозначим через ω_k. Таким образом, для для $k = 0$ имеем $\omega_0 = 1$, а для натуральных k число ω_k равно объему единичного шара в $\mathbb{R}^k$, в частности, $\omega_1 = 2$.

Определение 8.1. Для $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset X$ семейство $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ назовем *δ-покрытием множества* A, если $A \subset \cup_{i \in I} A_i$ и $\operatorname{diam} A_i < \delta$ при всех $i \in I$.

Соглашение 8.2. В приводимом ниже определении мы используем естественное допущение $\operatorname{diam} \emptyset = 0$, что соответствует определению диаметра множества A как точной верхней грани **множества** всех расстояний между точками из A (в случае $A = \emptyset$ это множество расстояний также равно $\emptyset$) и тем, что $\sup \emptyset = 0$.

Определение 8.3. Для каждых $\delta \in (0, \infty]$, $k \in (0, \infty)$ и $A \subset X$ положим

$$H^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k \;\middle|\; \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ — } \delta\text{-покрытие } A \right\}, \tag{8.1}$$

$$H^k(A) = \sup_{\delta > 0} H^k_\delta(A). \tag{8.2}$$

Замечание 8.4. Так как для $A_i = \emptyset$ выполнено $(\operatorname{diam} A_i)^k = 0$, то сумма в правой части формулы (8.1) не поменяется, если такие A_i исключить из суммирования. Последнее приводит к тому, что при определении H^k_δ можно рассматривать не только счетные, но и не более чем счетные δ-покрытия. Также, учитывая, что для любой функции $f\colon I \to [0, \infty]$ при пустом I имеем $\sum_I f = 0$, мы может рассматривать и пустые δ-покрытия $\{A_i\}_{i \in I}$ (для пустого множества A).

Таким образом, определение 8.3 эквивалентно следующему: для каждых $\delta \in (0, \infty]$, $k \in (0, \infty)$ и $A \subset X$ положим

$$H^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\left\{ \sum_{i \in I} (\operatorname{diam} A_i)^k \;\middle|\; \{A_i\}_{i \in I} \text{ — не более чем счетное } \delta\text{-покрытие } A \right\},$$

и

$$H^k(A) = \sup_{\delta>0} H^k_\delta(A).$$

Замечание 8.5. При вычислении $H^k_\delta(A)$ можно ограничиться лишь теми счетными (или не более чем счетными) δ-покрытиями $\{A_i\}$ множества A, в которых каждый непустой элемент A_i пересекает A.

Замечание 8.6. При вычислении $H^k_\delta(A)$ можно ограничиться лишь теми счетными (или не более чем счетными) δ-покрытиями $\{A_i\}$ множества A, в которых каждый элемент A_i — замкнутое подмножество X. Это мгновенно вытекает из того, что у подмножества и его замыкания диаметры одинаковы.

Замечание 8.7. Так как при уменьшении δ множество δ-покрытий для A уменьшается, то H^k_δ монотонно растет при убывании δ, так что $\sup_{\delta>0} H^k_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A)$.

Замечание 8.8. Напомним, что подмножество A метрического пространства называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор $\{a_1, \dots, a_m\} \subset A$ такой, что $\bigl\{U_\varepsilon(a_i)\bigr\}_{i=1}^m$ — покрытие A. Ясно, что для вполне ограниченного $A \subset X$, любого $k \in (0,\infty)$ и любого $\delta > 0$ имеем $H^k_\delta(A) < \infty$.

Теорема 8.9. *Для каждого $k \in (0,\infty)$ и любого $\delta \in (0,\infty]$*

(1) *обе H^k_δ и H^k являются внешними мерами на X;*

(2) *внешняя мера H^k — борелевская;*

(3) *внешняя мера H^k_δ борелевской, вообще говоря, не является;*

(4) *внешняя мера H^k — борелевски регулярная;*

(5) *если $H^k(A) > 0$, то для всех $p < k$ имеем $H^p(A) = \infty$;*

(6) *если $H^k(A) < \infty$, то для всех $p > k$ имеем $H^p(A) = 0$.*

Доказательство. (1) Рассмотрим произвольное множество $A \subset X$, его покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, а также $\delta \in (0,\infty]$ и $k \in (0,\infty)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие δ-покрытия $\{A_{ij}\}_{j=1}^\infty$ множеств A_i, что

$$\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ij})^k \le H^k_\delta(A_i) + \varepsilon^i.$$

Но тогда семейство $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ является также δ-покрытием A, и для $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется

$$H^k_\delta(A) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i,j=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ij})^k \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \sum_{j=1}^\infty H^k_\delta(A_i).$$

Так как ε можно выбрать сколько угодно малым, то функция H^k_δ субаддитивна.

Заметим также, что $H^k_\delta(\emptyset) = 0$, так как A можно покрыть семейством пустых множеств, а диаметр пустого множества равен нулю (см. соглашение 8.2). Таким образом, H^k_δ является (внешней) мерой при любых k и δ. Предельный переход при $\delta \to 0+$ дает нам, что и H^k является внешней мерой.

(2) Используем критерий Каратеодори (теорема 3.40). Пусть A и B — отделимые подмножества X, и $\delta = |AB|$. Тогда каждое X_i, для которого $\operatorname{diam} X_i < \delta$, не может пересекать A и B одновременно. В силу замечания 8.5, при вычислении $H^k_\delta(A\cup B)$ мы можем ограничиться лишь теми δ-покрытиями $\{X_i\}$, в которых каждый X_i пересекает $A\cup B$. Но каждое такое покрытие распадается в дизъюнктное объединение покрытия A и покрытия B, так что, переходя к точной нижней грани, получаем $H^k_\delta(A\cup B) = H^k_\delta(A) + H^k_\delta(B)$. Выполнив предельный переход при $\delta \to 0+$, заключаем, что $H^k(A\cup B) = H^k(A) + H^k(B)$, и, в силу произвольности выбора отделимых A и B и теоремы 3.40, убеждаемся в борелевости H^k.

(3) Пусть $X = \mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость со стандартной функцией расстояния и декартовыми координатами x, y. Положим $A = \bigl\{(x,y) : y > 0\bigr\}$, тогда A — борелевское (открытое) подмножество $\mathbb{R}^2$. В качестве F возьмем границу квадрата $\bigl\{(x,y) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\bigr\}$, и пусть $\delta = 4$.

Лемма 8.10. *Для любого связного ограниченного подмножества A метрического пространства X и любого $\delta > \operatorname{diam} A$ имеем $H^1_\delta(A) = \operatorname{diam} A$.*

Доказательство. Действительно, семейство $\{A\}$ является δ-покрытием A, поэтому $H^1_\delta(A) \le \operatorname{diam} A$. С другой стороны, так как A — связно, но $H^1_\delta(A) \ge \operatorname{diam} A$ (докажите!). $\square$

В силу леммы 8.10, $H^1_4(F) = \operatorname{diam} F = 2\sqrt{2}$, $H^1_4(F \cap A) = \operatorname{diam}(F \cap A) = \sqrt{5}$ и $H^1_4(F \setminus A) = \operatorname{diam}(F \setminus A) = \sqrt{5}$, поэтому $H^1_4(F) \ne H^1_4(F \cap A) + H^1_4(F \setminus A)$.

(4) Выберем произвольное $A \subset X$ и построим борелевское $B \supset A$ такое, что $H^k(A) = H^k(B)$. Если $H^k(A) = \infty$, то в качестве B можно взять X.

Пусть $H^k(A) < \infty$. В силу замечания 8.6, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $(1/n)$-покрытие $\{A_{ni}\}_{i=1}^\infty$ множества A замкнутыми подмножествами A_{ni} пространства X такое, что

$$\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k \le H^k_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Положим $A_n = \cup_{i=1}^\infty A_{ni}$ и $B = \cap_{n=1}^\infty A_n$, тогда B — борелевское множество, $A \subset A_n$ при всех n, $A \subset B$ и

$$H^k_{1/n}(B) \le H^k_{1/n}(A_n) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k \le H^k_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $H^k(B) \le H^k(A)$, но так как $A \subset B$, выполняется противоположное неравенство и, значит, $H^k(B) = H^k(A)$.

(5) Выберем произвольное $\delta \in (0,1)$ и $A \subset X$. Рассмотрим любое δ-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A и заметим, что

$$(\operatorname{diam} A_i)^k = (\operatorname{diam} A_i)^{k-p}(\operatorname{diam} A_i)^p \le \delta^{k-p}(\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Переходя к точной нижней грани по δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, заключаем, что $H^k_\delta(A) \le \delta^{k-p} H^p_\delta(A)$. Если $H^p(A) < \infty$, то $H^p_\delta(A) \le H^p(A) < \infty$ при всех δ, поэтому $\delta^{k-p}H^p_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$, так что $H^k(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A) = 0$, противоречие.

(6) Выберем произвольное $\delta \in (0,1)$ и $A \subset X$. Рассмотрим любое δ-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A и заметим, что

$$(\operatorname{diam} A_i)^p = (\operatorname{diam} A_i)^{p-k}(\operatorname{diam} A_i)^k \le \delta^{p-k}(\operatorname{diam} A_i)^k.$$

Переходя инфимуму по δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, заключаем, что $H^p_\delta(A) \le \delta^{p-k} H^k_\delta(A)$. Так как $H^k_\delta(A) \le H^k(A) < \infty$, то $\delta^{p-k}H^k_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$, поэтому $H^p_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$ и, значит, $H^p(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^p_\delta(A) = 0$. $\square$

Определение 8.11. Число $H^k(A)$ называется *k-мерной мерой Хаусдорфа множества A.*

Пример 8.12. Пусть $X = \mathbb{R}$ — евклидова прямая, тогда $H^1_\delta = H^1$ — это внешняя мера Лебега L^1. Действительно, так как движение сохраняет диаметры множеств, каждая мера H^k_δ, а, значит, и H^k, на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно движений, поэтому H^n_δ и H^n пропорциональны мере Лебега L^n. Чтобы доказать совпадение мер H^1_δ и H^1 с мерой Лебега L^1 на $\mathbb{R}$, достаточно показать, что их значения на единичном отрезке I равны 1.

Пусть A — произвольное замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$. Так как A компактно, существуют $x, y \in A$ такие, что $\operatorname{diam} A = |xy|$. Но тогда $A \subset [x,y]$. Из монотонности меры заключаем, что $L^1(A) \le L^1\big([x,y]\big) = y - x = \operatorname{diam} A$.

Замечание 8.13. Аналогичное неравенство имеет место и для произвольного $n \in \mathbb{N}$, а именно, для $A \subset \mathbb{R}^n$ выполняется $L^n(A) \le \frac{\omega_n}{2^n}(\operatorname{diam} A)^n$. Последнее неравенство называется *изодиаметрическим.* С помощью него можно показать, что $H^n_\delta = H^n = L^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Вернемся к одномерной мере Хаусдорфа. Замечание 8.6 позволяет нам при вычислении $H^1_\delta(I)$ ограничиться лишь теми δ-покрытиями $\{A_i\}$, в которых все элементы A_i компактны. Тогда для каждого такого покрытия имеем

$$L^1(I) \le L^1(\cup A_i) \le \sum L^1(A_i) \le \sum \operatorname{diam} A_i.$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким $\{A_i\}$, получаем $L^1(I) \le H^1_\delta(I)$.

С другой стороны, разбив I на последовательные отрезки I_p длины меньше δ, получаем

$$H^1_\delta(I) \le \sum \operatorname{diam} I_p = \sum L^1(I_p) = L^1(I).$$

Таким образом, при каждом δ имеем $H^1_\delta(I) = L^1(I)$, откуда и $H^1(I) = L^1(I)$ и, значит, $H^1 = L^1$.

Из теоремы 8.9 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 8.14. *Для любого $A \subset X$ имеем*:

(1) *или $H^k(A) = \infty$ при всех $k \in (0, \infty)$,*

(2) *или $H^k(A) = 0$ при всех $k \in (0, \infty)$,*

(3) *или существует и единственно $k \in (0, \infty)$ такое, что $H^p(A) = 0$ при всех $p > k$ и $H^p(A) = \infty$ при всех $p < k$.*

Таким образом,

$$\inf\{k : H^k(A) = 0\} = \inf\{k : H^k(A) < \infty\} = \sup\{k : H^k(A) = \infty\} = \sup\{k : H^k(A) > 0\}.$$

Определение 8.15. Число $\inf\{k : H^k(A) = 0\}$ называется *хаусдорфовой размерностью множества* A и обозначается через $\dim_H A$.

Замечание 8.16. Эквивалентные определения хаусдорфовой размерности получаются из заключительной части следствия 8.14.

Замечание 8.17. На самом деле, меры Хаусдорфа H^k могут быть определены и для $k = 0$. При этом окажется, что H^0 — считающая мера, введенная нами в пункте (2) примера 2.18. В различных текстах, посвященных геометрической теории меры, мера H^0 определяется вместе со всеми остальными H^k, однако такой подход приводит к многочисленным неприятностям. Обсуждение возникающих на этом пути проблем см. в [15]. В том же [15] предлагается некоторый способ общего определения мер H^k для всех $k \in [0, \infty)$, который, в отличие от традиционного [12], не требует, чтобы элементы покрытий $\{A_i\}$ были непустыми, и позволяет ограничиться только счетными покрытиями. Приведем построения из [12] и [15].

Опишем сначала классическую конструкцию Каратеодори [12], позволяющую строить многие известные внешние меры единым способом. В этой конструкции фиксируются

(1) произвольное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств X;

(2) произвольная функцию $\zeta\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$.

Затем определяются δ-покрытия с учетом того, что элементы этих покрытий должны лежать в $\mathcal{F}$. А именно, для каждого $A \subset X$ и $\delta \in (0, \infty]$ подсемейство $G \subset \mathcal{F}$ назовем *δ-покрытием* A, если $A \subset \cup_{S \in G} S$ и $\operatorname{diam} S < \delta$ для всех $S \in G$. Положим

$$\phi_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{S \in G} \zeta(S) : G \text{ является } \textbf{не более чем счетным } \delta\text{-покрытием } A\Big\}. \tag{8.3}$$

Так как для $0 < \delta < \sigma \le \infty$ выполняется $\phi_\delta \ge \phi_\sigma$, то для каждого $A \subset X$ имеем

$$\psi(A) := \sup_{\delta > 0} \phi_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0+} \phi_\delta(A). \tag{8.4}$$

Приведенное построение функции $\psi\colon 2^X \to [0, \infty]$ и называется *конструкцией Каратеодори.* Далее в [12], с помощью этой конструкции, для каждого $k \in [0, \infty)$ определяются функции H^k следующим образом: в качестве $\mathcal{F}$ выбирается семейство всех **непустых** множеств $S \subset X$; функция ζ задается так:

$$\zeta(S) = \frac{\omega_k}{2^k} (\operatorname{diam} S)^k.$$

При этом (неявно) предполагается, что $0^0 = 1$.

В [15] было предложено подправить конструкцию Каратеодори следующим образом:

(1) отказаться от того, чтобы каждое $S \in \mathcal{F}$ было непустым, и вместо этого положить $\mathcal{F} = 2^X$;

(2) заменить $\zeta\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ на функцию $\zeta\colon 2^X \times [0, \infty) \to [0, \infty]$, удовлетворяющую следующим условиям:

   (a) $\zeta(\emptyset, k) = 0$ для любого $k \in [0, \infty)$;

   (b) $\zeta\big(\{x\}, 0\big) = 1$ для любого $x \in X$;

(c) $\zeta(\{x\},k) = 0$ для любого $x \in X$ и любого $k \in (0,\infty)$;

(d) $\zeta(S,k) = (\omega_k/2^k)(\operatorname{diam} S)^k$ для любого непустого неодноточечного $S \subset X$ и любого $k \in [0,\infty)$.

Для каждого $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty]$ семейство G произвольных (возможно, и пустых) подмножеств пространства X назовем *δ-покрытием* A, если $A \subset \cup_{S\in G} S$ и $\operatorname{diam} S < \delta$ для всех $S \in G$.

Теперь применение модифицированной конструкции Каратеодори дает желаемый результат, если положить

$$H^k_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{S\in G} \zeta(S,k) : G \text{ — } \textbf{счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\}, \tag{8.5}$$

$$H^k(A) = \sup_{\delta>0} H^k_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A). \tag{8.6}$$

При таком определении мы сохранили бесконечность покрытий G и свойство H^0 быть считающей мерой. Пустое множество можно теперь покрыть бесконечным семейством пустых множеств, а это, в силу условия $\zeta(\emptyset,k) = 0$, даст нам $H^k(\emptyset) = 0$ при всех $k \in [0,\infty)$.

Замечание 8.18. Так как для $S = \emptyset$ выполняется $\zeta(S,k) = 0$, то сумма в правой части формулы (8.5) не поменяется, если такие S исключить из суммирования. Последнее приводит к тому, что при определении H^k_δ можно рассматривать не только бесконечные счетные, но и конечные δ-покрытия. Также, учитывая, что для любой функции $f\colon G \to [0,\infty]$ при пустом G имеем $\sum_G f = 0$, мы может рассматривать и пустые δ-покрытия G (для пустого множества A).

Таким образом, получаем эквивалентное определение меры Хаусдорфа: для каждых $\delta \in (0,\infty]$, $k \in [0,\infty)$ и $A \subset X$ положим

$$H^k_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{S\in G} \zeta(S,k) : G \text{ — } \textbf{не более чем счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\},$$

и

$$H^k(A) = \sup_{\delta>0} H^k_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A).$$

Легко видеть, что при $k > 0$ наше определение эквивалентно данному выше определению 8.3.

8.2 Плотности

В ряде случаев возникает необходимость сравнения некоторой внешней меры μ с мерой Хаусдорфа H^k, в частности, требуется выяснить, в каких точках пространства мера μ сильнее сконцентрирована, а в каких — слабее. Для этого изучают предельные значения отношения $\mu\big(B_r(x)\big)/(\omega_k r^k)$ при $r \to \emptyset+$. Также интерес представляет соответствие этих мер не на всем пространстве, а на некотором подмножестве. Так возникает понятие плотности внешней меры и, как частный случай, плотности подмножества метрического пространства.

Определение 8.19. Для внешней меры μ на метрическом пространстве X, числа $k \in (0,\infty)$, подмножества $A \subset X$ и точки $x \in X$ положим

$$\overline{\Theta}_k(\mu,A,x) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\mu\big(B_r(x)\cap A\big)}{\omega_k\, r^k},$$

$$\underline{\Theta}_k(\mu,A,x) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\mu\big(B_r(x)\cap A\big)}{\omega_k\, r^k}.$$

Величины $\overline{\Theta}_k(\mu,A,x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu,A,x)$ называются соответственно *верхней* и *нижней k-мерными плотностями внешней меры $\mu \llcorner A$ в точке x*. Если $A = X$, то, для краткости, величины $\overline{\Theta}_k(\mu,X,x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu,X,x)$ обозначаются через $\overline{\Theta}_k(\mu,x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu,x)$ и называются *верхней* и *нижней k-мерными плотностями внешней меры μ в точке x*.

Следующий результат взят из [14].

Теорема 8.20. *Пусть μ — борелевская внешняя мера на метрическом пространстве X, $k \in (0,\infty)$ и $t \geq 0$. Тогда*

(1) *если* $A_1 \subset A_2 \subset X$, *и* $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) \geq t$ *при всех* $x \in A_1$, *то* $\mu(A_2) \geq t\, H^k(A_1)$;

(2) *если мера* μ *регулярна,* $A \subset X$ *и* $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) \leq t$ *при всех* $x \in A$, *то* $\mu(A) \leq 2^k\, t\, H^k(A)$.

Доказательство. (1) Если $\mu(A_2) = \infty$ или $t = 0$, то утверждение тривиально. Поэтому предположим, что $\mu(A_2) < \infty$ и $t > 0$.

Далее, мы можем предположить, что выполняется строгое неравенство $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) > t$, так как если мы докажем утверждение в этом предположении, то для нестрогого неравенства $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) \geq t$ утверждение будем выполняться для всех $0 < t' < t$, так что доказываемое утверждение будет получено предельным переходом.

Для каждого $\delta > 0$ положим

$$\mathcal{B}_\delta = \Big\{ B_r(x) : x \in A_1,\, 0 < r < \delta/2,\, \mu\big(A_2 \cap B_r(x)\big) \geq t\, \omega_k\, r^k \Big\}.$$

В силу выполнения строгого неравенства $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) > t$ для всех $x \in A_1$, для таких x существуют r, сколь угодно близкие к нулю и, значит, удовлетворяющие $0 < r < \delta/2$, для которых даже $\mu\big(A_2 \cap B_r(x)\big) > t\, \omega_k\, r^k$, так что $\mathcal{B}_\delta$ является покрытием A_1 замкнутыми невырожденными шарами, радиусы которых ограничены в совокупности. И сказанного следует, что к $\mathcal{B}_\delta$ применима теорема 1.3, в силу которой из покрытия $\mathcal{B}_\delta$ можно выделить дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'_\delta$ такое, что $\cup\mathcal{B}_\delta \subset \cup 5\mathcal{B}'_\delta$.

Далее, заметим, что для каждого $B_r(x) \in \mathcal{B}_\delta$ выполняется $\mu(B_r(x) \cap A_2) > 0$ (иначе в центре x этого шара будет $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) = 0$). Кроме того, по нашему предположению, $\mu(A_2) < \infty$. Отсюда следует, что дизъюнктное семейство $\mathcal{B}'_\delta$ — не более чем счетно. Действительно, если это не так, то, из пункта (10) упражнения 10, получаем, что

$$\sum_{B_r(x) \in \mathcal{B}'_\delta} (\mu \llcorner A_2)\big(B_r(x)\big) = \sum_{B_r(x) \in \mathcal{B}'_\delta} \mu\big(B_r(x) \cap A_2\big) = \infty.$$

Но, в силу предложения 3.16, шары $B_r(x)$ и множество A_2 являются $(\mu \llcorner A_2)$-измеримыми, поэтому

$$\mu(A_2) = (\mu \llcorner A_2)(A_2) \geq (\mu \llcorner A_2)\big(\cup_{B_r(x) \in \mathcal{B}'_\delta} B_r(x)\big) = \sum_{B_r(x) \in \mathcal{B}'_\delta} (\mu \llcorner A_2)\big(B_r(x)\big) = \infty,$$

противоречие.

Перенумеруем элементы этого семейства, так что $\mathcal{B}'_\delta = \{B_i\}_{1 \leq i < N}$, где N может равняться ∞. По определению, для каждого $1 \leq i < N$ имеем $B_i = B_{r_i}(x_i)$. Если N конечно, то при $i \geq N$ положим $B_i = \emptyset$, $r_i = 0$, $\operatorname{diam} B_i = 0$. С учетом этих соглашений, приводимые ниже формулы будем писать для счетного семейства $\{B_i\}$.

Так как покрытие $\mathcal{B}_\delta$ сгущается в каждой точке из A_1, можно применить следствие 1.7, из которого вытекает, что для любого $1 \leq m < \infty$ выполняется

$$A_1 \setminus \bigcup_{i \leq m} B_i \subset \bigcup_{i > m}^{\infty} 5B_i$$

(заметим, что добавление пустых B_i не влияет на справедливость результата).

Отсюда следует, что $A_1 \subset \Big(\cup_{i \leq m} B_i\Big) \cup \Big(\cup_{i > m} 5B_i\Big)$ при каждом m. Таким образом, семейство $\{B_i\}_{i \leq m} \cup \{5B_i\}_{i > m}$ является (5δ)-покрытием множества A_1, откуда

$$H^k_{5\delta}(A_1) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \leq m} (\operatorname{diam} B_i)^k + \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i > m} (5 \operatorname{diam} B_i)^k \leq \sum_{i \leq m} \omega_k r_i^k + 5^k \sum_{i > m} \omega_k r_i^k. \tag{8.7}$$

По определению элементов покрытия $\mathcal{B}_\delta$, для непустых B_i имеем

$$\omega_k r_i^k \leq t^{-1} \mu(B_i \cap A_2) = t^{-1} (\mu \llcorner A_2)(B_i);$$

для $B_i = \emptyset$, также выполняется $\omega_k r_i^k \leq t^{-1} (\mu \llcorner A_2)(B_i)$ (правая и левая части последнего неравенства равны нулю).

В силу следствия 3.38, внешняя мера $\mu \llcorner A_2$ является борелевской, откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_k r_i^k \leq t^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} (\mu \llcorner A_2)(B_i) = t^{-1} (\mu \llcorner A_2)(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq t^{-1} \mu(A_2) < \infty, \tag{8.8}$$

поэтому $\sum_{i=m+1}^{\infty}\omega_k r_i^k \to 0$ при $m \to \infty$. Переходя в неравенстве (8.7) к пределу при $m \to \infty$ и учитывая оценку (8.8), получаем $H^k_{5\delta}(A_1) \le \sum_{i=1}^{\infty}\omega_k r_i^k \le t^{-1}\mu(A_2)$. Осталось перейти к пределу при $\delta \to 0+$.

(2) Как и в доказательстве предыдущего пункта, без ограничения общности предположим, что для всех $x \in A$ выполняется строгое неравенство $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) < t$. Положим

$$A_n = \Big\{x \in A : \mu\big(A \cap B_r(x)\big) \le t\,\omega_k\, r^k \text{ при всех } 0 < r < 1/n\Big\},$$

тогда, начиная с некоторого n, каждое A_n непусто, так как для достаточно малых r все величины $\mu\big(A \cap B_r(x)\big)/(\omega_k\, r^k)$ строго меньше t. Отметим, что $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ и, хотя A_k не обязаны быть μ-измеримыми и H^k-измеримыми, но μ и H^k — регулярные внешние меры, поэтому, в силу пункта (5) теоремы 3.18, имеем $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ и $H^k(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} H^k(A_n)$. Отсюда следует, что достаточно проверить неравенства $\mu(A_n) \le 2^k\, t\, H^k(A_n)$ при всех n. Сделаем это.

Если $H^k(A_n) = \infty$, то неравенство имеет место. Пусть теперь $H^k(A_n) < \infty$. Выберем произвольное $\delta \in \big(0, 1/n\big)$, тогда, в силу замечания 8.5, существует δ-покрытие $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества A_n, в котором все непустые C_i пересекают A_n. Для каждого непустого C_i выберем произвольную точку $x_i \in A_n \cap C_i$ и положим $r_i = (\operatorname{diam} C_i)/2$, тогда $C_i \subset B_{2r_i}(x_i)$. Для каждого пустого C_i также положим $r_i = (\operatorname{diam} C_i)/2 = 0$.

Так как, для непустых C_i, имеем $2r_i = \operatorname{diam} C_i < \delta < 1/n$ и $x_i \in A_n$, то

$$\mu(A \cap C_i) \le \mu\big(A \cap B_{2r_i}(x_i)\big) \le 2^k\, t\, \omega_k\, r_i^k.$$

Для пустых C_i, в силу $r_i = 0$, также выполняется

$$\mu(A \cap C_i) = 0 = 2^k\, t\, \omega_k\, r_i^k.$$

Следовательно,

$$\mu(A_n) = \mu(A \cap A_n) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A \cap C_i) \le 2^k\, t\, \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} r_i^k = 2^k\, t\, \omega_k \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{diam} C_i}{2}\Big)^k.$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким δ-покрытиям $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, получим оценку $\mu(A_n) \le 2^k\, t\, H^k_\delta(A_n)$. Остается устремить δ к нулю. □

8.3 Липшицевы отображения и внешние меры Хаусдорфа

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств.

Определение 8.21. Отображение f называется *липшицевым*, если существует число $L \ge 0$ такое, что $|f(x)f(x')| \le L\,|xx'|$ при всех $x, x' \in X$. Число L в этом случае называется *константой Липшица отображения* f, само отображение f называется L-липшицевым, а наименьшая константа Липшица для f — *растяжением отображения* f и обозначается через $\operatorname{dil} f$.

Замечание 8.22. Иногда константой Липшица отображения f называют его наименьшую константу Липшица, то есть величину $\operatorname{dil} f$. Термин «растяжение» в этом случае не используется.

Замечание 8.23. (1) Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — липшицевы отображения, то $g \circ f$ — также липшицево, и $\operatorname{dil}(g \circ f) \le \operatorname{dil} f \cdot \operatorname{dil} g$.

(2) Каждое отображение $d_{x_0}\colon X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, заданное формулой $d_{x_0}(x) = |xx_0|$, является 1-липшицевым (это мгновенно вытекает из неравенства треугольника).

Следующая теорема имеет многочисленные применения в геометрической теории меры.

Теорема 8.24. *Пусть $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение между метрическими пространствами, причем $\operatorname{dil} f > 0$. Тогда для любых $k \in (0, \infty)$, $A \subset X$ и $\delta \in (0, \infty)$ имеем*

$$H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A),$$

так что

$$H^k\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k(A).$$

Доказательство. Положим $\lambda = \operatorname{dil} f$, тогда для любого δ-покрытия $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества A семейство $\bigl\{f(A_i)\bigr\}_{i=1}^{\infty}$ будет $(\lambda\delta)$-покрытием множества $f(A)$, поэтому имеем

$$H^k_{\lambda\delta}\bigl(f(A)\bigr) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^{\infty}\bigl(\operatorname{diam} f(A_i)\bigr)^k \le \lambda^k \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^{\infty}\bigl(\operatorname{diam} A_i\bigr)^k.$$

Переходя к точной нижней грани по всем δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, получаем $H^k_{\lambda\delta}\bigl(f(A)\bigr) \le \lambda^k H^k_\delta(A)$. Второе неравенство получается из первого при $\delta \to 0+$. $\square$

Следствие 8.25. *Пусть $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение между метрическими пространствами, для которого $0 \le \operatorname{dil} f \le 1$. Тогда для любых $k \in (0,\infty)$, $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty)$ имеем*

$$H^k_\delta\bigl(f(A)\bigr) \le H^k_\delta(A),$$

так что

$$H^k\bigl(f(A)\bigr) \le H^k(A).$$

Доказательство. Если $\operatorname{dil} f = 0$, то множество $f(A)$ — или пустое при $A = \emptyset$, или одноточечное. В обоих случаях имеет место равенство $H^k_\delta\bigl(f(A)\bigr) = H^k\bigl(f(A)\bigr) = 0$, поэтому оба неравенства выполнены.

Пусть теперь $\operatorname{dil} f > 0$. Тогда, по теореме 8.24, имеем $H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\bigl(f(A)\bigr) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A)$. По замечанию 8.7, при $\operatorname{dil} f \le 1$ выполняется $H^k_\delta\bigl(f(A)\bigr) \le H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\bigl(f(A)\bigr)$. Так как $(\operatorname{dil} f)^k \le 1$, то $(\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A) \le H^k_\delta(A)$. Собирая вместе три приведенных неравенства, выводим первое неравенство из утверждения следствия. Второе неравенство получается из первого при $\delta \to 0+$. $\square$

Литература

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Факториал Пресс, 2000.

[3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[4] Deza M.M., Deza E. *Encyclopedia of Distances.* Springer, 2009.

[5] Ambrosio L., Tilli P., *Topics on Analysis in Metric Spaces.* Oxford, Oxford University Press, 1987.

[6] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Изд-во "Наука", 1976.

[7] Богачев В.И. *Основы теории меры*, 2-е изд., НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, т. 1 и т. 2, 2006.

[8] Evans L.C., Gariepy R.F. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, 1992.

[9] Mattila P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, 1995.

[10] Lin F., Yang X. *Geometric Measure Theory. An Introduction.* International Press, 2002.

[11] Talebi M. *Covering Theorems.* 2013, `http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/sem_talebi.pdf`

[12] Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* Москва, Наука, 1987.

[13] Fremlin D.H. *Measure Theory.* Vol. 1–5, Torres Fremlin, 2001–2008.

[14] Simon L. *Lectures on Geometric Measure Theory*, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

[15] Тужилин А.А. *Мера Хаусдорфа: трудности перевода*, 2017. `http://dfgm.math.msu.su/files/tuzhilin/HausdorffMeasureDef.pdf`