Классическое и непрерывное расстояния Громова–Хаусдорфа

С. А. Богатый, А. О. Иванов, Е. А. Резниченко, А. А. Тужилин

18 февраля 2026 г.
22:42:07

Оглавление

Введение

Знаменитое расстояние Громова–Хаусдорфа [1, 2] измеряет степень неизометричности метрических пространств: у изометричных пространств расстояние равно нулю, и чем более "непохожи" пространства друг на друга, тем это расстояние больше. В классическом определении расстояния Громова–Хаусдорфа никак не учитываются дополнительные структуры, которыми могут быть наделены метрические пространства. Даже топология, порождаемая метрикой, игнорируется этим расстоянием. В работе [3] был предложен вариант модификации расстояния Громова–Хаусдорфа, учитывающий непрерывность. При этом было замечено, что если сравнивать сферы в евклидовом пространстве, наделенные стандартной внутренней метрикой, с помощью классического расстояния Громова–Хаусдорфа, то результат будет отличаться от сравнения с непрерывным аналогом этого расстояния. В работе [4] был предложен другой вариант непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа для сравнения динамических систем и решений уравнений в частных производных. Однако подход этих авторов приводит к существенному усложнению техники, так как их вариант расстояния не удовлетворяет неравенству треугольника.

Мы рассмотрим несколько модификаций классического расстояния Громова–Хаусдорфа, которые тем или иным способом учитывают непрерывность. В лекциях мы будем параллельно доказывать базовые результаты, касающиеся классического расстояния, а также обсуждать, что из этих результатов переносится на непрерывное расстояние, а что нет.

Для понимания данного курса требуется начальное представление об общей топологии [5], см. также [6, 7]. Все остальное мы будем подробно разъяснять, давая столько деталей, сколько требуется слушателям для комфортного восприятия. Считаем, что наши лекции будут доступны даже студентам первого курса, а интересны эти лекции могут быть как старшекурсникам, так и аспирантам.

Тема 1

Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Мы начнем с обсуждения общих результатов, связанных с расстоянием Громова–Хаусдорфа. Более подробно с этой теорией можно познакомиться в классической монографии [17], см. также [18]. В этой теории расстояние далеко не всегда является метрикой, так как может быть бесконечным, а также равным нулю между разными точками. Мы будем придерживаться следующей терминологии. ***Расстоянием*** на множестве X мы будем называть каждое отображение $\rho\colon X \times X \to [0, \infty]$ такое, что

- $\rho(x, x) = 0$ для всех $x \in X$, и
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y, \in X$ (***симметричность***).

В приводимых ниже определениях ρ — расстояние. Если дополнительно выполняется

- $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$ (***неравенство треугольника***),

то ρ называется ***обобщенной псевдометрикой*** (иногда вместо термина "псевдометрика" используют "полуметрика").

Если еще

- $\rho(x, y) > 0$ при $x \ne y$ (***положительная определенность***),

то ρ называется ***обобщенной метрикой***.

Наконец, если

- $\rho(x, y) < \infty$ для всех $x, y \in X$,

то слово "обобщенный" опускают. Иногда, кроме того, добавляют слово "конечная", например, конечная метрика или конечная псевдометрика.

Множество X, вместе с введенной функцией ρ, называют таким ***пространством***, как называется сама функция ρ. Например, если функция ρ имеет самый общий вид, то X — ***пространство с расстоянием***, если ρ — метрика, то X — ***метрическое пространство***, а если ρ — обобщенная псевдометрика, то X — ***обобщенное псевдометрическое пространство***.

Кроме того, мы будем иметь дело со всеми метрическими пространствами, которых столько же, сколько и всех множеств. Действительно, на каждом множестве можно ввести функцию расстояния, равную 1 между каждой парой различных точек. Тем самым, если мы хотим рассматривать всю совокупность метрических пространств, то сталкиваемся с известными парадоксами теории множеств. Чтобы избежать эти противоречия, мы обычно пользуемся вариантом теории множеств, названным в честь фон Неймана, Бернайса и Гёделя [12, 13, 14]. Здесь множества заменяются на объекты, называемые ***классами***, причем классы бывают двух типов. Если класс является элементом некоторого другого класса, то он называется ***множеством***, а если нет — то ***собственным классом***. Так снимается парадокс "множества всех множеств", так как теперь совокупность всех множеств относится к другому типу объектов, т.е. является собственным классом. С классами можно почти всегда работать как с обычными множествами, в частности, для них определено декартово произведение, отображение, так что на классе можно, например, определить и обобщенную псевдометрику (расстояние

Громова–Хаусдорфа именно ей и является). Но на собственных классах нельзя определить топологию. Действительно, по определению топологии на множестве X само множество является элементом топологии, так что на собственные классы такое определение не переносится. Как можно обойти эту проблему можно почитать в дополнении к этой лекции, а также в [27, 26]. Впрочем, в настоящих лекциях нам это не понадобится.

1.1 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $|xy|$. Пусть теперь $x \in X$, а $r > 0$ и $s \ge 0$ — вещественные числа. Через $U_r(x) = \big\{y \in X : |xy| < r\big\}$ и $B_s(x) = \big\{y \in X : |xy| \le s\big\}$ обозначим соответственно ***открытый*** и ***замкнутый шары*** с центром в точке x и радиусами r и s. Если A и B — непустые подмножества X, то положим $|xA| = |Ax| = \inf\big\{|xa| : a \in A\big\}$ и $|AB| = |BA| = \inf\big\{|ab| : a \in A,\, b \in B\big\}$. Далее, определим ***открытую r-окрестность*** и ***замкнутую s-окрестность множества*** A, положив соответственно

$$U_r(A) = \big\{x \in X : |xA| < r\big\} \ \text{ и } \ B_s(A) = \big\{x \in X : |xA| \le s\big\}.$$

Определение 1.1. Для непустых подмножеств A и B метрического пространства X ***расстоянием Хаусдорфа от A до B*** называется величина

$$d_H(A,B) = \max\big\{\sup_{a\in A}|aB|,\, \sup_{b\in B}|Ab|\big\} = \\ = \inf\big\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } U_r(A) \supset B\big\} = \inf\big\{s \ge 0 : A \subset B_s(B) \text{ и } B_s(A) \supset B\big\}.$$

Задача 1.2. Докажите эквивалентность приведенных выше разных определений расстояния Хаусдорфа.

Предложение 1.3. *Расстояние Хаусдорфа d_H является обобщенной псевдометрикой на множестве всех непустых подмножеств метрического пространства X.*

Доказательство. По определению, функция d_H неотрицательна и симметрична. Если $A \subset X$ — непустое подмножество, то для любого $r > 0$ имеем $A \subset U_r(A)$, поэтому $d_H(A,A) = 0$. Таким образом, остается проверить неравенство треугольника.

Выберем произвольные непустые $A, B, C \subset X$ и положим $c = d_H(A,B)$, $a = d_H(B,C)$, $b = d_H(A,C)$. Мы должны показать, что $d_H(A,C) \le d_H(A,B) + d_H(B,C)$, т.е. $b \le c + a$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $r = c + \varepsilon$ и $s = a + \varepsilon$, тогда $A \subset U_r(B)$ и $B \subset U_s(C)$.

Лемма 1.4. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, $r, s > 0$, и $A \subset X$ — непустое. Тогда $U_r\big(U_s(A)\big) \subset U_{r+s}(A)$.*

Доказательство. Для произвольного $x \in U_r\big(U_s(A)\big)$ существует $y \in U_s(A)$ такой, что $|xy| < r$, и существует $a \in A$, для которого $|ya| < s$. Но тогда, по неравенству треугольника, $|xa| \le |xy| + |ya| < r + s$, откуда $x \in U_{r+s}(A)$, что и требовалось. □

Из леммы 1.4 заключаем

$$A \subset U_r(B) \subset U_r\big(U_s(C)\big) \subset U_{r+s}(C).$$

Аналогично, $U_{r+s}(A) \supset C$. Таким образом, $b \le r + s = c + a + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое. □

Замечание 1.5. Расстояние Хаусдорфа может быть бесконечным, как в случае прямой $\mathbb{R}$ и любой ее точки, а также равняться нулю между разными подмножествами, например, между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$. Тем не менее, при некоторых ограничения расстояние Хаусдорфа превращается в (обобщенную) метрику.

Для метрического пространства X обозначим $\mathcal{C}(X)$ множество всех непустых замкнутых подмножеств X.

Предложение 1.6. *Пусть X — метрическое пространство, тогда расстояние Хаусдорфа d_H, ограниченное на множество $\mathcal{C}(X)$, является обобщенной метрикой.*

Доказательство. В силу предложения 1.3, остается проверить положительную определенность. Пусть $A, B \in \mathcal{C}(X)$ различны, тогда одно из них содержит точку, не лежащую в другом. Без ограничения общности предположим, что существует $x \in A \setminus B$. Так как множество B замкнуто, то для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$, откуда $|x\,B| \ge \varepsilon$. Следовательно, $U_{\varepsilon/2}(B) \not\supset A$, так что $d_H(A,B) \ge \varepsilon/2$. □

Обозначим $\mathcal{H}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.

Предложение 1.7. *Пусть X — метрическое пространство, тогда расстояние Хаусдорфа d_H, ограниченное на множество $\mathcal{H}(X)$, является метрикой.*

Доказательство. В силу предложения 1.6, остается проверить ограниченность. Так как $A, B \in \mathcal{H}(X)$ ограничены, то существует $r > 0$ такое, что $A \subset U_r(b)$ для некоторого $b \in B$, и $B \subset U_r(a)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда $A \subset U_r(B)$ и $B \subset U_r(A)$, откуда $d_H(A, B) \le r$, т.е. d_H — ограничено. □

Следствие 1.8. *Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства X. Тогда $d_H(A, B) = 0$, если и только если замыкания $\bar{A}$ и $\bar{B}$ этих подмножеств совпадают.*

Доказательство. Для любого $r > 0$ выполняется $U_r(A) \supset \bar{A}$ и $A \subset \bar{A} \subset U_r(\bar{A})$, поэтому $d_H(A, \bar{A}) = 0$. Если $d_H(A, B) = 0$, то из неравенства треугольника мгновенно извлекаем $d_H(\bar{A}, \bar{B}) = 0$, но $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{C}(X)$, а на $\mathcal{C}(X)$ расстояние Хаусдорфа d_H положительно определено (предложение 1.6), поэтому $\bar{A} = \bar{B}$. Обратно, если $\bar{A} = \bar{B}$, то из неравенства треугольника получаем $d_H(A, B) = 0$. □

В дальнейшем, говоря про $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{H}(X)$, мы всегда будем предполагать, что на них задано расстояние Хаусдорфа d_H.

Предложение 1.9. *Для метрического пространства X рассмотрим отображение $\nu\colon X \to \mathcal{C}(X)$, заданное так: $\nu\colon x \mapsto \{x\}$. Тогда ν изометрично.*

Доказательство. Из определения расстояния Хаусдорфа мгновенно заключаем, что $d_H\big(\{x\}, \{y\}\big) = |xy|$, что и завершает доказательство. □

Теорема 1.10 ([17])**.** *Пусть X — метрическое пространство, тогда X и $\mathcal{H}(X)$ одновременно обладают или нет следующими свойствами*:

(1) *полнотой,*

(2) *полной ограниченностью,*

(3) *компактностью,*

(4) *ограниченной компактностью.*

Доказательство. (1) Пусть сначала X — полное метрическое пространство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $A_1, A_2, \ldots$ элементов из $\mathcal{H}(X)$ и покажем, что она сходится в $\mathcal{H}(X)$. Пусть A состоит из пределов всевозможных сходящихся последовательностей $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$, где $i_1 < i_2 < \cdots$ и $a_{i_k} \in A_{i_k}$ для всех k. Покажем, что $A_i \xrightarrow{d_H} A$ и, значит, $A_i \xrightarrow{d_H} \bar{A} \in \mathcal{H}(X)$ (ограниченность $\bar{A}$ вытекает из ограниченности A_i, так как при больших i выполняется $A \subset U_\varepsilon(A_i)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и, значит, A также ограничено).

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $p, q \ge n$ выполняется $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/2$. Выберем любой $i_1 \ge n$, тогда существует $i_2 > i_1$ такой, что для всех $p, q \ge i_2$ имеем $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/4$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $i_1 < i_2 < \cdots$ такую, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и любых $p, q \ge i_k$ выполняется $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/2^k$. Выберем произвольный $a_{i_1} \in A_{i_1}$. Тогда существует $a_{i_2} \in A_{i_2}$ такой, что $|a_{i_1} a_{i_2}| < \varepsilon/2$. Далее, существует $a_{i_3} \in A_{i_3}$, для которого $|a_{i_2} a_{i_3}| < \varepsilon/4$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ такую, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $|a_{i_k} a_{i_{k+1}}| < \varepsilon/2^k$.

Покажем теперь, что $A_p \subset U_\varepsilon(A)$ для всех $p \ge n$. Из неравенства треугольника вытекает, что построенная последовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты пространства X, она сходится к некоторому a. По определению, $a \in A$. Из неравенства треугольника вытекает, что $|a_{i_1} a| < \varepsilon$, откуда, так как a_{i_1} был выбран произвольным образом, имеем $A_{i_1} \subset U_\varepsilon(A)$. Так как i_1 был выбран любым при условии $i_1 \ge n$, получаем, что для каждого $p \ge n$ выполняется $A_p \subset U_\varepsilon(A)$.

Покажем теперь, что $A \subset U_\varepsilon(A_p)$ для всех $p \ge n$. Пусть $a \in A$ — предел последовательности $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots$, где $j_1 < j_2 < \cdots$ и $a_{j_k} \in A_{j_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда, начиная с некоторого k, имеем $j_k \ge n$. Выберем теперь в последовательности $j_1 < j_2 < \cdots$ такую подпоследовательность $i_2 := j_k$, $i_3 := j_l, \ldots$, что после добавления i_1 последовательность $i_1 < i_2 < \cdots$ удовлетворяет свойствам, описанным выше. Тогда a также является пределом последовательности a_{i_k}, и так как $|a a_{i_1}| < \varepsilon$, имеем $A \subset U_\varepsilon(A_{i_1})$. Так как i_1 выбирали произвольно при условии $i_1 \ge n$, имеем $A \subset U_\varepsilon(A_p)$ для всех $p \ge n$. Последнее завершает доказательство того, что $A_i \xrightarrow{d_H} A$.

Обратно, пусть пространство $\mathcal{H}(X)$ полное. Покажем, что X — также полное. Рассмотрим вложение ν из предложения 1.9. Так как ν изометрично, оно сохраняет фундаментальность последовательностей, их сходимость и инъективно, поэтому сходимость ν-образов фундаментальных последовательностей к точкам из $\nu(X)$ означает в точности полноту X. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность в X, тогда, как мы уже отметили, $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{H}(X)$, которая, в силу полноты $\mathcal{H}(X)$, сходится к некоторому $Y \in \mathcal{H}(X)$. Мы должны показать, что $Y \subset X$ — одноточечное множество. Пусть это не так, и, значит, Y содержит по крайней мере две разные точки x и y. Положим $\varepsilon = |xy| > 0$. В силу сходимости, существует i такое, что $d_H\big(\{x_i\}, Y\big) < \varepsilon/2$, но тогда $U_{\varepsilon/2}\big(\{x_i\}\big) \supset Y$, так что диаметр Y меньше ε, противоречие, завершающее доказательство.

(2) Пусть X вполне ограничено. Покажем, что $\mathcal{H}(X)$ — тоже. Для произвольного $\varepsilon' > 0$ выберем любое $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ и произвольную конечную ε-сеть $Y \subset X$. Покажем, что $\mathcal{H}(Y)$ — (конечная) ε'-сеть в $\mathcal{H}(X)$. Выберем произвольное $A \in \mathcal{H}(X)$ и определим $B = \{y \in Y : |yA| < \varepsilon\}$. Так как Y — это ε-сеть, для каждого $a \in A$ существует $y \in Y$, для которого $|ya| < \varepsilon$, откуда $|yA| < \varepsilon$, так что $y \in B$. В частности, $B \neq \emptyset$, поэтому $B \in \mathcal{H}(Y)$ и, кроме того, $A \subset U_\varepsilon(B)$. Выберем теперь произвольное $y \in B$, тогда $|yA| < \varepsilon$, так что существует $a \in A$, для которого $|ya| < \varepsilon$. Последнее означает, что $B \subset U_\varepsilon(A)$ и, следовательно, $d_H(A, B) \le \varepsilon$, откуда $\mathcal{H}(Y)$ — конечная ε'-сеть.

Обратно, пусть пространство $\mathcal{H}(X)$ вполне ограниченное. Но тогда каждое его подмножество, включая $\nu(X)$, где отображение ν построено в предложении 1.9, также вполне ограничено. Действительно, если $Z \subset \mathcal{H}(X)$ — конечная $(\varepsilon/2)$-сеть, то выберем в каждом непустом $U_{\varepsilon/2}(z) \cap \nu(X)$, $z \in Z$ по одной произвольной точке $\{y\}$. Множество выбранных так $\{y\}$ обозначим Y. Это множество непусто, так как все $\nu(X)$ лежит в $(\varepsilon/2)$-окрестности множества Z. Проверим, что Y является ε-сетью в $\nu(X)$. Действительно, для каждого $\{x\} \in \nu(X)$ существует $z \in Z$ такой, что $d_H\big(\{x\}, z\big) < \varepsilon/2$. С другой стороны, $U_{\varepsilon/2}(z) \cap \nu(X) \neq \emptyset$, так как содержит $\{x\}$, поэтому в этом пересечении выбрана точка $\{y\} \in Y$. По неравенству треугольника имеем $d_H(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon$, что и требовалось.

(3) Напомним, что для метрического пространства компактность равносильна одновременной полноте и полной ограниченности, так что утверждение этого пункта вытекает из двух предыдущих.

(4) Напомним, что ограниченная компактность означает компактность всех замкнутых шаров. Проверку этого пункта мы оставим слушателям. $\square$

1.2 Расстояние Громова–Хаусдорфа

Если X и Y — изометричные метрические пространства, то этот факт будем обозначать $X \approx Y$.

Определение 1.11. ***Расстоянием Громова–Хаусдорфа*** между непустыми метрическими пространствами X и Y называется величина

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\big\{d_H(X', Y') : X', Y' \subset Z,\ X' \approx X,\ Y' \approx Y\big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем метрическим пространствам Z и всем изометричным вложениям пространств X и Y в Z.

Пример 1.12. Пусть X и Y изометричны. В качестве Z из определения 1.11 возьмем X. Тогда $X' = X$ и в качестве Y' также можно взять X, поэтому $0 \le d_{GH}(X, Y) \le d_H(X', Y') = d_H(X, X) = 0$ в силу предложения 1.3, так что $d_{GH}(X, Y) = 0$. Отметим, что из $d_{GH}(X, Y) = 0$ не вытекает изометричность X и Y. Действительно, положим $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1)$, $Z = \mathbb{R}$, $X' = X$, $Y' = Y$, тогда $0 \le d_{GH}(X, Y) \le d_H(X', Y') = 0$ в силу замечания 1.5.

Определение 1.11 плохо приспособлено для конкретных вычислений. Имеется эквивалентное определение, которое дается в терминах соответствий. Приведем необходимые понятия и результаты.

1.3 Соответствия

Напомним, что ***отношением*** между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Частным случаем отношения является график функции $f\colon X \to Y$, который мы, как правило, будет обозначать тем же символом f. Если σ — отношение между X и Y, то определено обратное отношение $\sigma^{-1} = \big\{(y, x) : (x, y) \in \sigma\big\}$ между Y и X. В этом смысле для функции $f\colon X \to Y$, даже не являющейся биекцией, мы будем писать f^{-1}, понимая при этом обратное отношение. Для произвольного множества Z обозначим $\mathcal{P}_0(Z)$ семейство всех непустых подмножеств в Z. В частности, $\mathcal{P}_0(X\times Y)$ — это множество всех непустых отношений между X и Y.

Для любого отношения $\sigma\subset X\times Y$, а также $x_0\in X$ и $y_0\in Y$ определены

$$\sigma(x_0)=\{y\in Y:(x_0,y)\in\sigma\} \text{ — } \sigma\text{-образ } x_0, \text{ и } \sigma^{-1}(y_0)=\{x\in X:(x,y_0)\in\sigma\} \text{ — } \sigma\text{-прообраз } y_0.$$

Кроме того, если $A\subset X$ и $B\subset Y$, то определены их σ-образ и σ-прообраз соответственно:

$$\sigma(A)=\cup_{a\in A}\sigma(a) \text{ и } \sigma^{-1}(B)=\cup_{b\in B}\sigma^{-1}(b).$$

Если X, Y, Z — множества, а $\sigma\subset X\times Y$ и $\tau\subset Y\times Z$ — отношения, то определена ***композиция*** этих отношений:

$$\tau\circ\sigma=\big\{(x,z)\in X\times Z:\exists y,\ (x,y)\in\sigma,\ (y,z)\in\tau\big\}.$$

Определение 1.13. Для любых непустых метрических пространств X,Y и непустого отношения $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ назовем ***искажением*** $\operatorname{dis}\sigma$ ***отношения*** σ величину

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big|:(x,y),\ (x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Тема 2

Добавление: аналог топологии на собственных классах

Теория, которую мы развиваем в настоящей статье, имеет дело со всеми непустыми метрическими пространствами, рассматриваемыми с точностью до изометрии. Так как на каждом множестве можно ввести метрику, например, положив все расстояния между различными точками равными 1, семейство метрических пространств не является множеством. Для работы с такими семействами мы будем пользоваться теорией множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя [12, 13], причем всегда будем считать, что выполняется аксиома выбора. Эту теорию обычно для краткости обозначают NBGC. Напомним, что все объекты этой теории называются ***классами*** и бывают двух типов: ***множества*** — это классы, которые являются элементами других классов, и ***собственные классы***, не являющиеся элементами никаких других классов. Приведем примеры важных для нас собственных классов:

- класс $\mathcal{V}$ всех множеств;
- класс ORD всех ординалов;
- класс CARD всех кардиналов;
- класс TOP всех топологий на всех множествах из $\mathcal{V}$;
- класс $\mathcal{GH}$ всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Для классов определены многие стандартные операции, например, пересечение, дополнение, произведение, отображение и др.

Мы будем пользоваться следующей терминологией: ***обобщенной псевдометрикой на множестве*** X называется каждое отображение $\rho\colon X\times X\to[0,\infty]$, удовлетворяющее условиям $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для всех $x,y\in X$ (симметричность), $\rho(x,x)=0$ для всех $x\in X$, и $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ для всех $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника). Если $\rho(x,y)=0$ в точности тогда, когда $x=y$, то слово "псевдометрика" заменяется на слово ***метрика***. Если же $\rho(x,y)<\infty$ при всех $x,y\in X$, то слово "обобщенный" убирается. Так как произведение и отображение определены для всех классов, то описанные только-что понятия переносятся слов в слово и на произвольные классы. Ниже мы напомним определения расстояния Громова–Хаусдорфа и непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа, которые, как будет отмечено, являются обобщенными псевдометриками на собственном классе $\mathcal{GH}$.

Интересной особенностью собственных классов является невозможность дословно перенести на них понятие топологии: действительно, все множество, на котором определяется топология, является элементом топологии, поэтому если вместо множества рассмотреть собственный класс, то он никак не может быть элементом топологии. Чтобы обойти эту проблему и ввести аналог топологии, в [15] было предложено рассматривать ***классы $\mathfrak{C}$, фильтрующиеся множествами***. Последнее означает, что для каждого кардинального числа n подкласс $\mathfrak{C}_n=\{x\in\mathfrak{C}:\#x\le n\}$, где $\#x$ обозначает мощность множества x, является множеством. Примером таких классов могут служить любые множества, а также собственные классы ORD, CARD и $\mathcal{GH}$. Классы $\mathcal{V}$ и TOP такими не являются.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс, фильтрующийся множествами. Отображение $\tau\colon \mathrm{CARD}\to\mathrm{TOP}$ такое, что

- $\tau_n := \tau(n)$ — топология на $\mathfrak{C}_n$ для каждого $n \in \mathrm{CARD}$,
- для каждых $m, n \in \mathrm{CARD}$, $m \le n$ топология τ_m индуцирована из τ_n.

Отметим, что если $\mathfrak{C}$ — множество мощности n, то τ_n — обычная топология на $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_n$, и для всякого $m \ge n$ имеем $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_n$, а также $\tau_m = \tau_n$. При $m \le n$ топология τ_m на $\mathfrak{C}_m$ обычным образом индуцируется из τ_n. Сказанное позволяет назвать отображение τ ***топологией*** даже в случае собственных классов. Фильтрующийся множествами класс $\mathfrak{C}$, для которого задана топология τ, будем называть ***топологическим классом***.

Замечание 2.1. Определить топологию в приведенном выше смысле можно и для любого собственного класса. Для этого достаточно изменить понятие фильтрации множествами, не привязывая ее к мощности элементов, входящих в класс. Хорошо известно, что в NBGC между любыми собственными классами существует биекция, поэтому если $\mathfrak{C}$ — топологический класс, а $\mathfrak{C}'$ — произвольный класс, скажем $\mathcal{V}$, то с помощью биекции $\varphi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ можно перенести фильтрацию множествами $\mathfrak{C}_n$ на $\mathfrak{C}'$, положив $\mathfrak{C}'_n = \varphi(\mathfrak{C}_n)$ и проделать все приведенные выше построения топологии. Однако для наших целей вполне хватит фильтрации, заданной с помощью мощности.

Важным частным случаем является метрическая топология, определенная на классе $\mathfrak{C}$, фильтрующемся множествами. Пусть $\rho\colon \mathfrak{C}\times\mathfrak{C} \to [0,\infty]$ — обобщенная псевдометрика, тогда для каждого $n \in \mathrm{CARD}$ определена соответствующая метрическая топология τ_n на $\mathfrak{C}_n$. Соответствующее отображение $\tau\colon \mathrm{CARD} \to \mathrm{TOP}$, $\tau\colon n \mapsto \tau_n$ назовем ***метрической топологией***, а пространство $\mathfrak{C}$, наделенное такой топологией, назовем ***метрическим классом***.

Отметим, что для каждых $x \in \mathfrak{C}$ и $r \in (0,\infty]$ определен ***открытый шар*** $U_r(x) = \{y \in \mathfrak{C} : \rho(x,y) < r\}$, представляющий собой, вообще говоря, собственный подкласс в $\mathfrak{C}$. Легко видеть, что если $m \in \mathrm{CARD}$ не меньше $\#x$, то множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса r в $\mathfrak{C}_m$.

Предложение 2.2. *Для любых $x \in \mathfrak{C}$, $r > 0$ и $m \in \mathrm{CARD}$ множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ открыто в топологии τ_m.*

Доказательство. Выберем произвольное $y \in U_r(x)\cap\mathfrak{C}_m$, тогда $|xy| < r$. Существует $\delta > 0$ такое, что $|xy| < r-\delta$, поэтому $U_\delta(y) \subset U_r(x)$, но $U_\delta(y)\cap\mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса δ в $\mathfrak{C}_m$, и $U_\delta(y)\cap\mathfrak{C}_m \subset U_r(x)\cap\mathfrak{C}_m$, следовательно, $U_r(x)\cap\mathfrak{C}_m \in \tau_m$. □

Если $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — отображение между двумя топологическими классами, то естественным образом определяется его непрерывность. А именно, известно, что образ каждого множества также является множеством, поэтому для каждого кардинального числа n существует такое кардинальное число m, что $f(\mathfrak{A}_n) \subset \mathfrak{B}_m$. Наименьшее из таких кардинальных чисел m обозначим n_f. Ограничивая f до отображения из $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{B}_{n_f}$, мы получаем обычное отображение топологических пространств. Легко видеть, что если вместо n_f взять кардинальное число $m \ge n_f$, то ограничение f на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_m$ будет непрерывным (в точке или в целом), если и только если его ограничение на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно. Таким образом, ***непрерывность*** отображения f в точке или в целом определим как непрерывность всех его ограничений $f\colon \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}_{n_f}$ (мы и в дальнейшем будем обозначать ограничение той же буквой, что и исходное отображение).

Теорема 2.3. *Пусть $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — отображение метрических классов. Тогда f непрерывно в точке $x \in \mathfrak{A}$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f\big(U_\delta(x)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Отображение f непрерывно в целом, если и только если оно непрерывно в каждой точке.*

Доказательство. Пусть сначала для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f\big(U_\delta(x)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Покажем, что f непрерывно в x. Выберем произвольное n, произвольное $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$, отвечающее сформулированному выше свойству. Так как $U_\delta(x)\cap\mathfrak{A}_n$ и $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{n_f}$ — открытые шары соответственно в $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$, причем в силу предположения образ первого из них содержится во втором, то ограничение $f\colon \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно в x.

Докажем теперь обратное утверждение методом от противного. А именно, предположим, что для некоторого f существуют такие $x \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$, что ни для какого $\delta > 0$ не выполняется $f\big(U_\delta(x)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Последнее означает, что существует последовательность $y_k \in \mathfrak{A}$, для которой $|x\,y_k| < 1/k$, но $\big|f(x)f(y_k)\big| \ge \varepsilon$. Пусть n — мощность x, а n_k — мощность y_k. Так как ограничение $f\colon \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно, то существует $s > 0$, для которого $U_s(x)\cap\mathfrak{A}_n$ переводится отображением f в $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{n_f} \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Таким образом, можно сразу предполагать, что все n_k не меньше n.

Так как счетное объединение множеств по-прежнему является множеством, существует $p \in \mathrm{CARD}$ такое, что $p \ge n_k$ для всех k. Отметим, что $x \in \mathfrak{A}_p$, $f(x) \in \mathfrak{B}_{p_f}$ и ограничение $f\colon \mathfrak{A}_p \to \mathfrak{B}_{p_f}$ непрерывно, поэтому существует $s > 0$, для которого f-образ открытого в $\mathfrak{A}_p$ шара $U_s(x)\cap\mathfrak{A}_p$ радиуса s содержится в открытом в

$\mathfrak{B}_{p_f}$ шаре $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{p_f}\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$ радиуса ε. Но тогда при $1/k<s$ выполняется $y_k\in U_s(x)\cap\mathfrak{A}_p$ и, значит, $\big|f(x)f(y_k)\big|<\varepsilon$, противоречие. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — липшицево отображение метрических классов, в частности, нерастягивающее, тогда f непрерывно.*

Отображение $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ метрических классов называется ***открытым в точке*** $x\in\mathfrak{A}$, если для любого $r>0$ существует $s>0$ такое, что $f\big(U_r(x)\big)\supset U_s\big(f(x)\big)$. Из теоремы мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 2.5. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — биективное отображение метрических классов, тогда f^{-1} непрерывно в точке $z=f(x)\in\mathfrak{B}$, если и только если f открыто в x.*

Литература

[1] Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.

[2] Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Birkhäuser, 1999.

[3] Lim S., Memoli F., Smith Z. *The Gromov–Hausdorff distance between spheres.* Geometry & Topology, 2023, v. 27, N 9, pp. 3733–3800.

[4] Lee J., Morales C. A. Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs. Birkhäuser/Springer, 2022.

[5] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.

[6] Munkres J.R. *Topology*, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[7] Engelking R. *General Topology*, Warszawa, PWN, 1985.

[8] Tej Bahadur Singh, *Introduction to Topology.* 1st ed. 2019.

[9] Stone A.H. *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, v. 54, pp. 977–982.

[10] Dowker C.H. *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math., 1947, v. 69, pp. 200–242.

[11] Nagami K., Roberts J.H. *Metric-dependent dimension functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, No. 4, 601–604.

[12] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

[13] Banach T. Classical set theory: theory of sets and classes // ArXiv e-prints 2023. arXiv:2006.01613[math.LO].

[14] Von Neumann–Bernays–Gödel set theory (wikipedia)

[15] Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance*, 2020, arXiv:2009.00458v1 [math.MG].

[16] Bogaty S.A., Tuzhilin A.A. *Fundamentals of Theory of Continuous Gromov–Hausdorff distance*, 2025, arXiv:2512.02611.

[17] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, 2004; D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33** A.M.S., Providence, RI, 2001.

[18] Tuzhilin A.A. *Lectures on Hausdorff and Gromov-Hausdorff Distance Geometry*, 2020, ArXiv e-prints, arXiv:2012.00756.

[19] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, — Любое издание.

[20] Фет А.И. *Обобщение теоремы Люстерника–Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем*, ДАН, 1954, т. 95, N6, с. 1149–1151.

[21] Engelking R. *Theory of Dimensions.* Finite and Infinite, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[22] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Isometric Embeddings of Bounded Metric Spaces into the Gromov-Hausdorff Class*, 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2203.02904.

[23] Illanes A., Nadler S. *Hyperspaces*, Marcel-Dekker, New York, 1999.

[24] Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V., Tuzhilin A.A. *Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers*, 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2202.07337v1 [math.MG].

[25] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116v1 [math.MG].

[26] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Лекции по геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа*, 2021.

[27] Ivanov A.O., Tsvetnikov R.A., Tuzhilin A.A. *Path Connectivity of Spheres in the Gromov-Hausdorff Class*, 2021, ArXiv e-prints, arXiv:2111.06709 [math.MG].

[28] Mazur S., Ulam S. *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels norme's*, C.R. Acad. Sci. Paris, 1932, v. 194, pp. 946–948.

[29] Väisälä J. *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, 2003, v. 110, pp. 633–635.

[30] Nica B. *The Mazur-Ulam theorem*, Expo. Math., 2012, v. 30, 397–398.

[31] Hatori O. *A simple proof of the Mazur-Ulam theorem*, 2024.

[32] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850.

[33] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces*, ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.