Геометрия квантового расстояния Громова–Хаусдорфа

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

10 января 2025 г.
17:19:46

Оглавление

Введение

Мы предполагаем, что слушатели нашего курса знакомы с основами общей топологии [1] и метрической геометрии [2], [3]. Цель наших лекций — познакомить слушателей с современными работами, посвященными геометрии квантового расстояния Громова–Хаусдорфа — расстояния между квантовыми метрическими пространствами. Эти пространства возникают в физике, в частности, в теории струн, и определение степени похожести между ними играет важную роль в приложениях. Понятия квантового метрического пространства и соответствующего квантового расстояния Громова–Хаусдорфа между такими пространствами были введены Риффелем [5, 6, 7]. Эти конструкции были обобщены многими авторами, например Керром [8, 9] и Ву [10, 11, 12].

Квантовые метрические пространства строятся на базе C^*-алгебр и, более общо, на базе частично упорядоченных векторных пространств с единицей. Мы приведем все необходимые определения и свойства соответствующих теорий. Об этих конструкциях имеется огромная монография. Мы воспользовались [14] и [13].

Классическая часть теории расстояния Громова–Хаусдорфа в основном имеет дело с непустыми компактными метрическими пространствами, рассматриваемыми с точностью до изометрии (расстояние между изометричными пространствами равно нулю). Такое семейство, обычно обозначаемое $\mathcal{M}$ и называемое ***пространством Громова–Хаусдорфа***, континуально, расстояние Громова–Хаусдорфа на нем является метрикой (равенство нулю расстояния нулю между компактными метрическими пространствами на самом деле равносильно их изометричности), а само пространство — полное, сепарабельное и геодезическое. Важным утверждением является критерий Громова предкомпактности подмножества пространства $\mathcal{M}$.

Мы будем также работать с компактными квантовыми метрическими пространствами и покажем, что квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа равно нулю между квантовыми изометричными пространствами, а также что для него выполняются многие свойства стандартного расстояния Громова–Хаусдорфа.

Тема 1

Предварительные результаты

План. Банаховы пространства, примеры, фактор-пространства, непрерывные линейные отображения, сопряженные пространства и линейные функционалы, обобщенная норма, сильная топология, пространство непрерывных линейных операторов, банахова алгебра с единицей, теорема Хана-Банаха и ее следствия, рефлексивные пространства, примеры, теорема Банаха–Штейнгауза, направленное множество, направленное множество окрестностей точки топологического пространства, направленность и ее область определения, сходимость и предел направленности, примеры, критерий непрерывности отображения топологических пространств, конфинальная поднаправленность и поднаправленность общего вида, точка накопления, точка накопления направленности и сходящиеся поднаправленности, пример "несовершенства" конфинальных поднаправленностей, плоскость Тихонова, критерий компактности топологического пространства, центрированные системы множеств, слабая топология для множества отображения из данного множества в топологические пространства, слабая топология на нормированном пространстве и его сопряженном, свойства слабой сходимости, $*$-слабая топология на сопряженном пространстве к нормированному пространству, свойства $*$-слабой сходимости, теорема Банаха–Алаоглу, рефлексивные пространства, сепарабельные пространства, равномерная выпуклость, гильбертовы пространства, эрмитово произведение, полуторалинейность, тождество параллелограмма, теорема Рисса, сопряженный линейный оператор, семейство всех непрерывных линейных операторов на гильбертовом пространстве как пример C^*-алгебры.

Приведем ряд понятий и теорем из функционального анализа, которые нам потребуются в дальнейшем, см. детали, например, в [15]. В наших лекциях все объекты, определенные в общем случае над некоторым полем $\mathbb{F}$ (линейные пространства, функции и др.), предполагаются заданными или над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если выбирается конкретное из этих полей, то это обговаривается отдельно.

1.1 Банаховы пространства

Напомним, что ***банаховым пространством*** называется нормированное линейное пространство, являющееся полным относительно метрики, заданной нормой.

Пример 1.1. Приведем некоторые примеры банаховых пространств:

- все конечномерные нормированные векторные пространства;
- пространство всех ограниченных функций $\mathcal{B}(S)$, заданных на произвольном множестве S, наделенное sup-нормой $\|f\| = \sup_{s\in S}\bigl|f(s)\bigr|$;
- подпространство всех непрерывных ограниченных функций $C_b(X) \subset \mathcal{B}(X)$, заданных на произвольном топологическом пространстве X;
- подпространство всех непрерывных функций $C(X) \subset \mathcal{B}(X)$, заданных на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве X;
- подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$ всех непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{F}$, заданных на хаусдорфовом локально компактном топологическом пространстве X и ***исчезающих*** (***обращающихся в нуль***) на бесконечности (последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, для которого $\bigl|f(x)\bigr| < \varepsilon$ при всех $x \in X \setminus K$);
- пространство ℓ_p, $1 \le p < \infty$ всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ чисел $x_k \in \mathbb{F}$, удовлетворяющих $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$ с нормой $\|x\|_p = \bigl(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\bigr)^{1/p}$;

- пространство $m = \ell_\infty$ всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ чисел (вещественных или комплексных) с sup-нормой $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ (это пространство является частным случаем пространства $\mathcal{B}(S)$ для $S = \mathbb{N}$);
- замкнутое подпространство c пространства ℓ_∞, состоящее из всех сходящихся последовательностей;
- замкнутое подпространство c_0 пространства c, состоящее из всех последовательностей, сходящихся к 0;
- подпространство $\mathcal{B}_\infty(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, состоящее из всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{F}$, заданных на измеримом пространстве Ω (множестве Ω, наделенном σ-алгеброй);
- пространство $L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$, состоящее из всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{F}$ с интегрируемой по Лебегу функцией $|f|^p$ (такие функция называются ***μ-интегрируемыми***), наделенное нормой $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$, где $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ, а функции, равные друг другу μ-почти всюду, отождествляются;
- пространство $L_\infty(\mu)$ существенно ограниченных функций, т.е. у которых
$$\|f\|_\infty = \inf\Bigl\{M \ge 0 : \mu\bigl(|f| \ge M\bigr) = 0\Bigr\} < \infty,$$
наделенное нормой $\|f\|_\infty$, где $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ, а функции, равные друг другу μ-почти всюду, отождествляются.

Замечание 1.2. Отметим, что пространство ℓ_p, $1 \le p \le \infty$ является частным случаем пространства $L_p(\mu)$, где $\Omega = \mathbb{N}$, а μ — считающая мера, т.е. $\mu(S) = \#S$ для каждого конечного $S \subset \mathbb{N}$, и $\mu(S) = \infty$ для бесконечного S.

Замечание 1.3. Примером не банахова пространства может служить, например, пространство всех вещественных многочленов одной переменной, заданных на отрезке $[a, b]$, с sup-нормой.

Напомним также конструкцию фактор-пространства. Пусть E — векторное пространство и $F \subset E$ — его подпространство. Тогда на E возникает отношение эквивалентности, для которого $x \sim y$, если и только если $x - y \in F$. Классами этой эквивалентности являются аффинные подпространства вида $x + F$. Множество классов эквивалентности естественно наделяется структурой векторного пространства, называется ***фактор-пространством E по F*** и обозначается E/F. Если E — нормированное пространство, то в качестве F выбирается замкнутое подпространство, а фактор-пространство E/F наделяется естественной нормой $\|x+F\| = \inf_{y\in F} \|x + y\|$.

Замечание 1.4. Замкнутость F требуется для того, чтобы действительно получилась норма, иначе может не выполниться условие положительной определенности. Действительно, рассмотрим нормированное векторное пространство $E = C\bigl([a, b]\bigr)$ непрерывных вещественных функций с sup-нормой, а в нем — подпространство F всех многочленов. Тогда E/F состоит более чем из одного класса (так как не все непрерывные функции — многочлены), однако "норма" каждого класса, определенная приведенной выше формулой, равна нулю, так как каждая непрерывная функция, в соответствии с теоремой Вейерштрасса, сколь угодно хорошо по sup-норме приближается многочленами.

Задача 1.5. Докажите, что если E — банахово пространство, а $F \subset E$ — его замкнутое подпространство, то E/F — также банахово пространство.

Так как норма превращает линейное пространство в топологическое, определено понятие ***непрерывного линейного отображения*** $L\colon E \to F$ между нормированными пространствами.

Задача 1.6. Докажите, что линейное отображение $L\colon E \to F$ нормированных пространств непрерывно, если и только если оно ограничено, т.е. переводит каждое ограниченное подмножество E в ограниченное подмножество F. В силу линейности это эквивалентно тому, что L переводит единичный замкнутый шар $B_E \subset E$ с центром в нуле в ограниченное подмножество F.

Множество всех ограниченных линейных отображений $L\colon E \to F$ будем обозначать $\mathcal{B}(E, F)$. Отметим, что операции поточечного сложения и умножение на элементы поля превращают $\mathcal{B}(E, F)$ в векторное пространство. В частном случае, когда F совпадает с полем $\mathbb{F}$, пространство $\mathcal{B}(E, F)$ обозначается E^* и называется ***сопряженным пространством***, а его элементы называются ***линейными функционалами***.

Пусть $L\colon E \to F$ — линейное отображение нормированных пространств. Положим

$$\|L\| = \sup_{x \in B_E} \big\|L(x)\big\|$$

и назовем ***обобщенной нормой*** L.

Задача 1.7. Покажите, что отображение L непрерывно, если и только если $\|L\| < \infty$. Иными словами, $\mathcal{B}(E, F)$ состоит из всех линейных отображений L с конечной обобщенной нормой $\|L\|$. В частности, E^* — это семейство всех линейных функционалов с конечной обобщенной нормой.

Отметим, что обобщенная норма на $\mathcal{B}(E, F)$ является обычной нормой. Соответствующая этой норме топология на $\mathcal{B}(E, F)$ называется ***сильной***. В частности, таким образом определяется сильная топология на сопряженном пространстве E^*. Также ***сильной*** называют исходную топологию на E, заданную нормой.

Задача 1.8. Покажите, что для $L \in \mathcal{B}(E, F)$ и любого $x \in E$ выполняется $\big\|L(x)\big\| \le \|L\|\,\|x\|$, т.е. каждое такое L является $\|L\|$-липшицевым.

Задача 1.9. Покажите, что если E — нормированное пространство, а F — банахово пространство, то пространство $\mathcal{B}(E, F)$ — банахово. В частности, сопряженное пространство E^* является банаховым для любого, не обязательно банахова, нормированного пространства E.

Еще одном важным частным случаем пространства $\mathcal{B}(E, F)$ является пространство $\mathcal{B}(E) := \mathcal{B}(E, E)$ ***непрерывных линейных операторов***. Помимо структуры векторного пространства, на $\mathcal{B}(E)$ имеется еще и операция "умножения" — композиция отображений.

Задача 1.10. Докажите, что

- для произвольных $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(E)$ выполняется $\|L_1 L_2\| \le \|L_1\|\,\|L_2\|$;
- тождественное отображение $1\colon E \to E$ лежит в $\mathcal{B}(E)$;
- $\|1\| = 1$.

Тем самым, $\mathcal{B}(E)$ является также кольцом с единицей.

В случае банахова E, пространство $\mathcal{B}(E)$, в силу задачи 1.9, является банаховым, и поэтому кольцо $\mathcal{B}(E)$ называется ***банаховой алгеброй с единицей***. Банаховыми алгебрами мы будем более детально заниматься в будущих лекциях.

Также приведем важный для дальнейшего результат о продолжении непрерывных линейных функционалов.

Теорема 1.11 (Хан-Банах)**.** *Пусть E — нормированное пространство, $F \subset E$ — его подпространство и $f \in F^*$. Тогда существует $g \in E^*$, продолжающий f, т.е. $g|_F = f$, и имеющий с f ту же норму: $\|g\| = \|f\|$.*

Следствие 1.12. *Пусть E — нормированное пространство и $x \in E$, тогда существует $f \in E^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. В частности,*

- *если $x, y \in E$, $x \ne y$, то существует $f \in E^*$, **различающий точки** x **и** y, т.е. $f(x) \ne f(y)$;*
- *имеет место формула, двойственная определению нормы линейного функционала, а именно*

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*,\, \|f\| \le 1} \big|f(x)\big| = \max_{f \in E^*,\, \|f\| \le 1} \big|f(x)\big|,$$

  где последняя формула означает, что супремум достигается.

Рассмотрим каждый элемент $x \in E$ как функцию $J_x\colon E^* \to \mathbb{F}$, определенную правилом $J_x(f) = f(x)$. По определению линейной структуры на E^*, каждое отображение J_x линейно, а для линейной комбинации $ax + by$, $x, y \in E$, $a, b \in \mathbb{F}$ имеем $J_{ax+by} = aJ_x + bJ_y$. Кроме того, из задачи 1.8 непосредственно вытекает, что каждый функционал J_x — липшицев и, значит, непрерывный (в сильной топологии). Таким образом, $x \mapsto J_x$ представляет собой линейное отображение $J\colon E \to E^{**}$. В силу следствия 1.12, имеем $\|J_x\| = \|x\|$, т.е. отображение J изометрично, в частности, для $x, y \in E$, $x \ne y$, отображения J_x и J_y различны. Значит, отображение J — изометричное линейное вложение.

Нормированное пространство E называется ***рефлексивным***, если J — сюръективное отображение (, а значит и биективное, изометричный изоморфизм), т.е. $E^{**}=E$. Приведем примеры рефлексивных и не рефлексивных пространств. Для $1<p<\infty$ положим p^* равным единственному числу q, удовлетворяющему $1/p+1/q=1$. Иными словами, $p^*=p/(p-1)$, так что p^* удовлетворяет такому же неравенству $1<p^*<\infty$. Продолжим это определение по непрерывности, положив $1^*=\infty$ и $\infty^*=1$. Ясно, что для любого $p\in[1,\infty]$ имеем $p^{**}:=(p^*)^*=p$.

Теорема 1.13. *Имеют место следующие результаты.*

- *Все конечномерные нормированные пространства рефлексивны.*
- *Для каждого $p\in(1,\infty)$ выполняется $\ell_p^*=\ell_{p^*}$, поэтому такие пространства ℓ_p рефлексивны.*
- *Для пары $\{1,\infty\}$ ситуация иная: $\ell_1^*=\ell_\infty$, но $\ell_\infty^* \underset{\neq}{\supseteq} \ell_1=c_0^*$, так что пространства ℓ_1, ℓ_∞ и c_0 не рефлексивны.*
- *Для каждого $p\in(1,\infty)$ пространство $\big(L^p(\mu)\big)^*$ изометрически изоморфно $L^{p^*}(\mu)$, поэтому такие пространства $L^p(\mu)$ рефлексивны (теорема Рисса–Фреше).*
- *Пространство $C\big([a,b]\big)$ не рефлексивно.*

Следующая фундаментальная теорема также пригодится нам в дальнейшем. Мы приведем ту ее версию, которая будет нам нужна.

Теорема 1.14 (Банах–Штейнгауз)**.** *Пусть $\{T_\alpha\colon E\to F\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство непрерывных линейных отображений из банахова пространства E в нормированное пространство F. Предположим, что $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\|T_\alpha(x)\|<\infty$ для всех $x\in E$. Тогда существует $M>0$ такое, что $\|T_\alpha\|\le M$ при всех $\alpha\in\mathcal{A}$.*

1.2 Направленности и их пределы

В этом разделе мы обсудим конструкцию из общей топологии, которая обобщает понятие последовательности и называется направленностью. Оказывается, в случае произвольных топологических пространств последовательностей не хватает для получения утверждений, являющихся одновременно необходимыми и достаточными. Например, хорошо известно, что в хаусдорфовом пространстве каждая сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Однако из единственности предела для каждой сходящейся последовательности хаусдорфовость не следует (приведите пример). Далее, непрерывные отображения сохраняют сходимость последовательностей. Однако из сохранения сходимости всех последовательностей непрерывность не вытекает (впрочем, для частного случая метрических пространств сохранение сходимости эквивалентно непрерывности). Наконец, компактность (из открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие) и секвенциальная компактность (из произвольной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность) — независимые свойства, т.е. ни одно из них не влечет другое. Замена последовательности на направленность решает все перечисленные выше проблемы.

Пусть S — частично упорядоченное множество. Оно называется ***направленным***, если для любых $s_1,s_2\in S$ существует $s\in S$ такое, что $s\ge s_1$ и $s\ge s_2$ (каждая пара элементов имеет общую мажоранту).

Пример 1.15. (1) Множество $S=\mathbb{N}$ натуральных чисел с естественным порядком.

(2) Пусть X — топологическое пространство, $x\in X$, а Ω_x — семейство всех открытых окрестностей точки x, упорядоченное отношением, обратным к включению: $U\le V$, если и только если $U\supset V$. Тогда для любых $U_1,U_2\in\Omega_x$ в качестве их общей мажоранты можно взять $U_1\cap U_2$. Такое Ω_x назовем ***направленным множество окрестностей точки*** $x\in X$.

По аналогии с тем, что последовательность во множестве X — это отображение из $\mathbb{N}$ в X, ***направленностью в X, параметризованной направленным множеством*** S, называется каждое отображение $f\colon S\to X$. Множество S называется ***областью определения направленности*** f. Как и в случае с последовательностью $x\colon\mathbb{N}\to X$, когда образ натурального числа n обычно обозначают в виде x_n, для направленности $x\colon S\to X$ образ $x(s)$ элемента $s\in S$ будем обозначать x_s.

Пример 1.16. (1) Каждая последовательность является направленностью.

(2) Для направленного множества Ω_x окрестностей точки x топологического пространства X в качестве направленности $\Omega_x\to X$ выберем отображение, сопоставляющее каждой окрестности $U\in\Omega_x$ некоторую точку $x_U\in U$.

Напомним, что последовательность точек x_n топологического пространства X сходится к $x \in X$, если для любой окрестности $U \in \Omega_x$ существует n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ выполняется $x_n \in U$. Аналогично определим сходимость направленности $\{x_s\}_{s \in S}$: эта направленность ***сходится к точке*** $x \in X$, называемой ***пределом*** этой направленности, если для любой окрестности $U \in \Omega_x$ существует $s_0 \in S$ такое, что при всех $s \geq s_0$ выполняется $x_s \in U$. Сохраним для направленностей похожие обозначения сходимости и предела: $x_s \to x$ и $x = \lim_S x_s$.

Пример 1.17. (1) Каждая сходящаяся последовательность является сходящейся направленностью с тем же пределом.

(2) Пусть $\{x_U : U \in \Omega_x\}$ — определенная выше направленность в топологическом пространстве X. Тогда $x_U \to x$. Действительно, для любой открытой окрестности V точки x, имеем $V \in \Omega_x$, и все окрестности $W \in \Omega_x$ такие, что $W \geq V$, содержатся в V, поэтому и все соответствующие x_W содержатся в V.

Конструкция 1.18. Пусть S и T — направленные множества. Превратим $S \times T$ в частично упорядоченное множество, положив $(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2)$, если и только если $s_1 \leq s_2$ и $t_1 \leq t_2$. Покажем, что $S \times T$ — направленное множество. Выберем произвольные $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S \times T$, и пусть s — мажоранта s_1 и s_2, а t — мажоранта t_1 и t_2, тогда (s, t) — мажоранта для обеих пар (s_i, t_i). Полученный порядок на $S \times T$ называется ***порядком произведения***.

Теорема 1.19. *Топологическое пространство X хаусдорфово, если и только если каждая сходящаяся направленность в X имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть сначала пространство X — хаусдорфово. Предположим, что некоторая направленность x_s сходится одновременно к x и y, $x \neq y$. В силу хаусдорфовости, у этих точек имеются окрестности U^x и U^y такие, что $U^x \cap U^y = \emptyset$. Так как $x_s \to x$, то существует s_0 такое, что при всех $s \geq s_0$ выполняется $x_s \in U^x$. Аналогично, существует s_1 такое, что при всех $s \geq s_1$ выполняется $x_s \in U^y$. Так как S — направленное множество, существует $\sigma \in S$, мажорирующая s_1 и s_2. Тогда $x_\sigma \in U^x \cap U^y = \emptyset$, противоречие.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что каждая сходящаяся направленность в X имеет единственный предел, но пространство X — не хаусдорфово. Это означает, что существуют различные $x, y \in X$, у которых любая пара окрестностей U^x и U^y пересекается. Рассмотрим направленное множество $S = \Omega_x \times \Omega_y$ и построим направленность в X, параметризованную S, выбрав для каждого $U = (U^x, U^y)$ произвольную точку $x_U \in U^x \cap U^y$. Тогда x_U сходится одновременно к x и y. Действительно, для каждой окрестности V^x точки x имеем $V^x \in \Omega_x$. Выберем произвольную окрестность V^y точки y, тогда $V = (V^x, V^y) \in S$, и для всех $W = (W^x, W^y) \in S$, $V \leq W$, выполняется $V^x \supset W^x \supset W^x \cap W^y \ni x_W$, откуда $x_U \to x$. Аналогично $x_U \to y$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 1.20. *Отображение $F\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно, если и только если оно сохраняет сходимость направленностей.*

Доказательство. Пусть F непрерывно. Рассмотрим произвольную направленность $\{x_s\}_{s \in S}$ в X, сходящуюся к некоторому $x \in X$, и пусть $y = F(x)$. Тогда, в силу непрерывности F, для любой окрестности V^y точки y существует окрестность U^x точки x такая, что $F(U^x) \subset V^y$. Так как $x_s \to x$, существует $s_0 \in S$ такое, что для всех $s \geq s_0$ выполняется $x_s \in U^x$, но тогда для этих же s имеем $F(x_s) \in F(U^x) \subset V^y$, поэтому $F(x_s) \to y$, что и требовалось.

Обратно, пусть F сохраняет сходимость всех направленностей. Покажем, что F непрерывно в каждой точке $x \in X$. Предположим противное, т.е. существует $x \in X$ такое, что F не является непрерывным в x. Снова положим $y = F(x)$. Тогда существует окрестность V^y точки y такая, что в каждой окрестности $U \in \Omega_x$ имеется точка x_U, для которой $F(x_U) \notin V^y$. Семейство $\{x_U\}_{U \in \Omega_x}$ — направленность, сходящаяся к x в силу примера 1.17. Но направленность $F(x_U)$ не сходится к y, противоречие. $\square$

Определим для направленностей понятие поднаправленности, являющееся аналогом подпоследовательности. В случае $\mathbb{N}$ подпоследовательность y_i последовательности x_n во множестве X задается с помощью строго монотонно возрастающей функции $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ так: $y_i = x_{h(i)}$. Иными словами, если последовательность x_n — это отображение $x\colon \mathbb{N} \to X$, то подпоследовательность $y\colon \mathbb{N} \to X$ равна композиции $x \circ h$. Фактически, мы выбираем бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$ и ограничиваем x на это подмножество, нумеруя при этом последовательные элементы последовательными натуральными числами.

В случае направленности $\{x_s\}_{s \in S}$ можно было бы поступить аналогично, а именно, выбрать произвольное подмножество $T \subset S$, индуцировать на нем частичный порядок, и рассмотреть соответствующее семейство

$\{x_t\}_{t\in T}$. Однако теперь мы можем столкнуться с рядом трудностей. Во-первых, T может перестать быть направленным (например, все элементы T могут оказаться несравнимыми). Во-вторых, даже если T — направленность, такое подмножество может оказаться неадекватным задаче вычисления пределов, ведь нам важно, чтобы в поднаправленности "сыграли" сколь угодно большие элементы. Например, это будет в случае, если S равно объединению двух стандартно упорядоченных множеств натуральных чисел $\mathbb{N}_1$ и $\mathbb{N}_2$, при этом для любых $n_i \in \mathbb{N}_i$ выполняется $n_1 < n_2$, а в качестве T выбрано $\mathbb{N}_1$.

Чтобы справиться с последней проблемой, введем понятие конфинального подмножества частично упорядоченного множества. А именно, подмножество T направленного множества S называется ***конфинальным***, если для любого $s \in S$ существует $t \in T$ такое, что $t \geq s$. Тем не менее, даже в случае конфинального множества T оно может не оказаться направленным.

Чтобы избежать описанных проблем, ограничимся конфинальными подмножествами, являющимися направленными. Для такого T обозначим $h\colon T \to S$ отображение включения. Тогда если $x\colon S \to X$ — направленность, то $x \circ h\colon T \to X$ будем называть ***конфинальной поднаправленностью*** в x. Оказывается, и этот класс поднаправленностей обладает рядом недостатков, так что его расширяют, отказываясь выбирать T в качестве подмножества S.

Итак, пусть $x\colon S \to X$ — направленность. Тогда каждая ее ***поднаправленность*** задается **произвольным** направленным множеством T, вообще говоря, не имеющим отношения к S, отображением $h\colon T \to S$, сохраняющим порядок и таким, что множество $h(T) \subset S$ конфинально в S. При этом соответствующая поднаправленность — это композиция $x \circ h\colon T \to X$.

Замечание 1.21. Понятие поднаправленности и конфинальной поднаправленности оказываются неэквивалентными по отношению к сходимости: ниже мы приведем пример 1.24 направленности, когда ни одна конфинальная поднаправленность не сходится, а вот среди поднаправленностей общего вида имеются сходящиеся.

Напомним, что точка x топологического пространства X называется ***точкой накопления последовательности*** x_n, если для любой окрестности U точки x и любого n_0 существует $n \geq n_0$ такое, что $x_n \in U$. Аналогичное определение имеет место для направленности $\{x_s\}_{s\in S}$. А именно, точка $x \in X$ является ***точкой накопления направленности*** $\{x_s\}_{s\in}$, если для любой окрестности U точки x и любого $s_0 \in S$ существует $s \geq s_0$ такое, что $x_s \in U$.

Теорема 1.22. *Точка x топологического пространства X является точкой накопления направленности $\{x_s\}_{s\in S}$, если и только если в этой направленности существует поднаправленность $\{y_t\}_{t\in T}$, сходящаяся к x.*

Замечание 1.23. Ниже мы покажем, что если в качестве поднаправленностей выбирать лишь конфинальные, то теорема 1.22 перестает быть верной.

Доказательство теоремы 1.22. Пусть сначала $\{x_s\}_{s\in S}$ — направленность в X, у которой некоторая поднаправленность $\{y_t\}_{t\in T}$, $h\colon T \to S$, $y_t = x_{h(t)}$ сходится к точке $x \in X$. Тогда для каждой окрестности U точки x существует $t_0 \in T$ такое, что для каждого $t \in T$, $t \geq t_0$ выполняется $x_{h(t)} \in U$.

Выберем теперь произвольное $s_0 \in S$. Мы должны показать, что существует $s \in S$, $s \geq s_0$, для которого $x_s \in U$. Так как $h(T)$ конфинально в S, существует $t_0 \in T$ такое, что $h(t_0) \geq s_0$. По сказанному выше, существует $t_0' \in T$ такое, что для всех $t \in T$, $t \geq t_0'$ выполняется $x_{h(t)} \in U$. Так как T — направленное множество, существует $t \in T$, $t \geq \max\{t_0, t_0'\}$. Положим $s = h(t)$, тогда $x_s \in U$, и так как отображение h сохраняет порядок, то $s = h(t) \geq h(t_0) \geq s_0$, что и требовалось.

Обратно, предположим, что точка $x \in X$ является точкой накопления для направленности $\{x_s\}_{s\in S}$. Рассмотрим множество T, составленное из всех пар (U, s), где $U \in \Omega_x$ — окрестность x, и $s \in S$ такова, что $x_s \in U$. Введем на T порядок произведения из конструкции 1.18. Тогда отображение $h\colon T \to S$, $h\colon (U, s) \mapsto s$ сохраняет порядок. Кроме того, $h(T)$ конфинально. Действительно, для каждого s_0 имеем $h\big((X, s_0)\big) = s_0 \geq s_0$. Таким образом, $y_t = x_{h(t)}$ — поднаправленность. Покажем, что эта поднаправленность сходится к x.

Действительно, рассмотрим произвольную окрестность $U \in \Omega_x$. По условию, существует $s_0 \in S$ такое, что $x_{s_0} \in U$. Пусть $t_0 = (U, s_0)$. Тогда все $t = (V, s) \in T$ такие, что $t \geq t_0$, удовлетворяют $V \in \Omega_x$, $V \subset U$, $s \geq s_0$, $s = h(t)$, $x_s \in V$. Следовательно, для каждого такого t имеем $y_t = x_{h(t)} = x_s \in U$, что и доказывает сходимость направленности y_t к x. □

Пример 1.24. Обозначим ω первый счетный ординал, а ω_1 — первый несчетный ординал. Для каждого ординала α на отрезке $[0, \alpha]$, состоящем из всех ординалов β, $0 \leq \beta \leq \alpha$, определена порядковая топология, т.е. интервалы $(a, b) = \{c : a < c < b\}$ и полуинтервалы $[0, a)$ и $(a, \alpha]$ образуют базу. ***Плоскостью Тихонова*** называется декартово произведение отрезков $P := [0, \omega_1] \times [0, \omega]$, наделенное топологией произведения. Положим $p = (\omega_1, \omega)$.

Рассмотрим теперь линейно упорядоченное множество S, полученное из $[0,\omega_1)\times[0,\omega)\subset P$ введением лексикографического порядка: $(\alpha,m)\le(\beta,n)$, если или $\alpha<\beta$, или $\alpha=\beta$ и $m\le n$. Ясно, что S — направленное множество. Пусть $x\colon S\to P$ — включение, тогда x — направленность в P. Покажем, что p — точка накопления направленности x.

Выберем произвольную окрестность U точки p. По определению порядковой топологии, существуют $\alpha_0\in[0,\omega_1)$ и $n_0\in[0,\omega)$ такие, что все точки (α,n), где $\alpha>\alpha_0$ и $n>n_0$ содержатся в U. Выберем произвольную точку $(\beta,m)\in S$ и положим $\alpha=\max(\beta,\alpha_0+1)$ и $n=\max(m,n_0+1)$, тогда $(\alpha,n)\ge(\beta,m)$ в S, и $(\alpha,n)\in U$. Таким образом, p — точка накопления направленности x. Отметим, что, в силу теоремы 1.22, существует поднаправленность в x, сходящаяся к p.

Покажем теперь, что никакая конфинальная поднаправленность в x не сходится к p. Пусть $T\subset S$ — произвольное конфинальное подмножество. Для каждого $n\in[0,\omega)$ положим $T_n=T\cap\bigl([0,\omega_1)\times\{n\}\bigr)$ и покажем, что конфинальность T в S влечет несчетность одного из T_n. Действительно, если все T_n счетны, то для каждого n в $[0,\omega_1)$ есть элемент q_n такой, что $T_n<(q_n,n)$. Множество всех таких q_n также счетно, поэтому в $[0,\omega_1)$ есть элемент q такой, что $q>q_n$ при всех n. Последнее означает, что для $(q,0)$ в T нет элемента, больше или равного $(q,0)$, противоречие с конфинальностью T.

Итак, пусть T_m несчетно. Тогда T_m конфинально в T. Действительно, если это не так, то существует $t_0=(\alpha_0,n_0)\in T$ такой, что для всех $t=(\alpha,m)\in T_m$ выполняется $t<t_0$, т.е. или $\alpha<\alpha_0$, или $\alpha=\alpha_0$, но $m<n_0$. В любом случае, $\alpha\le\alpha_0$, поэтому T_m счетно.

Рассмотрим теперь окрестность U точки p, состоящую из всех (α,n), где $n\ge m+1$. Тогда T_m не пересекает U, и так как T_m конфинально в T, для каждого $t_0\in T$ существует $t\in T_m$, $t\ge t_0$, но тогда $x_t\notin U$, так что конфинальная поднаправленность $\{x_t\}_{t\in T}$ не сходится к p. Что и требовалось.

Теорема 1.25. *Топологическое пространство X компактно, если и только если у каждой направленности имеется сходящаяся поднаправленность.*

Доказательство. Напомним, что семейство подмножеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ множества X называется ***центрированным***, если каждое конечное непустое подсемейство имеет непустое пересечение. Хорошо известно (см. например [1]), что компактность топологического пространства X эквивалентна следующему условию: всякая центрированная система замкнутых подмножеств X имеет непустое пересечение. Перейдем к доказательству теоремы.

Предположим сначала, что пространство X компактно, и пусть $x\colon S\to X$ — произвольная направленность в X. Для каждого $s\in S$ положим $A_s=\{x_t: t\in S,\, t\ge s\}$. Легко видеть, что для каждого конечного набора $s_1,\dots,s_k\in S$ существует общая мажоранта s, поэтому каждый конечный набор $A_{s_1},\dots,A_{s_k}$ имеет непустое пересечение, так как, например, содержит эту общую мажоранту s. Тем самым, система $\{A_s\}_{s\in S}$ — центрированная. Положим $F_s=\bar A_s$. Тогда $\{F_s\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств X. По цитированной выше теореме, компактность пространства X влечет наличие общей точки p у всех F_s.

Покажем, что p является точкой накопления направленности x. Рассмотрим произвольную окрестность U точки p и выберем произвольное $s_0\in S$. Так как $p\in F_{s_0}$ и $F_{s_0}=\bar A_{s_0}$, то $U\cap A_{s_0}\ne\emptyset$. Пусть $x_s\in U\cap A_{s_0}$, тогда $s\ge s_0$, а это означает, в силу произвольности U и s_0, что p — точка накопления для направленности x. По теореме 1.22, у направленности x есть поднаправленность, сходящаяся к p. Таким образом, мы доказали, что компактность влечет наличие сходящейся поднаправленности у каждой направленности.

Докажем теперь обратное. Пусть у каждой направленности имеется сходящаяся поднаправленность. Рассмотрим произвольное центрированное семейство F замкнутых подмножеств X. Дополним F пересечениями всевозможных непустых конечных подсемейств в F. Полученное семейство S также будет центрированным, и если мы покажем, что $\cap S\ne\emptyset$, то и $\cap F\ne\emptyset$ также будет верным.

Так как пересечение любых двух элементов из S также принадлежит S, то семейство S, вместе с частичным порядком, заданным обратным включением, является направленным множеством (пересечение пары элементов — их общая мажоранта). Выберем в каждом $s\in S$ произвольный элемент x_s, тогда $x\colon s\mapsto x_s$ — направленность. По предположению, эта направленность имеет поднаправленность, сходящуюся к некоторой точке $p\in X$. По теореме 1.22, точка p является точкой накопления для направленности x. Выберем любое $s_0\in S$, тогда для каждой окрестности U точки p существует $s\ge s_0$, для которого $x_s\in U$. Отметим, что $x_s\in s\subset s_0$, таким образом p — точка прикосновения s_0. Так как множество $s_0\subset X$ замкнуто, то $p\in s_0$. Таким образом, p содержится во всех $s_0\in S$, так что $\cap S\ne\emptyset$, откуда $\cap F\ne\emptyset$. По цитированной выше теоремы, это влечет компактность X. □

Замечание 1.26. Для метрических пространств X компактность равносильна возможности выбрать в каждой последовательности сходящуюся подпоследовательность. Отметим, что доказательство этого факта намного сложнее, чем приведенное доказательство теоремы 1.25.

Замечание 1.27. В терминах направленностей существенно легче доказывается теорема Тихонова о компактности декартова произведения любого семейства компактов, если это произведение наделяется тихоновской топологией. Также несложно получить доказательство приводимой ниже теоремы Алаоглу.

1.3 Слабая топология

Кроме сильной, на E и E^* имеются и другие естественные топологии. Напомним важную топологическую конструкцию. Пусть X — множество, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство топологических пространств, и $\mathcal{F}$ — семейство отображений $\{f_\alpha\colon X\to Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Тогда на X определена самая слабая топология, в которой все отображения $f_\alpha\in\mathcal{F}$ непрерывны. Эта топология называется ***$\mathcal{F}$-слабой*** или ***слабой для*** $\mathcal{F}$. Ее предбазой являются прообразы всевозможных открытых подмножеств пространств Y_α при всевозможных отображениях $f_\alpha\in\mathcal{F}$, а базой — всевозможные конечные пересечения таких прообразов.

Пример 1.28. Топология на декартовом произведении $X=\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha$ — это $\mathcal{F}$-слабая топология для семейства $\mathcal{F}$ всех проекций $f_\alpha\colon X\to X_\alpha$.

Описанная только что конструкция позволяет определить ***слабую топологию на нормированном пространстве*** E, для которой в качестве $\mathcal{F}$ рассматривается семейство E^* всех непрерывных (в сильной топологии) функционалов. Заменив E на E^*, а E^* — на $E^{**}=(E^*)^*$, мы определим также ***слабую топологию на*** E^*.

Чтобы различать сходимость последовательности точек x_n банахова пространства E к точке $x\in E$ в сильной и слабой топологии, первую сходимость будем обозначать $x_n\to x$, а вторую — через $x_n\rightharpoonup x$. Аналогичные обозначения будем использовать и для направленностей. В следующей теореме мы собрали утверждения, относящиеся к слабой сходимости на банаховом пространстве E. Их доказательства см. в [15]. Аналогичные результаты имеют место и для пространства E^*.

Теорема 1.29. *Пусть E — банахово пространство, x_n и f_n — последовательности в E и E^* соответственно, $\{x_s\}_{s\in S}$ и $\{f_s\}_{s\in S}$ — направленности в E и E^* соответственно, $x\in E$, $f\in E^*$. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Слабая топология на E хаусдорфова.*

(2) *$x_s\rightharpoonup x$, если и только если $f(x_s)\to f(x)$ при всех $f\in E^*$.*

(3) *Если $x_n\to x$, то $x_n\rightharpoonup x$, т.е. сильная сходимость влечет слабую.*

(4) *Если $x_n\rightharpoonup x$, то множество чисел $\big\{\|x_n\|\big\}$ ограничено и $\|x\|\le\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.*

(5) *Если $x_n\rightharpoonup x$ и $f_n\to f$, то $f_n(x_n)\to f(x)$.*

(6) *В конечномерном E сильная и слабая топологии совпадают.*

(7) *В бесконечномерном E сфера никогда не замкнута в слабой топологии, а открытый шар никогда не является открытым с слабой топологии (так как каждое открытое множество содержит некоторую аффинную гиперплоскость, т.е. множество вида $\big\{x\in E:\varphi(x)=\mathrm{const}\big\}$, где $\varphi\colon E\to\mathbb{F}$ — линейное отображение).*

(8) *В бесконечномерном E слабая топология всегда строго слабее сильной (слабая топология содержится в сильной и отлична от нее). Это вытекает из предыдущего пункта.*

(9) *В ℓ_1 последовательность сходится в сильной топологии, если и только если она сходится в слабой топологии. В частности, слабая топология в ℓ_1 не метризуема (если бы слабая топология была метризуемой, то тождественное отображение оказалось бы гомеоморфизмом, но это противоречит предыдущему пункту).*

(10) *Если F — еще одно банахово пространство, и $L\colon E\to F$ — линейное отображение, то L непрерывно относительно сильных топологий, если и только если оно непрерывно относительно слабых топологий.*

(11) *Выпуклое и замкнутое в сильной топологии подмножество банахова пространства является также замкнутым в слабой топологии.*

Задача 1.30. Выясните, какие пункты из теоремы 1.29 можно переформулировать в терминах направленностей.

1.4 $*$-слабая топология

Итак, на сопряженном пространстве E^* к нормированному пространству E мы определили две топологии: сильную и слабую. Отметим, что слабая топология на E^* получается максимальным ослаблением сильной до топологии, в которой все функционалы из E^{**} (непрерывные в сильной топологии) оставались бы непрерывными. Сейчас мы сделаем еще большее ослабление.

Напомним, что для каждого $x \in E$ мы определили функцию $J_x\colon E^* \to \mathbb{F}$, положив $J_x(f) = f(x)$, и показали, что J_x лежит в E^{**}, тем самым, построив отображение $J\colon E \to E^{**}$, $J\colon x \mapsto J_x$. Отметим, что $J(E) \subset E^{**}$, вообще говоря, не совпадает с E^{**}, поэтому самая слабая топология на E^*, в которой все еще непрерывны функционалы из $J(E)$, еще слабее, чем слабая топология на E^*. Построенная таким образом топология называется ***$*$-слабой***.

Чтобы отличать сходимость последовательности функционалов $f_n \in E^*$ к функционалу $f \in E^*$ в $*$-слабой топологии, эту сходимость будем обозначать $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Аналогичные обозначения будем использовать и для направленностей.

Теорема 1.31. *Пусть E — банахово пространство, x_n и f_n — последовательности в E и E^* соответственно, $\{x_s\}_{s\in S}$ и $\{f_s\}_{s\in S}$ — направленности в E и E^* соответственно, $x \in E$, $f \in E^*$. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *$*$-слабая топология на E^* хаусдорфова.*

(2) *$f_s \overset{*}{\rightharpoonup} f$, если и только если $f_s(x) \to f(x)$ для всех $x \in E$.*

(3) *Имеют место импликации $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

(4) *Если $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ и $x_n \to x$, то $f_n(x_n) \to f(x)$.*

(5) *В конечномерном E сильная, слабая и $*$-слабая топологии на E^* совпадают.*

(6) **Гиперплоскостью в** *E^* назовем каждое множество $\big\{f \in E^* : \varphi(f) = \mathrm{const}\big\}$, где $\varphi\colon E^* \to \mathbb{F}$ — линейное отображение. Тогда гиперплоскость в E^* замкнута в $*$-слабой топологии, если и только если $\varphi = J_x$ для некоторого $x \in E$.*

(7) *Для бесконечномерного нерефлексивного E всегда $*$-слабая топология на E^* строго слабее слабой ($*$-слабая топология содержится в слабой топологии и отлична от нее), что мгновенно следует из предыдущего пункта. Для рефлексивного E слабая и $*$-слабая топологии совпадают.*

(8) *Пусть B и B^{**} — замкнутые единичные шары с центром в нуле в пространствах E и E^{**} соответственно, а $J\colon E \to E^{**}$ — построенное выше изометричное линейное вложение. Тогда если пространство E рефлексивно, то $J(B) = B^{**}$, а если нет, что $J(B)$ — замкнутое собственное неплотное подмножество B^{**} относительно сильной топологии, но $*$-слабое замыкание $J(B)$ совпадает с B^{**}, т.е. $J(B)$ всюду плотно в B^{**} в $*$-слабой топологии.*

(9) *Множество $J(E)$ совпадает с множеством всех линейных функционалов на E^*, являющихся непрерывными в $*$-слабой топологии. Иными словами, для каждого линейного функционала $\varphi\colon E^* \to \mathbb{F}$, непрерывного в $*$-слабой топологии, существует $x \in E$ такой, что $\varphi = J_x$.*

Задача 1.32. Выясните, какие пункты из теоремы 1.31 можно переформулировать в терминах направленностей.

Ослабляя топологию, можно добиться того, что некоторые подмножества, не являвшиеся компактными, превратились в компактные. Именно это имеет место в случае со $*$-слабой топологией.

Теорема 1.33 (Банах–Алаоглу)**.** *Пусть E — банахово пространство и $B^* \subset E^*$ — замкнутый единичный шар с центром в нуле. Тогда B^* компактен в $*$-слабой топологии. Более того, если E сепарабельно, то $*$-слабая топология на B^* метризуема.*

Замечание 1.34. Компактность шара B^* еще не означает, что из любой последовательности в B^* можно выделить сходящуюся подпоследовательность (секвенциальная компактность). А общем случае эти два понятия не вытекают одно из другого. Тем не менее, для метрических пространств компактность и секвенциальная компактность равносильны. Поэтому важной составляющей многих доказательств является обсуждение метризуемости компакта B^*. Ниже мы приведем некоторые утверждения такого типа.

Сформулируем еще ряд результатов о рефлексивных пространствах.

1.5 Рефлексивные пространства

Следующая теорема устанавливает связь между рефлексивностью и компактностью единичного шара.

Теорема 1.35. *Банахово пространство E рефлексивно, если и только если замкнутый единичный шар $B \subset E$ компактен в слабой топологии.*

Задача 1.36. Докажите следующие утверждения.

- Замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства само рефлексивно.
- Банахово пространство E рефлексивно, если и только если E^* рефлексивно.
- Выпуклое ограниченное и замкнутое в сильной топологии подмножество рефлексивного пространства компактно в слабой топологии.

1.6 Сепарабельные пространства

Напомним, что топологическое пространство называется ***сепарабельным***, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество. В случае произвольных топологических пространств, сепарабельность, вообще говоря, не наследуется подмножествами. Стандартным примером является плоскость Зоргенфрея, полученная как декартово произведение вещественной прямой с топологией, база которой — полуинтервалы вида $[a, b)$. Легко видеть, что плоскость Зоргенфрея сепарабельна (множество всех рациональных точек всюду плотно), однако, если x, y — координаты на плоскости Зоргенфрея, то множество $y = -x$ наследует дискретную топологию, поэтому не сепарабельно. Для метрических пространств сепарабельность наследуется подмножествами.

В теории банаховых пространств сепарабельность тоже проявляется необычным образом. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение 1.37. *Если E — банахово пространство, у которого пространство E^* сепарабельно, то E также сепарабельно. Обратное утверждение не имеет места. Например, пусть $E = \ell_1$, тогда $E^* = \ell_\infty$. Хотя пространство ℓ_1 сепарабельно, пространство ℓ_∞ — нет.*

Оказывается, если к сепарабельности добавить рефлексивность, то аналог предыдущего предложения превратится в критерий.

Следствие 1.38. *Пусть E — банахово пространство. Тогда E — рефлексивно и сепарабельно, если и только если E^* — рефлексивно и сепарабельно.*

В следующем утверждении демонстрируется, что сепарабельность может быть тесно связана с метризуемостью.

Теорема 1.39. *Пусть E — банахово пространство и $B^* \subset E^*$ — замкнутый единичный шар. Тогда пространство E сепарабельно, если и только если шар B^* со $*$-слабой топологией метризуем.*

Следствие 1.40. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, тогда каждая ограниченная последовательность в E^* содержит $*$-слабо сходящуюся подпоследовательность.*

В следующем результате сепарабельность появляется лишь в доказательстве (которое мы не приводим).

Теорема 1.41. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство. Тогда каждая ограниченная последовательность в E содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

1.7 Равномерная выпуклость

Вводимое здесь понятие тесно связано с рефлексивностью. Неформально оно означает, что середина каждого отрезка, лежащего в шаре, находится достаточно далеко от границы шара. Приведем формальное определение.

Линейное нормированное пространство E называется ***равномерно выпуклым***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \in E$, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$, $\|x - y\| > \varepsilon$ выполняется $\big\|(x + y)/2\big\| < 1 - \delta$.

Приведем примеры пространств, являющихся и не являющихся равномерно выпуклыми. Обозначим ℓ_p^n пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой из ℓ_p (мы рассматриваем $\mathbb{R}^n$ как подпространство в ℓ_p, состоящее из всех последовательностей, в которых все члены, начиная с $(n + 1)$-го, равны нулю). Тогда

- ℓ_1^n, ℓ_∞^n, ℓ_1 и ℓ_∞ не являются равномерно выпуклыми (границы их единичных шаром содержат уплощения);
- все остальные пространства ℓ_p^n и ℓ_p, т.е. при $1 < p < \infty$, — равномерно выпуклы.

Теорема 1.42. *Каждое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.*

Замечание 1.43. Обратное утверждение к теореме 1.42 не имеет места. Действительно, ℓ_1^n рефлексивно, но не равномерно выпукло.

В равномерно выпуклых пространствах слабая сходимость влечет сильную сходимость.

Предложение 1.44. *Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство, $x_n, x \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $x_n \rightharpoonup x$ и $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\|$. Тогда $x_n \to x$.*

1.8 Гильбертовы пространства

Напомним, что ***гильбертовыми пространствами*** называются банаховы пространства, у которых норма задается скалярным произведением. Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ линейно по первому аргументу и симметрично в следующем смысле: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, где черта над числом обозначает комплексное сопряжение (если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то симметричность означает, что $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$). Таким образом, в случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ скалярное произведение линейно и по второму аргументу, т.е. оно ***билинейно***. В случае же $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ скалярное произведение (часто называемое ***эрмитовым произведением***) ***сопряженно линейно*** по второму аргументу: $\langle x, ay + bz\rangle = \bar{a}\langle x, y\rangle + \bar{b}\langle x, z\rangle$, поэтому говорят, что такое произведение ***полуторалинейно***. При этом, в обоих случаях требуется, чтобы $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Приведем примеры гильбертовых пространств.

- Пространство ℓ_2^n со скалярным произведением
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k,$$
где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.
- Пространство ℓ_2 со скалярным произведением
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k,$$
где $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$.
- Пространство $L_2(\mu)$ со скалярным произведением
$$\langle f, g\rangle = \int f\bar{g}\, d\mu.$$

Для того, чтобы нормированное пространство E являлось гильбертовым, необходимо и достаточно выполнения ***тождества параллелограмма***: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y^2\|\big)$ для любых $x, y \in E$ (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон параллелограмма).

Задача 1.45. Покажите, что $C[-1, 1]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ нельзя превратить в гильбертово пространство.

Теорема 1.46. *Каждое гильбертово пространство равномерно выпукло и поэтому рефлексивно.*

Теорема 1.47 (Ф. Рисс)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $\varphi \in H^*$. Тогда существует единственный $y \in H$, для которого $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in H$. При этом $\|\varphi\| = \|y\|$.*

Для каждого x из гильбертова пространства H положим $f_x(y) = \langle y, x\rangle$, тогда $f_x \in H^*$ и, по теореме Риса, все элементы из H^* могут быть получены таким способом. Положим $\langle f_x, f_y\rangle_* = \langle y, x\rangle$. Легко проверяется, что эта операция на H^* является скалярным произведением, причем $\|f_x\|^2 = \langle f_x, f_x\rangle_* = \|x\|^2$. Тем самым, мы превратили H^* в гильбертово пространство (напомним, что двойственное пространство каждого нормированного является банаховым, задача 1.9). Аналогично гильбертовым становится пространство H^{**}. Таким образом, определены два отображения из H в H^{**}: первое $x \mapsto J_x$, построенное выше, а второе $x \mapsto f_{f_x}$, построенное только что. Несложно проверить, что эти отображения совпадают. Действительно, для каждого $\varphi = f_y \in H^*$ имеем

$$f_{f_x}(\varphi) = f_{f_x}(f_y) = \langle f_y, f_x \rangle_* = \langle x, y \rangle = f_y(x) = \varphi(x) = J_x(\varphi).$$

Замечание 1.48. По теореме 1.47, отображение $y \mapsto f_y$ является изометрией между H и H^*. В случае вещественного H эта изометрия линейна, а в случае комплексного — сопряженно линейна.

Пусть теперь $A \in \mathcal{B}(H)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда для любого $y \in H$ отображение $\varphi\colon x \mapsto \big\langle A(x), y \big\rangle$ — непрерывный линейный функционал на H. По теореме 1.47, в H существует единственный вектор, который мы обозначим через $A^*(y)$, такой, что $\varphi(x) = \big\langle x, A^*(y) \big\rangle$. Иными словами, мы построили отображение $A^*\colon H \to H$, для которого

$$\big\langle x, A^*(y) \big\rangle = \big\langle A(x), y \big\rangle$$

при всех $x, y \in H$. Из этой формулы видно, что A^* — непрерывный линейный оператор, который называется ***сопряженным*** с A.

Задача 1.49. Пусть H — гильбертово пространство, $A, A_1, A_2 \in \mathcal{B}(H)$ и $a \in \mathbb{F}$. Докажите, что

(1) $\|A\| = \|A^*\|$;

(2) $\|A^*A\| = \|A\|^2$;

(3) $A^{**} = A$;

(4) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$;

(5) $(A_1A_2)^* = A_2^*A_1^*$;

(6) $(aA)^* = \bar{a}A^*$.

Таким образом, для гильбертова пространства H банахова алгебра $\mathcal{B}(H)$ его непрерывных линейных операторов обладает еще одной операцией, а именно, инволюцией $A \mapsto A^*$, удовлетворяющей свойствам из задачи 1.49. Такая банахова алгебра является примером C^*-алгебр, которые мы будем изучать в дальнейшем. Отметим также, что для хаусдорфова локально компактного пространства X банахова алгебра $C_0(X)$ с операцией сопряжения также представляет собой пример C^*-алгебры. При этом последняя алгебра коммутативна, а первая — некоммутативна. Оказывается, все C^*-алгебры исчерпываются в некоммутативном случае подалгебрами в $\mathcal{B}(H)$, замкнутыми относительно сильной топологии и инволюции, а в коммутативном — совпадают с $C_0(X)$ для соответствующих хаусдорфовых локально-компактных пространств.

Тема 2

Банаховы алгебры

План. Алгебра, унитальная алгебра, единица унитальной алгебры, подалгебра; подалгебра, порожденная данным подмножеством; субмультипликативность, нормированная алгебра, нормированная унитальная алгебра; замкнутая подалгебра нормированной алгебры, порожденная данным подмножеством; банахова алгебра, унитальная банахова алгебра; банахова подалгебра, порожденная данным подмножеством; примеры банаховых алгебр, прямая сумма семейства банаховых алгебр, ограниченная сумма семейства банаховых алгебр, теорема Вейерштрасса–Стоуна (компактная и локально-компактная версии); левый, правый и (двусторонний) идеалы алгебры; тривиальный идеал, собственный идеал, факторалгебра, модулярный идеал, связь модулярности идеала с унитальностью факторалгебры, свойства модулярных идеалов; идеал, порожденный данным подмножеством алгебры; замкнутый идеал, порожденный данным подмножеством нормированной алгебры; фактор нормированной алгебры по замкнутому идеалу; гомоморфизм алгебр, нулевой гомоморфизм, унитальный гомоморфизм унитальных алгебр, примеры гомоморфизмов, унитализация алгебры, канонический гомоморфизм, свойства унитализации, унитализация нормированной алгебры, обратимые элементы унитальной алгебры, мультипликативная группа обратимых элементов унитальной алгебры, резольвентное множество, спектр элемента унитальной алгебры, примеры вычисления спектров, свойства обратимых и необратимых элементов, свойства спектров элементов унитальной алгебры, унитальные банаховы алгебры; сумма геометрической прогрессии элемента, оценка частичной суммы этой прогрессии, норма которого меньше 1; открытость множества обратимых элементов унитальной банаховой алгебры и дифференцируемость отображения перехода к обратному элементу, компактность спектра элемента унитальной банаховой алгебры, непустота спектра (теорема Гельфанда); теорема Гельфанда–Мазура об унитальной банаховой алгебре, все элементы которой обратимы; спектральный радиус элемента унитальной алгебры, свойства спектрального радиуса, примеры вычисления спектрального радиуса, теорема Бёрлинга о вычислении спектрального радиуса, пример использования теоремы Бёрлинга, спектры элементов содержащей единицу замкнутой подалгебры унитальной банаховой алгебры, спектры и спектральные радиусы элементов неунитальной алгебры, экспоненты элементов унитальной банаховой алгебры, модулярные идеалы банаховой алгебры, их замыкания, максимальные модулярные идеалы, характеры коммутативной алгебры, их свойства, связь со спектром, непрерывность характеров коммутативной банаховой алгебры, их связь с максимальными идеалами, характеры коммутативной алгебры и ее унитализации, связь между характерами и спектрами элементов коммутативной банаховой алгебры, топология пространства характеров коммутативной банаховой алгебры, пространство характеров банаховой алгебры непрерывных функций, заданных на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве, отождествление пространства характеров коммутативной банаховой алгебры с подпространством в пространстве характеров ее унитализации, преобразования Гельфанда, представление Гельфанда коммутативной банаховой алгебры, согласованность преобразований Гельфанда элементов унитализации коммутативной банаховой алгебры с отождествлениями, радикал алгебры, квазинильпотентные элементы, полупростая алгебра, применение представления Гельфанда для доказательства свойств спектрального радиуса, отсутствие субаддитивности и субмультипликативности спектрального радиуса в общем случае; гомеоморфность пространства характеров унитальной банаховой алгебры, порожденной одним элементом, со спектром этого элемента; гомеоморфность пространства характеров неунитальной банаховой алгебры, порожденной одним элементом, со спектром этого элемента, из которого выкинут 0.

Начнем с определения разных типов алгебр и более детально обсудим так называемые банаховы алгебры. Содержание этого раздела является базой теории C^*-алгебр, к которой мы обратимся в следующих лекциях. Для более детального изучения материала мы рекомендуем монографию [16]. Впрочем, многие излагаемые там факты приводятся без доказательств и пояснений. В наших лекциях мы постарались заполнить эти пробелы.

В дальнейшем, мы будем иметь дело лишь с алгебрами над полем $\mathbb{C}$, не оговаривая это каждый раз.

2.1 Элементы теории алгебр

Напомним сначала определение алгебры.

2.1.1 Алгебра, унитальная алгебра

Алгебра A — это векторное пространство с билинейным ассоциативным умножением: для любых $a, b, c \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ имеем

$$(a, b) \mapsto ab, \quad (\lambda a + \mu b, c) = \lambda ac + \mu bc, \quad (c, \lambda a + \mu b) = \lambda ca + \mu cb, \quad a(bc) = (ab)c.$$

Если в алгебре A есть ***единица***, т.е. элемент $1 \in A$, для которого $a\,1 = 1\,a = a$ для всех $a \in A$, то A называется ***унитальной алгеброй***. Разумеется, единица в унитальной алгебре единственна.

Подалгебра B ***алгебры*** A — это линейное подпространство, замкнутое относительно умножения: для любых $a, b \in B$ выполняется $ab \in B$. Таким образом, подалгебра сама является алгеброй.

Пересечение произвольного семейства подалгебр снова является подалгеброй. В частности, если $S \subset A$ — произвольное подмножество, то пересечение всех подалгебр в A, содержащих S, называется ***подалгеброй, порожденной*** S.

Пример 2.1. Пусть $S = \{a\}$ — одноэлементное подмножество алгебры A. Тогда подалгебра $B \subset A$, порожденная S, является линейной оболочкой всех степеней a^n, $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Нормированные и унитальные нормированные алгебры

Пусть на алгебре A задана норма $\|\cdot\|$. Эта норма называется ***субмультипликативной***, если для любых $a, b \in A$ выполняется $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$. Алгебра с субмультипликативной нормой называется ***нормированной***. ***Унитальной нормированной алгеброй*** называется нормированная алгебра, содержащая единицу 1, причем $\|1\| = 1$.

Замечание 2.2. Всякая подалгебра нормированной алгебры сама является нормированной алгеброй.

Задача 2.3. Убедитесь, что замыкание нормированной подалгебры — также нормированная подалгебра.

Замечание 2.4. Выше мы определили понятие подалгебры алгебры A, порожденной ее подмножеством S. В случае, когда A — нормированная алгебра, определено понятие ***замкнутой подалгебры*** $C \subset A$***, порожденной*** S. По определению, C — наименьшая замкнутая подалгебра, содержащая S (напомним, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто, поэтому пересечение замкнутых подалгебр — замкнутая подалгебра). Отметим, что если B — подалгебра, порожденная S, то $C = \bar{B}$, так как замыкание пересечения равно пересечению замыканий.

Замечание 2.5. Из субмультипликативности нормы вытекает, что умножение в нормированной алгебре непрерывно. Это мгновенно следует из неравенства

$$\|ab - a'b'\| = \|ab - ab' + ab' - a'b'\| \leq \big\|a(b - b')\big\| + \big\|(a - a')b'\big\| \leq \|a\|\,\|b - b'\| + \|a - a'\|\,\|b'\|.$$

2.1.3 Банаховы алгебры

Полная нормированная алгебра называется ***банаховой***, а полная унитальная нормированная алгебра — ***унитальной банаховой алгеброй***.

Замечание 2.6. Отметим, что замкнутая подалгебра банаховой алгебры сама является банаховой алгеброй. Таким образом, для каждого подмножества S банаховой алгебры A пересечение всех замкнутых подалгебр в A, содержащих S, что совпадает с замыканием пересечения всех подалгебр в A, содержащих S, — наименьшая банахова подалгебра A, содержащая S, которая называется ***банаховой подалгеброй, порожденной*** S.

Следующее простое утверждение будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Предложение 2.7. *Пусть A — банахова алгебра и $S \subset A$ состоит из попарно коммутирующих элементов. Тогда банахова подалгебра $B \subset A$, порожденная S, — коммутативна.*

Доказательство. Отметим, что семейство $\mathbb{C}[S]$ всевозможных многочленов от всевозможных конечных наборов элементов, содержащихся в S, является подалгеброй в A, порожденной S, так что B — замыкание $\mathbb{C}[S]$. Каждая пара многочленов из $\mathbb{C}[S]$ коммутирует, так как коммутируют все элементы из S.

Пусть a и b — произвольные элементы из B. Так как B — замыкание $\mathbb{C}[S]$, существуют последовательности a_n и b_n элементов из $\mathbb{C}[S]$, сходящиеся в a и b соответственно. Так как умножение в нормированной алгебре непрерывно (замечание 2.5), то $a_n b_n \to ab$ и $b_n a_n \to ba$. Но $a_n b_n = b_n a_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому, в силу единственности предела в нормированном пространстве, имеем $ab = ba$, что и требовалось. □

Пример 2.8. Приведем примеры банаховых алгебр (сравните с примерами из раздела 1.1):

- алгебра $\mathcal{B}(E)$ ограниченных линейных отображений банахова пространства E в себя, наделенное операторной нормой, в частности, алгебра $M_n(\mathbb{C})$ всех комплексных матриц размера $n \times n$ (эти банаховы алгебры унитальны);

- пространство $\mathcal{B}(S)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на множестве S, наделенное sup-нормой (эта банахова алгебра унитальна);

- пространство $C_b(X) \subset \mathcal{B}(X)$ всех непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве X (эта банахова алгебра также унитальна);

- пространство $C(X) \subset \mathcal{B}(X)$ всех непрерывных функций на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве X (в этом случае $C(X) = C_b(X)$, так что эта банахова алгебра также унитальна);

- подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$ всех непрерывных функций, заданных на хаусдорфовом локально компактном топологическом пространстве X и ***исчезающих*** (***обращающихся в нуль***) на бесконечности (эта банахова алгебра унитальна, если и только если пространство X компактно);

- пространство $m = \ell_\infty$ всех ограниченных последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots)$ комплексных чисел с sup-нормой (эта банахова алгебра унитальна);

- замкнутое подпространство c пространства ℓ_∞, состоящее из всех сходящихся последовательностей;

- замкнутое подпространство c_0 пространства c, состоящее из всех последовательностей, сходящихся к 0;

- подпространство $\mathcal{B}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, состоящее из всех (ограниченных) измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, заданных на измеримом пространстве Ω (эта банахова алгебра унитальна);

- пространство $L^\infty(\mu)$ классов эквивалентности существенно ограниченных комплекснозначных функций с нормой $\|f\|_\infty$ (здесь — существенный супремум функции $|f|$) на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ с мерой μ (эта банахова алгебра унитальна).

Замечание 2.9. Пространство $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$, вообще говоря, не является банаховой алгеброй, поскольку норма может не являться субмультипликативной. Например, пусть $\Omega = [0, a]$, $0 < a < 1$, μ — мера Лебега, $f = g = 1$, тогда $\|f\|_p = \|g\|_p = \|f\,g\|_p = \sqrt[p]{\int_0^a 1\,d\lambda} = a^{1/p}$, откуда $\|f\,g\|_p = a^{1/p}$, $\|f\|_p\|g\|_p = a^{2/p}$, поэтому $\|f\,g\|_p > \|f\|_p\|g\|_p$.

Следующая конструкция будет особенно полезна в дальнейшем.

Конструкция 2.10. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство банаховых алгебр. Положим

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \Big\{(a_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda : \big\|(a_\lambda)\big\| := \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda\| < \infty\Big\}.$$

Доказательство следующего утверждения тривиально.

Предложение 2.11. *Множество $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ с покомпонентными операциями*

$$(a_\lambda) + (b_\lambda) = (a_\lambda + b_\lambda), \quad \mu(a_\lambda) = (\mu a_\lambda), \quad (a_\lambda)(b_\lambda) = (a_\lambda b_\lambda)$$

и определенной выше нормой $(a_\lambda) \mapsto \big\|(a_\lambda)\big\|$ является банаховой алгеброй.

Множество $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, вместе с определенными выше поточечными операциями и нормой, называется ***прямой суммой***[1] ***семейства*** $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ***банаховых алгебр***.

Следующий объект является модификацией конструкции 2.10.

Конструкция 2.12. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство банаховых алгебр. ***Ограниченной суммой***[2] этого семейства называется множество $B = \oplus^{c_0}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, состоящее из всех (a_λ) таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество $\{\lambda \in \Lambda : \|a_\lambda\| > \varepsilon\}$ конечно.

Задача 2.13. Покажите, что $\oplus^{c_0}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ является замкнутым идеалом в $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ (определение идеала мы напомним в разделе 2.1.4).

---

[1] Имеется несколько разных определений прямой суммы. Стандартное состоит из всех элементов декартова произведения, у которых все координаты, за исключение конечного числа, равны нулю. Приводимый здесь вариант прямой суммы некоторые авторы называют ℓ_∞***-прямая сумма***.

[2] Этот вариант прямой суммы некоторые авторы называют c_0***-прямая сумма***.

Особую роль в дальнейшем будут играть банаховы алгебры $C(X)$, где X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, а также $C_0(X)$, где X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство (см. выше). Знаменитая теорема Вейерштрасса-Стоуна описывает условия, при которых подалгебра этих алгебр является всюду плотной. Имеется много разновидностей теоремы Вейерштрасса–Стоуна. Мы приведем те, которые понадобятся нам.

Теорема 2.14 (Вейерштрасс–Стоун, компактная версия)**.** *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A \subset C(X)$ — унитальная подалгебра,*

- *замкнутая относительно сопряжения (т.е. для каждого $a \in A$ выполняется $\bar{a} \in A$) и*
- *разделяющая точки (т.е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ существует $a \in A$ такое, что $a(x) \neq a(y)$).*

Тогда A — всюду плотна в $C(X)$.

Теорема 2.15 (Вейерштрасс–Стоун, локально-компактная версия)**.** *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A \subset C_0(X)$ — подалгебра,*

- *замкнутая относительно сопряжения,*
- *разделяющая точки и*
- *нигде не зануляющаяся (т.е. для любого $x \in X$ существует $a \in A$ такое, что $a(x) \neq 0$).*

Тогда A — всюду плотна в $C_0(X)$.

2.1.4 Идеалы, модулярные идеалы

Левым (***правым***) ***идеалом*** I в алгебре A называется векторное подпространство такое, что $A\,I \subset I$ ($I\,A \subset I$). Если I одновременно левый и правый идеал, то он называется просто ***идеалом***. Ясно, что $\{0\}$ и A — идеалы. Они называются ***тривиальными***. Идеал, отличный от A, называется ***собственным***. Собственный идеал называется ***максимальным***, если он не содержится ни в одном отличном от него собственном идеале. Аналогично определяются максимальные левые и правые идеалы.

Если I —идеал в алгебре A, то на факторпространстве A/I естественным образом определено умножение: $(a+I)(b+I) = ab+I$, превращающее A/I в алгебру, которая называется ***факторалгеброй***. Интересный вопрос: для каких идеалов $I \subset A$ алгебра A/I является унитальной? Назовем собственный идеал I ***модулярным***, если существует такой элемент $u \in A$, что для всех $a \in A$ выполняется $a - au \in I$ и $a - ua \in I$. При этом u называется ***I-модулярным элементом***.

Предложение 2.16. *Пусть A — алгебра, а $I \subset A$ — ее собственный идеал. Тогда алгебра A/I унитальна, если и только если идеал I — модулярный. Более того, для модулярного I и любого I-модулярного элемента u класс $u + I$ — единица в A/I.*

Доказательство. Пусть I — модулярный идеал. Покажем, что $u + I$ — единица в A/I. Имеем $(a + I)(u + I) = au + I = a + I$, где последнее равенство вытекает из того, что $a - au \in I$. Аналогично, $(u + I)(a + I) = a + I$.

Обратно, пусть A/I — унитальная алгебра, а $u + I$ — единица в A/I. Тогда $(a + I)(u + I) = au + I = a + I$, поэтому $a - au \in I$. Аналогично, $a - ua \in I$. □

Опишем некоторые свойства модулярных идеалов.

Предложение 2.17. *Пусть I — модулярный идеал в алгебре A, а $u \in A$ — соответствующий I-модулярный элемент. Тогда*

(1) *$u \notin I$;*

(2) *каждый собственный идеал $J \subset A$, содержащий I, также модулярен, и в качестве J-модулярного элемента можно выбрать тот же u;*

(3) *идеал I содержится в некотором максимальном в A идеале (который, в силу предыдущего пункта, также является модулярным);*

(4) *если алгебра A унитальна, то все ее собственные идеалы модулярны, так что для каждого собственного идеала $I \subset A$ факторалгебра A/I унитальна и $1 + I$ — ее единица, т.е. $1 \in A$ является I-унитальным элементом для всех таких I;*

(5) *в унитальной алгебре такой, что $0 \neq 1$, множество максимальных идеалов непусто.*

Доказательство. (1) Предположим противное, т.е. $u \in I$, и выберем произвольный $a \in A$. Тогда $ua \in I$ в силу того, что I — идеал, и $a - ua \in I$ в силу модулярности I, поэтому $a \in I$, так что $I = A$, противоречие с тем, что I — собственный идеал (по определению модулярного идеала).

(2) Для каждого $a \in A$ выполняется $a - ua \in I \subset J$ и $a - au \in I \subset J$, так что J, будучи собственным, тоже модулярен, а u — один из J-модулярных элементов.

(3) Обозначим $\mathcal{M}_I$ множество всех идеалов в A, содержащих I и не содержащих u. Отметим, что множество $\mathcal{M}_I$ частично упорядочено отношением включения. Рассмотрим произвольную цепочку в $\mathcal{M}_I$, тогда объединение K ее элементов является собственным идеалом, так как все элементы этой цепочки, а, значит, и K, не содержат u. Таким образом, $K \in \mathcal{M}_I$ и, по лемме Цорна, в $\mathcal{M}_I$ имеется максимальный элемент M. Покажем, что M — максимальный идеал в A. Действительно, если это не так, то существует собственный идеал L, отличный от M и такой, что $L \supset M \supset I$. Но тогда $u \in L$ (иначе $L \in \mathcal{M}_I$, что противоречит максимальности M). По пункту (2), идеал L модулярен, а элемент u является L-модулярным. Но, по пункту (1), $u \notin L$, противоречие.

(4) Положим $u = 1$, тогда для каждого идеала $I \subset A$ имеем $a - ua = a - au = 0 \in I$.

(5) Так как $0 \neq 1$ по условию, то $\{0\}$ — собственный идеал. По пункту (4), собственный идеал $\{0\} \subset A$ является модулярным. По пункту (3), идеал $\{0\}$ содержится в некотором идеале, максимальном в A, так что множество максимальных в A идеалов непусто. □

Пусть $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство идеалов в алгебре A, тогда $\cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ — тоже идеал. Таким образом, для каждого $S \subset A$ существует наименьший идеал, содержащий S. Говорят, что такой идеал ***порожден*** S.

Замечание 2.18. Если A — нормированная алгебра, то замыкание идеала — также идеал. Пересечение всех замкнутых идеалов, содержащих S, — наименьший замкнутый идеал, содержащий S. Такой идеал называется ***замкнутым идеалом, порожденным*** S. Если I — идеал, порожденный S, то его замыкание совпадает с замкнутым идеалом, порожденным S.

Теорема 2.19. *Пусть I — замкнутый идеал в нормированной алгебре A. Тогда на алгебре A/I определена факторнорма*

$$\|a + I\| = \inf_{a' \in I} \|a + a'\|,$$

для которой умножение субмультипликативна. Таким образом, A/I — нормированная алгебра.

Доказательство. Для произвольных $a, b \in A$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $a', b' \in I$, для которых выполняется

$$\|a + a'\| < \|a + I\| + \varepsilon, \quad \text{и} \quad \|b + b'\| < \|b + I\| + \varepsilon.$$

Но тогда

$$\big(\|a + I\| + \varepsilon\big)\big(\|b + I\| + \varepsilon\big) > \|a + a'\|\,\|b + b'\| \geq \big\|(a + a')(b + b')\big\| = \|ab + ab' + a'b + a'b'\| \geq \|ab + I\|,$$

где второе неравенство — следствие того, что алгебра A нормированная, а последнее вытекает из того, что $ab' + a'b + a'b' \in I$. Так как итоговое неравенство выполняется для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\|a + I\|\,\|b + I\| \geq \|ab + I\| = \big\|(a + I)(b + I)\big\|,$$

так что введенная норма на A/I субмультипликативна и, значит, A/I — нормированная алгебра. □

2.1.5 Гомоморфизмы алгебр

Гомоморфизмом алгебр $\varphi\colon A \to B$ называется всякое линейное отображение, сохраняющее умножение: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Множество всех гомоморфизмов из A в B обозначим $\mathrm{Hom}(A, B)$. Так как каждый гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ является линейным отображением, для него определено ядро $\ker \varphi$. Легко видеть, что ядро $\ker \varphi$ — идеал алгебры A, а образ $\mathrm{im}\,\varphi$ — подалгебра в B. При этом факторалгебра $A/\ker \varphi$ изоморфна $\mathrm{im}\,\varphi$. Гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$, для которого $\varphi(a) = 0$ при всех $a \in A$, назовем ***нулевым***. У такого гомоморфизма φ ядро $\ker \varphi$ совпадает со всей алгеброй A.

Замечание 2.20. Хотя каждый гомоморфизм алгебр — линейное отображение, $\mathrm{Hom}(A, B)$ не является векторным пространством (линейные комбинации не сохраняют произведение).

Гомоморфизм φ унитальных алгебр, сохраняющий 1, т.е. $\varphi(1) = 1$, называется ***унитальным***. Отметим, что если A и $B \neq \{0\}$ — унитальные алгебры, то нулевой гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ не является унитальным. Существуют ли ненулевые неунитальные гомоморфизмы унитальных алгебр? Ответ положительный, хотя в некоторых случаях это не так, например, когда $B = \mathbb{C}$ (см. ниже предложение 2.54). Множество всех унитальных гомоморфизмов между унитальными алгебрами обозначим $\mathrm{Hom}_1(A, B)$. Приведем примеры гомоморфизмов алгебр, в частности, продемонстрируем, что ненулевой гомоморфизм унитальных алгебр не обязан быть унитальным.

Пример 2.21. (1) Рассмотрим определенное выше факторотображение $\pi\colon A \to A/I$, где I — идеал, $\pi\colon a \to a+I$. Тогда $\pi \in \mathrm{Hom}(A, A/I)$.

(2) Пусть $A = \mathbb{C}$ и $B = M_2(\mathbb{C})$. Тогда A и B — унитальные алгебры. Построим ненулевой гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$, не являющийся унитальным. Положим $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\colon 1 \mapsto b$ и продолжим это отображение по линейности. Так как $b^2 = b$, то φ сохраняет произведение. Тем самым, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, но $\varphi \notin \mathrm{Hom}_1(A, B)$. Если вместо φ рассмотреть отображение $\psi\colon A \to B$, являющееся продолжением по линейности отображения $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то ψ — унитальный гомоморфизм.

(3) Обозначим $\mathbb{C}[z]$ алгебру комплексных многочленов переменной z (она, разумеется, унитальна). Пусть A — унитальная алгебра, тогда для каждого $a \in A$ и $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_n z^n$ определен элемент $p(a) = \lambda_0 1 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_n a^n$ алгебры A. Легко видеть, что отображение $\varphi : \mathbb{C}[z] \to A$, $\varphi\colon p \mapsto p(a)$, является унитальным гомоморфизмом, т.е. $\varphi \in \mathrm{Hom}_1\big(\mathbb{C}[z], A\big)$.

2.1.6 Унитализация

Каждую неунитальную алгебру A можно расширить до унитальной. Мы приведем конструкцию, применяемую к произвольной алгебре, даже унитальной. Отметим, что при таком расширении унитальной алгебры ее исходная единица перестает быть единицей.

Итак, пусть A — произвольная алгебра. Положим $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ (в смысле векторных пространств) и зададим умножение так: $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)$. Легко проверяется, то это умножение билинейно, ассоциативно, и $(0, 1)$ является единицей в $\widetilde{A}$. Алгебра $\widetilde{A}$ называется ***унитализацией алгебры*** A. Отметим, что отображение $a \mapsto (a, 0)$ из A в $\widetilde{A}$ является инъективным гомоморфизмом, который позволяет отождествить A с ее образом в $\widetilde{A}$ (в дальнейшем мы будем писать $A \subset \widetilde{A}$, имея в виду это отождествление). Для удобства, элементы (a, λ) алгебры $\widetilde{A}$ будем записывать в виде $a + \lambda$. Имеется важный гомоморфизм алгебр $\widetilde{A} \to \mathbb{C}$, $a + \lambda \mapsto \lambda$, который называется ***каноническим***.

Замечание 2.22. Если алгебра A унитальна, то в $\widetilde{A}$ образ единицы $1_A \in A$ имеет вид $(1_A, 0)$. Этот элемент уже не является единицей в $\widetilde{A}$, так как, например, $(1_A, 0)(0, \lambda) = (\lambda 1_A, 0) \neq (0, \lambda)$ при $\lambda \neq 0$. Однако $(1_A, 0)$ является единицей в подалгебре $A \subset \widetilde{A}$, так как $(a, 0)(1_A, 0) = (1_A, 0)(a, 0) = (a, 0)$.

Замечание 2.23. В дальнейшем мы выясним, что определенная нами унитализация иногда оказывается не вполне пригодной для ряда задач. В связи с этим мы также введем другой прием, моделирующий единицу, а именно, так называемую аппроксимативную единицу.

Приведем ряд простейших свойств унитализации $\widetilde{A}$ алгебры A.

Предложение 2.24. *Пусть $\widetilde{A}$ — унитализации алгебры A. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Подалгебра $A \subset \widetilde{A}$ является модулярным идеалом в $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}/A \approx \mathbb{C}$.*

(2) *Если A — коммутативная алгебра, что $\widetilde{A}$ — тоже.*

(3) *Если A — нормированная алгебра, то $\widetilde{A}$, на которой задана функция $\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$, является нормированной.*

(4) *Подалгебра A замкнута в $\widetilde{A}$.*

(5) *Если A — банахова алгебра, то $\widetilde{A}$ — тоже.*

(6) *Если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм алгебр и алгебра B унитальна, то отображение $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to B$, заданное формулой $a+\lambda \mapsto \varphi(a)+\lambda 1_B$ для всех $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, является единственным унитальным гомоморфизмом, продолжающим φ. Здесь 1_B — единица алгебры B.*

Доказательство. (1) В силу предложения 2.17, достаточно проверить, что A — идеал в $\widetilde{A}$, т.е. $(b,\mu)A \subset A$ для всех $(b,\mu) \in \widetilde{A}$. Но это так в силу $(b,\mu)(a,0) = (ba+\mu a, 0) \in A$. Аналогично, $(a,0)(b,\mu) \in A$.

Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varphi\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, $a+\lambda \mapsto \lambda$. Тогда его ядро состоит из всех (a,λ) таких, что $\varphi(a,\lambda) = \lambda = 0$, т.е. это ядро совпадает с $A \subset \widetilde{A}$. По известной теореме из линейной алгебры, $\widetilde{A}/A \approx \operatorname{im}\varphi = \mathbb{C}$, что и утверждалось.

(2) Это мгновенно видно из формулы умножения.

(3) Свойства нормы проверяются непосредственно. Для проверки субмультипликативности заметим, что

$$\|(a+\lambda)(b+\mu)\| = \|ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu\| = \|ab+\lambda b+\mu a\| + |\lambda\mu| \le \|ab\| + \|\lambda b\| + \|\mu a\| + |\lambda\mu| \le$$
$$\le \|a\|\,\|b\| + |\lambda|\,\|b\| + |\mu|\,\|a\| + |\lambda|\,|\mu| = \big(\|a\|+|\lambda|\big)\big(\|b\|+|\mu|\big) = \|a+\lambda\|\,\|b+\mu\|.$$

(4) Если $a+\lambda \notin A \subset \widetilde{A}$, то $\lambda \neq 0$ и $\inf_{b\in A}\|a+\lambda-b\| \ge |\lambda| > 0$, поэтому $a+\lambda$ не является точкой прикосновения для A.

(5) Пусть (a_k,λ_k) —фундаментальная последовательность в $\widetilde{A}$, тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $p,q \ge N$ выполняется $\|a_p-a_q\| + |\lambda_p-\lambda_q| < \varepsilon$, откуда $\|a_p-a_q\| < \varepsilon$ и $|\lambda_p-\lambda_q| < \varepsilon$, т.е. последовательности a_k в A и λ_k в $\mathbb{C}$ фундаментальны. Но A и $\mathbb{C}$ — полные пространства, поэтому $a_k \to a \in A$ и $\lambda_k \to \lambda \in \mathbb{C}$, поэтому $(a_k,\lambda_l) \to (a,\lambda)$, что и доказывает полноту $\widetilde{A}$.

(6) Действительно, линейность $\tilde{\varphi}$ очевидна из определения. Далее,

$$\tilde{\varphi}\big((a+\lambda)(b+\mu)\big) = \tilde{\varphi}(ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu) = \varphi(ab+\lambda b+\mu a) + \lambda\mu 1_B = \varphi(a)\varphi(b) + \lambda\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\mu 1_B =$$
$$= \varphi(a)\big(\varphi(b)+\mu 1_B\big) + \lambda 1_B\big(\varphi(b)+\mu 1_B\big) = \big(\varphi(a)+\lambda 1_B\big)\big(\varphi(b)+\mu 1_B\big) = \tilde{\varphi}(a+\lambda)\tilde{\varphi}(b+\mu),$$

поэтому $\tilde{\varphi}$ — гомоморфизм. Кроме того, $\tilde{\varphi}(0_A+1) = \varphi(0) + 1\cdot 1_B = 1_B$, поэтому $\tilde{\varphi}$ унитален, и $\tilde{\varphi}(a+0) = \varphi(a)$, поэтому $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ. Наконец, если ψ — унитальное продолжение гомоморфизма $\tilde{\varphi}$, то $\psi(a+0) = \varphi(a)$, $\psi(0_A+1) = 1_B$, поэтому

$$\psi(a+\lambda) = \psi(a+0+0_A+\lambda 1) = \psi(a+0) + \psi(0_A+\lambda 1) = \varphi(a) + \lambda\psi(1) = \varphi(a) + \lambda 1_B,$$

что и требовалось. □

Замечание 2.25. Хотя определенная выше норма на унитализации $\widetilde{A}$ нормированной алгебры A вполне подходит для изучения банаховых алгебр, при переходе к C^*-алгебрам она оказывается непригодной, так как для нее не выполняется условие, определяющее C^*-алгебры. Для C^*-алгебры A мы заменим норму на $\widetilde{A}$ так, чтобы это условие выполнялось. А пока, вплоть до раздела 3.3.1, **будем рассматривать унитализацию $\widetilde{A}$ именно с той нормой, которая была введена в пункте (3) предложения 2.24**.

Важным понятием в рассматриваемой теории является спектр элемента унитальной банаховой алгебры и обобщение этого понятия на неунитальные банаховы алгебры. Приведем ряд важных для дальнейшего результатов.

2.2 Резольвентные множества и спектры в унитальной алгебре

Элемент a унитальной алгебры A называется ***обратимым***, если существует такой $b \in A$, что $ab = ba = 1$. Элемент b однозначно определен, так как если есть еще один такой b', то $b'ab = b'(ab) = b' = (b'a)b = b$. Элемент b обозначается a^{-1}, а множество всех обратимых элементов из A — через $\operatorname{Inv}(A)$.

Предложение 2.26. *Для унитальной алгебры A множество $\operatorname{Inv}(A)$ — группа по умножению, и для любых $a,b \in \operatorname{Inv}(A)$ выполняется $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Доказательство. Если $a,b \in \operatorname{Inv}(A)$, то $abb^{-1}a^{-1} = 1 = b^{-1}a^{-1}ab$, поэтому $ab \in \operatorname{Inv}(A)$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Кроме того, $1\cdot 1 = 1$, откуда $1 \in \operatorname{Inv}(A)$. Очевидно также, что для каждого $a \in \operatorname{Inv}(A)$ имеем $a^{-1} \in \operatorname{Inv}(A)$. □

Для каждого элемента a унитальной алгебры A определим следующие два подмножества поля $\mathbb{C}$:

- ***резольвентное множество*** $\rho_A(a) = \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A)\}$ и
- ***спектр*** $\sigma_A(a) = \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \mathrm{Inv}(A)\} = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.

Кроме того, если $\lambda \in \rho(a)$, то элемент $(a-\lambda 1)^{-1} \in A$ называется ***резольвентой*** элемента $a \in A$. В дальнейшем, для краткости, вместо $\lambda 1$ будем писать просто λ.

Приведем некоторые примеры вычисления спектров.

- Пусть $A = C(X)$, где X — хаусдорфов компакт. Тогда $f \in A$ обратим, если и только если он всюду отличен от нуля. Поэтому $\sigma(f) = f(X)$.
- Пусть $A = C_b(X)$, где X — произвольное топологическое пространство. Элемент $f \in A$ обратим, если он всюду отличен от нуля и, кроме того, множество $1/f(X)$ ограничено. Последнее имеет место, если и только если 0 не является точкой прикосновения множества $f(X)$. Таким образом, необратимость $\lambda - f$ равносильно тому, что $\lambda \in \overline{f(X)}$, где $\overline{f(X)}$ обозначает замыкание множества $f(X)$. Итак, $\sigma(f) = \overline{f(X)}$.
- Пусть $A = M_n(\mathbb{C})$, тогда спектр $a \in A$ — это множество всех собственных значений матрицы a, т.е. ее спектр в смысле линейной алгебры.

В предложении 2.26 мы показали, что в унитальной алгебре произведение любых двух обратимых элементов — также обратимый элемент. А что можно сказать про другие произведения?

Предложение 2.27. *Пусть a и b — элементы унитальной алгебры A. Тогда*

(1) *если a обратим, b — необратим, то ab и ba необратимы;*

(2) *если a и b необратимы, то ab — может быть обратимым;*

(3) *если a и b коммутируют, то элемент ab обратим, если и только если a и b обратимы;*

(4) *если $a_1, \dots, a_n \in A$ попарно коммутируют, то элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим, если и только если все a_k обратимы;*

(5) *если $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ — ненулевой комплексный многочлен, $p(z) = \lambda_0(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$, $\lambda_0 \neq 0$, — его разложение на множители, то $p(a)$ обратим, если и только если все сомножители $a - \lambda_k 1$ обратимы.*

Доказательство. (1) Предположим противное, и пусть сначала ab обратим. Тогда $ab = c \in \mathrm{Inv}(A)$ и $b = a^{-1}c \in \mathrm{Inv}(A)$ по предложению 2.26, противоречие. Случай обратимости ba разбирается аналогично.

(2) Рассмотрим алгебру линейный отображений пространства ℓ_2 в себя (можно ограничиться непрерывными отображениями), и пусть $a\colon (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$ — сдвиг вправо, а $b\colon (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ — сдвиг влево. Тогда a необратим, так как не сюръективен, ведь его образ не содержит, скажем, $(1, 0, 0, \dots)$. Элемент b также необратим, так как не инъективен, поскольку его ядро содержит ненулевой элемент, скажем тот же $(1, 0, 0, \dots)$. Но ba — тождественное отображение.

(3) Если a и b — обратимы, то обратимость ab следует из предложения 2.26. Докажем обратное утверждение. Пусть теперь элемент ab обратим, т.е. $ab = ba = c \in \mathrm{Inv}(A)$, тогда $ac = aba = ca$ и аналогично $cb = bab = bc$. Далее, умножая равенство $ac = ca$ справа и слева на c^{-1}, получаем $c^{-1}a = ac^{-1}$. Аналогично, $c^{-1}b = bc^{-1}$. Наконец,

$$1 = (ab)c^{-1} = a(bc^{-1}) = c^{-1}ab = c^{-1}ba = (bc^{-1})a,$$

где третье равенство следует из того, что c^{-1} коммутирует с a и b, четвертое — из коммутируемости a и b, а пятое — снова из коммутируемости c^{-1} и b. Таким образом, $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Аналогично, $b \in \mathrm{Inv}(B)$.

(4) Если все a_k обратимы, то обратимость $a_1 \cdots a_n$ вытекает из предложения 2.26. Обратно, пусть элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим. Покажем, что все a_k обратимы. Положим b равным произведению все a_i, кроме a_k. Тогда, в силу пункта (3), элементы b и a_k обратимы, что и требовалось.

(5) Доказательство вытекает из пункта (4) и того, что все $a - \lambda_k 1$ коммутируют между собой и с λ_0. □

Задача 2.28. Выяснить, могут ли некоммутирующие элементы a и b унитальной алгебры A быть необратимыми, но иметь оба произведения ab и ba обратимыми.

Предложение 2.29. *Пусть A — унитальная алгебра. Тогда*

(1) *для* $a \in A$ *и* $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *имеем* $\sigma(\mu a) = \mu\,\sigma(a)$ *и* $\rho(\mu a) = \mu\,\rho(a)$;

(2) *для* $a \in A$ *и* $\mu \in \mathbb{C}$ *имеем* $\sigma(a + \mu) = \sigma(a) + \mu$;

(3) *для* $a, b \in A$ *элемент* $1 - ab$ *обратим, если и только если* $1 - ba$ *обратим*;

(4) *для любых* $a, b \in A$ *имеем* $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$;

(5) *равенство* $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ *может не иметь места*;

(6) *если* B *— унитальная алгебра и* $\varphi\colon A \to B$ *— унитальный гомоморфизм, то* $\varphi\big(\mathrm{Inv}(A)\big) \subset \mathrm{Inv}(B)$, *поэтому для любого* $a \in A$ *выполняется* $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \sigma(a)$.

Доказательство. (1) Пусть $\lambda \in \rho(a)$, тогда $a - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, откуда $\mu a - \mu\lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A)$ и, значит, $\mu\lambda \in \rho(\mu a)$. Аналогично доказывается и обратное утверждение. Таким образом, $\lambda \in \rho(a)$, если и только если $\lambda \in \rho(\mu a)/\mu$, откуда $\rho(a) = \rho(\mu a)/\mu$ и, значит, $\rho(\mu a) = \mu\,\rho(a)$. Соотношение на спектры равносильно доказанному.

(2) Условие $\lambda \in \sigma(a)$ означает, что $a - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$, а это равносильно условию $a + \mu - (\lambda + \mu) \notin \mathrm{Inv}(A)$, которое означает $\lambda + \mu \in \sigma(a + \mu)$. Таким образом, $\sigma(a) + \mu \subset \sigma(a + \mu)$. Обратное включение проверяется точно так же..

(3) Пусть $1 - ab$ обратим и $c = (1 - ab)^{-1}$. Положим $d = 1 + bca$, тогда

$$\begin{aligned} d(1 - ba) &= (1 + bca)(1 - ba) = 1 - ba + bca - bcaba = 1 - ba + bc(1 - ab)a = 1 - ba + ba = 1,\\ (1 - ba)d &= (1 - ba)(1 + bca) = 1 - ba + bca - babca = 1 - ba + b(1 - ab)ca = 1 - ba + ba = 1, \end{aligned}$$

поэтому $1 - ba$ обратим и $d = (1 - ba)^{-1}$.

(4) Пусть $\lambda \notin \sigma(ab)$, $\lambda \neq 0$, тогда $\lambda - ab \in \mathrm{Inv}(A)$ и, значит, $1 - ab/\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$. По предыдущему пункту, $1 - ba/\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, откуда $\lambda - ba \in \mathrm{Inv}(A)$, так что $\lambda \notin \sigma(ba)$. Отсюда вытекает, что $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$.

(5) Рассмотрим пример из доказательства пункта (2) предложения 2.27, т.е. унитальную алгебру линейных операторов на пространстве ℓ_2, пусть, как и выше a — оператор сдвига вправо, а b — сдвига влево. Тогда $ba = 1$, поэтому $\sigma(ba) = \{1\} \not\ni 0$, а элемент ab необратим, так что $\sigma(ab) \ni 0$. Заметим, что, в силу предыдущего пункта, $\sigma(ab) = \{0, 1\}$.

(6) Пусть $a \in \mathrm{Inv}(A)$, тогда существует $b \in A$ такой, что $ab = ba = 1$, так что $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(1) = 1 = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$, поэтому $\varphi(a) \in \mathrm{Inv}(B)$. Отсюда вытекает, что если $\lambda \notin \sigma(a)$, т.е. $a - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, то $\varphi(a - \lambda) = \varphi(a) - \lambda \in \mathrm{Inv}(B)$, откуда $\lambda \notin \sigma\big(\varphi(a)\big)$, откуда и вытекает требуемое. □

Замечание 2.30. В пункте (1) предложения 2.29 условие $\mu \neq 0$ существенно. Хотя в унитальной банаховой алгебре спектр каждого элемента ограничен (см. лемму 2.36), в общем случае спектр элемента унитальной алгебры ограниченным быть не обязан. В качестве примера рассмотрим унитальную алгебру $\mathbb{C}$-линейных отображений алгебры $\mathbb{C}[z]$ комплексных многочленов в себя. Пусть T — умножение на z. Покажем, что $\sigma(T) = \mathbb{C}$. Рассмотрим оператор $T - \lambda E$, где E — тождественное отображение, $\lambda \in \mathbb{C}$. Этот оператор не является обратимым, так как он не сюръективен: для любого ненулевого многочлена $p = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, $c_n \neq 0$, имеем $q = (T - \lambda E)(p) = c_n z^{n+1} + \cdots$, где $\cdots$ означает сумму членов порядка меньше $n + 1$. Таким образом, степень q не меньше 1, поэтому q никогда не равен 1. Если же $p = 0$, то $(T - \lambda E)(0) = 0$. Итак, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ образ отображения $T - \lambda E$ не содержит 1, что и требовалось.

Предложение 2.31. *Пусть* A *— унитальная алгебра. Тогда*

(1) *элемент* $a \in A$ *обратим, если и только если* $0 \notin \sigma(A)$;

(2) *для* $a \in \mathrm{Inv}(A)$ *имеем* $\sigma(a^{-1}) = 1/\sigma(a)$, *иными словами,* $\lambda \in \sigma(a)$, *если и только если* $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$.

Доказательство. (1) Условие $0 \in \sigma(a)$ означает в точности, что $a - 0 = a$ необратим.

(2) Пусть $\lambda \in \sigma(a)$. По предыдущему пункту, $\lambda \neq 0$. По определению, элемент $a - \lambda$ необратим, но тогда и $a^{-1}(a - \lambda) = 1 - \lambda\, a^{-1} = \lambda(\lambda^{-1} - a^{-1})$, а с ним и $a^{-1} - \lambda^{-1}$ необратимы, см. предложение 2.27. Следовательно, $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$. Меняя местами a и a^{-1}, получаем требуемое. □

Теорема 2.32. *Пусть* A *— унитальная алгебра и* $p(z)$ *— комплексный многочлен. Тогда для каждого* $a \in A$ *такого, что* $\sigma(a) \neq \emptyset$, *выполняется* $\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$.

Доказательство. Если $p = 0$, то $\sigma\big(p(a)\big) = \{0\} = p\big(\{0\}\big)$. Если $p = \lambda_0 = \mathrm{const} \neq 0$, то $\sigma\big(p(a)\big) = \{\lambda_0\} = p\big(\sigma(a)\big)$.

Пусть теперь $p(z) \neq \mathrm{const}$. Тогда для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ существуют $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \neq 0$, $n \geq 1$, такие, что $p(z) - \mu = \lambda_0(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n)$ и, значит, $p(a) - \mu = \lambda_0(a - \lambda_1 1)\cdots(a - \lambda_n 1)$. По предложению 2.27, $p(a) - \mu$ необратим, т.е. $\mu \in \sigma\big(p(a)\big)$, если и только если необратим хотя бы один из элементов $a - \lambda_k 1$, т.е. когда $\lambda_k \in \sigma(a)$. Заметим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ равно одному из λ_k, если и только если $p(\lambda) = \mu$. Таким образом, $p(a) - \mu$ необратим в точности для тех μ, которые равны $p(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \sigma(a)$. Иными словами, все такие μ образуют множество $p\big(\sigma(a)\big)$, что и требовалось. □

2.2.1 Случай унитальных банаховых алгебр

Теорема 2.33. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$ такой, что $\|a\| < 1$. Тогда $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$, где $a^0 = 1$.*

Доказательство. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \big(1 - \|a\|\big)^{-1} < \infty$, то последовательность $s_m = \sum_{n=0}^{m} a^n$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты A, она сходится в некотором b. Так как, по замечанию 2.5, умножение в A непрерывно, последовательность $(1-a)s_m = s_m(1-a) = 1 - a^{m+1}$ сходится одновременно к $(1-a)b = b(1-a)$ и к 1. Таким образом, в силу единственности предела, имеем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, поэтому $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ и $b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ — обратный элемент к $1 - a$. □

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.34. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$ такой, что $\|a\| < 1$. Тогда $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ и*

$$\Big\|(1-a)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} a^k\Big\| \leq \frac{\|a\|^{m+1}}{1 - \|a\|}.$$

Доказательство. Действительно, $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ вытекает из теоремы 2.33. Далее,

$$\Big\|(1-a)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} a^k\Big\| = \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=0}^{m} a^k\Big\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{\infty} a^k\Big\| = \big\|a^{m+1}(1-a)^{-1}\big\| \leq \|a\|^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k = \frac{\|a\|^{m+1}}{1 - \|a\|},$$

что и требовалось. □

Теорема 2.35. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда*

(1) *множество $\mathrm{Inv}(A)$ открыто в A;*

(2) *отображение $\varphi\colon \mathrm{Inv}(A) \to A$, $\varphi\colon a \mapsto a^{-1}$, — дифференцируемо;*

(3) *дифференциал отображения φ в точке a вычисляется по формуле $d\varphi|_a(b) = -a^{-1}ba^{-1}$.*

Доказательство. (1) Берем произвольный $a \in \mathrm{Inv}(A)$ и любой $b \in A$ такой, что $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, тогда

$$\|ba^{-1} - 1\| = \big\|(b-a)a^{-1}\big\| \leq \|b - a\|\,\|a^{-1}\| < \|a^{-1}\|^{-1}\|a^{-1}\| = 1,$$

поэтому, в силу теоремы 2.33, элемент $1 - (1 - ba^{-1}) = ba^{-1}$ — обратим, откуда, в силу предложения 2.27, имеем $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Итак, вместе с каждым $a \in \mathrm{Inv}(A)$ в $\mathrm{Inv}(A)$ лежат все элементы из A, принадлежащие открытому шару с центром в a и радиусом $\|a^{-1}\|^{-1}$, что доказывает открытость $\mathrm{Inv}(A)$.

(2), (3) Докажем теперь дифференцируемость отображения φ в точке $a \in \mathrm{Inv}(A)$ в предположении, что $d\varphi|_a(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ (заметим, что линейное отображение $d\varphi|_a$ непрерывно, так как $\big\|d\varphi|_a\big\| \leq \|a^{-1}\|^2$, где последнее неравенство вытекает из субмультипликативности нормы). Для этого мы должны проверить, что

$$\lim_{b \to 0} \frac{\big\|(a+b)^{-1} - a^{-1} - d\varphi|_a(b)\big\|}{\|b\|} = 0 \tag{2.1}$$

Имеем: $(a+b)^{-1} = \big(a(1 + a^{-1}b)\big)^{-1} = (1 + a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$, поэтому

$$\big\|(a+b)^{-1} - a^{-1} - d\varphi|_a(b)\big\| = \big\|(1 + a^{-1}b)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}\big\| \leq \big\|(1 + a^{-1}b)^{-1} - 1 + a^{-1}b\big\|\,\|a^{-1}\|.$$

Отметим, что нас интересует последнее выражение при b сколь угодно близких к 0. Положим $c = a^{-1}b$ и будем считать, что $\|-c\| < 1/2$. По лемме 2.34 для $a = -c$ и $m = 1$,

$$\big\|(1+c)^{-1} - 1 + c\big\| \le \frac{\|c\|^2}{1-\|c\|} < 2\|c\|^2,$$

где последнее равенство вытекает из того, что $\|c\| < 1/2$. Следовательно,

$$\frac{\big\|(a+b)^{-1} - a^{-1} - d\varphi|_a(b)\big\|}{\|b\|} \le \frac{\big\|(1+c)^{-1} - 1 + c\big\|\|a^{-1}\|}{\|b\|} < \frac{2\|c\|^2\|a^{-1}\|}{\|b\|} \le \frac{2\|a^{-1}\|^3\,\|b\|^2}{\|b\|} = 2\|a^{-1}\|^3\,\|b\|,$$

что мгновенно влечет (2.1). □

Лемма 2.36. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Тогда*

(1) *спектр $\sigma(a)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$;*

(2) *спектр $\sigma(a)$ содержится в замкнутом круге радиуса $\|a\|$ с центром в $0 \in \mathbb{C}$, тем самым, с учетом предыдущего пункта, спектр $\sigma(a)$ — компакт;*

(3) *отображение $\psi\colon \mathbb{C}\setminus\sigma(a) \to A$, определенное на резольвентном множестве $\rho(a) = \mathbb{C}\setminus\sigma(a)$ элемента a формулой $\psi\colon \lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$, дифференцируемо.*

Доказательство. (1) Если множество $\sigma(a)$ незамкнуто, то существует точка прикосновения $\lambda \in \mathbb{C}$ множества $\sigma(a)$, не лежащая в $\sigma(a)$. Тогда $a - \lambda\,1 \in \mathrm{Inv}(A)$, а для некоторой последовательности $\lambda_n \to \lambda$ элементы $a - \lambda_n\,1$ необратимы. Заметим, что $\big\|(a-\lambda_n\,1) - (a-\lambda\,1)\big\| = |\lambda - \lambda_n|\,\|1\| = |\lambda-\lambda_n|$, так что $a - \lambda_n\,1 \to a - \lambda\,1$. Однако последнее противоречит открытости $\mathrm{Inv}(A)$ (теорема 2.35).

(2) Пусть $|\lambda| > \|a\|$, тогда $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, так что, в силу теоремы 2.33, $1-\lambda^{-1}a \in \mathrm{Inv}(A)$, откуда и $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$. Следовательно, все такие λ не содержатся в $\sigma(a)$.

(3) Отображения $\mathbb{C} \to A$, $\lambda \mapsto \lambda\,1$ и $A \to A$, $\lambda\,1 \mapsto a - \lambda\,1$ аффинны и ограничены, поэтому дифференцируемы. Отображение $A \to A$, $b \mapsto b^{-1}$ также дифференцируемо в силу теоремы 2.35. Осталось заметить, что отображение ψ является композицией этих трех дифференцируемых отображений и, поэтому, само дифференцируемо. □

Следующая теорема является фундаментальным результатом в теории банаховых алгебр.

Теорема 2.37 (Гельфанд)**.** *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Тогда $\sigma(a) \ne \emptyset$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существуют A и $a \in A$, для которых $\sigma(a) = \emptyset$. Рассмотрим отображение $\psi\colon \lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ из $\mathbb{C}$ в A. По лемме 2.36, это отображение дифференцируемо, поэтому для каждого непрерывного линейного функционала $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ композиция $\tau\circ\psi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — голоморфное отображение. Мы покажем, что образ $\tau\circ\psi$ ограничен и, значит, по теореме Лиувилля, $\tau\circ\psi$ — постоянная функция.

В силу непрерывности отображения ψ, достаточно показать, что ψ ограничено вне какого-нибудь круга. Мы докажем это для круга радиуса $2\|a\|$. Итак, пусть $\|\lambda\| > 2\|a\|$, тогда $\|\lambda^{-1}a\| < 1/2$. По лемме 2.34, получим $\big\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\big\| \le \|\lambda^{-1}a\|/\big(1 - \|\lambda^{-1}a\|\big) < 1$, откуда

$$\big\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\big\| = \big\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1 + 1\big\| \le \big\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\big\| + \|1\| < 2.$$

Таким образом,

$$\big\|(a-\lambda)^{-1}\big\| = \big\|(\lambda-a)^{-1}\big\| = \big\|\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\big\| = |\lambda^{-1}|\,\big\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\big\| < 2/|\lambda| < \|a\|^{-1}.$$

Итак, мы показали, что для любого непрерывного линейного функционала $\tau \in A^*$ функция $f_\tau(\lambda) = \tau\big(\psi(\lambda)\big)$, $f_\tau\colon \lambda \mapsto \tau\big((a-\lambda)^{-1}\big)$ постоянна, в частности,

$$f_\tau(0) = \tau(a^{-1}) = f_\tau(1) = \tau\big((a-1)^{-1}\big).$$

Так как, в силу следствия 1.12, для каждой пары точек нормированного пространства существует непрерывный линейный функционал, различающий эти точки, имеем $a^{-1} = (a-1)^{-1}$, откуда $a = a - 1$, противоречие. □

Теорема 2.38 (Гельфанд–Мазур)**.** *Пусть A — унитальная банахова алгебра, в которой каждый ненулевой элемент обратим. Тогда $A = \mathbb{C}\cdot 1$.*

Доказательство. Пусть в A существует элемент a, отличный от $\lambda 1$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $a - \lambda \ne 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, то, по условию, $a - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, так что $\sigma(a) = \emptyset$, противоречие с теоремой 2.37. □

2.3 Спектральный радиус в унитальной алгебре

Пусть A — унитальная алгебра и $a \in A$. Величину $r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|$ назовем ***спектральным радиусом*** элемента a.

Следствие 2.39. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда для любых $a, b \in A$ имеем $r(ab) = r(ba)$.*

Доказательство. Если $r(ab) > 0$, то существует $\lambda \in \sigma(ab)$, $\lambda \neq 0$, и так как, в силу предложения 2.29, $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$, то $r(ba) > 0$ и $r(ba) = r(ab)$. Далее, если неверно, что $r(ab) > 0$, то также неверно, что $r(ba) > 0$, но тогда, по теореме 2.37, $\sigma(ab)$ и $\sigma(ba)$ непусты и, значит, $\sigma(ab) = \sigma(ba) = \{0\}$, откуда $r(ab) = 0 = r(ba)$. □

Следствие 2.40. *Пусть A и B — унитальные алгебры, $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм, и $a \in A$. Тогда $r\big(\varphi(a)\big) \le r(a)$.*

Доказательство. По предложению 2.29, для каждого $a \in A$ имеем $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \sigma(a)$, откуда и вытекает требуемое. □

Пример 2.41. Приведем примеры вычисления спектральных радиусов.

- Если $A = C(X)$, где X — хаусдорфов компакт, то для $f \in A$ имеем $r(f) = \sup_{\lambda\in f(X)} |\lambda| = \|f\|_\infty$.
- Если $A = M_n(\mathbb{C})$, то для $a \in A$ величина $r(a)$ равна максимуму модулей собственных чисел матрицы a. В частности, у матрицы $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ все собственные числа равны нулю, поэтому $r(a) = 0$. Тем не менее, $\|a\| = 1$.

Теорема 2.42 (Бёрлинг)**.** *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$, тогда*

$$r(a) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство. Если $a = 0$, то $r(a) = 0$ и равенство имеет место. Предположим теперь, что $a \neq 0$, в частности, $\|a\| \neq 0$. Отметим, что при этом $r(a)$ может равняться нулю.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ по теореме 2.32, откуда $|\lambda^n| \le \|a^n\|$ (лемма 2.36). Следовательно, $\|\lambda\| \le \|a^n\|^{1/n}$ для каждого $\lambda \in \sigma(a)$ и, значит,

$$r(a) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} \le \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Для завершения доказательства мы покажем, что $r(a) \ge \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства этого факта мы выберем произвольное $|\lambda| < 1/r(a)$ (если $r(a) = 0$, то полагаем $1/r(a) = \infty$) и докажем, что $\|a^n\|^{1/n} \le M^{1/n}/|\lambda|$, где M — положительная вещественная константа, вообще говоря, зависящая от выбора λ, но не зависящая от n. Если это неравенство выполнено, то

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} M^{1/n}/|\lambda| = 1/|\lambda|.$$

Так как последнее неравенство имеет место для всех λ, удовлетворяющих $|\lambda| < 1/r(a)$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \le r(a).$$

Итак, нам осталось показать, что при каждом λ, $|\lambda| < 1/r(a)$, выполняется $\|a^n\|^{1/n} \le M^{1/n}/|\lambda|$, т.е. последовательность $\lambda^n a^n$ равномерно ограничена (нормы $\|\lambda^n a^n\|$ ограничены некоторой константой M).

Рассмотрим открытый круг $\Delta \subset \mathbb{C}$ с центром в нуле и радиусом $1/r(a)$ (при $r(a) = 0$ положим $\Delta = \mathbb{C}$).

Лемма 2.43. *При каждом $\lambda \in \Delta$ выполняется $1 - \lambda a \in \mathrm{Inv}(A)$.*

Доказательство. Действительно, если $\lambda = 0$, то $1 - \lambda a = 1 \in \mathrm{Inv}(A)$. Если же $\lambda \neq 0$, то $1 - \lambda a = -\lambda(a - 1/\lambda)$, и так как $|\lambda| < 1/r(a)$, то $|1/\lambda| > r(a)$, поэтому $1/\lambda \notin \sigma(a)$ и, значит, $a - 1/\lambda$, а вместе с ним и $1 - \lambda a$, обратимы. □

Выберем произвольный непрерывный линейный функционал $\tau \in A^*$. Так как отображения $\lambda \mapsto 1 - \lambda a$ и τ дифференцируемы (как непрерывные аффинные отображения), отображение $b \mapsto b^{-1}$ дифференцируемо в каждой точке $b \in \operatorname{Inv}(A)$ (теорема 2.35), и $1 - \lambda a \in \operatorname{Inv}(A)$ при всех $\lambda \in \varDelta$ по лемме 2.43, то функция $f(\lambda) = \tau\bigl((1 - \lambda a)^{-1}\bigr)$ дифференцируема (голоморфна) во всем круге $\varDelta$. Значит, f раскладывается в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n$ с центром в 0, причем этот ряд однозначно определен и равномерно сходится к самой функции на каждом замкнутом подкруге.

Выберем теперь λ так, чтобы $|\lambda| < 1/\|a\|$. В силу леммы 2.36, $r(a) \le \|a\|$, откуда $|\lambda| < 1/r(a)$, поэтому выбранное λ лежит в круге $\varDelta$. Кроме того, для выбранного λ выполняется $\|\lambda a\| < 1$, поэтому, в силу теоремы 2.33, имеем

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n,$$

откуда $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tau(a^n)$. Это — тоже разложение голоморфной функции f в ряд в 0, поэтому, в силу единственности такого разложения, имеем $\tau(a^n) = \lambda_n$. Таким образом, при каждом $\lambda \in \varDelta$ ряд $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tau(a^n)$ сходится, поэтому $\lambda^n \tau(a^n) \to 0$ при $n \to \infty$, в частности, при каждом $\tau \in A^*$ и фиксированном $\lambda \in \varDelta$ семейство $\tau(\lambda^n a^n)$ ограничено. Будем рассматривать каждое $\lambda^n a^n$ как непрерывное отображение из пространства A^* (оно — банахово в силу задачи 1.9) в нормированное пространство $\mathbb{C}$, т.е. как элемент из A^{**}. Тогда, по теореме 1.14 Банаха–Штейнгауза, семейство норм этих отображений ограничено. По следствию 1.12 (см. также обсуждение после этого следствия), норма каждого функционала $\lambda^n a^n \in A^{**}$ совпадает с его нормой как элемента из A. Итак, мы показали, что при каждом $\lambda \in \varDelta$ существует $M > 0$, вообще говоря, зависящее от λ, для которого при всех n выполняется $\|\lambda^n a^n\| \le M$, а это и завершает доказательство. $\square$

Замечание 2.44. Обратите внимание, что теорема 2.42 гарантирует существование предела $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$ для каждого элемента a унитальной банаховой алгебры, что априори совсем не очевидно.

По лемме 2.36, для каждого элемента a унитальной банаховой алгебры A выполняется $r(a) \le \|a\|$. Проиллюстрируем, как работает теорема 2.42, показав, что последнее неравенство может быть строгим.

Пример 2.45. Пусть A — множество всех непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на отрезке $[0, 1]$. Тогда A — алгебра относительно поточечных операций. Для каждого $f \in A$ положим $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, тогда $\|\cdot\|$ — субмультипликативная норма на A, относительно которой линейное пространство A полно. Тем самым, мы превратили A в банахову алгебру. Постоянная функция 1 является единицей в A, так что алгебра A унитальна.

Пусть $x\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ — включение, тогда $x \in A$ и $\|x^n\| = 1 + n$. По теореме 2.42, имеем

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (1 + n)^{1/n} = 1 < 2 = \|x\|.$$

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — непустое компактное подмножество. Тогда ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus K$ называются ***дырами в*** K. Отметим, что множество $\mathbb{C} \setminus K$ имеет ровно одну неограниченную компоненту связности. Заметим также, что, в силу леммы 2.36, спектр $\sigma(a)$ каждого элемента a унитальной банаховой алгебры замкнут и ограничен, а потому является компактом, так что и для него определено понятие дыр.

Теорема 2.46. *Пусть B — замкнутая подалгебра унитальной банаховой алгебры A, содержащая единицу алгебры A. Тогда*

(1) *множество $\operatorname{Inv}(B)$ открыто и замкнуто в $B \cap \operatorname{Inv}(A)$;*

(2) *для всех $b \in B$ справедливы включения $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$ и $\partial\sigma_B(b) \subset \partial\sigma_A(b)$;*

(3) *для всех $b \in B$ множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто и замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$;*

(4) *если для $b \in B$ множество $\sigma_A(b)$ не имеет дыр, то $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.*

Доказательство. (1) Так как $1_A \in B$, то 1_A является также единицей и в подалгебре B. Поэтому $\operatorname{Inv}(B) \subset \operatorname{Inv}(A)$ и, значит, $\operatorname{Inv}(B) \subset B \cap \operatorname{Inv}(A) \subset B$. По теореме 2.35, множество $\operatorname{Inv}(B)$ открыто в B, поэтому $\operatorname{Inv}(B) = \operatorname{Inv}(B) \cap \bigl(B \cap \operatorname{Inv}(A)\bigr)$ — открыто в индуцированной на $B \cap \operatorname{Inv}(A)$ топологии.

Докажем, что $\operatorname{Inv}(B)$ — замкнуто в $B \cap \operatorname{Inv}(A)$. Так как A — метрическое пространство, достаточно проверить, что предел каждой последовательности из $\operatorname{Inv}(B)$, сходящейся в $B \cap \operatorname{Inv}(A)$, содержится в $\operatorname{Inv}(B)$. Пусть $b_n \in \operatorname{Inv}(B)$ — последовательность такая, что $b_n \to b \in B \cap \operatorname{Inv}(A)$. Так как $\operatorname{Inv}(B)$ — группа по умножению в силу предложения 2.26, то $b_n^{-1} \in \mathrm{Inv}(B) \subset B$ при всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме 2.35, отображение $a \mapsto a^{-1}$, определенное на $\mathrm{Inv}(A)$, дифференцируемо и, значит, непрерывно, поэтому $b_n^{-1} \to b^{-1}$ в $\mathrm{Inv}(A)$. Так как подалгебры B — замкнута, то $b^{-1} \in B$. Таким образом, $b, b^{-1} \in B$, откуда $b \in \mathrm{Inv}(B)$ и, значит, мы доказали замкнутость $\mathrm{Inv}(B)$ в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$.

(2) Так как $\mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, то для каждых $b \in B$ и $\lambda \notin \sigma_B(b)$ имеем $b - \lambda \in \mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, откуда $\lambda \notin \sigma_A(b)$ и, значит, $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$.

Пусть теперь $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$, тогда существует последовательность $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, сходящаяся к λ. Но это означает, что $b - \lambda_n \in \mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, но $b - \lambda \notin \mathrm{Inv}(B)$, поскольку $\sigma_B(b)$ замкнут и, значит, содержит $\partial\sigma_B(b)$. Покажем, что $b - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$.

Предположим противное, т.е. $b - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)$. Так как B — подалгебра и $1_A \in B$, то $b - \lambda \in B$. Таким образом, $b - \lambda \in B \cap \mathrm{Inv}(A)$. В силу первого утверждения, $\mathrm{Inv}(B)$ замкнуто в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$, поэтому, так как $b - \lambda_n \in \mathrm{Inv}(B)$, имеем $b - \lambda \in \mathrm{Inv}(B)$, противоречие. Итак, мы показали, что $b - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$. Напомним, что $b_n - \lambda_n \in \mathrm{Inv}(A)$, поэтому $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ и $\lambda \in \sigma_A(b)$, так что $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$.

(3) Как мы уже отмечали, спектр элемента — компакт, поэтому $\mathbb{C}\setminus\sigma_B(b)$ и $\mathbb{C}\setminus\sigma_A(b)$ — открытые подмножества $\mathbb{C}$, причем, в силу предыдущего пункта, $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, откуда вытекает открытость.

Покажем теперь, что $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$. Предположим противное, т.е. $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ не замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$. Это означает, что существует $x \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, являющаяся в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ точкой прикосновения для $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, но не лежащая в $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$. Но тогда каждая окрестность $U^x \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ точки x, а вместе с ней и каждая окрестность V^x этой точки в $\mathbb{C}$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, так что x — точка прикосновения $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ в $\mathbb{C}$. Так как $x \notin \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, то $x \in \sigma_B(b)$, откуда $x \in \partial\sigma_B(b)$. Но, по пункту (2), имеем $x \in \partial\sigma_A(b) \subset \sigma_A(b)$, поэтому $x \notin \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, противоречие.

(4) Пусть теперь $\sigma_A(b)$ не имеет дыр. Тогда $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ связно. По пункту (3), множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто и замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, поэтому $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ и, значит, $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$. □

2.4 Спектры и спектральные радиусы в неунитальной алгебре

С помощью операции унитализации мы определим спектр и спектральный радиус также и для элементов неунитальной алгебры A. А именно, если $\widetilde{A}$, как и выше, обозначает унитализацию алгебры A, то положим $\sigma_A(a) = \sigma_{\widetilde{A}}(a)$ и $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |\lambda|$.

Замечание 2.47. Из определения спектра элемента произвольной, не обязательно унитальной алгебры, а также теоремы 2.37, вытекает, что для алгебры A и любого ее элемента $a \in A$ всегда выполняется $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Напомним, что конструкция унитализации применима не только к неунитальным, но и к унитальным алгебрам. При этом, если считать спектр элемента унитальной алгебры A в ее унитализации $\widetilde{A}$, то этот спектр может измениться (это будет заведомо так для обратимого a, см. ниже), так как при унитализации $1_{\widetilde{A}} \neq 1_A$. Одно из таких изменений приведено в следующем утверждении.

Предложение 2.48. *Пусть A — произвольная банахова алгебра (унитальная или нет), $\widetilde{A}$ — унитализация A и $a \in A \subset \widetilde{A}$. Тогда $0 \in \sigma_{\widetilde{A}}(a)$, т.е. в унитализации $\widetilde{A}$ все элементы алгебры $A \subset \widetilde{A}$ необратимы. В частности, спектры всех элементов неунитальной алгебры содержат 0.*

Доказательство. Действительно, $a \in A \subset \widetilde{A}$ не является обратимым элементом в $\widetilde{A}$, так как $(a, 0)(b, \mu) = (ab + \mu a, 0) \neq (0, 1)$ ни при каком (b, μ), поэтому $0 \in \sigma_{\widetilde{A}}(a)$. □

Приведем еще один результат. Он вытекает из леммы 2.36.

Следствие 2.49. *Пусть A — банахова алгебра (не обязательно унитальная), и $a \in A$. Тогда $r(a) \leq \|a\|$.*

Доказательство. Действительно, если алгебра A унитальна, то утверждение содержится в лемме 2.36. Если же A не унитальна, $r(a)$ вычисляется для унитализации $\widetilde{A}$. Лемма 2.36 дает оценку $r(a) \leq \big\|(a, 0)\big\|$, но это — та же оценка, так как норма $(a, 0)$ в $\widetilde{A}$ равна норме a в A. □

2.5 Экспоненты в унитальной банаховой алгебре

Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n/n!\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|/n! \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n/n! < \infty,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ сходится в A (частичные суммы образуют фундаментальную последовательность, которая сходится в силу полноты пространства A). Сумму этого ряда обозначим e^a.

Напомним, что понятие дифференцируемости определено для отображений линейных нормированных пространств. Нас будут интересовать отображения из $\mathbb{R}$ в унитальную банахову алгебру A. В этом случае для отображений $f, g\colon \mathbb{R} \to A$ определено произведение $f(t)g(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Непосредственно проверяется, что если f и g — дифференцируемы, то fg также дифференцируемо, и имеет место правило Лейбница: $(fg)' = f'g + fg'$.

Лемма 2.50. *Пусть $f\colon \mathbb{R} \to A$ — дифференцируемое отображение в произвольную банахову алгебру A, причем $f' = 0$ тождественно. Тогда f — постоянное отображение.*

Доказательство. Выберем произвольный $\tau \in A^*$ и рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, заданную так: $h(t) = \tau\big(f(t)\big)$. Тогда, по теореме о производной сложной функции, h дифференцируема, и $h' = 0$. Поэтому функция h постоянна, то есть $\tau\big(f(t)\big) = \tau\big(f(0)\big)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как последнее равенство выполняется для всех $\tau \in A^*$, а, по следствию 1.12, для каждой пары точек из A существует τ, различающий эти точки, имеем $f(t) = f(0)$ для всех t, что и требовалось. $\square$

Теорема 2.51. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда*

(1) *для каждого $a \in A$ элемент e^a обратим, причем $(e^a)^{-1} = e^{-a}$;*

(2) *если $a \in A$, функция $f\colon \mathbb{R} \to A$ дифференцируема, $f(0) = 1$, $f'(t) = a\,f(t)$, то $f(t) = e^{ta}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*

(3) *для любых коммутирующих $a, b \in A$ выполняется $e^{a+b} = e^a e^b$.*

Доказательство. (1) Пусть $f(t) = e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n/n!$. Так как этот ряд абсолютно сходится, его можно почленно дифференцировать (доказательство такое же, как и в случае обычных рядов), поэтому $f'(t) = a\,f(t)$.

Пусть теперь $f, g\colon \mathbb{R} \to A$ — дифференцируемые отображения такие, что $f'(t) = a\,f(t)$, $g'(t) = a\,g(t)$, $f(0) = g(0) = 1$, и a коммутирует с $f(t)$ при всех t (например, это так, если $f(t) = e^{ta}$). Рассмотрим отображение $h\colon \mathbb{R} \to A$, заданное так: $h(t) = f(t)g(-t)$, тогда h дифференцируемо и

$$h'(t) = f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = a\,f(t)g(-t) - f(t)\,a\,g(-t) = a\,f(t)g(-t) - a\,f(t)g(-t) = 0.$$

Но тогда, по лемме 2.50, имеем $h(t) = \mathrm{const}$, и так как $h(0) = f(0)g(0) = 1$, то $h(t) = 1$ при всех t. В частности, если положить $f(t) = g(t) = e^{ta}$, то $e^{ta}e^{-ta} = 1$. В частности, $e^a e^{-a} = 1$, так что, заменяя a на $-a$, получаем $e^{-a}e^a = 1$, откуда $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

(2) Пусть теперь $f(t)$ дифференцируема, $f'(t) = a\,f(t)$ и $f(0) = 1$. Положим $g(t) = e^{ta}$, тогда $f(t)g(-t) = f(t)e^{-ta} = 1$, откуда, в силу пункта (1), имеем $f(t) = (e^{-ta})^{-1} = e^{ta}$.

(3) Пусть теперь a и b коммутируют. Положим $f(t) = e^{ta}e^{tb}$. Тогда $f(0) = 1$ и $f'(t) = a\,e^{ta}e^{tb} + e^{ta}\,b\,e^{tb} = (a+b)f(t)$ (последнее равенство вытекает из того, что a и b коммутируют). В силу доказанного выше, имеем $f(t) = e^{t(a+b)}$ для всех t. В частности, $f(1) = e^{a+b} = e^a e^b$. $\square$

2.6 Модулярные идеалы, продолжение

В настоящем разделе мы приведем несколько необходимых для дальнейшего результатов, связанных с модулярными идеалами. Определение этих идеалов была дано в разделе 2.1.4. Там же мы показали, что это в точности такие идеалы, факторы по которым являются унитальными.

Теорема 2.52. *Пусть I — модулярный идеал в банаховой алгебре A. Тогда его замыкание $\bar{I}$ — собственный идеал. В частности, каждый максимальный модулярный идеал замкнут.*

Доказательство. Замыкание идеала — идеал, поэтому остается проверить, что $\bar{I}$ — собственный. Пусть $u \in A$ такой, что для всех $a \in A$ выполняется $a - ua \in I$ и $a - au \in I$ (такой элемент u существует по определению модулярного идеала). Покажем, что $u \notin \bar{I}$. Возьмем произвольный $b \in I$. Оказывается, $\|u - b\| \geq 1$, откуда следует $u \notin \bar{I}$. Проверим неравенство $\|u - b\| \geq 1$.

Предположим противное, т.е. что существует $b \in I$, для которого $\|u - b\| < 1$. Тогда, в силу теоремы 2.33, элемент $c = 1 - u + b \in \widetilde{A}$ обратим в $\widetilde{A}$ и, так как A — идеал в $\widetilde{A}$ по предложению 2.24, то $cA = A$ (равенство вытекает из обратимости c). С другой стороны, для каждого $a \in A$ имеем $ca = (a - ua) + ba \in I$, откуда $A = cA \subset I$, так что $I = A$, а это противоречит тому, что I собственный (I должен быть собственным по определению модулярного идеала).

Пусть теперь I — модулярный максимальный идеал. Тогда, как было показано выше, $\bar{I}$ — собственный идеал. Но тогда $I = \bar{I}$ в силу максимальности. $\square$

Лемма 2.53. *Пусть A — коммутативная алгебра, а $I \subset A$ — максимальный модулярный идеал. Тогда A/I — поле.*

Доказательство. Заметим, что алгебра A/I коммутативна и, в соответствии с разделом 2.1.4, унитальна. Осталось проверить, что каждый ненулевой элемент из A/I обратим.

Покажем сначала, что в A/I нет нетривиальных идеалов, т.е. отличных от $\{0\}$ и A/I. Предположим противное, и пусть J — такой идеал, а $\pi\colon A \to A/I$ — каноническая проекция. Тогда $\pi^{-1}(J)$ — идеал в A, содержащий I и отличный от I. Так как I — максимальный идеал, $\pi^{-1}(J) = A$, поэтому $J = A/I$, противоречие.

Используем этот факт для того, чтобы показать обратимость произвольного ненулевого $a \in A/I$. Заметим, что $a(A/I)$ — ненулевой идеал в A/I, так как A/I коммутативна и унитальна. По доказанному выше, $a(A/I) = A/I$, в частности, существует $b \in A/I$ такой, что $ab = 1 \in A/I$, поэтому a — обратим. □

2.7 Характеры коммутативной алгебры, ее спектр

Для коммутативной алгебры мы определим характеры, которые играют важную роль в теореме Гельфанда, позволяющей отождествить коммутативную банахову алгебру с алгеброй непрерывных функций на некотором топологическом пространстве.

Пусть A — коммутативная алгебра. Каждый ненулевой гомоморфизм алгебр $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ называется ***характером*** этой алгебры. Множество всех характеров алгебры A обозначается $\Omega(A)$ или $\operatorname{Spec} A$. Напомним, что для произвольных алгебр B и C через $\operatorname{Hom}(B, C)$ мы обозначали множество всех гомоморфизмов $\varphi\colon B \to C$. Тем самым, $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{C}) = \Omega(A) \cup \{0\}$, где 0 — нулевой гомоморфизм.

Приведем некоторые простейшие свойства характеров на унитальной алгебре. Отметим, что, вообще говоря, в определении характера $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ на унитальной алгебре A не требуется выполнение условия $\tau(1) = 1$. Однако, как мы покажем, это автоматически имеет место.

Предложение 2.54. *Пусть A — унитальная коммутативная алгебра и $\tau \in \Omega(A)$ — характер. Тогда*

(1) $\tau(1) = 1$, *т.е. каждый характер унитальной алгебры является унитальным гомоморфизмом*;

(2) *для каждого обратимого элемента $a \in A$ имеем $\tau(a) \neq 0$ и, более того, $\tau(a^{-1}) = \tau(a)^{-1}$*;

(3) *для произвольного $a \in A$ выполняется $\tau(a) \in \sigma(a)$.*

Доказательство. (1) Покажем сначала, что $\tau(1) \neq 0$. Действительно, если это не так, то $\tau(1\,a) = \tau(1)\tau(a) = 0$ для любого $a \in A$, поэтому τ — нулевой гомоморфизм, противоречие. Далее, $\tau(1) = \tau(1 \cdot 1) = \tau(1)^2$, и так как $\tau(1) \neq 0$, то $\tau(1) = 1$.

(2) Если $a \in \operatorname{Inv}(A)$, то $\tau(a\,a^{-1}) = \tau(a)\tau(a^{-1}) = \tau(1) = 1$, где последнее равенство вытекает из предыдущего пункта. Поэтому $\tau(a)\tau(a^{-1}) = 1$, откуда мгновенно следует требуемое.

(3) Мы должны показать, что элемент $a - \tau(a)\,1$ необратим. Заметим, что $\tau\bigl(a - \tau(a)\,1\bigr) = \tau(a) - \tau(a)\tau(1) = 0$, поэтому, в силу предыдущего пункта, $a - \tau(a)\,1$ — необратимый элемент. □

Теорема 2.55. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Тогда*

(1) *для каждого $\tau \in \Omega(A)$ выполняется $\|\tau\| = 1$, в частности, линейный функционал τ непрерывен, так что $\Omega(A) \subset A^*$*;

(2) *множество $\Omega(A)$ непусто и отображение $\varkappa\colon \tau \mapsto \ker(\tau)$ — биекция между $\Omega(A)$ и множеством всех максимальных идеалов в A.*

Доказательство. (1) Из предложения 2.54 вытекает, что для каждого $a \in A$ имеем $\tau(a) \in \sigma(a)$, следовательно, $\bigl|\tau(a)\bigr| \le r(a) \le \|a\|$, где последнее неравенство вытекает из леммы 2.36. Таким образом, $\|\tau\| \le 1$. С другой стороны, $\tau(1) = 1$ и $\|1\| = 1$, поэтому $\|\tau\| = 1$.

(2) Покажем сначала, что $I := \ker(\tau)$ — максимальный идеал в A. Так как τ — гомоморфизм алгебр, то I — идеал. В силу того, что $\tau \neq 0$, идеал I собственный. Так как, по пункту (1), отображение τ непрерывно, то I — замкнутое подмножество в A. Итак, I — замкнутый идеал. Наконец, для каждого $a \in A$ выполняется $\tau\bigl(a - \tau(a)\,1\bigr) = 0$, так что $a - \tau(a)\,1 \in I$. Если идеал I не максимальный, то существует отличный от I собственный идеал $M \supset I$. Выберем произвольный $a \in M \setminus I$. Тогда, по определению I, имеем $\tau(a) \neq 0$. В силу сказанного выше, $a - \tau(a)\,1 \in I \subset M$, поэтому $\tau(a)\,1 \in M$, и раз $\tau(a) \neq 0$, то и $1 \in M$. Но тогда $M = A$, противоречие. Итак, мы показали, что I — максимальный идеал.

Покажем, что отображение $\varkappa$ инъективно. Предположим, что для $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$ выполняется $\ker(\tau_1) = \ker(\tau_2)$. Так как для каждого $a \in A$ имеем $a - \tau_1(a)\,1 \in \ker(\tau_1)$, и так как $\ker(\tau_1) = \ker(\tau_2)$, то и $\tau_2(a - \tau_1(a)\,1) = 0$ при всех a, откуда $\tau_2(a) = \tau_1(a)$ при всех $a \in A$, поэтому $\tau_1 = \tau_2$.

Докажем сюръективность отображения $\varkappa$, т.е. что каждый максимальный идеал в A является ядром некоторого характера.

Лемма 2.56. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра и $I \subset A$ — максимальный идеал. Тогда $A = \mathbb{C} \oplus I$ (здесь равенство не учитывает норму).*

Доказательство. Так как алгебра A унитальна, то идеал I — модулярный (см. предложение 2.17) и, по теореме 2.52, идеал I замкнут (как максимальный модулярный идеал). По лемме 2.53, факторалгебра A/I является полем, т.е. унитальной алгеброй, в которой все ненулевые элементы обратимы. По теореме 2.38, имеем $A/I = \mathbb{C}(1 + I)$, поэтому для каждого $a \in A$ существует $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого $a + I = \lambda(1 + I) = \lambda 1 + I$. Следовательно, существует $b \in I$ такое, что $a = a + 0 = \lambda 1 + b$. Это представление однозначно, так как если $\lambda 1 + b = \lambda' 1 + b'$, то $b - b' = (\lambda' - \lambda)1$, поэтому если $\lambda \neq \lambda'$, то $1 \in I$, что невозможно, так как I — собственный. Таким образом, $\lambda = \lambda'$ и, значит, $b = b'$. Согласованность операций в A и $\mathbb{C} \oplus I$ проверяется непосредственно. □

Воспользуемся леммой 2.56 и определим $\tau\colon A \to \mathbb{C}$, положив $\tau(\lambda 1 + a) = \lambda$. Тогда τ — характер, причем $\tau(\lambda 1 + a) = 0$, если и только если $\lambda = 0$, т.е. $\lambda 1 + a \in I$. Иными словами, $\ker \tau = I$, что и доказывает сюръективность $\varkappa$.

Для завершения доказательства теоремы напомним, что, по предложению 2.17, множество максимальных идеалов унитальной алгебры непусто, поэтому и $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

2.7.1 Характеры коммутативной алгебры и ее унитализации

Выясним, как связаны множества всех характеров коммутативной алгебры A и ее унитализации $\widetilde{A}$. Пусть $F\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ — отображение, ставящее в соответствие каждому характеру $\tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})$ гомоморфизм $\tilde{\tau}|_A \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$, полученный ограничением $\tilde{\tau}$ на A.

Лемма 2.57. *Отображение F инъективно.*

Доказательство. Мы должны показать, что если $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$, то и $\tilde{\tau}_1|_A \neq \tilde{\tau}_2|_A$. Так как $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$, существует $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$, для которого, $\tilde{\tau}_1(a, \lambda) \neq \tilde{\tau}_2(a, \lambda)$. По предложению 2.54, каждый характер является унитальным гомоморфизмом, поэтому

$$\tilde{\tau}_1(a, \lambda) = \tilde{\tau}_1\big((a, 0) + \lambda(0, 1)\big) = \tilde{\tau}_1|_A(a) + \lambda \neq \tilde{\tau}_2(a, \lambda) = \tilde{\tau}_2|_A(a) + \lambda,$$

откуда $\tilde{\tau}_1|_A(a) \neq \tilde{\tau}_2|_A(a)$, так что $\tilde{\tau}_1|_A \neq \tilde{\tau}_2|_A$ и, значит, отображение F — инъективно. □

Лемма 2.58. *Отображение F сюръективно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ и продолжим его до гомоморфизма $\tilde{\tau}\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, положив $\tilde{\tau}(a, \lambda) = \varphi(a) + \lambda$ (то, что это — гомоморфизм проверяется непосредственно). Далее, $\tilde{\tau}$ — ненулевой гомоморфизм, так как $\tilde{\tau}(1) = 1$, поэтому $\tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})$ и $\tilde{\tau}|_A = \varphi$, что и требовалось. □

Следствие 2.59. *Отображение F — биективно.*

Заметим, что в нулевой гомоморфизм $0 \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ переходит ровно один гомоморфизм, а именно, канонический гомоморфизм $\tilde{\tau}_\infty\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, $\tilde{\tau}_\infty(a, \lambda) = \lambda$. Итак, мы доказали следующий результат.

Следствие 2.60. *Если $F\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ — построенная выше биекция, то*

$$\Omega(A) = F\big(\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}\big) = F\big(\Omega(\widetilde{A})\big) \setminus \{0\}.$$

2.7.2 Характеры, спектры, топология пространства характеров

Продолжим изучать характеры коммутативной банаховой алгебры.

Теорема 2.61. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Тогда*

(1) *если A унитальна, то для каждого $a \in A$ имеем $\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\}$;*

(2) *если A не унитальна, то для каждого $a \in A$ имеем $\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$.*

Доказательство. (1) Выберем произвольное $a \in A$ и любое $\lambda \in \sigma(a)$, тогда $a - \lambda$ — необратимый элемент. Положим $I = (a - \lambda)A$. Покажем, что I — собственный идеал. Действительно, если $I = A$, то $1 \in I$, так что существует $b \in I$, для которого $(a - \lambda)b = 1$ и, значит, $a - \lambda$ — обратимый элемент, противоречие.

По предложению 2.17, идеал I модулярный и, по тому же предложению, I содержится в некотором максимальном идеале M. По теореме 2.55, $M = \ker\tau$ для некоторого характера $\tau \in \Omega(A)$. Так как $a - \lambda \in I \subset M$, то $0 = \tau(a - \lambda) = \tau(a) - \lambda$, поэтому $\tau(a) = \lambda$. Так как мы выбрали произвольное $\lambda \in \sigma(a)$, заключаем, что $\sigma(a) \subset \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\}$. Обратное включение содержится в предложении 2.54.

(2) Пусть $\widetilde{A}$ — унитализация A. Тогда, по следствию 2.60, имеем $\Omega(A) = F\big(\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}\big)$, где $\tilde{\tau}_\infty \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — канонический гомоморфизм, а $F \colon \Omega(\widetilde{A}) \to \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ — построенная выше биекция, см. следствие 2.60. По определению спектра элемента a неунитальной алгебры A, он равен спектру этого элемента в унитализации $\widetilde{A}$. Таким образом, используя результат пункта (1) и следствие 2.60, имеем

$$\sigma(a) = \{\tilde{\tau}(a) : \tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})\} = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\} \cup \{\tilde{\tau}_\infty(a)\} = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\},$$

что и требовалось. □

Следствие 2.62. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, тогда $\Omega(A) \subset A^*$, причем $\Omega(A)$ лежит в замкнутом единичном шаре из A^*.*

Доказательство. Из теоремы 2.61 и следствия 2.49 вытекает, что для каждого $a \in A$, $\|a\| \le 1$, и $\tau \in \Omega(A)$ выполняется $|\tau(a)| \le r(a) \le \|a\| \le 1$. Следовательно, τ — ограниченный линейный функционал, т.е. $\tau \in A^*$, и τ лежит в замкнутом единичном шаре относительно нормы на A^*. □

Превратим $\Omega(A)$ в топологическое пространство, ограничив на него $*$-слабую топологию из A^*. Полученное топологическое пространство называется ***пространством характеров*** или ***спектром*** алгебры A.

Теорема 2.63. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Тогда, по отношению к $*$-слабой топологии,*

(1) *пространство $\Omega(A) \cup \{0\}$ хаусдорфово и компактно;*

(2) *пространство $\Omega(A)$ хаусдорфово и локально компактно;*

(3) *если алгебра A унитальна, то $\Omega(A)$ — хаусдорфов компакт.*

Доказательство. (1) То, что $\Omega(A) \cup \{0\}$ — хаусдорфово в $*$-слабой топологии, вытекает из теоремы 1.31.

Покажем, что $\Omega(A) \cup \{0\}$ замкнуто в $*$-слабой топологии. Пусть $\varphi \colon A \to \mathbb{C}$ — непрерывный линейный функционал, не лежащий в $\Omega(A) \cup \{0\}$. Мы должны показать, что существует окрестность функционала φ в $*$-слабой топологии, не пересекающая $\Omega(A) \cup \{0\}$. Так как $\varphi \notin \Omega(A)$ и $\varphi \ne 0$, то существуют такие $a, b \in A$, что $\varphi(ab) \ne \varphi(a)\varphi(b)$. Так как умножение в поле $\mathbb{C}$ непрерывно, существуют такие окрестности $U^{\varphi(a)}$, $U^{\varphi(b)}$ и $U^{\varphi(ab)}$, что $(U^{\varphi(a)}U^{\varphi(b)}) \cap U^{\varphi(ab)} = \emptyset$. Напомним, что для $a \in A$ мы определили непрерывный линейный функционал $J_a \colon A^* \to \mathbb{C}$, $J_a(f) = f(a)$, а предбаза $*$-слабой топологии состоит из прообразов $J_a^{-1}(U)$ всевозможных открытых множеств $U \subset \mathbb{C}$ по всем $a \in A$. В частности, множества $V_a := J_a^{-1}(U^{\varphi(a)})$, $V_b := J_b^{-1}(U^{\varphi(b)})$, $V_{ab} := J_{ab}^{-1}(U^{\varphi(ab)})$ и их пересечение $W = V_a \cap V_b \cap V_{ab}$ являются открытыми в $*$-слабой топологии. В явном виде,

$$W = \{f \in A^* : f(a) \in U^{\varphi(a)},\ f(b) \in U^{\varphi(b)},\ f(ab) \in U^{\varphi(ab)}\}.$$

Ясно, что $\varphi \in W$, поэтому W — окрестность φ в $*$-слабой топологии. В силу выбора окрестностей $U^{\varphi(a)}$ и $U^{\varphi(b)}$, для любого $f \in W$ имеем $f(a)f(b) \ne f(ab)$, поэтому f не является характером и не равен 0, т.е. $W \cap \big(\Omega(A) \cup \{0\}\big) = \emptyset$. Тем самым, мы доказали замкнутость $\Omega(A) \cup \{0\}$ в $*$-слабой топологии.

По следствию 2.62, $\Omega(A)$ содержится в замкнутом единичном шаре пространства A^*. Также там содержится 0. По теореме 1.33, этот шар компактен в $*$-слабой топологии. В силу замкнутости $\Omega(A) \cup \{0\}$ в этой топологии, $\Omega(A) \cup \{0\}$ — тоже компакт в $*$-слабой топологии.

(2) Напомним, что топологическое пространство X называется ***локально компактным***, если каждая его точка имеет базу окрестностей, замыкания которых компактны.

Лемма 2.64. *Пусть X — хаусдорфово. Тогда*

(*a*) *пространство X локально компактно, если и только если у любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что ее замыкание $\overline{U}$ — компактно;*

(*b*) *если пространство X компактно, то для каждой точки $p \in X$ пространство $Y := X \setminus \{p\}$ — локально компактно.*

Доказательство. (*a*) Достаточно проверить, что из существования у каждой точки окрестности с компактным замыканием вытекает существование базы окрестностей, замыкания которых компактны. Пусть $x \in X$ — произвольная точка и U — ее окрестность, для которой $\overline{U}$ — компакт. Выберем произвольную окрестность V точки x и положим $W = V \cap U$, тогда $\overline{W} \subset \overline{U}$ — замкнутое подмножество, и так $\overline{U}$ компактно и хаусдорфово, то $\overline{W}$ — компакт.

(*b*) В силу пункта (*a*) достаточно показать, что у каждой точки $y \in Y$ имеется окрестность $U \subset Y$ с компактным замыканием $\overline{U} \subset Y$. Так как X — хаусдорфово, в X существуют непересекающиеся окрестности V и W точек p и y соответственно. Множество $X \setminus V$ замкнуто как в X, так и Y, поэтому, в силу хаусдорфовости X, это $X \setminus V$ — компакт. С другой стороны, $W \subset X \setminus V \subset Y$, поэтому замыкание $\overline{W}$ в Y, будучи замкнутым подмножеством хаусдорфова компакта $X \setminus V$, также компактно в Y. □

Напомним, что $\Omega(A)$ не содержит нулевой гомоморфизм, поэтому $\Omega(A) = (\Omega(A) \cup \{0\}) \setminus \{0\}$. По пункту (1), пространство $\Omega(A) \cup \{0\}$ компактно, поэтому, в силу леммы 2.64, пространство $\Omega(A)$ — локально компактно.

(3) Пусть теперь алгебра A унитальна. Покажем, что 0 не лежит в замыкании $\Omega(A)$ в $*$-слабой топологии. Действительно, пусть $V_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$, тогда множество $U_0 = J_1^{-1}(V_0) = \{f \in A^* : f(1) \in V_0\}$ открыто в $*$-слабой топологии и содержит нулевой функционал 0, т.е. U_0 — окрестность 0. С другой стороны, по предложению 2.54, для каждого $\tau \in \Omega(A)$ выполняется $\tau(1) = 1$, так что U_0 не пересекает $\Omega(A)$. Таким образом, в этом случае $\Omega(A)$ само является замкнутым подмножеством компакта $\Omega(A) \cup \{0\}$ в $*$-слабой топологии и, значит, компактно. □

Приведем пример описания пространства характеров конкретной банаховой алгебры.

Теорема 2.65. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $C(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций на X, наделенная* sup*-нормой. Тогда пространство характеров $\Omega\big(C(X)\big)$ гомеоморфно X.*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ обозначим δ_x отображение $\delta_x \colon C(X) \to \mathbb{C}$, $\delta_x(f) = f(x)$. Тогда δ_x — характер алгебры $C(X)$, т.е. $\delta_x \in \Omega\big(C(X)\big)$. Таким образом, мы определили отображение $\delta \colon X \to \Omega\big(C(X)\big)$, $\delta(x) = \delta_x$. Покажем, что отображение δ — гомеоморфизм.

Докажем, что δ инъективно. Для этого воспользуемся леммой Урысона. Напомним, что топологическое пространство Y называется ***нормальным***, если любые два непустых замкнутых непересекающихся подмножества $A, B \subset Y$ отделимы, т.е. существуют открытые множества $U \supset A$ и $V \supset B$ такие, что $U \cap V = \emptyset$.

Задача 2.66. Покажите, что каждое компактное хаусдорфово пространство нормально.

Таким образом, рассматриваемое нами пространство X является нормальным.

Лемма 2.67 (Урысон)**.** *Топологическое пространство Y нормально, если и только если для любых двух непустых непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset Y$ существует непрерывная функция $f \colon Y \to [0,1]$ такая, что $f|_A = 0$ и $f|_B = 1$.*

В случае пространства X в качестве A и B возьмем произвольные две разных точки x и x', тогда, по лемме Урысона, существует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(x) \neq f(x')$, откуда $\delta_x(f) \neq \delta_{x'}(f)$, следовательно, $\delta_x \neq \delta_{x'}$ и, значит, отображение δ инъективно.

Докажем теперь сюръективность отображения δ. Для каждой точки $x \in X$ положим $I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, тогда I_x — идеал в $C(X)$.

Лемма 2.68. *Идеал $I \subset C(X)$ максимальный, если и только если $I = I_x$ для некоторого $x \in X$.*

Доказательство. Покажем сначала, что каждый идеал I_x — максимальный. Предположим противное, т.е. для некоторого I_x имеется отличный от I_x собственный идеал $I \supset I_x$. Тогда $I \setminus I_x \neq \emptyset$ и, значит, существует $f \in I \setminus I_x$. По определению I_x, имеем $f(x) \neq 0$. Но тогда $g := f - f(x) \in I_x$, откуда $h = f - g \in I$. Но функция h постоянная и не равная нулю, поэтому она обратима в $C(X)$ и, значит, $I = C(X)$, противоречие.

Докажем теперь, что каждый максимальный идеал в $C(X)$ совпадает с некоторым I_x. Предположим противное, и пусть I — максимальный идеал в $C(X)$, отличный от всех I_x. Это означает, что для каждого $x \in X$ идеал I содержит функцию f_x, для которой $f_x(x) \neq 0$ (если это не так, то для некоторого x имеем $I_x \subset I$ и, значит, I_x — не максимальный идеал, что противоречит уже доказанному). Так как каждая функция f_x непрерывна, существует окрестность U^x точки x, в которой f_x отлична от нуля. Семейство $\{U^x\}_{x \in X}$ является открытым покрытием X, поэтому, в силу компактности X, это семейство содержит конечное подпокрытие $\{U^{x_k}\}_{k=1}^n$. Заметим, что вместе с каждой $f_{x_k} \in C(X)$ сопряженная с ней функция $\bar{f}_{x_k}$ также лежит в $C(X)$, и так как I — идеал, что $|f_{x_k}|^2 = \bar{f}_{x_k} f_{x_k} \in I$, откуда $f := \sum_{k=1}^n f_{x_k} \bar{f}_{x_k} = \sum_{k=1}^n |f_{x_k}|^2 \in I$. Но f всюду отлична от нуля, поэтому f обратима в $C(X)$ и, значит, $I = C(X)$, противоречие. $\square$

Вернемся к доказательству сюръективности δ. Выберем произвольный $\tau \in \Omega\big(C(X)\big)$. По теореме 2.55, $\ker \tau$ — максимальный идеал в $C(X)$. По лемме 2.68, существует $x \in X$ такой, что $\ker \tau = I_x$, т.е. $\tau(f) = 0$ для всех функций из I_x. Но δ_x также зануляет все эти функции: $\delta_x(f) = f(x) = 0 = \tau(f)$ для $f \in I_x$. Далее, по предложению 2.54, $\tau(\lambda) = \lambda = \delta_x(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Заметим также, что для любой $g \in C(X)$ функция $f := g - g(x)$ лежит в I_x, так что для $\lambda := g(x)$ имеем $g = f + \lambda$ и, значит,

$$\tau(g) = \tau(f + \lambda) = \tau(f) + \lambda = \delta_x(f) + \lambda = \delta_x(f + \lambda) = \delta_x(g),$$

откуда $\tau = \delta_x$.

Итак, мы доказали, что δ — биективное отображение. Покажем, что отображение δ непрерывно. Для этого рассмотрим произвольную направленность $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ в X, сходящуюся к некоторой точке $x \in X$. Тогда $\lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_\lambda) = f(x)$ для всех $f \in C(X)$, так как все эти функции непрерывны. Так как $\delta_{x_\lambda}(f) = f(x_\lambda)$ и $\delta_x(f) = f(x)$, то по теореме 1.31, пункт (2), направленность δ_{x_λ} является $*$-слабо сходящейся к δ_x. Напомним, что пространство характеров мы наделяем $*$-слабой топологией. Поэтому, в силу теоремы 1.20, отображение δ непрерывно.

Таким образом, мы показали, что отображение δ непрерывно и биективно отображает компактное пространство X на пространство $\Omega\big(C(X)\big)$, являющееся хаусдорфовым в силу теоремы 2.63. По известной теореме из общей топологии, отображение δ — гомеоморфизм, что и требовалось. $\square$

Замечание 2.69. В доказательстве теоремы 2.63 утверждается, что 0 не лежит в замыкании пространства характеров унитальной алгебры. Возьмем в качестве унитальной алгебры унитализацию $\widetilde{A}$ неунитальной алгебры A. Тогда и для $\widetilde{A}$ точка 0 не содержится в замыкании $\Omega(\widetilde{A})$. С другой стороны, пространство характеров из $\Omega(A)$ получается ограничением всех характеров из $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ на A, если отождествлять A с соответствующим идеалом в $\widetilde{A}$. При этом ограничение $\tilde{\tau}_\infty$ на A дает нулевой гомоморфизм, и при выбрасывании этого нуля мы, как декларируется, получаем локально компактное пространство, т.е. этот 0 не предполагается изолированной точкой в образе всего $\Omega(\widetilde{A})$, т.е. в $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$. Тем самым, возникает видимость противоречия. Ниже мы покажем, как связаны друг с другом $\Omega(\widetilde{A})$ и $\Omega(A)$, откуда будет видно, почему на самом деле никакого противоречия нет.

2.7.3 Отождествления

Напомним, что алгебра A, рассматриваемая как подалгебра в ее унитализации $\widetilde{A}$, является идеалом, в частности, линейным подпространством. Более того, по предложению 2.24, если A — банахова алгебра, то $\widetilde{A}$ — тоже банахова, и A является замкнутым подпространством в $\widetilde{A}$.

Пусть A — банахова алгебра, тогда A^* и $\widetilde{A}^*$ — банаховы пространства. Каждому непрерывному линейному функционалу $\varphi \in A^*$ поставим в соответствие линейный функционал $\varphi' \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, однозначно определяемый условием $\varphi'(a, \lambda) = \varphi(a)$. Так как

$$\|\varphi'\| = \sup_{\|a\|+|\lambda|=1} \big|\varphi'(a, \lambda)\big| = \sup_{\|a\|+|\lambda|=1} \big|\varphi(a)\big| = \sup_{\|a\|=1} \big|\varphi(a)\big| = \|\varphi\|,$$

то φ' — непрерывный, т.е. $\varphi' \in \widetilde{A}^*$, поэтому определено отображение $F^*\colon A^* \to \widetilde{A}^*$, $F^* : \varphi \mapsto \varphi'$, являющееся изометричным вложением.

Далее, вложение F^* линейно, так как для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in A^*$ выполняется

$$F^*(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2)(a, \lambda) = (\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2)(a) = \mu_1\varphi_1(a) + \mu_2\varphi_2(a) = \mu_1 F^*(\varphi_1)(a, \lambda) + \mu_2 F^*(\varphi_2)(a, \lambda).$$

Тем самым, мы изометрично и линейно вкладываем A^* в виде линейного подпространства в $\widetilde{A}^*$. Подпространство $F^*(A^*)$ замкнуто, так как для любой последовательности $F^*(\varphi_k)$, сходящейся в $\widetilde{A}^*$ к некоторому элементу $\psi \in \widetilde{A}^*$, имеем $F^*(\varphi_k)(a, \lambda) = \big(\varphi_k(a), 0\big)$, поэтому $\psi(a, \lambda)$ также имеет вид $(b, 0)$, так что ψ является образом функционала $\varphi \in A^*$, $\varphi(a) = b$ для всех таких a и b (линейность и непрерывность φ вытекает из этих же свойств функционала ψ).

Пусть теперь алгебра A коммутативна. Будем отождествлять A^* с подпространством $F^*(A^*) \subset \widetilde{A}^*$, что задается отождествлением каждого $\varphi \in A^*$ с соответствующим $\varphi' \in \widetilde{A}^*$. По следствию 2.62, $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{C}) \subset A^*$, таким образом, мы также можем отождествить множество $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ с соответствующим подмножеством в $F^*(A^*) \subset \widetilde{A}^*$. Отметим, что при таком отождествлении нулевой гомоморфизм $0 \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ соответствует нулю в $\widetilde{A}^*$.

Рассмотрим теперь $\operatorname{Hom}(\widetilde{A}, \mathbb{C})$. По предложению 2.54, для каждого ненулевого $\tilde{\tau} \in \operatorname{Hom}(\widetilde{A}, \mathbb{C})$, т.е. для характера $\tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})$, выполняется $\tilde{\tau}(0, 1) = 1$. С другой стороны, $\varphi := \tilde{\tau}|_A$, т.е. ограничение $\tilde{\tau}$ на $A \subset \widetilde{A}$, является гомоморфизмом, т.е. $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$, причем $\varphi \in \Omega(A) \subset \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$, если и только если $\tilde{\tau} \neq \tilde{\tau}_\infty$, где $\tilde{\tau}_\infty\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — канонической гомоморфизм, $\tilde{\tau}_\infty(a, \lambda) = \lambda$. Более того, имеет место очевидное равенство: $\tilde{\tau} = \varphi' + \tilde{\tau}_\infty$, где, как и выше, $\varphi'\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — продолжение гомоморфизма φ нулем на $1_{\widetilde{A}}$. Тем самым, для каждого гомоморфизма $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ мы построили два продолжения на $\widetilde{A}$: продолжение φ' нулем на $1_{\widetilde{A}}$ и продолжение $\tilde{\tau}$, равное 1 на $1_{\widetilde{A}}$. Из сказанного вытекает, что если отождествить $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ с соответствующим подмножеством в $A^* \subset \widetilde{A}^*$, т.е. отождествить каждое $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ с $\varphi' \in \widetilde{A}^*$, то получим

$$\Omega(\widetilde{A}) = \tilde{\tau}_\infty + \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C}) = \big(\tilde{\tau}_\infty + \Omega(A)\big) \sqcup \{\tilde{\tau}_\infty\} \subset \tilde{\tau}_\infty + A^*,$$

где второе равенство имеет место в силу того, что $\Omega(A)$ не содержит нулевой гомоморфизм. Отметим, что $\tilde{\tau}_\infty + A^*$ — аффинное подпространство в $\widetilde{A}^*$, не являющееся линейным, так как $\tilde{\tau}_\infty \notin A^*$.

Итак, $\Omega(A)$ лежит в линейном подпространстве $A^* \subset \widetilde{A}^*$, а $\Omega(\widetilde{A})$ — в аффинном подпространстве $\tilde{\tau}_\infty + A^* \subset \widetilde{A}^*$, получающемся сдвигом пространства A^*. Напомним, что на множестве характеров мы рассматриваем $*$-слабую топологию. Положим $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$ и $U = J^{-1}_{1_{\widetilde{A}}}(V)$, где, как и выше, $J_{\tilde{a}}\colon \widetilde{A}^* \to \mathbb{C}$, $J_{\tilde{a}}(g) = g(\tilde{a})$. Тогда в $*$-слабой топологии на $\widetilde{A}^*$ множество U открыто и является окрестностью нуля, так как $J_{1_{\widetilde{A}}}(0) = 0(1_{\widetilde{A}}) = 0 \in V$. С другой стороны, для каждой точки $g := f + \tilde{\tau}_\infty \in \tilde{\tau}_\infty + A^*$, $f \in A^*$, имеем

$$J_{1_{\widetilde{A}}}(g) = (f + \tilde{\tau}_\infty)(1_{\widetilde{A}}) = f(1_{\widetilde{A}}) + \tilde{\tau}_\infty(1_{\widetilde{A}}) = 1 \notin V,$$

так что $g \notin U$ и, значит, $U \cap (\tilde{\tau}_\infty + A^*) = \emptyset$. Теперь видно, почему $0 \in \widetilde{A}^*$ не является точкой прикосновения для $\Omega(\widetilde{A})$, но может являться точкой прикосновения для $\Omega(A)$, см. замечание 2.69. С другой стороны, часто бывает удобно отождествлять $\Omega(A)$ с $\tilde{\tau}_\infty + \Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$. Имея в виду это отождествление, будем писать $\Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$ и, значит, $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$.

Предложение 2.70. *Пусть A — банахова алгебра и $\widetilde{A}$ — ее унитализация. Тогда*

(1) *топология, индуцированная на $A^* \subset \widetilde{A}^*$ из $\widetilde{A}^*$ со $*$-слабой топологией совпадает со $*$-слабой топологией на A^*;*

(2) *отображение $\psi\colon \widetilde{A}^* \to \widetilde{A}^*$, $\psi\colon \tilde{a}^* \mapsto \tilde{a}^* + c$, $c \in \widetilde{A}^*$, является гомеоморфизмом в $*$-слабой топологии.*

Доказательство. (1) Достаточно проверить это на предбазах, состоящих из прообразов открытых в $\mathbb{C}$ множеств при всевозможных отображениях $J_a\colon A^* \to \mathbb{C}$ и $J_b\colon \widetilde{A}^* \to \mathbb{C}$, $a, c \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $b = c + \lambda 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, тогда $J_b^{-1}(U) = \big\{f \in \widetilde{A}^* : f(b) \in U\big\}$. По определению отождествления A^* и соответствующего подмножества $\widetilde{A}^*$, каждому $g \in A^*$ ставится в соответствии функционал $g'\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ такой, что $g'(a + \lambda 1_{\widetilde{A}}) = g(a)$, и, значит, $g'(1_{\widetilde{A}}) = 0$. Следовательно, $f \in A^* \subset \widetilde{A}^*$, если и только если $f(a + \lambda 1_{\widetilde{A}}) = f(a)$ при всех λ. Заметим, что

$$J_b^{-1}(U) \cap A^* = \{g' \in A^* \subset \widetilde{A}^* : g'(b) \in U\} = \{g' \in A^* \subset \widetilde{A}^* : g'(c) \in U\} = \{g \in A^* : g(c) \in U\} = J_c^{-1}(U).$$

Тем самым, мы показали, что индуцированная база $*$-слабой топологии из $\widetilde{A}^*$ содержится в базе $*$-слабой топологии на $A^* \subset \widetilde{A}^*$ (после отождествления).

Обратно, рассмотрим произвольное $J_c^{-1}(U) \subset A^*$, тогда на $A^* \subset \widetilde{A}^*$ это множество выглядит так:

$$\{g' \in A^* \subset \widetilde{A}^* : g'(c) \in U\} = J_b^{-1}(U) \cap A^*,$$

где в качестве b можно взять $c + \lambda 1_{\widetilde{A}}$ с любым $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, базы совпадают и, значит, топологии — тоже.

(2) Снова проверим, что при сдвиге каждое открытое множество из базы $*$-слабой топологии остается открытым. Имеем

$$\psi\big(J_b^{-1}(U)\big) = \big\{f + c : f \in \widetilde{A}^*,\ f(b) \in U\big\} = \big\{f + c \in \widetilde{A}^* : (f + c)(b) \in U + c\big\} = J_b^{-1}(U + c),$$

что и требовалось. □

Предложение 2.70 позволяет извлечь из теоремы 2.63, в соответствии с которой пространство $\Omega(\widetilde{A})$ со $*$-слабой топологией является хаусдорфовым компактном, что $\Omega(A)$ — локально компактно в силу леммы 2.64.

В дальнейшем, для неунитальной коммутативной банаховой алгебры A, мы будем часто отождествлять алгебру A с $F(A) \subset \widetilde{A}$, а множество всех характеров $\Omega(A)$ алгебры A — с подмножеством $\tilde{\tau}_\infty + \Omega(A)$ в $\Omega(\widetilde{A})$.

2.8 Представление Гельфанда коммутативной банаховой алгебры

Начнем со следующего замечания, объясняющего, почему представление Гельфанда, которое мы определим ниже, имеется не для всякой коммутативной банаховой алгебры.

Замечание 2.71. Для коммутативной алгебры A множество $\Omega(A)$ может быть пустым. В качестве примера можно рассмотреть $A = \{0\}$.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра с непустым $\Omega(A)$. Для каждого $a \in A$ определим отображение

$$\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto \tau(a).$$

Иными словами, $\widehat{a}$ равно ограничению $J_a\colon A^* \to \mathbb{C}$ на $\Omega(A)$. Так как каждое J_a непрерывно в $*$-слабой топологии, то $\widehat{a} \in C\big(\Omega(A)\big)$. По теореме 2.63, если A — унитальная алгебра, то $\Omega(A)$ — хаусдорфов компакт. Если же A — не унитальна, то, по той же теореме 2.63, $\Omega(A) \cup \{0\}$ — хаусдорфов компакт, поэтому, в силу леммы 2.64, пространство $\Omega(A)$ локально компактно.

Лемма 2.72. *Пусть X — хаусдорфов компакт, $p \in X$ — произвольная точка, $Y = X \setminus \{p\}$ и $f \in C(X)$. Тогда $f|_Y \in C_0(Y)$, если и только если $f(p) = 0$.*

Доказательство. Пусть сначала $f(p) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Big\{x \in X : \big|f(x)\big| \ge \varepsilon\Big\}$ — замкнуто в X и, значит, компактно и в X, и в Y, поэтому $f \in C_0(Y)$.

Обратно, если $f \in C_0(Y)$, то $T := \Big\{x \in Y : \big|f(x)\big| \ge \varepsilon\Big\}$ компактно в Y, а, значит, и в X. Так как X — хаусдорфов компакт, то T замкнуто в X, поэтому $U := X \setminus T$ — открыто в X, причем $p \in U$. Значит, U — окрестность p, и мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки p, что $|f| < \varepsilon$ в этой окрестности. Так как f непрерывна в p, то $f(p) = 0$, что и требовалось. □

Заметим, что для непрерывного в $*$-слабой топологии отображения J_a выполняется $J_a(0) = 0(a) = 0$, поэтому $\widehat{a}$, будучи ограничением J_a на $\big(\Omega(A) \cup \{0\}\big) \setminus \{0\}$, непрерывно и зануляется на бесконечности по лемме 2.72, т.е. $\widehat{a} \in C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Функция $\widehat{a}$ называется ***преобразованием Гельфанда*** элемента a.

Теорема 2.73 (Представление Гельфанда)**.** *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с непустым спектром. Тогда отображение*

$$\Gamma\colon A \to C_0\big(\Omega(A)\big), \quad \Gamma\colon a \mapsto \widehat{a},$$

— гомоморфизм алгебр, причем $\|\widehat{a}\|_\infty = r(a) \le \|a\|$ для всех $a \in A$, так что $\|\Gamma\| \le 1$, и, значит, гомоморфизм Γ является 1-липшицевым.

Если алгебра A унитальна, то $C_0\big(\Omega(A)\big) = C\big(\Omega(A)\big)$ и гомоморфизм Γ унитальный.

Далее, для каждого $a \in A$,

- *если алгебра A унитальна, то* $\sigma(a) = \widehat{a}\big(\Omega(A)\big)$,
- *если алгебра A не унитальна, то* $\sigma(a) = \widehat{a}\big(\Omega(A)\big) \cup \{0\}$.

Доказательство. То, что Γ — гомоморфизм алгебр, вытекает из ограничения отображений J_a на характеры, что приводит к сохранению мультипликативной структуры. Действительно,

$$\Gamma(ab)(\tau) = \widehat{ab}(\tau) = \tau(ab) = \tau(a)\tau(b) = \widehat{a}(\tau)\widehat{b}(\tau) = \Gamma(a)(\tau)\Gamma(b)(\tau)$$

для любого характера τ. Далее,

$$\widehat{a}\big(\Omega(A)\big) = \big\{\widehat{a}(\tau) : \tau \in \Omega(A)\big\} = \big\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\big\},$$

поэтому $\sigma(a)$ совпадает с образом отображения $\widehat{a}$, с добавленным нулем для не унитальной алгебры, содержится в теореме 2.61. Отсюда мгновенно вытекает равенство $r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty$, и так как $r(a) \le \|a\|$ по следствию 2.49, заключаем, что $\|\Gamma\| \le 1$.

Наконец, если алгебра A унитальна, то $\Gamma(1)\colon \tau \mapsto \tau(1) = 1$, где последнее равенство содержится в предложении 2.54, т.е. $\Gamma(1)$ — единица алгебры $C\big(\Omega(A)\big)$. □

Замечание 2.74. Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $\widetilde{A}$ — ее унитализация. Тогда $\widetilde{A}$ также коммутативна и для нее имеется представление Гельфанда $\widetilde{\Gamma}\colon \widetilde{A} \to C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ из теоремы 2.73. Покажем, как из этого представления получается представление Гельфанда $\Gamma\colon A \to C_0\big(\Omega(A)\big)$ для A.

Как мы уже выяснили в разделе 2.7.3, имеются естественные отождествления, которые, в частности, позволяют рассматривать $\Omega(A)$ как множество $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\} \subset \Omega(\widetilde{A})$. Однако априори не ясно, насколько это отождествление согласовано с функциями из представления Гельфанда. Покажем, что имеется полное согласование, т.е. функции $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как ограничения на $\Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$ функций $\widehat{\widehat{a}}\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \mathbb{C}$, где обе функции $\widehat{a}$ и $\widehat{\widehat{a}}$ построены по элементам $a \in A$ и $(a,0) \in \widetilde{A}$ соответственно (эти элементы мы тоже отождествляем).

Напомним (см. раздел 2.7.3), что каждый элемент $\tau \in \Omega(A)$ мы, рассматривая A как подпространство в $\widetilde{A}$, продолжаем до $\tau' \in \widetilde{A}^*$, полагая $\tau'(1_{\widetilde{A}}) = 0$, и затем получаем соответствующий характер $\tilde{\tau}$ так: $\tilde{\tau} = \tau' + \tilde{\tau}_\infty$. Отождествление $\Omega(A)$ с подмножеством в $\Omega(\widetilde{A})$ происходит по правилу $\tau \mapsto \tilde{\tau}$. Таким образом, нам нужно сравнить $\widehat{a}(\tau)$ и $\widehat{\widehat{a}}(\tilde{\tau})$. Имеем

$$\widehat{a}(\tau) = \tau(a) = \tau'(a,0) = \tau'(a,0) + \tilde{\tau}_\infty(a,0) = \tilde{\tau}(a,0) = \widehat{\widehat{a}}(\tilde{\tau}),$$

что и доказывает согласованность функций $\widehat{a}$ и $\widehat{\widehat{a}}$.

Как мы уже отмечали в разделе 2.7.3, множество $\Omega(\widetilde{A})$, наделенное $*$-слабой топологией, — хаусдорфов компакт, а его подмножество $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ — локальный компакт. Заметим, что для $a \in A$ имеем $\widehat{\widehat{a}}(\tilde{\tau}_\infty) = \tilde{\tau}_\infty(a,0) = 0$, так что, в силу непрерывности функции $\widehat{\widehat{a}}$, ее ограничение на локальный компакт $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ зануляется на бесконечности. Таким образом, ограничения функций $\widehat{\widehat{a}} \in C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ на $\Omega(A)$ — это функции $\widehat{a} \in C_0\big(\Omega(A)\big)$. Обратно, каждая функция $\widehat{a} \in C_0\big(\Omega(A)\big)$, будучи продолженная нулем в $\tilde{\tau}_\infty$, непрерывна на всем $\Omega(\widetilde{A})$ и равна $\widehat{\widehat{a}}$. Тем самым, мы показали, что ограничение функций из $C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ на $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ задает биективное соответствие между $\widetilde{\Gamma}(A) \subset C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ и $\Gamma(A) \subset C_0\big(\Omega(A)\big)$, согласованное с представлениями Гельфанда: $\widetilde{\Gamma}(a)|_{\Omega(A)} = \Gamma(a)$ для всех $a \in A$.

Замечание 2.75. Ядро представления Гельфанда может быть ненулевым. Это ядро называется ***радикалом алгебры*** A. По теореме 2.73, оно состоит из всех элементов $a \in A$, для которых $r(a) = 0$, т.е. у которых все спектр нулевой. В частности, радикал содержит все нильпотентные элементы, т.е. такие $a \in A$, для которых $a^n = 0$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ (в общей алгебре элементы с нулевым спектром называются ***квазинильпотентными***). Если радикал равен нулю, то алгебра A называется ***полупростой***.

Приведем пример приложения теоремы 2.73.

Пример 2.76. Пусть $a, b \in A$ — коммутирующие элементы произвольной (не обязательно коммутативной) банаховой алгебры. Покажем, что

$$r(a+b) \le r(a) + r(b) \quad \text{и} \quad r(ab) \le r(a)r(b).$$

Пусть B — замкнутая унитальная подалгебра в $\widetilde{A}$, порожденная элементами a, b и 1, тогда B — коммутативная унитальная банахова алгебра в силу предложения 2.7. Рассмотрим представление Гельфанда для алгебры B, а именно, унитальный гомоморфизм $\Gamma\colon B \to C\big(\Omega(B)\big)$, $\Gamma\colon b \mapsto \widehat{b}$. По теореме 2.73, имеем

$$r(a+b) = \|\widehat{a+b}\|_\infty = \|\widehat{a} + \widehat{b}\|_\infty \le \|\widehat{a}\|_\infty + \|\widehat{b}\|_\infty = r(a) + r(b);$$
$$r(ab) = \|\widehat{ab}\|_\infty = \|\widehat{a}\,\widehat{b}\|_\infty \le \|\widehat{a}\|_\infty \|\widehat{b}\|_\infty = r(a)r(b).$$

Отметим, что без теоремы о представлении Гельфанда субаддитивность спектрального радиуса на коммутирующих элементах доказывается весьма громоздко.

Замечание 2.77. В общем случае, спектральный радиус не является ни субаддитивным, ни субмультипликативным. В качестве примера рассмотрим алгебру $M_2(\mathbb{C})$, и пусть

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $r(a) = r(b) = 0$ (обе матрицы нильпотентны), но $r(a+b) = r(ab) = 1$.

Пространство характеров можно воспринимать как обобщенный спектр благодаря следующему результату.

Теорема 2.78. *Пусть B_a — банахова алгебра, порожденная 1 и некоторым элементом $a \in A$ унитальной банаховой алгебры A. Тогда B_a унитальна, коммутативна и отображение $\widehat{a}\colon \Omega(B_a) \to \sigma(a)$, $\widehat{a}\colon \tau \mapsto \tau(a)$, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Алгебра B_a коммутативна в силу предложения 2.7. Непрерывность отображения $\widehat{a}$ обсуждалась непосредственно перед теоремой 2.73. Сюръективность содержится в теореме 2.73. Инъективность $\widehat{a}$ вытекает предложения 2.54, в соответствии с которым каждый характер на унитальной банаховой алгебре переводит единицу алгебры в 1 и, поэтому, если два характера совпадают на a, то они совпадают и на всей B_a. Наконец, гомеоморфность $\widehat{a}$ вытекает из того, что $\Omega(A)$ — компакт (см. теорему 2.63), а спектр $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ хаусдорфов. $\square$

Теорема 2.79. *Пусть A — неунитальная банахова алгебра, порожденная некоторым элементом $a \in X$ банаховой алгебры X. Тогда A коммутативна и отображение $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \sigma(a) \setminus \{0\}$, $\widehat{a}\colon \tau \mapsto \tau(a)$, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Алгебра A коммутативна в силу предложения 2.7. Пусть $\widetilde{A}$ — унитализация A, тогда, в обозначениях замечания 2.74, отображение $\widehat{\tilde{a}}\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \sigma(a)$ является гомеоморфизмом в силу теоремы 2.78. В разделе 2.7.3 мы объяснили, что $\Omega(A)$ можно отождествить с $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$, где $\tilde{\tau}_\infty\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — канонический гомоморфизм, причем это отождествление являются гомеоморфизмом с образом в $*$-слабой топологии. В замечании 2.74 мы также выяснили, что отображения $\widehat{\tilde{a}}$ и $\widehat{a}$ согласованы в том смысле, что $\widehat{a}$ равно ограничению $\widehat{\tilde{a}}$ на $\Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$. Так как $\widehat{\tilde{a}}(\tilde{\tau}_\infty) = \tilde{\tau}_\infty(\tilde{a}) = 0$, то заключаем, что $\widehat{a}$ — гомеоморфизм между $\Omega(A)$ и $\sigma(a) \setminus \{0\}$. $\square$

Тема 3

Элементы теории C^*-алгебр

План. Инволюция или сопряжение на алгебре, самосопряженное подмножество, инволютивная или $*$-алгебра, $*$-подалгебра $*$-алгебры; $*$-подалгебра, порожденная данным подмножеством; самосопряженный или эрмитов элемент, вещественное подпространство всех эрмитовых элементов, разложение каждого элемента $*$-алгебры на эрмитовы элементы (вещественную и мнимую части), эрмитовость произведения элемента и его сопряженного, нормальные элементы; $*$-подалгебра, порожденная нормальным элементом; инволюция в унитальной $*$-алгебре коммутирует со взятием обратного элемента и неподвижна на единице, проектор; эрмитовость элемента, обратного к эрмитову; элемент-изометрия, элемент-коизометрия, унитарный элемент, мультипликативная группа унитарных элементов, равенство обратного к унитарному элементу его сопряженному, $*$-гомоморфизм и $*$-изоморфизм, ядро и образ $*$-гомоморфизма, $*$-гомоморфизмы сохраняют эрмитовость элементов, факторизация $*$-алгебры по самосопряженному идеалу, унитальный $*$-гомоморфизм, унитальный $*$-гомоморфизм сохраняет унитарность, автоморфизм $*$-алгебры, автоморфизм унитальной $*$-алгебры, внутренний автоморфизм унитальной $*$-алгебры, действие мультипликативной группы унитарных элементов унитальной $*$-алгебры на этой алгебре, унитарно эквивалентные элементы, равенство спектров унитарно эквивалентных элементов, нормированная $*$-алгебра, банахова $*$-алгебра, оценка норм вещественной и мнимой частей элементов нормированной $*$-алгебры, банаховость вещественного подпространства всех эрмитовых элементов банаховой $*$-алгебры, унитальная банахова $*$-алгебра, унитарность экспоненты от элемента, полученного умножением эрмитова элемента на мнимую единицу, C^*-алгебра, определяющее свойство C^*-алгебры, унитальная C^*-алгебра, C^*-подалгебра, норма единицы и унитарного элемента, спектр унитарного элемента, примеры C^*-алгебр, прямая сумма и ограниченная прямая сумма C^*-алгебр, совпадения спектрального радиуса с нормой эрмитова элемента, невырожденность спектра ненулевого эрмитова элемента, равенство нулю нильпотентного эрмитова элемента; единственность нормы, превращающей $*$-алгебру в C^*-алгебру; унитализация банаховой $*$-алгебры, невыполнение определяющего свойства C^*-алгебры для стандартной нормы на унитализации, унитализация C^*-алгебры, продолжение $*$-гомоморфизма C^*-алгебр на их унитализации, 1-липшицевость $*$-гомоморфизма из $*$-банаховой алгебры в C^*-алгебру, вещественность спектров эрмитовых элементов C^*-алгебры, уважение инволюции характерами коммутативной C^*-алгебры, непустота спектра ненулевой C^*-алгебры, теорема Гельфанда о представлении Гельфанда для коммутативной C^*-алгебры; C^*-подалгебра, порожденная данным подмножеством C^*-алгебры; коммутативность и нормальность всех элементов C^*-подалгебры, порожденной нормальным элементом C^*-алгебры; совпадение спектров унитальной C^*-алгебры и любой ее C^*-подалгебры, содержащей единицу; равенство нормы и спектрального радиуса у нормального элемента C^*-алгебры; представление унитарного элемента со спектром, отличном от окружности, в виде экспоненты эрмитова элемента, умноженного на мнимую единицу.

Мы определим $C*$-алгебры в три шага: зададим алгебры с инволюцией, затем добавим банаховость, что приведет еще и к двум другим, помимо полноты, дополнительным свойствам нормы (одно из них накладывается на нормированные алгебры, другое — новое; такие алгебры называются банаховыми $*$-алгебрами), и, наконец, наложим на норму еще одно важное ограничение, в результате, придем к C^*-алгебрам.

3.1 Алгебры с инволюцией или $*$-алгебры

Инволюцией или ***сопряжением*** алгебры A называется такое отображение $a \mapsto a^*$ алгебры A в себя, которое

- является сопряженно линейным, то есть $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
- удовлетворяет $a^{**} := (a^*)^* = a$, и
- $(ab)^* = b^* a^*$.

Алгебра A, на которой задана инволюция $*$, называется ***инволютивной*** или ***$*$-алгеброй***. Элемент a^* называется ***сопряженным с*** a.

Всюду ниже, если не оговорено противное, A обозначает некоторую $*$-алгебру.

Подмножество $S \subset A$ называется ***самосопряженным***, если $S^* := \{a^* : a \in S\} = S$. Всякая самосопряженная подалгебра в A является $*$-алгеброй и называется ***$*$-подалгеброй***. Отметим также, что пересечение любого набора $*$-алгебр — снова $*$-алгебра, поэтому для каждого множества $S \subset A$ определена наименьшая $*$-подалгебра, содержащая S, которая называется ***порожденной*** S.

Элемент $a \in A$ называется ***самосопряженным*** или ***эрмитовым***, если $a^* = a$. Множество всех эрмитовых элементов обозначим A_{sa}.

Предложение 3.1. *Множество A_{sa} является вещественным линейным подпространством в A.*

Доказательство. Действительно, для любых $a, b \in A_{sa}$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\lambda a + \mu b)^* = \lambda a^* + \mu b^* = \lambda a + \mu b,$$

что и требовалось. □

Предложение 3.2. *Пусть A — это $*$-алгебра. Тогда для каждого $a \in A$ существуют и единственны эрмитовы элементы $b, c \in A_{sa}$ такие, что $a = b + ic$, а именно, $b = (a + a^*)/2$ и $c = (a - a^*)/(2i)$.*

Доказательство. Действительно, b и c, очевидно, подходят. Для доказательства единственности заметим, что $a^* = b^* - ic^* = b - ic$, откуда и вытекают приведенные выше формулы для b и c. □

Эрмитовы элементы b и c в разложении из предложения 3.2 назовем соответственно ***вещественной*** и ***мнимой частями*** элемента a.

Предложение 3.3. *Пусть A — это $*$-алгебра. Тогда для каждого $a \in A$ элементы $a\,a^*$ и a^*a — эрмитовы.*

Доказательство. Имеем $(a\,a^*)^* = a^{**}a^* = a\,a^*$. Аналогично доказывается эрмитовость a^*a. □

Элемент $a \in A$ называется ***нормальным***, если $a^*\,a = a\,a^*$.

Задача 3.4. Пусть A — это $*$-алгебра и $a \in A$ — нормальный элемент. Покажите, что порожденная им $*$-подалгебра коммутативна и совпадает с линейной оболочкой элементов вида $a^m(a^*)^n$, где m и n — неотрицательные целые, одновременно не обращающиеся в 0. Аналогично, для унитальной $*$-алгебры A и любого ее нормального элемента a унитальная $*$-подалгебра, порожденная a, совпадает с линейной оболочкой элементов вида $a^m(a^*)^n$, где m и n — неотрицательные целые (если $m = n = 0$, то $a^m(a^*)^n = 1$).

Следующее важное для дальнейшего утверждение очевидно.

Предложение 3.5. *Пусть A — произвольная $*$-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент, и $P(a, a^*)$ — комплексный многочлен, имеющий нулевой свободный член. Тогда $P(a, a^*)$ — нормальный элемент в A. Если же A — унитальная $*$-алгебра, то в качестве $P(a, a^*)$ можно взять произвольный комплексный многочлен, не обязательно с нулевым свободным членом. И снова $P(a, a^*)$ — нормальный элемент из A. Таким образом, (унитальная) $*$-подалгебра в (унитальной) $*$-алгебре A, порожденная нормальным элементом, состоит из нормальных элементов алгебры A.*

Предложение 3.6. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, тогда инволюция коммутирует со взятием обратного элемента, т.е. для любого $a \in A$ выполняется $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$, в частности, $1^* = 1$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $1^* = 1$. Имеем

$$1^* = 1 \cdot 1^* = (1 \cdot 1^*)^* = (1^*)^* = 1.$$

Далее, пусть $a \in \mathrm{Inv}(A)$, тогда $1 = (a^{-1}a)^* = a^*(a^{-1})^*$ и, аналогично, $(a^{-1})^*a^* = 1$, откуда и вытекает требуемое. □

Элемент $p \in A$ называется ***проектором***, если $p = p^* = p^2$. Из сказанного выше вытекает, что 1 унитальной алгебры является проектором.

Задача 3.7. Приведите пример проектора в неунитальной алгебре.

Следствие 3.8. *Пусть a — обратимый эрмитов элемент унитальной $*$-алгебры A, тогда элемент a^{-1} — также эрмитов.*

Доказательство. По предложению 3.6,

$$(a^{-1})^* = (a^*)^{-1} = a^{-1},$$

что и требовалось. □

Элемент $a \in A$ унитальной $*$-алгебры называется

- ***изометрией***, если $a^*a = 1$,
- ***коизометрией***, если $a\,a^* = 1$,
- ***унитарным***, если $a\,a^* = a^*\,a = 1$, т.е. если он одновременно — изометрия и коизометрия.

Предложение 3.9. *Множество $U(A)$ всех унитарных элементов $*$-алгебры A образуют подгруппу (по умножению) в группе $\mathrm{Inv}(A)$ всех обратимых элементов. При этом, для унитарного элемента обратный к нему равен сопряженному.*

Доказательство. То, что 1 — унитарный элемент фактически доказано в предложении 3.6. То, что все унитарные элементы обратимы и для них обратный равен сопряженному есть мгновенное следствие определения.

Покажем, что $U(A)$ замкнуто относительно умножения. Пусть $a, b \in U(A)$, тогда $ab(ab)^* = abb^*a^* = 1$ и, аналогично, $(ab)^*ab = 1$, поэтому $ab \in U(A)$.

Наконец, проверим, что переход к обратному элементу сохраняет унитарность элемента. Пусть $a \in U(A)$. Тогда $a^{-1}(a^{-1})^* = a^{-1}(a^*)^{-1} = (a^*a)^{-1} = 1$, где первое равенство вытекает из предложения 3.6 (взятие обратного элемента коммутирует с сопряжением). Аналогично, $(a^{-1})^*a^{-1} = 1$, что и требовалось. □

Гомоморфизм $*$-алгебр $\varphi\colon A \to B$, сохраняющий сопряжение, т.е. $\varphi(a^*) = \big(\varphi(a)\big)^*$ для всех $a \in A$, называется ***$*$-гомоморфизмом***. Если φ при этом биективен, то он называется ***$*$-изоморфизмом***. Отметим, что для $*$-гомоморфизма φ ядро $\ker\varphi$ — самосопряженный идеал в A, а образ $\varphi(A)$ — это $*$-подалгебра в B.

Предложение 3.10. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ является $*$-гомоморфизмом $*$-алгебр, тогда для каждого эрмитова $a \in A$ элемент $\varphi(a) \in B$ — также эрмитов. Таким образом, $\varphi(A_{sa}) \subset B_{sa}$.*

Доказательство. Так как $a^* = a$ и φ сохраняет сопряжение, имеем $\varphi(a) = \varphi(a^*) = \varphi(a)^*$, что и требовалось. □

Примером $*$-гомоморфизма является факторизация по идеалу. Следующее предложение проверяется непосредственно.

Предложение 3.11. *Пусть A — произвольная $*$-алгебра, а $I \subset A$ — самосопряженный идеал. Тогда A/I является $*$-алгеброй с инволюцией $(a+I)^* = a^*+I$, а каноническая проекция $\pi\colon A \to A/I$ — $*$-гомоморфизмом.*

Унитальным $*$-гомоморфизмом называется $*$-гомоморфизм унитальных $*$-алгебр $\varphi\colon A \to B$, сохраняющий единицу, т.е. $\varphi(1) = 1$.

Предложение 3.12. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный $*$-гомоморфизм унитальных $*$-алгебр. Тогда φ сохраняет унитарность элементов: если $a \in A$ — унитарный, то $\varphi(a) \in B$ — также унитарный.*

Доказательство. Применим к равенству $a^*a = a\,a^* = 1$ гомоморфизм φ и воспользуемся тем, что он сохраняет сопряжение и 1. Имеем
$$1 = \varphi(1) = \varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \varphi(a)^*\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(a)^*,$$
что и требовалось. □

Автоморфизмом $*$-алгебры A называется $*$-изоморфизм $\varphi\colon A \to A$. Если алгебра A еще и унитальна, то ее ***автоморфизмом*** называется унитальный $*$-изоморфизм.

Предложение 3.13. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, а $u \in A$ — унитарный элемент. Тогда отображение $\mathrm{Ad}_u\colon a \mapsto uau^*$ является автоморфизмом.*

Доказательство. Линейность отображения Ad_u очевидна. Биективность следует из того, что Ad_{u^*} — отображение, обратное к Ad_u. Далее, $\mathrm{Ad}_u(1) = u1u^* = uu^* = 1$ и $\mathrm{Ad}_u(ab) = uabu^* = uau^*ubu^* = \mathrm{Ad}_u(a)\,\mathrm{Ad}_u(b)$. Таким образом, Ad сохраняет 1 и умножение. Наконец, $\mathrm{Ad}_u(a^*) = ua^*u^* = (uau^*)^* = \big(\mathrm{Ad}_u(a)\big)^*$. Таким образом, Ad_u сохраняет сопряжение. □

Описанный в предложении 3.13 автоморфизм Ad_u называется ***внутренним***.

Предложение 3.14. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, тогда отображение Ad задает действие мультипликативной группы $U(A)$ унитарных элементов на алгебре A.*

Доказательство. Путь $u, v \in U(A)$ и $a \in A$, тогда $\operatorname{Ad}_{uv}(a) = uva(uv)^* = u(vav^*)u^* = \operatorname{Ad}_u\big(\operatorname{Ad}_v(a)\big)$, откуда $\operatorname{Ad}_{uv} = \operatorname{Ad}_u \operatorname{Ad}_v$. Кроме того, $\operatorname{Ad}_1(a) = 1a1^* = a$, так что Ad_a — тождественное отображение. Последнее завершает доказательство предложения. □

Из предложения 3.14 вытекает, что Ad разбивает A на орбиты этого действия. Элементы a и b, попавшие в одну орбиту, то есть связанные равенством $b = uau^*$ для некоторого унитарного u, называются ***унитарно эквивалентными***.

Предложение 3.15. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, и $a, b \in A$ — унитарно эквивалентные элементы. Тогда $\sigma(a) = \sigma(b)$.*

Доказательство. Действительно, $b = uau^*$ и $a = u^*bu$ для некоторого унитарного u. Так как $u, u^* \in \operatorname{Inv}(A)$, а $\operatorname{Inv}(A)$ — группа по умножению, то a и b одновременно или обратимы, или необратимы. Так как при всех $\lambda \in \mathbb{C}$

$$b - \lambda 1 = uau^* - \lambda 1 = uau^* - u\lambda 1u^* = u(a - \lambda 1)u^*,$$

то $b - \lambda 1$ и $a - \lambda 1$ также являются унитарно эквивалентными и, значит, одновременно или обратимы, или необратимы, откуда и вытекает равенство $\sigma(a) = \sigma(b)$. □

3.2 Нормированные и банаховы $*$-алгебры

Напомним, что нормированная алгебра A — это алгебра с субмультипликативной нормой. Если в дополнение на алгебре задана инволюция, уважающая норму, т.е. $\|a\| = \|a^*\|$ для всех $a \in A$, то такая A называется ***нормированной $*$-алгеброй***. Если при этом алгебра еще и банахова, то она называется ***банаховой $*$-алгеброй***. Итак, нормированная (банахова) $*$-алгебра является одновременно нормированной (банаховой) алгеброй и $*$-алгеброй, причем норма уважает сопряжение.

Уточним предложение 3.2 в случае нормированных $*$-алгебр.

Предложение 3.16. *Пусть A — нормированная $*$-алгебра, $a \in A$, и $b, c \in A_{sa}$ — эрмитовы элементы, для которых $a = b + ic$. Тогда $\|b\| \le \|a\|$ и $\|c\| \le \|a\|$.*

Доказательство. Имеем

$$\|b\| \le \frac{1}{2}\big(\|a\| + \|a^*\|\big) = \frac{1}{2}\big(\|a\| + \|a\|\big) = \|a\|$$

и, аналогично, $\|c\| \le \|a\|$, что и требовалось. □

Уточним предложение 3.1 в случае банаховых $*$-алгебр.

Предложение 3.17. *Пусть A — произвольная банахова $*$-алгебра. Тогда множество A_{sa} всех эрмитовых элементов в A является вещественным банаховым подпространством в A.*

Доказательство. То, что A_{sa} — вещественное подпространство, было доказано в предложении 3.1. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $a_n \in A_{sa}$. Так как пространство A — банахово, существует $a \in A$ такое, что $a_n \to a$. Покажем, что $a = a^*$, т.е. $a \in A_{sa}$, чем и завершим доказательство. Имеем

$$\|a^* - a_n^*\| = \big\|(a - a_n)^*\big\| = \|a - a_n\| \to 0 \ \text{ при } n \to \infty,$$

поэтому $a_n = a_n^* \to a^*$ и $a_n \to a$ при $n \to \infty$, откуда $a^* = a$, так как A — хаусдорфово пространство. □

Предложение 3.18. *Пусть A — произвольная нормированная, в частности, банахова, $*$-алгебра и $a \in A$. Тогда $\|a^*a\| \le \|a\|^2$.*

Доказательство. Действительно, так как алгебра A нормированная, то $\|a^*a\| \le \|a^*\|\,\|a\|$. Так как A — нормированная $*$-алгебра, то $\|a\| = \|a^*\|$, что и требовалось. □

Если в банаховой $*$-алгебре есть еще и 1, т.е. она является унитальной $*$-алгеброй, то, при дополнительном условии $\|1\| = 1$ алгебра A называется ***унитальной банаховой $*$-алгеброй***.

Пример 3.19. Приведем важный пример унитарного элемента в унитальной банаховой $*$-алгебре A. В разделе 2.5 мы определили экспоненту элемента произвольного элемента $a \in A$ (даже в случае, когда A — унитальная банахова алгебра). Напомним, что $e^a = \sum_{n=0}^\infty a^n$. Кроме того, по теореме 2.51, для коммутирующих $a, b \in A$ имеем $e^{a+b} = e^a e^b$. Отсюда вытекает, что $e^{ia}e^{-ia} = e^0 = 1 = e^{-ia}e^{ia}$, т.е. $(e^{ia})^{-1} = e^{-ia}$. С другой стороны, из свойств инволюции вытекает, что для всякого $b \in A$ имеем $(ib)^* = -ib^*$ и $(e^b)^* = \sum_{n=0}^\infty (b^*)^n$, откуда

$$(e^{ia})^* = \sum_{n=0}^{\infty} \big((ia)^*\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \big(-ia^*\big)^n = e^{-ia^*}$$

Пусть теперь a — эрмитов элемент, т.е. $a^* = a$, тогда $(e^{ia})^* = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, поэтому e^{ia} — унитарный элемент алгебры A.

Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 3.20. *Пусть A — унитальная банахова $*$-алгебра и $a \in A$ — эрмитов элемент. Тогда элемент $e^{ia} \in A$ — унитарный.*

3.3 C^*-алгебры

Дадим наконец определение C^*-алгебры. А именно, ***C^*-алгебра*** A — это банахова $*$-алгебра с дополнительным условием $\|a\,a^*\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$. Это последнее условие будем называть ***определяющим для C^*-алгебры***. Отметим, что так как сопряжение согласовано с нормой, для C^*-алгебры выполняется $\|a^*a\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2$, так что определяющее условие можно писать и как $\|a^*a\| = \|a\|^2$, и как $\|a\,a^*\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$.

Далее, если C^*-алгебра A содержит единицу 1, то такую A будем называть ***унитальной C^*-алгеброй***. Отметим, что, в отличии от унитальных $*$-банаховых алгебр, для C^*-алгебры мы не требуем, чтобы $\|1\| = 1$. Тем не менее, последнее свойство непосредственно вытекает из определяющего свойства C^*-алгебр, см. предложение 3.21 ниже.

Отметим также следующее очевидное свойство C^*-алгебр: замкнутая $*$-алгебра в C^*-алгебре является C^*-алгеброй (называем их ***C^*-подалгебрами***).

Предложение 3.21. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, в которой $0 \neq 1$, а $u \in A$ — унитарный элемент. Тогда*

(1) $\|1\| = 1$,

(2) $\|u\| = 1$, *и*

(3) $\sigma(u) \subset S^1 \subset \mathbb{C}$, *где S^1 — единичная окружность с центром в нуле.*

Доказательство. (1) Так как сопряжение согласовано с нормой, имеем $\|1\| = \|1^*\| = \|1^*1\|$. Так как A — это C^*-алгебра, то выполняется $\|1^*1\| = \|1\|^2$. Таким образом, $\|1\| = \|1\|^2$. По предположению, $0 \neq 1$ и, значит, $\|1\| \neq 0$, поэтому $\|1\| = 1$.

(2) Так как A — это C^*-алгебра, имеем $\|u\|^2 = \|u\,u^*\|$. Так как элемент u — унитарный, то $u\,u^* = 1$. По предыдущему пункту, $\|1\| = 1$, откуда $\|u\|^2 = \|u\,u^*\| = \|1\| = 1$, и, значит, $\|u\| = 1$, так как $\|u\| \geq 0$.

(3) Пусть $\lambda \in \sigma(u)$. Тогда, по предложению 2.31, имеем $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$. В силу следствия 2.49, справедливо $|\lambda| \leq \|u\| = 1$ (см. предыдущий пункт) и, аналогично, $|\lambda^{-1}| \leq \|u^*\| = 1$, поэтому $|\lambda| = 1$, так что $\lambda \in S^1$. □

Пример 3.22. Приведем некоторые примеры C^*-алгебр. Простейшим примером является само поле $\mathbb{C}$ с инволюцией, заданной сопряжением.

- Пространство $\mathcal{B}(S)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на множестве S.
- Пространство $C_b(X) \subset \mathcal{B}(X)$ всех непрерывных ограниченных комплекснозначных функций на топологическом пространстве X.
- Подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$ всех непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{C}$, заданных на хаусдорфовом локально компактном топологическом пространстве X и обращающихся в нуль на бесконечности.

- Подпространство $\mathcal{B}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, состоящее из всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, заданных на измеримом пространстве Ω.

- Пространство $L^\infty(\mu)$ классов эквивалентности существенно ограниченных комплекснозначных функций на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ с мерой μ.

- Пространство $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H.

Предложение 3.23. *Если $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство C^*-алгебр, то прямая сумма $A := \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ с покомпонентной инволюцией $(a_\lambda)^* := (a_\lambda^*)$ — тоже C^*-алгебра, а ограниченная сумма $A^{c_0} := \oplus^{c_0}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ — ее замкнутый самосопряженный идеал.*

Доказательство. По предложению 2.11, A является банаховой алгеброй. Равенство $\|a\| = \|a^*\|$ следует из равенств $\|a_\lambda\| = \|a_\lambda^*\|$, выполненных для каждой компоненты, поэтому A — $*$-алгебра. Проверим, что для любого $a \in A$ выполняется $\|aa^*\| = \|a\|^2$. Действительно, если $a = (a_\lambda)$, то $aa^* = (a_\lambda a_\lambda^*)$ и

$$\|aa^*\| = \sup \|a_\lambda a_\lambda^*\| = \sup \|a_\lambda\|^2 = \big(\sup \|a_\lambda\|\big)^2 = \|a\|^2,$$

что и требовалось. В силу задачи 2.13, A^{c_0} является замкнутым идеалом в A. Его самосопряженность вытекает из того, что $\|a_\lambda^*\| = \|a_\lambda\|$ для всех λ. □

Задача 3.24. Докажите следующие утверждения.

(1) Пусть S — непустое множество, A — некоторая C^*-алгебра, тогда $\mathcal{B}(S, A)$ — семейство всех ограниченных комплекснозначных отображений из S в A — тоже C^*-алгебра (с поточечной инволюцией).

(2) Если X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, то $C_0(X, A)$ является C^*-подалгеброй в $\mathcal{B}(X, A)$.

Напомним, что, в силу следствия 2.49, для банаховой алгебры A и любого ее элемента $a \in A$ выполняется $r(a) \le \|a\|$.

Теорема 3.25. *Если a — эрмитов элемент C^*-алгебры A, то $r(a) = \|a\|$.*

Доказательство. Так как $\|a^2\| = \|aa^*\| = \|a\|^2$, то, по индукции, $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. В силу теоремы 2.42 Бёрлинга,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|,$$

что и требовалось. □

Следствие 3.26. *Если a — эрмитов элемент C^*-алгебры A. Тогда $\sigma(a) = \{0\}$, если и только если $a = 0$.*

Доказательство. Если $a = 0$, то $\sigma(a) = \{0\}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\sigma(a) = \{0\}$. По определению $r(a)$ и в силу теоремы 3.25, имеем $0 = r(a) = \|a\|$, откуда $a = 0$. □

Следствие 3.27. *Если a — эрмитов элемент C^*-алгебры A такой, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $a^n = 0$, то $a = 0$.*

Доказательство. По теореме 2.32, имеем $\sigma(a^n) = \{0\} = \big(\sigma(a)\big)^n$, откуда $\sigma(a) = \{0\}$. Осталось применить следствие 3.26. □

Следствие 3.28. *На $*$-алгебре существует не более одной нормы, превращающей ее в C^*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы на $*$-алгебре A, превращающие ее в C^*-алгебры. Тогда для произвольного $a \in A$ имеем

$$\|a\|_j^2 = \|a^*a\|_j = r(a^*a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a^*a)} |\lambda|, \quad j = 1, 2,$$

поэтому $\|a\|_1 = \|a\|_2$. □

Напомним, что банахова алгебра A превращается в C^*-алгебру, если

- на A задана инволюция $a \mapsto a^*$, которая не меняет норму, т.е. является изометрией, и

- выполняется $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$.

Оказывается, вместо этих двух свойств можно рассмотреть некоторое одно, а именно, имеет место следующий результат.

Лемма 3.29. *Пусть A — банахова алгебра, снабженная такой инволюцией $a \mapsto a^*$, что $\|a\|^2 \le \|a^*a\|$ при каждом $a \in A$. Тогда A является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Воспользуемся субмультипликативностью нормы банаховой алгебры:

$$\|a\|^2 \le \|a^*a\| \le \|a^*\|\,\|a\|. \tag{3.1}$$

Если $a \neq 0$, то получаем $\|a\| \le \|a^*\|$. Если $a = 0$, то имеет место то же самое неравенство. Меняя местами a и a^* и пользуясь инволютивностью сопряжения, получаем обратное неравенство, что влечет $\|a\| = \|a^*\|$. Подставляя в правую часть (3.1) вместо нормы $\|a^*\|$ равную ей норму $\|a\|$, заключаем, что $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. □

3.3.1 Унитализация банаховой $*$-алгебры и C^*-алгебры

В разделе 2.1.6 мы определили унитализацию $\widetilde{A}$ банаховой алгебры A. В качестве нормы элемента унитализации (a, λ) мы выбрали $\|a\| + |\lambda|$. Чтобы не привести к путанице в дальнейшем, эту норму в данном разделе будем обозначать $\|\cdot\|_1$.

Определим ***унитализацию банаховой $*$-алгеброй*** A. В качестве $\widetilde{A}$ выберем то же самое, что и в случае банаховых алгебр, а инволюцию зададим так: $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$. Тогда

$$\big\|(a,\lambda)^*\big\|_1 = \|(a^*, \bar{\lambda})\|_1 = \|a^*\| + |\bar{\lambda}| = \|a\| + |\lambda| = \big\|(a,\lambda)\big\|_1.$$

Таким образом, $\widetilde{A}$ также является банаховой $*$-алгеброй. Кроме того, $\big\|(0,1)\big\|_1 = |1| = 1$, так что $\widetilde{A}$ — унитальная банахова $*$-алгебра. Отметим, что для каждого $(a, 0) \in A$ (мы отождествляем A с его образом в $\widetilde{A}$) выполняется $(a, 0)^* = (a^*, 0) \in A$. Таким образом, A — самосопряженный идеал в $\widetilde{A}$.

Замечание 3.30. Если A была C^*-алгеброй, то описанная конструкция $\widetilde{A}$, вообще говоря, не приводит к C^*-алгебре. Действительно, пусть $A = \mathbb{C}$, $(a, \lambda) = (-2, 1)$, тогда $\big\|(a,\lambda)\big\|_1 = 3$, откуда $\big\|(a,\lambda)\big\|_1^2 = 9$. Однако

$$\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)\big\|_1 = \big\|(-2,1)(-2,1)\big\|_1 = \big\|(4-2-2,1)\big\|_1 = \big\|(0,1)\big\|_1 = 1 \neq 9.$$

Оказывается, для C^*-алгебры A алгебру $\widetilde{A}$ все-таки можно снабдить нормой, превращающей ее в C^*-алгебру, при этом такая норма однозначно определена (см. следствие 3.28). Приведем соответствующую конструкцию.

Конструкция 3.31. Пусть сначала A — нормированная алгебра и $\widetilde{A}$ — ее унитализация, построенная выше. Алгебра $\widetilde{A}$ действует умножениями (правыми и левыми) на A, при этом каждое умножение, в силу дистрибутивности, является линейным отображением. Для $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$ обозначим $L_{(a,\lambda)}$ и $R_{(a,\lambda)}$ соответствующее левое и правое умножения на A, т.е. для каждого $b \in A$ положим

$$L_{(a,\lambda)}(b) = (a,\lambda)b = (a,\lambda)(b,0) = (ab + \lambda b, 0) = ab + \lambda b,$$
$$R_{(a,\lambda)}(b) = b(a,\lambda) = (b,0)(a,\lambda) = (ba + \lambda b, 0) = ba + \lambda b.$$

Так как

$$\|L_{(a,\lambda)}\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ab + \lambda b\| \le \|a\| + |\lambda| < \infty, \qquad \text{и} \qquad \|R_{(a,\lambda)}\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ba + \lambda b\| \le \|a\| + |\lambda| < \infty,$$

то эти операторы — ограниченные, т.е. $L_{(a,\lambda)}, R_{(a,\lambda)} \in \mathcal{B}(A)$. Тем самым, мы построили отображения

$$L\colon \widetilde{A} \to \mathcal{B}(A) \ \text{ и } \ R\colon \widetilde{A} \to \mathcal{B}(A), \qquad L\colon (a,\lambda) \mapsto L_{(a,\lambda)},\ R\colon (a,\lambda) \mapsto R_{(a,\lambda)}.$$

Лемма 3.32. *Отображения L и R — линейные.*

Доказательство. Докажем лемму только для L, так как для R рассуждения вполне аналогичны. Имеем

$$L_{\mu(a,\lambda)}(c) = L_{(\mu a,\mu\lambda)}(c) = \mu ac + \mu\lambda c = \mu(ac+\lambda c) = \mu L_{(a,\lambda)}(c),$$
$$L_{(a,\lambda)+(b,\mu)}(c) = L_{(a+b,\lambda+\mu)}(c) = (a+b)c + (\lambda+\mu)c = (ac+\lambda c) + (bc+\mu c) = L_{(a,\lambda)}(c) + L(b,\mu)(c),$$

что и требовалось. □

В силу задачи 1.10, алгебра $\mathcal{B}(A)$ с операторной нормой является нормированной алгеброй, т.е., напомним, для любых двух $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(A)$ выполняется $\|L_1L_2\| \leq \|L_1\|\,\|L_2\|$. Отсюда вытекает, что если на алгебре $\mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$ с поточечными операциями рассмотреть норму $\big\|(\lambda, L, R)\big\| = \max\big\{|\lambda|, \|L\|, \|R\|\big\}$, то эта норма также будет субмультипликативна, т.е.

$$\big\|(\lambda_1, L_1, R_1)(\lambda_2, L_2, R_2)\big\| \leq \big\|(\lambda_1, L_1, R_1)\big\|\,\|(\lambda_2, L_2, R_2)\big\|.$$

Пусть теперь A является C^*-алгеброй. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A), \quad \varphi(a,\lambda) = (\lambda, L_{(a,\lambda)}, R_{(a,\lambda)}).$$

Это отображение линейно в силу леммы 3.32.

Лемма 3.33. *Отображение φ инъективно.*

Доказательство. Действительно, если $\varphi(a,\lambda) = (\lambda, L_{(a,\lambda)}, R_{(a,\lambda)}) = 0$, то $\lambda = 0$ и $L_{(a,\lambda)} = L_{(a,0)} = 0$, т.е. для любого $c \in A$ имеем $L_{(a,0)}(c) = ac = 0$. Если $a \neq 0$, то в качестве c возьмем $a^*/\|a\|$, тогда $\|ac\| = \|a^*a\|/\|a\| = \|a\|^2/\|a\| = \|a\| = 0$, откуда $a = 0$, противоречие. Значит $a = 0$, что и доказывает инъективность φ. □

Таким образом, φ является вложением линейного пространства $\widetilde{A}$ в линейное пространство $\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}(A)\oplus\mathcal{B}(A)$, и мы тем самым можем индуцировать норму с $\mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$ на $\widetilde{A}$. В явном виде,

$$\big\|(a,\lambda)\big\| = \max\big\{|\lambda|, \|L_{(a,\lambda)}\|, \|R_{(a,\lambda)}\|\big\} = \sup_{\|c\|\leq 1}\Big\{|\lambda|, \big\|L_{(a,\lambda)}(c)\big\|, \big\|R_{(a,\lambda)}(c)\big\|\Big\} =$$
$$= \sup_{\|c\|\leq 1}\Big\{|\lambda|, \big\|(a,\lambda)(c,0)\big\|, \big\|(c,0)(a,\lambda)\big\|\Big\} = \sup_{\|c\|\leq 1}\big\{|\lambda|, \|ac+\lambda c\|, \|ca+\lambda c\|\big\}. \tag{3.2}$$

Отметим, что **во всех формулах из (3.2) можно ограничиться** $\|c\| = 1$.

В силу сказанного выше, $\widetilde{A}$ с введенной нормой является нормированной алгеброй.

Лемма 3.34. *Имеем $\big\|(a,0)\big\| = \|a\|$, так что вложение $A \to \widetilde{A}$, $a \mapsto (a,0)$ изометрично.*

Доказательство. Если $a = 0$, то равенство очевидно. Пусть теперь $a \neq 0$, тогда

$$\big\|(a,0)\big\| = \sup_{\|c\|=1}\big\{0, \|ac\|\big\} \leq \|a\|,$$

и если взять в качестве c элемент $a^*/\|a^*\| = a^*/\|a\|$, то получим $\|(a,0)\| \geq \|a\,a^*\|/\|a\| = \|a\|$, откуда и заключаем требуемое. □

Лемма 3.35. *Имеем $\|(0,1)\| = 1$.*

Доказательство. Распишем норму элемента $(0,1)$: $\big\|(0,1)\big\| = \sup_{\|c\|\leq 1}\big\{1, \|c\|\big\} = 1$, что и требовалось. □

Таким образом, $\widetilde{A}$ с введенной нормой является унитальной нормированной алгеброй.

Лемма 3.36. *Для каждого $(a,\lambda) \in \widetilde{A}$ выполняется $\big\|(a,\lambda)\big\| \leq \big\|(a,\lambda)\big\|_1$.*

Доказательство. Имеем

$$\big\|(a,\lambda)\big\| = \sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|, \|ac+\lambda c\|, \|ca+\lambda c\|\big\} \leq \sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|, \|a\|\,\|c\| + |\lambda|\,\|c\|\big\} = \|a\| + |\lambda| = \big\|(a,\lambda)\big\|_1,$$

что и требовалось. □

Лемма 3.37. *Для каждого $(a,\lambda)\in\widetilde{A}$ выполняется $\big\|(a,\lambda)\big\|_1\le 3\big\|(a,\lambda)\big\|$.*

Доказательство. Пусть сначала $a=0$, тогда $\big\|(a,\lambda)\big\|_1=|\lambda|$, а $\big\|(a,\lambda)\big\|=\sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|,|\lambda c|\big\}=|\lambda|$, так что неравенство выполнено.

Пусть теперь $a\ne 0$. Тогда, с одной стороны, $\big\|(a,\lambda)\big\|=\sup_{\|c\|\le 1}\big\{|\lambda|,\|ac+\lambda c\|,\|ca+\lambda c\|\big\}\ge|\lambda|$. С другой,

$$\begin{aligned}\big\|(a,\lambda)\big\|&=\sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|,\|ac+\lambda c\|,\|ca+\lambda c\|\big\}\ge\sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|,\|ac\|-\|\lambda c\|,\|ca\|-\|\lambda c\|\big\}=\\&=\sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|,\|ac\|-|\lambda|,\|ca\|-|\lambda|\big\}\ge\max\big\{|\lambda|,\|a^*a\|/\|a^*\|-|\lambda|\big\}=\max\big\{|\lambda|,\|a\|-|\lambda|\big\}\ge\|a\|/2,\end{aligned}$$

т.е. $2\big\|(a,\lambda)\big\|\ge\|a\|$. Таким образом,

$$3\big\|(a,\lambda)\big\|=2\big\|(a,\lambda)\big\|+\big\|(a,\lambda)\big\|\ge\|a\|+|\lambda|=\big\|(a,\lambda)\big\|_1,$$

что и требовалось. □

Следствие 3.38. *Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ на $\widetilde{A}$ эквивалентны, в частности, $\widetilde{A}$ с нормой $\|\cdot\|$ также является банаховой.*

Покажем теперь, что $\widetilde{A}$ с введенной нормой является также $*$-банаховой алгеброй.

Лемма 3.39. *Для каждого $(a,\lambda)\in\widetilde{A}$ выполняется $\big\|(a,\lambda)^*\big\|=\big\|(a,\lambda)\big\|$.*

Доказательство. Имеем

$$\big\|(a,\lambda)^*\big\|=\big\|(a^*,\bar\lambda)\big\|=\sup_{\|c\|=1}\big\{|\bar\lambda|,\|a^*c+\bar\lambda c\|,\|c\,a^*+\bar\lambda c\|\big\}=\sup_{\|c^*\|=1}\big\{|\lambda|,\|c^*a+\lambda c^*\|,\|a\,c^*+\lambda c^*\|\big\}=\big\|(a,\lambda)\big\|,$$

что и требовалось. □

Осталось проверить выполнение определяющего свойства C^*-алгебры.

Лемма 3.40. *Для любого $(a,\lambda)\in\widetilde{A}$ выполняется $\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)\big\|=\big\|(a,\lambda)\big\|^2$.*

Доказательство. Неравенство

$$\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)\big\|\le\big\|(a,\lambda)^*\big\|\,\big\|(a,\lambda)\big\|=\big\|(a,\lambda)\big\|^2$$

вытекает из того, что $\widetilde{A}$ одновременно и нормированная, и $*$-алгебра. Докажем обратное неравенство.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)\big\|&=\sup_{\|c\|=1}\Big\{|\lambda|^2,\big\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)c\big\|,\big\|c(a,\lambda)^*(a,\lambda)\big\|\Big\},\\\big\|(a,\lambda)\big\|^2&=\sup_{\|c\|=1}\Big\{|\lambda|^2,\big\|(a,\lambda)c\big\|^2,\big\|c(a,\lambda)\big\|^2\Big\},\end{aligned}$$

поэтому достаточно показать, что $\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)c\big\|\ge\big\|(a,\lambda)c\big\|^2$ и $\big\|c(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)\big\|\ge\big\|c(a,\lambda)\big\|^2$ выполняются для всех $c\in A$, $\|c\|=1$. Докажем первое неравенство (второе доказывается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned}\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)c\big\|&=\|c^*\|\,\big\|(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)c\big\|\ge\big\|c^*(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)c\big\|=\big\|(c^*,0)(a,\lambda)^*\,(a,\lambda)(c,0)\big\|=\\&=\Big\|\big((c^*,0)(a,\lambda)^*\big)\big((a,\lambda)(c,0)\big)\Big\|=\Big\|\big((a,\lambda)(c,0)\big)^*\big((a,\lambda)(c,0)\big)\Big\|=\Big\|\big((a,\lambda)c\big)^*(a,\lambda)c\Big\|=\big\|(a,\lambda)c\big\|^2,\end{aligned}$$

где второе неравенство — субмультипликативность в A, а последнее равенство выполнено так как A является C^*-алгеброй. □

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.41. *Определенная в формуле (3.2) норма $\|\cdot\|$ на унитализации $\widetilde{A}$, построенной для C^*-алгебры A, превращает $\widetilde{A}$ в C^*-алгебру.*

Теорема 3.42. *Для каждой C^*-алгебры A на унитализации $\widetilde{A}$ существует и единственна норма, продолжающая норму на A и превращающая $\widetilde{A}$ с C^*-алгебру.*

Доказательство. В силу следствия 3.28, если на $*$-алгебре $\widetilde{A}$ есть норма, превращающая ее в C^*-алгебру, то такая норма единственна. Существование содержится в теореме 3.41. □

В дальнейшем, под ***нормой на*** $\widetilde{A}$ будем понимать норму, заданную формулой (3.2). Доказательство следующего важного предложения тривиально.

Предложение 3.43. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — это $*$-гомоморфизм C^*-алгебр, тогда он единственным образом продолжается до унитального $*$-гомоморфизма $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to \widetilde{B}$.*

3.4 Представление Гельфанда коммутативной C^*-алгебры

Докажем ряд важных вспомогательных утверждений.

Теорема 3.44. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — произвольный $*$-гомоморфизм $*$-банаховой алгебры A в C^*-алгебру B. Тогда φ не увеличивает норму.*

Доказательство. Сразу предположим, что A и B унитальны, а φ — унитальный $*$-гомоморфизм, так как иначе продолжим φ до единственного унитального $*$-гомоморфизма $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, что можно сделать в силу предложения 3.43, и если для $\tilde{\varphi}$ утверждение верно, то оно также верно и для его ограничения φ. Далее, мы приведем цепочку неравенств, из которой и будет следовать результат.

- Так как B является C^*-алгеброй, то $\big\|\varphi(a)\big\|^2 = \big\|\varphi(a)^*\,\varphi(a)\big\|$.
- Так как φ — это $*$-гомоморфизм, то $\big\|\varphi(a)^*\,\varphi(a)\big\| = \big\|\varphi(a^*)\,\varphi(a)\big\| = \big\|\varphi(a^*\,a)\big\|$.
- В силу предложения 3.3, элемент a^*a эрмитов. Так как φ является $*$-гомоморфизмом, то, по предложению 3.10, $\varphi(a^*a)$ — также эрмитов.
- Так как элемент $\varphi(a^*a)$ — эрмитов, то, по теореме 3.25, выполняется $\big\|\varphi(a^*a)\big\| = r\big(\varphi(a^*a)\big)$.
- По следствию 2.40, имеем $r\big(\varphi(a^*a)\big) \le r(a^*a)$.
- По следствию 2.49, выполняется $r(a^*a) \le \|a^*a\|$.
- По предложению 3.18, имеем $\|a^*a\| \le \|a\|^2$.

Собирая вместе все описанные выше неравенства, заключаем, что $\big\|\varphi(a)\big\|^2 \le \|a\|^2$, откуда $\big\|\varphi(a)\big\| \le \|a\|$, что и требовалось. □

Теорема 3.45. *Для C^*-алгебры A и любого ее эрмитова элемента $a \in A$ имеем $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как спектр элемента не унитальной алгебры равен спектру ее унитализации, то сразу будем считать алгебру A унитальной. Так как элемент a эрмитов, то, по предложению 3.20, элемент e^{ia} — унитарный. Но тогда, по предложению 3.21, $\sigma(e^{ia}) \subset S^1$.

Выберем произвольное $\lambda \in \sigma(a)$ и положим $b = \sum_{n=1}^{\infty} i^n (a-\lambda)^{n-1}/n!$. Тогда

$$e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i(a-\lambda+\lambda)} - e^{i\lambda} = e^{i(a-\lambda)}e^{i\lambda} - e^{i\lambda} = (e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} = (a-\lambda)be^{i\lambda}.$$

Так как $a-\lambda$ необратим и он, b и $e^{i\lambda}$ попарно коммутируют, то, в силу предложения 2.27, элемент $e^{ia} - e^{i\lambda}$ необратим, поэтому $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subset S^1$, т.е. $|e^{i\lambda}| = 1$. Осталось заметить, что последнее равенство имеет место в точности для вещественных λ. □

Теорема 3.46. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра и $\tau \in \Omega(A)$ — ее характер. Тогда для каждого $a \in A$ выполняется $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$, т.е. τ сохраняет отношение сопряженности.*

Доказательство. В соответствии с предложением 3.2, существуют эрмитовы элементы $b, c \in A$, для которых $a = b + ic$. По предложению 2.54, $\tau(b) \in \sigma(b)$ и $\tau(c) \in \sigma(c)$, и так как b и c — эрмитовы, теорема 3.45 влечет, что $\tau(b)$ и $\tau(c)$ — вещественные числа. Поэтому

$$\tau(a^*) = \tau\big((b+ic)^*\big) = \tau(b^* - ic^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)} = \overline{\tau(a)}.$$

Отметим, что вещественность чисел $\tau(b)$ и $\tau(c)$ была использована в равенстве $\tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)}$. Доказательство закончено. $\square$

В заключение данного раздела мы докажем теорему Гельфанда о представлении коммутативных C^*-алгебр. В соответствующей теореме 2.73, описывающей представление Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, мы требовали, чтобы спектр алгебры был непуст. Когда алгебра унитальна, это условие выполняется автоматически в силу теоремы 2.55. Если же алгебра не унитальна, то спектр алгебры может быть пустым, например так у нулевой алгебры.

Предложение 3.47. *Пусть A — ненулевая C^*-алгебра. Тогда ее спектр $\Omega(A)$ непуст.*

Доказательство. По теореме 2.55, спектр унитальной алгебры непуст. Пусть теперь алгебра A не унитальна. Так как $A \neq \{0\}$, существует ненулевой $a \in A$, в частности, $\|a\| \neq 0$. Так как $\|a\| = \|a^*\|$, то a^* также ненулевой. Так как $\|a\|^2 = \|a\,a^*\| \neq 0$, то aa^* — ненулевой элемент. По предложению 3.3, элемент $b := aa^*$ эрмитов. По теореме 3.25, имеем $\|b\| = r(b)$, так что $\sigma(b)$ содержит ненулевые числа. По теореме 2.61, $\sigma(b) = \{\tau(b) : \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$, и так как $\sigma(b) \neq \{0\}$, должен существовать характер $\tau \in \Omega(A)$, для которого $\tau(b) \neq 0$, так что $\Omega(A) \neq \emptyset$. $\square$

Сформулируем теперь и докажем теорему Гельфанда о представлении C^*-алгебр. Отметим, что в ее аналоге — теореме 2.73 — строится липшицев гомоморфизм, у которого, вообще говоря, есть ядро. В случае C^*-алгебр все обстоит намного лучше: этот гомоморфизм является изоморфизмом, т.е. не только имеет нулевое ядро, но и сюръективен. Кроме того, этот изоморфизм сохраняет сопряжение и норму. Таким образом, в теореме Гельфанда алгебра A фактически отождествляется с пространством $C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Теорема 3.48 (Гельфанд). *Если A — ненулевая коммутативная C^*-алгебра, то представление Гельфанда*

$$\Gamma\colon A \to C_0\big(\Omega(A)\big), \quad \Gamma\colon a \mapsto \widehat{a},$$

является изометричным $*$-изоморфизмом. Если при этом алгебра A унитальна, то пространство $\Omega(A)$ компактно, $C_0\big(\Omega(A)\big) = C\big(\Omega(A)\big)$, и изоморфизм Γ — унитальный.

Доказательство. Из теоремы 2.73 вытекает, что Γ — гомоморфизм алгебр, не увеличивающий норму, причем $\big\|\Gamma(a)\big\| = \|\widehat{a}\|_\infty = r(a)$ для каждого $a \in A$. Выберем произвольный характер $\tau \in \Omega(A)$, тогда, по определению отображение Γ, имеем $\Gamma(a^*)(\tau) = \tau(a^*)$. По теореме 3.46, каждый характер сохраняет отношение сопряженности, т.е.

$$\tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \overline{\Gamma(a)(\tau)} = \Gamma(a)^*(\tau),$$

где сопряжение в последнем выражении берется в C^*-алгебре $C_0\big(\Omega(A)\big)$ (см. примеры 3.22). Итак, мы показали, что $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$, т.е. Γ сохраняет сопряжение и, значит, является $*$-гомоморфизмом.

Далее, так как $C_0\big(\Omega(A)\big)$ — это C^*-алгебра, имеем

$$\big\|\Gamma(a)\big\|^2 = \big\|\Gamma(a)^*\,\Gamma(a)\big\| = \big\|\Gamma(a^*)\Gamma(a)\big\| = \big\|\Gamma(a^*\,a)\big\| = r(a^*\,a).$$

По предложению 3.3, элемент a^*a эрмитов, поэтому, в силу теоремы 3.25, $r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, где последнее равенство — определяющее свойство C^*-алгебр. Таким образом, $\big\|\Gamma(a)\big\| = \|a\|$ для всех $a \in A$, поэтому Γ сохраняет норму, т.е. отображение Γ изометрично.

Покажем, что к образу $\Gamma(A)$ применима теорема 2.15 Вейерштрасса–Стоуна.

- Как мы уже отмечали, гомоморфный образ алгебры является подалгеброй.
- Покажем, что подалгебра $\Gamma(A)$ замкнута относительно сопряжений. Для этого заметим, что $\Gamma(a)$ переводит каждый характер τ в $\tau(a)$, поэтому надо проверить, что отображение $f\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$, $f\colon \tau \mapsto \overline{\tau(a)}$ также содержится в $\Gamma(A)$ (оно равно $\Gamma(a)^*$). Но, как было отмечено выше, $\overline{\tau(a)} = \tau(a^*)$, так что $f = \Gamma(a^*)$.

- Покажем, что $\Gamma(A)$ разделяет точки. Это означает, что для любых $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$, $\tau_1 \neq \tau_2$ существует такой $a \in A$, что $\Gamma(a)(\tau_1) \neq \Gamma(a)(\tau_2)$, то есть $\tau_1(a) \neq \tau_2(a)$. Но существование такого $a \in A$ равносильно тому, что $\tau_1 \neq \tau_2$ в A^*.

- Покажем, что $\Gamma(A)$ нигде не зануляется. Это означает, что для любого $\tau \in \Omega(A)$ существует $a \in A$ такой, что $\Gamma(a)(\tau) \neq 0$, то есть $\tau(a) \neq 0$. Последнее верно, так как в $\Omega(A)$ входят только ненулевые гомоморфизмы.

Итак, по теореме 2.15 Вейерштрасса–Стоуна, подалгебра $\Gamma(A)$ всюду плотна в $C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Наконец, покажем, что подалгебра $\Gamma(A)$ замкнута в $C_0\big(\Omega(A)\big)$. Пусть $f \in C_0\big(\Omega(A)\big)$ — точка прикосновения множества $\Gamma(A)$, тогда существует последовательность $\Gamma(a_n)$, сходящаяся к f. Но тогда последовательность $\Gamma(a_n)$ фундаментальна, и, так как Γ — изометричное отображение, последовательность a_n также фундаментальна. Так как A — банахово пространство, последовательность a_n сходится к некоторому $a \in A$. Но непрерывное отображение Γ переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся. Следовательно, последовательность $\Gamma(a_n)$ сходится к $\Gamma(a)$. Так как пространство $C_0\big(\Omega(A)\big)$ хаусдорфово, имеем $f = \Gamma(a)$, т.е. $f \in \Gamma(A)$, что и доказывает замкнутость $\Gamma(A)$.

Итак, $\Gamma(A)$ — замкнуто и всюду плотно в $C_0\big(\Omega(A)\big)$, поэтому $\Gamma(A) = C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Унитальность изоморфизма Γ для унитальной алгебры A вытекает из теоремы 2.73. ☐

3.5 Некоторые приложения представления Гельфанда

Пусть A — произвольная C^*-алгебра и $S \subset A$. Тогда, ***C^*-алгеброй $C^*(S)$, порожденной S***, будем называть наименьшую C^*-подалгебру в A, содержащую S. Иными словами, $C^*(S)$ — это пересечение всех C^*-подалгебр в A, содержащих S. Если $a \in A$ и $S = \{a\}$, то $C^*(S)$ будем обозначать $C^*(a)$. Если же A унитальна, $a \in A$ и $S = \{a, 1\}$, то $C^*(S)$ обозначим $C^*(a, 1)$.

В силу предложения 2.7, если все элементы из S коммутируют, то банахова алгебра, порожденная S, коммутативна. Однако, в случае C^*-алгебр в алгебре $C^*(S)$ вместе с каждым элементом содержится и его сопряженный. Поэтому для коммутативности алгебры $C^*(S)$ не достаточно, чтобы элементы из S коммутировали: нужно требовать, чтобы коммутировали элементы из $S \cup S^*$, где $S^* = \{a^*\}_{a \in S}$, в частности, должны коммутировать a и a^*. Напомним, что элемент a, коммутирующий со своим сопряженным a^*, называется ***нормальным***. Таким образом, алгебры $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$ коммутативны, если и только если элемент a нормален.

Предложение 3.49. *Пусть A — произвольная C^*-алгебра и $a \in A$ — ее нормальный элемент. Тогда $C^*(a)$ — коммутативная C^*-подалгебра в A. Если алгебра A унитальна, то $C^*(a, 1)$ — коммутативная унитальная C^*-подалгебра в A. Более того, все элементы алгебр $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$ — нормальные.*

Доказательство. Коммутативность этих алгебры мы уже обсудили. Далее, в силу предложения 3.5, многочлены от нормального элемента $a \in A$ и его сопряженного a^* — нормальные элементы в A. По аналогии с доказательством предложения 2.7 заключаем, что для нормального элемента $a \in A$ все элементы алгебр $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$ также являются нормальными. ☐

В дальнейшем мы воспользуемся представлением Гельфанда для коммутативных алгебр $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$, определенных для нормального элемента a. Однако возникает важная проблема: в представлении Гельфанда существенную роль играет спектр элемента a. Однако, если вычислять это спектр в подалгебрах $C^*(a)$ или $C^*(a, 1)$, то спектр, вообще говоря, мог бы оказаться отличным от $\sigma_A(a)$, что привело бы к дополнительным трудностям (см. теорему 2.46). Однако, в унитальных C^*-алгебрах для C^*-подалгебр, содержащих единицу, такое случиться не может.

Теорема 3.50. *Пусть B — это C^*-подалгебра унитальной C^*-алгебры A, причем B содержит единицу алгебры A. Тогда для каждого $b \in B$ выполняется $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение теоремы эквивалентно следующему: каждый элемент $b \in B$ обратим в B тогда и только тогда, когда он обратим в A. Действительно, если $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для всех $b \in B$, то учитывая, что обратимость элемента равносильна отсутствию 0 в спектре этого элемента, получаем справедливость утверждения про обратимость. Обратно, если верно утверждение про обратимость, то для каждого $b \in B$ и каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ элемент $b - \lambda$ обратим в B, если и только если он обратим в A, а это в точности означает, что $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

Итак, пусть сначала b — эрмитов элемент, тогда, по теореме 3.45, имеем $\sigma_A(b) \subset \mathbb{R}$, поэтому, рассматривая $\sigma_A(b)$ как подмножество $\mathbb{C}$, заключаем, что $\sigma_A(b)$ не имеет дыр, откуда, в силу теоремы 2.46, выполняется $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. Таким образом, для эрмитовых элементов из B показано, что их обратимость в B равносильна их обратимости в A.

Пусть теперь $b \in B$ — произвольный элемент. Если b обратим в B, то он обратим и в A. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда b обратим в A и показать, что он также обратим и в B. Так как b обратим в A, существует $a \in A$ такой, что $ab = ba = 1$, но тогда $a^*b^* = b^*a^* = 1$ и, значит, $bb^*a^*a = a^*abb^* = 1$, откуда bb^* обратим в A. Так как bb^* эрмитов, из показанного выше вытекает, что bb^* также обратим и в B. Следовательно, существует $c \in B$ такой, что $bb^*c = cbb^* = 1$, откуда $a = abb^*c = (ab)b^*c = b^*c$ и, значит, $a \in B$. Итак, мы показали, что элемент b обратим в B, что и требовалось. □

Приведем еще одно утверждение, демонстрирующее отличие C^*-алгебр от банаховых алгебр (см. пример 2.41).

Предложение 3.51. *Пусть A — произвольная C^*-алгебра и $a \in A$ — ее нормальный элемент. Тогда $r(a) = \|a\|$.*

Доказательство. По определению, спектр элемента a неунитальной алгебры равен его в спектру в унитализации. Отметим, что спектр не зависит от выбора нормы. С другой стороны, в силу теоремы 3.42, на $\widetilde{A}$ существует (единственная) норма, которая превращает $\widetilde{A}$ в C^*-алгебру. Имея в виду все сказанное, будем сразу предполагать, что алгебра A унитальна.

Так как элемент $a\,a^*$ — эрмитов, то, в силу теоремы 3.25, имеем $r(a\,a^*) = \|a\,a^*\| = \|a\|^2$. С другой стороны, по теореме 2.42, выполняется $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$. Далее,

$$\big(r(a)\big)^2 = \Big(\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}\Big)^2 = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{2/n} = \lim_{n\to\infty} \big\|a^n(a^n)^*\big\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \big\|(a\,a^*)^n\big\|^{1/n} = r(a\,a^*) = \|a\|^2,$$

откуда и вытекает требуемое. □

Пусть A — унитальная алгебра и $a \in A_{sa}$ — эрмитов элемент. Напомним, что элемент $u \in A$ называется ***унитарным***, если $u\,u^* = u^*u = 1$. По предложению 3.20, элемент e^{ia} является унитарным. Однако, не любой унитарный элемент имеет такой вид (приведем пример существенно позже). Следующая теорема дает достаточное условие того, что унитарный элемент имеет “логарифм”, т.е. представим в виде e^{ia} для некоторого эрмитова a. Приводимое ниже доказательство этой теоремы использует представление Гельфанда.

Напомним, что, в силу предложения 3.21, спектр $\sigma(u)$ унитарного элемента u из C^*-алгебры содержится в единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$.

Теорема 3.52. *Пусть u — унитарный элемент унитальной C^*-алгебры A. Предположим, что $\sigma(u) \ne S^1$, например, это имеет место, если $\|1 - u\| < 2$. Тогда существует $a \in A_{sa}$ такой, что $u = e^{ia}$.*

Доказательство. Отметим, что для каждого $\lambda = e^{i\psi} \in S^1$ элемент λu также унитарен. Более того, u обладает логарифмом a, если и только если λu обладает логарифмом $a+\psi 1$, при этом a и $a+\psi 1$ одновременно лежат в A_{sa}. Итак, для доказательства мы можем выбрать любой элемент λu. По предложению 2.29, $\sigma(\lambda u) = \lambda\,\sigma(u)$. Выберем λ так, чтобы $-1 \notin \sigma(\lambda u)$. Из сказанного вытекает, что без ограничения общности, можно сразу предполагать справедливым $-1 \notin \sigma(u)$, и именно это мы и будем делать.

Далее, так как u — нормальный элемент, то подалгебра $C^*(u, 1)$ коммутативна. Мы докажем, что именно в этой подалгебре можно найти логарифм. Для удобства заменим A на $C^*(u, 1)$, т.е. будем сразу предполагать, что A коммутативна.

Пусть $\Omega = \Omega(A)$ — пространство характеров алгебры A. Так как A унитальна, то, в силу теоремы 2.63, пространство Ω компактно, так что $C_0(\Omega) = C(\Omega)$. Пусть $\Gamma\colon A \to C(\Omega)$ — представление Гельфанда. Положим $f = \Gamma(u)$.

Через $\ln\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ обозначим главную ветвь многозначной функции комплексного логарифма, т.е. если $z = \rho e^{i\theta}$, где $-\pi < \theta < \pi$, то $\ln z = \ln\rho + i\theta$. По теореме 2.73, $f(\Omega) = \sigma(u) \subset S^1 \setminus \{-1\}$, поэтому корректно определена функция $g := \ln\circ f \in C(\Omega)$, так что $f = e^g$. Так как $|f(\tau)| = 1$ для всех $\tau \in \Omega$, то $g = ih$ для некоторой вещественной функции $h \in C(\Omega)$. Так как, по теореме 3.48, отображение Γ — это изометрический $*$-изоморфизм, определен элемент $a = \Gamma^{-1}(h)$ и $a^* = \Gamma^{-1}(\bar{h}) = \Gamma^{-1}(h) = a$, так что $a \in A_{sa}$. Из определения экспоненты элемента унитальной банаховой алгебры и свойств отображения Γ вытекает, что каждый начальный отрезок ряда, определяющего e^{ia}, переводится Γ в соответствующий начальный отрезок ряда, определяющего e^g, и так как Γ является изометрией, эти начальные отрезки сходятся к экспонентам, первая из которых переводится Γ во вторую, т.е. $\Gamma(e^{ia}) = e^g$. Таким образом, $\Gamma(u) = e^g = \Gamma(e^{ia})$, откуда $u = e^{ia}$ в силу биективности Γ.

Покажем теперь, что если $\|1-u\| < 2$, то $\sigma(u) \neq S^1$. Действительно, по следствию 2.49, имеем $r(1-u) \leq \|1-u\| < 2$. В силу предложения 2.29, имеем $\sigma(1-u) = 1-\sigma(u)$, поэтому $r(1-u) = \sup_{\lambda\in\sigma(u)} |1-\lambda|$, так что если $-1 \in \sigma(u)$, то $r(1-u) \geq 2$, противоречие. □

Тема 4

Функциональное исчисление C^*-алгебр. Положительные элементы.

План. Функциональное исчисление в $a \in A$ — канонический изометричный изоморфизм $\varphi\colon C(\sigma(a)) \to C^*(1,a) \subset A$. Положительные элементы, квадратные корни, квадраты и модули. Линейная оболочка унитарных элементов. Частичный порядок на эрмитовых элементах. Аппроксимативная единица, ее существование, свойства. Положительные функционалы, их свойства. Состояния алгебры. Разложение Жордана. ГНС-конструкция. Представление Гельфанда–Наймарка. Матричные C^*-алгебры.

Продолжим развивать теорию C^*-алгебр, в частности, докажем многочисленные следствия из теоремы Гельфанда 3.48.

4.1 Функциональные исчисления

Начнем со следующего тривиального замечания. Пусть $\theta\colon \Omega \to \Omega'$ — непрерывное отображение компактных хаусдорфовых топологических пространств, тогда оно индуцирует ***транспонированное*** отображение

$$\theta^t\colon C(\Omega') \to \mathbb{C}(\Omega), \quad f \mapsto f \circ \theta,$$

которое, очевидно, является унитальным $*$-гомоморфизмом. Если при этом θ — гомеоморфизм, то θ^t — это унитальный $*$-изоморфизм.

Приведем еще одно наблюдение, мгновенно вытекающее из теоремы 3.44, примененной к $*$-изоморфизму C^*-алгебр.

Следствие 4.1. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — произвольный $*$-изоморфизм C^*-алгебр. Тогда φ — изометрия.*

С помощью следствия 4.1 мы докажем следующую полезную теорему.

Теорема 4.2. *Пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A и $z\colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$ — включение. Тогда существует единственный унитальный C^*-гомоморфизм $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to A$ такой, что $\varphi(z) = a$. Кроме того, $\operatorname{im}\varphi = C^*(a,1) \subset A$, а ограничение $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to C^*(a,1)$ — изометричный унитальный $*$-изоморфизм.*

Доказательство. Положим $B = C^*(a,1)$, тогда, по предложению 3.49, алгебра B — унитальная коммутативная C^*-подалгебра в A. Пусть $\Gamma\colon B \to C\big(\Omega(B)\big)$— представление Гельфанда. По теореме 3.48, отображение Γ — унитальный изометричный $*$-изоморфизм. Как и выше, положим $\widehat{a} = \Gamma(a)\colon \Omega(B) \to \mathbb{C}$. По теореме 2.78, $\operatorname{im}\widehat{a} = \sigma(a)$ и отображение $\widehat{a}\colon \Omega(B) \to \sigma(a)$ — гомеоморфизм, поэтому, как было отмечено выше, транспонированное отображение $\widehat{a}^t\colon C\big(\sigma(a)\big) \to C\big(\Omega(B)\big)$ — это унитальный $*$-изоморфизмом, причем, в силу следствия 4.1, — изометричный. Положим $\psi = (\widehat{a}^t)^{-1} \circ \Gamma\colon B \to C\big(\sigma(a)\big)$, тогда ψ — также изометричный унитальный $*$-изоморфизм, так что в качестве φ можно взять композицию ψ^{-1} и включения $B \to A$. Заметим, что $\widehat{a}^t(z) = \widehat{a}$, так как z — тождественное вложение, поэтому $\varphi(z) = \Gamma^{-1}\big(\widehat{a}^t(z)\big) = \Gamma^{-1}(\widehat{a}) = a$.

По теореме 2.14 Вейерштрасса–Стоуна, унитальная C^*-подалгебра в $C\big(\sigma(a)\big)$, порожденная 1 и z, совпадает с $C\big(\sigma(a)\big)$ (так как z разделяет точки в $\sigma(a)$). Отсюда вытекает, что унитальный $*$-гомоморфизм из $C\big(\sigma(a)\big)$ в A, переводящий z в a, определен однозначно, что доказывает однозначную определенность построенного φ. Наконец, $\operatorname{im}\varphi = C^*\big(\varphi(z),1\big) = C^*(a,1)$. $\square$

Итак, пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры, а $z\colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$ — включение. По теореме 4.2, существует и единственен унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to A$, для которого $\varphi(z) = a$. Этот гомоморфизм называется ***функциональным исчислением на*** a. Иногда удобно обозначать этот гомоморфизм через φ_a.

Иными словами, для каждой функции $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ определен элемент $\varphi_a(f)$ алгебры A, который мы будем также обозначать $f(a)$. Так как $\operatorname{im}\varphi = C^*(a, 1)$, то применимо предложение 3.49, из которого следует, что каждый элемент $f(a)$ — нормальный.

Если $p \in C\big(\sigma(a)\big)$ — многочлен вида $\sum \lambda_{k,l} z^k \bar{z}^l$, то $p(a) = \varphi(p) = \sum \lambda_{k,l} a^k (a^*)^l$ (т.е. $p(a)$, как и в общем случае $f(a)$, зависит в действительности не только от a, но и от a^*). Отметим, что семейство всех таких многочленов p удовлетворяет условиям теоремы 2.14 Вейерштрасса–Стоуна, поэтому это семейство всюду плотно в $C\big(\sigma(a)\big)$, так что для каждой функции $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ существует последовательность многочленов $p_n \in C\big(\sigma(a)\big)$, сходящаяся к f и, значит, $p_n(a) \to f(a)$ при $n \to \infty$.

Продемонстрируем, как работает функциональное исчисление, усилив с помощью него теорему 3.45.

Следствие 4.3. *Пусть $a \in A$ — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A. Тогда a эрмитов, если и только если $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $B = C^*(a, 1)$, тогда C^*-алгебра B изометрично унитально $*$-изоморфна C^*-алгебре $C\big(\sigma(a)\big)$ в силу теоремы 4.2 (как и в доказательстве теоремы 4.2 положим $\psi = (\widehat{a}^t)^{-1} \circ \varGamma$ — соответствующий изоморфизм). Тогда $\psi\colon a \mapsto z$, где через z обозначена тождественная функция, принимающая в точке z значение z. Элемент a — эрмитов, если и только если $\psi(a) \in C\big(\sigma(a)\big)$ эрмитов, т.е. если элемент z равен своему сопряженному, что эквивалентно тому, что z принимает лишь вещественные значения. Последнее равносильно вещественности области определения функции z, то есть вещественности спектра, что и завершает доказательство. □

Предложение 4.4. *Пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A и $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to A$ — функциональное исчисление на a. Положим $B = \operatorname{im}\varphi = C^*(1, a) \subset A$ и выберем произвольный $f \in C\big(\sigma(a)\big)$ и любой характер $\tau \in \varOmega(B)$. Тогда $f\big(\tau(a)\big) = \tau\big(f(a)\big)$, где через $f(a)$ в правой части равенства обозначен элемент $\varphi(f) \in A$.*

Доказательство. Рассмотрим два отображения: $f \mapsto f\big(\tau(a)\big)$ и $f \mapsto \tau\big(\varphi(f)\big) = \tau\big(f(a)\big)$, действующие из $C\big(\sigma(a)\big)$ в $\mathbb{C}$. Оба этих отображения являются унитарными $*$-гомоморфизмами, переводящими элементы 1 и z алгебры $C\big(\sigma(a)\big)$ соответственно в 1 и $\tau(a)$ из $\mathbb{C}$. Действительно,

$$1 \mapsto 1(\tau(a)) = 1, \qquad 1 \mapsto \tau\big(\varphi(1)\big) = \tau(1) = 1,$$

и

$$z \mapsto z(\tau(a)) = \tau(a), \qquad z \mapsto \tau\big(\varphi(z)\big) = \tau(a),$$

где последнее равенство следует из доказанного в теореме 4.2 соотношения $\varphi(z) = a$. Таким образом, наши два отображения совпадают на образующих 1 и z алгебры $C^*(1, z) = C\big(\sigma(a)\big)$, значит, эти отображения совпадают на всей алгебре $C\big(\sigma(a)\big)$, что и требовалось. □

Теорема 4.5 (Об отображении спектров)**.** *Пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A и $f \in C\big(\sigma(a)\big)$. Тогда $\sigma\big(\varphi(f)\big) = \sigma\big(f(a)\big) = f\big(\sigma(a)\big)$. Кроме того, если $g \in C\big(\sigma\big(f(a)\big)\big)$, то $(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$ в A.*

Доказательство. Положим $B = C^*(1, a)$ — коммутативная банахова алгебра, изоморфная $C\big(\sigma(a)\big)$. В силу теоремы 2.61, справедливо

$$\sigma\big(f(a)\big) = \Big\{\tau\big(f(a)\big) : \tau \in \varOmega(B)\Big\}$$

(отметим, что здесь $f(a) = \varphi(f) \in B$). По предложению 4.4, имеем $\tau\big(f(a)\big) = f\big(\tau(a)\big)$, откуда

$$\sigma\big(f(a)\big) = \Big\{f\big(\tau(a)\big) : \tau \in \varOmega(B)\Big\} = f\Big(\big\{\tau(a) : \tau \in \varOmega(B)\big\}\Big) = f\big(\sigma(a)\big),$$

где последнее равенство снова вытекает из теоремы 2.61.

Далее, положим $C = C^*\big(f(a), 1\big)$. Так как $f(a) \in C^*(a, 1)$, заключаем, что $C \subset B$, и для любого характера $\tau \in \varOmega(B)$ его ограничение τ_C на C является характером на C, т.е. $\tau_C \in \varOmega(C)$. Заметим, что, в силу первого утверждения, область определения функции g, равная $\sigma\big(f(a)\big)$, совпадает со множеством значений функции f, равным $f(\sigma(a))$. Таким образом, корректно определена композиция $g\circ f\colon \sigma(a)\to\mathbb{C}$, здесь $g\circ f\in C\big(\sigma(a)\big)$. Тогда $\varphi\big(g\circ f\big)=(g\circ f)(a)\in B$ и, по предложению 4.4, примененному сначала к $g\circ f$, затем к f и, наконец, к g, для всех $\tau\in\Omega(B)$ имеем:

$$\tau\big((g\circ f)(a)\big)=(g\circ f)\big(\tau(a)\big)=g\Big(f\big(\tau(a)\big)\Big)=g\Big(\tau\big(f(a)\big)\Big)=g\Big(\tau_C\big(f(a)\big)\Big)=\tau_C\Big(g\big(f(a)\big)\Big)=\tau\Big(g\big(f(a)\big)\Big),$$

где в последних двух равенствах $g\big(f(a)\big)=\varphi_{f(a)}(g)\in C$ — образ g при функциональном исчислении $\varphi_{f(a)}$ для $f(a)$. Представление Гельфанда для алгебры B является изоморфизмом, что гарантирует представимость элемента $g\big(f(a)\big)\in C\subset B$ в виде $h(a)$ для некоторой функции $h\in C\big(\sigma(a)\big)$, и тогда, по предложению 4.4, примененному к h, для всех $\tau\in\Omega(B)$ выполняется

$$(g\circ f)\big(\tau(a)\big)=\tau\big((g\circ f)(a)\big)=\tau\Big(g\big(f(a)\big)\Big)=\tau\big(h(a)\big)=h\big(\tau(a)\big).$$

По теореме 2.61 множество $\big\{\tau(a):\tau\in\Omega(B)\big\}$ равно $\sigma(a)$, т.е. равно всей области определения функций $(g\circ f)$ и h, поэтому $h=(g\circ f)$ и, значит, $(g\circ f)(a)=h(a)=g\big(f(a)\big)$, где последнее равенство — это определение функции h, что и требовалось. □

4.2 Положительные элементы в C^*-алгебрах

В этом разделе на семействе эрмитовых элементов C^*-алгебры мы введем естественный частичный порядок, в частности, в этом семействе мы выделим подсемейство положительных элементов. Будет показано, что из каждого положительного элемента можно извлечь положительный квадратный корень, а также, что все элементы вида a^*a положительны.

Пример 4.6. Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $A=C_0(X)$ и $A_{sa}\subset A$ — множество всех самосопряженных (эрмитовых) элементов. Подпространство A_{sa} состоит из всех вещественнозначных функций $f\in A$. На A_{sa} имеется естественный частичный порядок: $f\geq g$, если и только если $f(x)\geq g(x)$ для всех $x\in X$. В частности, ***положительный*** $f\in A_{sa}$ — тот, для которого $f\geq 0$. Легко видеть, что f положителен, если и только если существует $g\in A$ такое, что $f=g\bar g$ (такой g определен неоднозначно). Но для положительного f однозначно определен неотрицательный квадратный корень $x\mapsto\sqrt{f(x)}$.

Лемма 4.7. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $A=C_0(X)$, и $f=\bar f\in A_{sa}$. Тогда f положителен, если и только если для некоторого $t\in\mathbb{R}$, $t\geq\|f\|$ выполняется $\|f-t\|\leq t$.*

Доказательство. Действительно, если нашлось такое t, то оно неотрицательно, поэтому, если $f(x)<0$ для некоторого $x\in X$, то $|f(x)-t|>t$, так что $\|f-t\|>t$. Обратно, для $f\geq 0$ и $t\geq\|f\|$ имеем $-t\leq f(x)-t\leq 0$ при всех $x\in X$, откуда $\|f-t\|\leq t$. □

Перенесем конструкцию примера 4.6 на произвольную C^*-алгебру A. Элемент $a\in A$ назовем ***положительным***, если он эрмитов и $\sigma(a)\subset\mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ обозначает множество всех неотрицательных вещественных чисел. Положительность элемента $a\in A$ будем обозначать $a\geq 0$, а множество всех положительных элементов в A — через A^+. Отметим, что $A^+\subset A_{sa}$ по определению.

Проверим, что данное определение согласовано с примером 4.6. Как мы уже отмечали, самосопряженность $f\in C_0(X)$ равносильна вещественности функции f. Кроме того, в разделе 2.2 мы видели, что для $f\in\mathcal{B}(S)$, где S — произвольное множество, выполняется $\sigma(f)=\overline{f(S)}$. Так как $C_0(X)\subset\mathcal{B}(X)$, имеем то же самое утверждение. Поэтому для $f\in C_0(X)$ условие $\sigma(f)\subset\mathbb{R}_+$ равносильно тому, что $f(x)\geq 0$ для всех $x\in X$, так что данное нами определение положительных элементов произвольной C^*-алгебры согласуется с примером 4.6.

Предложение 4.8. *Пусть a — положительный обратимый элемент унитальной C^*-алгебры, тогда a^{-1} — также положительный.*

Доказательство. В силу следствия 3.8, элемент a^{-1} — эрмитов. Так как $a\geq 0$, то $\sigma(a)\subset\mathbb{R}_+$. По предложению 2.31, обратимость a влечет $0\notin\sigma(a)$. Наконец, в силу того же следствия, $\sigma(a^{-1})=1/\sigma(a)$, поэтому $\sigma(a^{-1})\subset(0,+\infty)$ и, значит, $a^{-1}\geq 0$. □

Теорема 4.9. *Для произвольной C^*-алгебры и любого $a\in A^+$ существует единственный $b\in A^+$, для которого $b^2=a$. Более того, a и b коммутируют.*

Доказательство. Рассмотрим подалгебру $C^*(a)$ в алгебре A, порожденную элементом a. Так как $a = a^*$, эта подалгебра состоит из всевозможных многочленов от a с нулевым свободным членом, поэтому коммутативна. По теореме 3.48, алгебра $C^*(a)$ отождествляется с C^*-алгеброй $C_0(\Omega)$ с помощью представления Гельфанда Γ, где Ω — пространство характеров алгебры $C^*(a)$. При этом $a \mapsto \widehat{a}$ и

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega\} = \widehat{a}(\Omega) \subset \mathbb{R}_+.$$

Поэтому, в соответствии с примером 4.6, определен $\sqrt{\widehat{a}}$. Положим $b = \Gamma^{-1}(\sqrt{\widehat{a}})$. То, что a и b коммутируют, вытекает из коммутативности алгебры $C^*(a) \simeq C_0(\Omega)$.

Наконец, пусть существует еще один элемент $c \in A^+$, такой, что $c^2 = a$. Тогда c коммутирует с a так как $ca = c^3 = ac$. Но тогда c коммутирует и с $b \in C^*(a)$, поскольку b — предел последовательности многочленов от a. Рассмотрим коммутативную алгебру $C^*(b, c) \supset C^*(a)$ и рассмотрим представление Гельфанда Γ для нее. Но тогда $\Gamma(b)$ и $\Gamma(c)$ — положительные квадратные корни из $\Gamma(a)$, поэтому они совпадают и, значит, $b = c$. □

Для положительного $a \in A$ тот единственный элемент b, для которого $a = b^2$, будем обозначать через $a^{1/2}$.

Предложение 4.10. *Пусть A — некоторая C^*-алгебра и $c \in A$ — эрмитов элемент. Тогда $c^2 \in A^+$.*

Доказательство. По теореме 3.45, имеет $\sigma(c) \subset \mathbb{R}$. С другой стороны, в силу замечания 2.47, множество $\sigma(c)$ непусто. Так как спектр элемента алгебры по определению является спектром унитализации этой алгебры, применима теорема 2.32, в силу которой $\sigma(c^2) = (\sigma(c))^2 \subset \mathbb{R}_+$, так что c^2 — положительный элемент. □

Конструкция 4.11. Пусть a — эрмитов элемент C^*-алгебры A. В силу предложения 4.10, $a^2 \in A^+$. По теореме 4.9, из a^2 можно извлечь корень. Этот корень мы обозначим $|a|$. Кроме того, положим $a^+ = \frac{1}{2}(|a| + a)$ и $a^- = \frac{1}{2}(|a| - a)$, так что $a = a^+ - a^-$.

Отождествим теперь алгебру $B := C^*(a)$ и $C_0(\Omega(B))$ с помощью представления Гельфанда, $a \mapsto \widehat{a}$. Тогда элементу $|a|$ соответствует неотрицательная функция, равная $|\widehat{a}|$. Далее, $\widehat{a^\pm} = \frac{1}{2}(|\widehat{a}| \pm \widehat{a})$ — тоже неотрицательные вещественные функции на $\Omega(B)$. Так как, в силу теоремы 2.73, образы этих функций, с точностью до 0, совпадают со спектром соответствующего элемента, заключаем, что элементы $|a|$ и $a^\pm$ — положительные. Кроме того, для каждого характера $\tau \in \Omega(B)$ имеем $|\widehat{a}|(\tau) = \pm\widehat{a}(\tau)$, откуда $a^+ a^- = 0$. Это разложения оказывается полезным при решении различных задач.

Предложение 4.12. *Пусть a — эрмитов элемент C^*-алгебры A, и $a = a^+ - a^-$ — построенное в конструкции 4.11 разложение элемента a на положительные элементы $a^\pm$. Тогда если $\|a\| \le 1$, то $\|a^\pm\| \le 1$.*

Доказательство. Напомним, что $a^+ = (|a|+a)/2$ и $a^- = (|a|-a)/2$. Так как $|a|^2 = a^2$ по определению элемента $|a|$, то

$$\||a|^2\| = \||a|\,|a|\| = \||a|\,|a|^*\| = \||a|\|^2 \qquad \text{и} \qquad \||a|^2\| = \|a^2\| = \|a\,a^*\| = \|a\|^2 \le 1,$$

откуда $\||a|\| \le 1$. Следовательно,

$$\|a^\pm\| = \frac{1}{2}\||a| \pm a\| \le \frac{1}{2}\Big(\||a|\| + \|a\|\Big) \le 1,$$

что и требовалось. □

Замечание 4.13. Пусть a — эрмитов элемент в унитальной C^*-алгебре A, $\|a\| \le 1$, тогда $a^2 \in A^+$ по предложению 4.10. По предложению 2.29, $\sigma(1-a^2) = 1-\sigma(a^2)$. Далее, так как A — банахова алгебра, из свойства субмультипликативности умножения заключаем, что $\|a^2\| \le \|a\|^2 \le 1$. Наконец, по следствию 2.49, $r(a^2) \le \|a^2\| \le 1$, откуда, учитывая, что $a^2 \in A^+$, получаем $\sigma(a^2) \subset [0,1]$. Таким образом, $\sigma(1 - a^2) = 1 - \sigma(a^2) \subset [0,1]$, откуда $1 - a^2 \in A^+$.

По теореме 4.9, из $1 - a^2$ можно извлечь квадратный корень, т.е. единственным образом определен элемент $\sqrt{1 - a^2}$. Положим

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2}, \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}.$$

Заметим, что

$$u\,u^* = \big(a + i\sqrt{1 - a^2}\big)\big(a - i\sqrt{1 - a^2}\big) = a^2 + (1 - a^2) = 1,$$

и, аналогично, $v\,v^* = 1$, т.е. u и v — унитарные элементы. Мы воспользовались тем, что a и $\sqrt{1 - a^2}$ эрмитовы. Ясно также, что $a = (u+v)/2$. Таким образом, мы показали, что каждый эрмитов элемент a, $\|a\| \le 1$, представим в виде линейной комбинации унитарных элементов. С другой стороны, в силу предложения 3.2, каждый элемент $*$-алгебры представим в виде линейной комбинации эрмитовых. Тем самым, мы доказали следующий результат

Предложение 4.14. *Каждая унитальная C^*-алгебра является линейной оболочкой множества своих унитарных элементов.*

Лемма 4.15. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — эрмитов элемент. Тогда если для некоторого $t \in \mathbb{R}$, $t \geq \|a\|$, выполнено неравенство $\|a - t\| \leq t$, то $a \geq 0$. Обратно, если $a \geq 0$ и $\|a\| \leq t$, $t \in \mathbb{R}$, то $\|a - t\| \leq t$. В частности, если $\big\|a - \|a\|\big\| \leq \|a\|$, то $a \geq 0$, и, обратно, если $a \geq 0$, то $\big\|a - \|a\|\big\| \leq \|a\|$.*

Доказательство. Пусть B — это C^*-подалгебра в A, порожденная 1 и a. Так как элемент a — эрмитов, то подалгебра B коммутативна. По теореме 4.2, существует изометричный $*$-изоморфизм $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to B$. Остается воспользоваться леммой 4.7. □

Следствие 4.16. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, тогда A^+ замкнуто в A.*

Доказательство. В силу предложения 3.17, множество A_{sa} всех эрмитовых элементов замкнуто в A. Покажем, что это же верно и для $A^+ \subset A_{sa}$. Пусть $a_n \in A^+$ — последовательность, сходящаяся к некоторой точке $a \in A$. Мы покажем, что $a \in A^+$, чем и завершим доказательство. Так как A_{sa} замкнуто в A, то $a \in A_{sa}$. Последовательность $\|a_n\|$ ограничена, поэтому существует $t \in \mathbb{R}$ такое, что $\|a_n\| \leq t$ при всех n. Так как $a_n \geq 0$, то, в силу леммы 4.15, имеем $\|a_n - t\| \leq t$ при всех n. Так как $\|a_n - t\| \to \|a - t\|$ при $n \to \infty$, то $\|a - t\| \leq t$. Тогда, снова по лемме 4.15, $a \geq 0$, т.е. $a \in A^+$, что и требовалось. □

Лемма 4.17. *Пусть a и b — положительные элементы C^*-алгебры A, тогда их сумма $a + b$ тоже положительна.*

Доказательство. Так как унитализация неунитальной C^*-алгебры сохраняется эрмитовость элементов, а спектры элементов неунитальной алгебры определяются именно как спектры в унитализации, то, без ограничения общности, сразу будем считать, что алгебра A унитальна. Из леммы 4.15 вытекает, что

$$\big\|a - \|a\|\big\| \leq \|a\| \qquad \text{и} \qquad \big\|b - \|b\|\big\| \leq \|b\|,$$

откуда

$$\big\|a + b - \big(\|a\| + \|b\|\big)\big\| = \big\|a + b - \|a\| - \|b\|\big\| \leq \big\|a - \|a\|\big\| + \big\|b - \|b\|\big\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Снова по лемме 4.15 имеем $a + b \geq 0$. □

Теорема 4.18. *Пусть a — произвольный элемент C^*-алгебры A, тогда a^*a положителен.*

Доказательство. Напомним, что как a^*a, так и $a\,a^*$ — эрмитовы элементы. Таким образом, наша задача — показать, что $\sigma(a^*a) \subset \mathbb{R}_+$. Начнем со следующей леммы.

Лемма 4.19. *Пусть $-a\,a^* \in A^+$, тогда $a = 0$.*

Доказательство. По предложению 2.29, выполняется $\sigma(-a\,a^*) \cup \{0\} = \sigma(-a^*a) \cup \{0\}$, следовательно, $-a^*a \in A^+$. Поэтому $\sigma(-a^*a) \subset \mathbb{R}_+$, а $\sigma(a^*a) = -\sigma(-a^*a) \subset -\mathbb{R}_+$. Воспользовавшись предложением 3.2, представим a в виде $b + ic$, где $b, c \in A_{sa}$. Тогда

$$a^*a + a\,a^* = (b - ic)(b + ic) + (b + ic)(b - ic) = 2b^2 + 2c^2.$$

По предложению 4.10, элементы $2b^2$ и $2c^2$ положительны, а, по лемме 4.17, элемент $a^*a = 2b^2 + 2c^2 + (-a\,a^*)$ тоже положительный. Итак, $\sigma(a^*a) \subset \mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \{0\}$, следовательно, $r(a^*a) = 0$. С другой стороны, по теореме 3.25 и определению C^*-алгебры, $r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, поэтому $\|a\| = 0$ и, значит, $a = 0$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Положим $b = a^*a$, тогда, в силу конструкции 4.11, элемент b представим в виде $b^+ - b^-$, где $b^\pm$ — положительные элементы, для которых $b^-b^+ = b^+b^- = 0$. Мы покажем, что $b^- = 0$, откуда и будет следовать положительность a^*a. Для этого положим $c = ab^-$, тогда

$$-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3.$$

Снова вспоминаем, что спектр элемента C^*-алгебры равен его спектру в унитализации этой алгебры. Поэтому применима теорема 2.32, в силу которой $\sigma\big((b^-)^3\big) = \big(\sigma(b^-)\big)^3 \subset \mathbb{R}_+$. Но тогда $-c^*c \in A^+$, откуда, в силу леммы 4.19, получаем $c = 0$, так что $(b^-)^3 = -c^*c = 0$. По следствию 3.27, имеем $b^- = 0$, что и требовалось. □

4.3 Частичный порядок на эрмитовых элементах C^*-алгебры

Для C^*-алгебры A, зададим на A_{sa} бинарное отношение так: положим $a \le b$, если и только если $b - a \in A^+$.

Предложение 4.20. *Определенное только что отношение на эрмитовых элементах C^*-алгебры A является частичным порядком.*

Доказательство. Так как $a - a = 0$ и, по следствию 3.26, эрмитов элемент равен нулю, если и только если его спектр нулевой, имеет место рефлексивность. Более того, из того же следствия вытекает, что если элемент не равен нулю, то его спектр содержит не нулевые значения, поэтому, если такой элемент a положителен, то элемент $-a$, в силу предложения 2.29, положительным не является. Отсюда вытекает, что введенное отношение антисимметрично. Наконец, если a, b, $c \in A_{sa}$ и $a \le b$ и $b \le c$, то $c-a = (c-b)+(b-a) \in A^+$ в силу леммы 4.17, откуда следует транзитивность. Доказательство закончено. □

Следующее утверждение доказывается тривиально (с использованием предложения 2.29).

Предложение 4.21. *Введенный выше порядок на A_{sa} удовлетворяет следующим свойствам*:

- *он инвариантен относительно сдвигов: для любых $a, b, c \in A_{sa}$ условие $a \le b$ эквивалентно $a + c \le b + c$*;
- *он инвариантен относительно умножения на положительные вещественные числа*: *для любых $a, b \in A_{sa}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ условие $a \le b$ влечет $t\,a \le t\,b$, а если $t > 0$, то оба этих условия эквивалентны*;
- *наконец, умножение на отрицательные вещественные числа обращают порядок: для любых $a, b \in A_{sa}$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \le 0$, условие $a \le b$ влечет $t\,a \ge t\,b$, а если $t < 0$, то оба этих условия эквивалентны.*

Предложение 4.22. *Пусть a — обратимый положительный элемент унитальной C^*-алгебры, тогда все элементы a, a^{-1}, $a^{1/2}$ и $a^{-1/2} := (a^{-1})^{1/2}$ коммутируют друг с другом, и $a^{1/2}a^{-1/2} = a^{-1/2}a^{1/2} = 1$.*

Доказательство. Пусть B — унитальная C^* подалгебра в A, порожденная 1, a и a^{-1}. Так как все образующие коммутируют, то алгебра B коммутативна. По теореме 3.48, представление Гельфанда Γ в этом случае представляет собой изометричный унитальный $*$-изоморфизм алгебра $\Gamma\colon B \to C(\Omega)$, где Ω — пространство характеров алгебры B (оно компактно, так как B унитальна). Положительность и обратимость a означает, что функция $\Gamma(a) = \widehat{a}$ всюду положительна, так как $\sigma(a) = \operatorname{im}\Gamma(a)$ по теореме 2.73. Кроме того, $\Gamma(a^{-1}) = 1/\Gamma(a)$ так как обратный элемент переходит в обратный при гомоморфизме. Далее, $\Gamma(a^{1/2}) = \sqrt{\Gamma(a)} \in C(\Omega)$ в силу конструкции, описанной в доказательстве теоремы 4.9, где корень элемента алгебры определяется с помощью перехода к алгебре функций. Аналогично $\Gamma(a^{-1/2}) = \sqrt{\Gamma(a^{-1})} = 1/\sqrt{\Gamma(a)} \in C(\Omega)$. Так как $C(\Omega)$ коммутативна, а B изоморфна $C(\Omega)$, то и все элементы a, a^{-1}, $a^{1/2}$ и $a^{-1/2}$ коммутируют друг с другом. Наконец, $\Gamma(a^{1/2})\Gamma(a^{-1/2}) = \sqrt{\Gamma(a)}\Big(1/\sqrt{\Gamma(a)}\Big) = 1$ и, точно так же, $\Gamma(a^{-1/2})\Gamma(a^{1/2}) = \Big(1/\sqrt{\Gamma(a)}\Big)\sqrt{\Gamma(a)} = 1$, поэтому, так как изоморфизм Γ унитальный, $a^{1/2}a^{-1/2} = a^{-1/2}a^{1/2} = 1$. □

Конструкция 4.23. Обобщим конструкцию 4.11, определив для ***произвольного*** элемента a из C^*-алгебры A элемент $|a|$ так: $|a| = (a^*a)^{1/2}$ (это определение корректно так как элемент a^*a положителен в силу теоремы 4.18). Отметим, что если $a \in A_{sa}$, то $|a| = (a^*a)^{1/2} = (a^2)^{1/2}$, поэтому приведенное определение $|a|$ действительно является обобщением соответствующего определения из конструкции 4.11.

Приведем ряд элементарных фактов о множестве A^+.

Теорема 4.24. *Для C^*-алгебры A справедливы следующие утверждения*:

(1) *множество A^+ совпадает с множеством $\{a^*a : a \in A\}$*;

(2) *если $a, b \in A_{sa}$ и $c \in A$, то неравенство $a \le b$ влечет $c^*a\,c \le c^*b\,c$*;

(3) *если для $a, b \in A_{sa}$ выполняется $0 \le a \le b$, то $\|a\| \le \|b\|$*;

(4) *если A унитальна, $a \in A_{sa}$, и $a \ge 1$, то элемент a обратим и $0 \le a^{-1} \le 1$*;

(5) *если A унитальна и a, $b \in A$, $0 \le a \le b$, — ее положительные обратимые элементы, то $0 \le b^{-1} \le a^{-1}$.*

Доказательство. (1) По теореме 4.18, для всех $a \in A$ выполняется $a^*a \in A^+$. С другой стороны, по теореме 4.9, для каждого $a \in A^+$ существует $b \in A^+$ такой, что $a = b^2 = b^*b$, где последнее равенство следует из $b \in A^+ \subset A_{sa}$.

(2) Пусть $a \le b$, то есть $b - a \in A^+$, тогда, в силу пункта (1), выполняется $b - a = d^*d$. С другой стороны, $c^*a\,c$ и $c^*b\,c$ — эрмитовы, и

$$c^*b\,c - c^*a\,c = c^*(b-a)c = c^*d^*dc = (dc)^*(dc) \ge 0,$$

где последнее неравенство снова вытекает из пункта (1).

(3) В силу следствия 2.49 и того, что $b \in A^+$, имеем $0 \le \sigma(b) \le r(b) \le \|b\|$, поэтому, в силу предложения 2.29, имеем $\sigma\big(\|b\|\,1 - b\big) \ge 0$, поэтому $\|b\|\,1 - b \in A^+$ и, значит, $b \le \|b\|\,1$. Из транзитивности частичного порядка вытекает, что $a \le b \le \|b\|\,1$. Последнее означает, что $\sigma\big(\|b\|\,1 - a\big) \ge 0$, так что $r(a) \le \|b\|$. Так как a — эрмитов, то по теореме 3.25, $\|a\| = r(a) \le \|b\|$, что и требовалось.

(4) Для произвольного $a \in A_{sa}$ такого, что $a \ge 1$, в силу предложения 2.29 имеем $\sigma(a-1) = \sigma(a) - 1 \ge 0$, поэтому $\sigma(a) \ge 1$. По предложению 2.31, элемент a обратим (так как $0 \notin \sigma(a)$). По тому же предложению, $\sigma(a^{-1}) = 1/\sigma(a)$, откуда $0 < \sigma(a^{-1}) \le 1$. Снова по предложению 2.29, $\sigma(1 - a^{-1}) = 1 - \sigma(a^{-1}) \ge 0$, откуда $a^{-1} \le 1$.

(5) В силу следствия 3.8, элементы a^{-1} и b^{-1} также являются эрмитовыми, поэтому для них определен введенный порядок. По предложению 4.8, оба a^{-1} и b^{-1} — положительные. По теореме 4.9, существуют и единственны положительные $a^{-1/2}$ и $a^{1/2}$ такие, что $(a^{-1/2})^2 = a^{-1}$ и $(a^{1/2})^2 = a$ соответственно. По предложению 4.22, элементы a, a^{-1}, $a^{1/2}$ и $a^{-1/2} := (a^{-1})^{1/2}$ коммутируют друг с другом, и $a^{1/2}a^{-1/2} = a^{-1/2}a^{1/2} = 1$, поэтому, в частности, $1 = a^{-1/2}a\,a^{-1/2}$. Так как $a \le b$, то, в силу пункта (2), $a^{-1/2}a\,a^{-1/2} \le a^{-1/2}b\,a^{-1/2}$, поэтому $1 \le a^{-1/2}b\,a^{-1/2}$, откуда, в силу пункта (4), имеем

$$\big(a^{-1/2}b\,a^{-1/2}\big)^{-1} = a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \le 1.$$

Следовательно, сопрягая полученное неравенство с $a^{-1/2}$ и снова используя пункт (2) и предложение 4.22, получаем

$$b^{-1} = a^{-1/2}(a^{1/2}b^{-1}a^{1/2})a^{-1/2} \le a^{-1/2}1\,a^{-1/2} = a^{-1},$$

что и требовалось. □

Задача 4.25. Покажите, что если $a \in A^+$, то $\|a^2\| = \|a\|^2$ и $\|a^{1/2}\| = \|a\|^{1/2}$.

Теорема 4.26. *Пусть a и b — положительные элементы C^*-алгебры A, причем $a \le b$. Тогда $a^{1/2} \le b^{1/2}$.*

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что алгебра A унитальна.

Выберем произвольное вещественное $t > 0$ и положим $a_t = a + t\,1$ и $b_t = b + t\,1$, тогда $a_t \le b_t$ и, по лемме 4.17, $a_t, b_t \in A^+$. Так как $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$ и $\sigma(b) \subset \mathbb{R}_+$, то, по предложению 2.29, $\sigma(a_t) = t + \sigma(a) > 0$ и $\sigma(b_t) = t + \sigma(b) > 0$, поэтому a_t и b_t — обратимы в силу предложения 2.29.

Лемма 4.27. *Имеем $\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}\| \le 1$.*

Доказательство. Так как A — это C^*-алгебра, имеем

$$\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}\|^2 = \big\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}(a_t^{1/2}b_t^{-1/2})^*\big\| = \big\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}b_t^{-1/2}a_t^{1/2}\big\| = \|a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2}\|.$$

С другой стороны, по теореме 4.24, имеем $b_t^{-1} \le a_t^{-1}$. Но тогда, по той же самой теореме,

$$a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2} \le a_t^{1/2}a_t^{-1}a_t^{1/2} = 1,$$

где последнее равенство вытекает из предложения 4.22. Так как $b_t^{-1} \ge 0$, то, по теореме 4.24, $a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2} \ge 0$, и снова по этой теореме, $\|a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2}\| \le \|1\| = 1$. Итак, собирая доказанные неравенства, заключаем, что $\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}\|^2 \le 1$, откуда и вытекает требуемое. □

В силу лемм 4.27 и 2.36, $\sigma(a_t^{1/2}b_t^{-1/2})$ лежит в отрезке $[-1,1]$. Далее,

$$\sigma(a_t^{1/2}b_t^{-1/2}) \setminus \{0\} = \sigma(a_t^{1/2}b_t^{-1/4}b_t^{-1/4}) \setminus \{0\} = \sigma(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \setminus \{0\},$$

где последнее равенство имеет место по предложению 2.29, поэтому $r(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \le 1$. Элемент $b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}$ — эрмитов, поэтому, в силу теоремы 3.25, имеем

$$\|b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}\| = r(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \le 1.$$

Но тогда, так как $\sigma(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \subset \mathbb{R}$, по предложению 2.29,

$$\sigma(1 - b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) = 1 - \sigma(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \geq 0,$$

поэтому $1 - b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4} \geq 0$, то есть $b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4} \leq 1$. Используя теорему 4.24, сопрягаем последнее неравенство с $b^{1/4}$. Имеем:

$$b_t^{1/4}\,1\,b_t^{1/4} \geq b_t^{1/4}\big(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}\big)b_t^{1/4} = \big(b_t^{1/4}b_t^{-1/4}\big)a_t^{1/2}\big(b_t^{-1/4}b_t^{1/4}\big) = a_t^{1/2},$$

откуда $b_t^{1/2} \geq a_t^{1/2}$. Теорема 3.48, примененная к $C^*(a,1)$ и $C^*(b,1)$, показывает, что $(a+t\,1)^{1/2} \to a^{1/2}$ и $(b+t\,1)^{1/2} \to b^{1/2}$ при $t \to 0+$ (так как представление Гельфанда Γ является изометрией). Итак,

$$b^{1/2} - a^{1/2} = \lim_{t\to 0+}(b+t\,1)^{1/2} - \lim_{t\to 0+}(a+t\,1)^{1/2} = \lim_{t\to 0+}\big((b+t\,1)^{1/2} - (a+t\,1)^{1/2}\big) \geq 0,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что при всех $t > 0$ имеем $(b+t\,1)^{1/2} - (a+t\,1)^{1/2} \geq 0$, а множество A^+ замкнуто в силу следствия 4.16. Доказательство закончено. □

Следствие 4.28. *Если $a \in A^+$, $a \leq 1$, то $a^{1/2} \leq 1$.*

Замечание 4.29. Если в теореме заменить неравенство $a^{1/2} \leq b^{1/2}$ на $a^2 \leq b^2$, то теорема перестанет быть верной. В качестве примера рассмотрим C^*-алгебру $M_2(\mathbb{C})$, состоящую из всех комплексных матриц размера 2×2 со стандартной инволюцией $A^* = \bar{A}^T$. Положим

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как p и q — вещественные матрицы, то они эрмитовы. Далее, спектр $a \in M_2(\mathbb{C})$ — это множество собственных значений матрицы a, поэтому $\sigma(q) = \{0,1\} \subset \mathbb{R}_+$ и, значит, q положителен. Аналогично, $\sigma(p) = \{0,1\}$, и p тоже положителен. Кроме того, из положительности q следует, что $p \leq p+q$. Посмотрим теперь на квадраты p и $p+q$. Имеем $p^2 = p$, $q^2 = q$, и $(p+q)^2 = p+q+pq+qp$, поэтому

$$(p+q)^2 - p^2 = q + pq + qp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель полученной матрицы отрицательный, поэтому спектр не может быть неотрицательным. Таким образом, элемент $(p+q)^2 - p^2$ не является положительным.

В [17] показано, что справедливость импликации $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$ имеет место только в коммутативных C^*-алгебрах.

4.4 Аппроксимативная единица

Если C^*-алгебра A не унитальна, то ее можно вложить в ее унитализацию. Однако такой прием не всегда позволяет решать возникающие задачи. Например, так не удается показать, что замкнутые идеалы сопряжены. Тем не менее, имеется другой прием "моделирования единицы", который и называется аппроксимативной единицей.

Направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, состоящая из положительных элементов замкнутого единичного шара C^*-алгебры A, такая, что для каждого $a \in A$ выполняется $a = \lim_\lambda u_\lambda a$, называется ***аппроксимативной единицей*** алгебры A.

Замечание 4.30. Если $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — аппроксимативная единица. По определению, для любого $a \in A$ выполнено $a^* = \lim_\lambda u_\lambda a^*$, поэтому

$$a = (a^*)^* = \big(\lim_\lambda u_\lambda a^*\big)^* = \lim_\lambda (u_\lambda a^*)^* = \lim_\lambda a\, u_\lambda^* = \lim_\lambda a\, u_\lambda,$$

где третье равенство вытекает из изометричности, а, значит, и непрерывности, сопряжения, а последняя из того, все элементы u_λ — эрмитовы. Отсюда вытекает, что условие $a = \lim_\lambda u_\lambda a$ в определении аппроксимативной единицы можно заменить на условие $a = \lim_\lambda a\, u_\lambda$.

Покажем теперь, что в качестве направленного множества Λ можно выбрать семейство всех положительных $a \in A$, для которых $\|a\| < 1$. Частичный порядок на этом множестве мы уже определили.

Предложение 4.31. *Семейство Λ всех положительных элементов $a \in A$ из C^*-алгебры, для которых $\|a\| < 1$, с порядком, индуцированным из A_{sa}, является направленным.*

Доказательство. Выберем произвольные $a, b \in \Lambda$ и покажем, что существует общая мажоранта, то есть такое $c \in \Lambda$, для которого $a \le c$ и $b \le c$. Вложим A в унитализацию $\widetilde{A}$ и будем проводить доказательство в $\widetilde{A}$.

Заметим, что если $a \in A^+$, то элемент $a + 1$ обратим в $\widetilde{A}$, так как $\sigma(a) \ge 0$, и верно равенство $a(1 + a)^{-1} = 1 - (1 + a)^{-1}$ (для его проверки достаточно записать левую часть в виде $(1 + a - 1)(1 + a)^{-1}$ и раскрыть скобки).

Лемма 4.32. *Если a, $b \in A^+$ и $a \le b$, то $a(1 + a)^{-1} \le b(1 + b)^{-1}$.*

Доказательство. Действительно, из $0 \le a \le b$ следует, что $1+a \le 1+b$ (предложение 4.21), откуда $(1+b)^{-1} \le (1+a)^{-1}$ (теорема 4.24). Поэтому $1-(1+a)^{-1} \le 1-(1+b)^{-1}$, то есть $a(1+a)^{-1} \le b(1+b)^{-1}$, что и требовалось. □

Лемма 4.33. *Если $a \in A^+$, то $a(1 + a)^{-1} \in \Lambda$ и $a(1 - a)^{-1} \in A^+$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим представление Гельфанда Γ алгебры $B = C^*(1, a)$. Так как функция $\Gamma(a) \in C\big(\Omega(B)\big)$ принимает только неотрицательные значения, множество значений функции $f \in C\big(\Omega(B)\big)$, $f = \Gamma\big(a(1+a)^{-1}\big) = \Gamma(a)/\big(1+\Gamma(a)\big)$, лежит в отрезке $[0, 1]$, поэтому $\|f\| \le 1$, и, значит, $a(1+a)^{-1} \in \Lambda$. Аналогично, $g = \Gamma\big(a(1 - a)^{-1}\big)$ принимает положительные значения, так как $\operatorname{im} \Gamma(a) \subset [0, 1]$. □

Итак, пусть $a, b \in \Lambda$. Положим $a' = a(1 - a)^{-1}$, $b' = b(1 - b)^{-1}$ и $c = (a' + b')(1 + a' + b')^{-1}$. По лемме 4.33 элементы a' и b' положительны, поэтому $a' + b' \in A^+$ и, снова по лемме 4.33, получаем, что $c \in \Lambda$. Наконец, так как $a' \le a' + b'$, то из леммы 4.32 вытекает, что $a'(1 + a')^{-1} \le c$, но, снова используя представление Гельфанда легко проверить, что $a'(1+a')^{-1} = a$, поэтому, окончательно, $a \le c$. Точно так же проверяется, что $b \le c$. Таким образом, c — искомая общая мажоранта. □

Теорема 4.34. *Каждая C^*-алгебра содержит аппроксимативную единицу. А именно, в качестве такой единицы можно взять направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $u_\lambda = \lambda$ и $\Lambda = \{\lambda \in A^+ : \|\lambda\| < 1\}$.*

Доказательство. В силу предложения 4.31 семейство $\Lambda = \{\lambda \in A^+ : \|\lambda\| < 1\}$, снабженное отношением порядка, индуцированным из A_{sa}, является направленностью. Поэтому остается проверить, что $a = \lim_\Lambda \lambda a$ для любого $a \in A$. Так как линейная оболочка множества Λ совпадает со всей алгеброй A, достаточно проверить это равенство для случая $a \in \Lambda$.

Фиксируем произвольные $a \in \Lambda$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим представление Гельфанда $\Gamma\colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$, где, как обычно, Ω — пространство характеров алгебры $C^*(a)$. Пусть $f = \Gamma(a)$. Заметим, что так как $a \in \Lambda$, то $\operatorname{im} f \subset [0, 1]$. Напомним, см. теорему 2.63, что $\Omega \cup \{0\}$ — компактное хаусдорфово топологическое пространство в $*$-слабой топологии. Поэтому подмножество $K = f^{-1}\big([\varepsilon, +\infty)\big) = \big\{\tau \in \Omega : f(\tau) \ge \varepsilon\big\}$ замкнуто и компактно в Ω. По лемма Урысона существует непрерывная функция $g\colon \Omega \to [0, 1]$ с компактным носителем, равная 1 на K. Выберем число δ так, чтобы $0 < \delta < 1$ и $1 - \delta < \varepsilon$. Тогда $\|f - \delta\, g\, f\| = \|(1 - \delta\, g)f\| \le \varepsilon$. Действительно, если $\tau \in K$, то $\big|f(\tau) - \delta\, g(\tau)f(\tau)\big| = \big|(1 - \delta)f(\tau)\big| \le 1 - \delta < \varepsilon$ так как $\|f\| \le 1$, а если $\tau \notin K$, то $\big|f(\tau) - \delta\, g(\tau)f(\tau)\big| \le \big|1 - \delta\, g(\tau)\big|\varepsilon \le \varepsilon$ так как $\|g\| \le 1$.

Положим $\lambda_0 = \Gamma^{-1}(\delta\, g)$. Отметим, что $\lambda_0 \in C^*(a)$, поэтому коммутирует с a. Кроме того, $\lambda_0 \in \Lambda$, и $\|a-\lambda_0 a\| \le \varepsilon$ так как Γ сохраняет норму. Возьмем произвольное $\lambda \ge \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда $1 - \lambda \le 1 - \lambda_0$ и $a(1 - \lambda)a \le a(1 - \lambda_0)a$.

Далее,

$$\|a - \lambda a\|^2 = \big\|(1 - \lambda)^{1/2}(1 - \lambda)^{1/2}a\big\|^2 \le \big\|(1 - \lambda)^{1/2}a\big\|^2,$$

так как $\|1 - \lambda\| \le 1$. Напомним определяющее тождество C^*-алгебры: $\|x\|^2 = \|x^*x\|$, и возьмем $x = (1 - \lambda)^{1/2}a$. Так как элементы a и $1 - \lambda$ — эрмитовы, имеем:

$$\big\|(1 - \lambda)^{1/2}a\big\|^2 = \big\|\big((1 - \lambda)^{1/2}a\big)^*(1 - \lambda)^{1/2}a\big\| = \big\|a(1 - \lambda)a\big\| \le \big\|a(1 - \lambda_0)a\big\| \le \big\|(1 - \lambda_0)a\big\| \le \varepsilon.$$

Таким образом, $\|a - \lambda a\|^2 \le \varepsilon$, откуда следует, что $\lim_\Lambda \lambda a = a$, что и требовалось. □

Аппроксимативная единица $\Lambda = \{\lambda \in A^+ : \|\lambda\| < 1\}$ называется ***канонической аппроксимативной единицей*** алгебры A.

Приведем несколько примеров использования аппроксимативной единицы.

Утверждение 4.35. *Если L — замкнутый левый идеал в C^*-алгебре A, то существует направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, состоящая из положительных элементов и лежащая в замкнутом единичном шаре в L, такая, что $a = \lim_\lambda au_\lambda$ для всех $a \in L$.*

Доказательство. Положим $B = L \cap L^*$. Заметим, что B является C^*-алгеброй. Действительно, $AL \subset L$ так как L — левый идеал, откуда $L^*A^* = L^*A \subset L^*$, поэтому $L \cap L^*$ — подалгебра, замкнутая относительно сопряжения. Далее, по теореме 4.34, алгебра B имеет каноническую аппроксимативную единицу $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где Λ — единичный шар в B^+. Далее, пусть $a \in L$. Тогда $a^*a \in B$, поэтому $\lim_\lambda \big(a^*a(1-u_\lambda)\big) = 0$ по определению аппроксимативной единицы. Тогда

$$\lim_\lambda \big\|a(1-u_\lambda)\big\|^2 = \lim_\lambda \big\|(1-u_\lambda)^*a^*a(1-u_\lambda)\big\| = \lim_\lambda \big\|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\big\| \le \lim_\lambda \big\|a^*a(1-u_\lambda)\big\| = 0,$$

где неравенство выполнено, так как $\|u_\lambda\| \le 1$, откуда $\lim_\lambda a(1-u_\lambda) = 0$, что и требовалось. □

Утверждение 4.36. *Пусть I — замкнутый идеал в C^*-алгебре A. Тогда I самосопряжен и, значит, является C^*-подалгеброй. Если $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — аппроксимативная единица в I, то для каждого $a \in A$ имеет место соотношение*

$$\|a+I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$$

Доказательство. По утверждению 4.35 существует направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, состоящая из положительных элементов и лежащая в единичном шаре в I, такая, что $b = \lim_\lambda bu_\lambda$ для всех $b \in I$. Поэтому $b^* = \lim_\lambda u_\lambda^* b^* = \lim_\lambda u_\lambda b^*$, и, так как все u_λ принадлежат I, а значит и $u_\lambda b^* \in I$ так как I — идеал, заключаем, используя замкнутость I, что $b^* \in I$, то есть I самосопряжен.

Пусть $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольная аппроксимативная единица в I, и $a \in A$ — произвольный элемент. Напомним, что $\|a+I\| = \inf\big\{\|a+a'\| : a' \in I\big\}$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $b \in I$, что $\|a+b\| < \|a+I\| + \varepsilon/2$. Так как $b = \lim_\lambda u_\lambda b$ по определению аппроксимативной единицы, то существует такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $\|b - u_\lambda b\| \le \varepsilon/2$ для всех $\lambda \ge \lambda_0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\| = \big\|(1-u_\lambda)a + (1-u_\lambda)b - (1-u_\lambda)b\big\| \le \big\|(1-u_\lambda)(a+b)\big\| + \|b - u_\lambda b\| \le \\ \le \|a+b\| + \|b - u_\lambda b\| \le \|a+I\| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2,\end{aligned}$$

где первое неравенство выполнено, так как $\|u_\lambda\| \le 1$ по определению аппроксимативной единицы. С другой стороны, $\|a+I\| \le \|a - u_\lambda a\|$, так как $u_\lambda a \in I$, поэтому $\lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \|a+I\|$. Наконец, $\|a^* + I\| = \lim_\lambda \|a^* - u_\lambda a^*\| = \lim_\lambda \big\|(a^* - u_\lambda a^*)^*\big\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$, откуда, так как $\|a+I\| = \|a^*+I\|$, заключаем, что

$$\|a+I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|.$$

Утверждение доказано. □

Лемма 4.37. *Пусть I — замкнутый идеал в C^*-алгебре A, и J — замкнутый идеал в I. Тогда J также идеал в A.*

Доказательство. Так как I, а вслед за ним и J являются C^*-алгебрами, то достаточно проверить, что ab и ba принадлежат J для всех $a \in A$ и всех $b \in J^+$ (напомним, что C^*-алгебра является линейной оболочкой своих положительных элементов). Проверим это.

Так как $b \in J^+$, определен элемент $b^{1/2} \in J^+ \subset I$. Тогда $ab = (ab^{1/2})b^{1/2}$, и $ab^{1/2} \in I$ так как I — идеал в A, а тогда $ab = (ab^{1/2})b^{1/2} \in J$, так как J — идеал в I. Так как a — произвольный, то $a^*b \in J$, но тогда $(a^*b)^* = ba \in J$, так как J самосопряжен. Лемма доказана. □

Теорема 4.38. *Пусть I — замкнутый идеал в C^*-алгебре A. Тогда фактор алгебра A/I является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Нужно проверить определяющее равенство C^*-алгебры, причем, по лемме 3.29, достаточно проверить неравенство $\|x\|^2 \le \|x^*x\|$. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица в I. Рассмотрим произвольные $a \in A$ и $b \in I$. Тогда, применяя утверждение 4.36, имеем:

$$\begin{aligned}\|a+I\|^2 = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\|^2 = \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\| = \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)(a^*a + b - b)(1-u_\lambda)\| \le \\ \le \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)(a^*a+b)(1-u_\lambda)\| + \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \le \|a^*a+b\| + \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)b\| = \|a^*a+b\|,\end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено, так как $\|1-u_\lambda\| \le 1$, а последнее равенство — так как $\lim_\lambda (b - u_\lambda b) = 0$. Но тогда, так как b — произвольный элемент из I, заключаем, что $\|a+I\|^2 \le \|a^*a+I\| = \big\|(a^*+I)(a+I)\big\|$, что и требовалось. □

4.5 Положительные линейные функционалы на C^*-алгебрах

Теорема Гельфанда описывает коммутативные C^*-алгебры в терминах характеров, которые фактически являются ***одномерными представлениями***. В некоммутативном случае таких представлений не достаточно и приходится рассматривать представления произвольных размерностей. Для описания таких представлений удобно пользоваться положительными линейными функционалами, так что мы начнем с элементов теории таких функционалов.

Пусть $\varphi\colon A \to B$ линейное отображение C^*-алгебр. Отображение φ называется ***положительным***, если $\varphi(A^+) \subset B^+$.

Предложение 4.39. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — положительное линейное отображение C^*-алгебр. Тогда*

(1) $\varphi(A_{sa}) \subset B_{sa}$, *и*

(2) $\varphi\colon A_{sa} \to B_{sa}$ — *неубывающее отображение.*

Доказательство. (1) Пусть $a \in A_{sa}$. Воспользуемся конструкцией 4.11 и представим эрмитов элемент a в виде $a = a^+ - a^-$, где $a^\pm$ — положительные элементы. Так как φ — линейное отображение, то $\varphi(a) = \varphi(a^+) - \varphi(a^-)$. Так как отображение φ положительно, то $\varphi(a^\pm) \in B^+ \subset B_{sa}$. Так как, в силу предложения 3.1, B_{sa} — вещественное векторное подпространство в B, Заключаем, что $\varphi(a) \in B_{sa}$, что и требовалось.

(2) Пусть $a, b \in A_{sa}$ такие, что $a \le b$, тогда $b - a \in A^+$. Как мы только что показали, $\varphi(a), \varphi(b) \in B_{sa}$. Далее, так как φ — положительное линейное отображение, то $\varphi(b - a) = \varphi(b) - \varphi(a) \in B^+$, поэтому $\varphi(a) \le \varphi(b)$ и, значит, отображение φ неубывающее. □

Предложение 4.40. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — произвольный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр, тогда φ — положительное линейное отображение.*

Доказательство. Так как, в силу предложения 3.43, каждый такой φ однозначно продолжается до унитального $*$-гомоморфизма унитализаций $\widetilde{A}$ в $\widetilde{B}$, будем сразу считать, что алгебры A, B и гомоморфизм φ — унитальны.

Пусть $a \in A_{sa}$, тогда $a = a^*$, и, так как φ является $*$-гомоморфизмом, то $\varphi(a^*) = \big(\varphi(a)\big)^* = \varphi(a)$, откуда $\varphi(a) \in B_{sa}$.

Далее, по предложению 2.29, для каждого $a \in A$ выполнено включение $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \sigma(a)$, поэтому, если $a \in A^+$, т.е. a — эрмитов и $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$, то, как мы показали выше, $\varphi(a)$ — тоже эрмитов и $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \mathbb{R}_+$, т.е. $\varphi(a) \in B^+$. Последнее и означает положительность φ. □

Пример 4.41. Для $A = M_n(\mathbb{C})$ рассмотрим линейный функционал — ***след*** матрицы $a = (a_{pq}) \in A$: $\mathrm{tr}(a) = \sum_{p=1}^n a_{pp}$. Тогда tr — положительный функционал. Действительно, A^+ состоит из эрмитовых матриц с положительным спектром, т.е. $\sigma(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Так как $\mathrm{tr}(a) = \sum_{p=1}^n \lambda_p$, то $\mathrm{tr}(a) \ge 0$. Осталось заметить, что $\mathbb{C}^+ = \mathbb{R}^+$, поэтому $\mathrm{tr}(A^+) \subset \mathbb{C}^+$.

Замечание 4.42. Как мы показали в примере 4.41, след комплексной матрицы является положительным линейным функционалом. Ясно, что функционал tr — ненулевой. Оказывается, если от линейного (не обязательно положительного) функционала потребовать еще и сохранения произведения, а также сопряжения, т.е. чтобы функционал был $*$-гомоморфизмом из $M_n(\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}$, то для $n > 1$ никаких $*$-гомоморфизмов, кроме нулевого, найти не удастся. Действительно, пусть $\varphi\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ — произвольный $*$-гомоморфизм. Обозначим $e_{pq} \in M_n(\mathbb{C})$ матрицу, в которой единственный ненулевой элемент расположен в позиции (p, q) и равен 1. Отметим, что $e_{pq}^2 = 0$ при $p \ne q$, и $e_{pp} = e_{pq} e_{qp}$ при всех q. Тогда при $p \ne q$ имеем $\varphi(e_{pq} e_{pq}) = \varphi(e_{pq})^2 = \varphi(0) = 0$, откуда $\varphi(e_{pq}) = 0$. Далее, так как $n > 1$, то для каждого p существует $q \ne p$. Выберем такое q, тогда $\varphi(e_{pp}) = \varphi(e_{pq} e_{qp}) = \varphi(e_{pq})\varphi(e_{qp}) = 0$. Осталось заметить, что для любой матрицы $a = (a_{pq})$ имеем $a = \sum_{p,q} a_{pq} e_{pq}$, откуда $\varphi(a) = \sum_{p,q} a_{pq} \varphi(e_{pq}) = 0$.

Пусть A — некоторая C^*-алгебра, и τ — положительный функционал на ней. Определим функцию $f_\tau\colon A \times A \to \mathbb{C}$ так: $f_\tau(a, b) = \tau(b^* a)$.

Лемма 4.43. *В сделанных обозначениях, функция f_τ является положительной полуторалинейной формой на A.*

Доказательство. Действительно, для z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ и a_1, a_2, b_1, $b_2 \in A$ имеем:

$$f_\tau(z_1 a_1 + z_2 a_2, b) = \tau\big(b^*(z_1 a_1 + z_2 a_2)\big) = z_1 \tau(b^* a_1) + z_2 \tau(b^* a_2) = z_1 f_\tau(a_1, b) + z_2 f_\tau(a_2, b),$$

и

$$f_\tau(a, z_1 b_1 + z_2 b_2) = \tau\big((z_1 b_1 + z_2 b_2)^* a\big) = \bar z_1 \tau(b_1^* a_1) + \bar z_2 \tau(b_2^* a) = \bar z_1 f_\tau(a, b_1) + \bar z_2 f_\tau(a, b_2).$$

Кроме того, $f_\tau(a,a) = \tau(a^*a) \in \mathbb{R}_+$, так как $a^*a \in A^+$ по теореме 4.18. Таким образом, f_τ — положительная полуторалинейная форма, что и требовалось. ☐

Напомним необходимые факты про полуторалинейные формы.

Утверждение 4.44. *Пусть $\beta\colon A \times A \to \mathbb{C}$ — полуторалинейная форма на $*$-алгебре A. Тогда*

(1) *Имеет место так называемое* **полярное разложение***:*

$$4\beta(a,b) = \beta(a+b, a+b) - \beta(a-b, a-b) + i\beta(a+ib, a+ib) - i\beta(a-ib, a-ib).$$

(2) *Если $\beta(a,a) \in \mathbb{R}$ для любого a, то*

$$4\operatorname{Re}\beta(a,b) = \beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b), \qquad 4\operatorname{Im}\beta(a,b) = \beta(a+ib,a+ib) - \beta(a-ib,a-ib),$$

и $\overline{\beta(a,b)} = \beta(b,a)$ для любых $a\, b \in A$.

(3) *Имеет место неравенство Шварца: $\big|\beta(x,y)\big|^2 \le \beta(x,x)\beta(y,y)$.*

(4) *Если $\beta(a,a) \in \mathbb{R}_+$ для любого a, то функция $h(a) = \sqrt{\beta(a,a)}$ задает полунорму на A.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b) + i\beta(a+ib,a+ib) - i\beta(a-ib,a-ib) = \\
&\quad = \big(\beta(a,a) + \beta(a,b) + \beta(b,a) + \beta(b,b)\big) - \big(\beta(a,a) - \beta(a,b) - \beta(b,a) + \beta(b,b)\big) + \\
&\quad + i\big(\beta(a,a) - i\beta(a,b) + i\beta(b,a) + \beta(b,b)\big) - i\big(\beta(a,a) + i\beta(a,b) - i\beta(b,a) + \beta(b,b)\big) = 4\beta(a,b).
\end{aligned}$$

Поэтому, если $\beta(a,a) \in \mathbb{R}$ для любого a, то значения формы β, стоящие в правой части формулы полярного разложения, вещественны, поэтому

$$4\operatorname{Re}\beta(a,b) = \beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b), \qquad 4\operatorname{Im}\beta(a,b) = \beta(a+ib,a+ib) - \beta(a-ib,a-ib).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
4\beta(b,a) &= \beta(b+a,b+a) - \beta(b-a,b-a) + i\beta(b+ia,b+ia) - i\beta(b-ia,b-ia) = \\
&= \beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b) + ii\bar i\beta(b/i+a,b/i+a) - ii\bar i\beta(b/i-a,b/i-a) = \\
&= \beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b) + i\beta(-ib+a,-ib+a) - i\beta(-ib-a,-ib-a) = \\
&= \beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b) + i\beta(a-ib,a-ib) - i\beta(a+ib,a+ib) = \\
&= \big(\beta(a+b,a+b) - \beta(a-b,a-b)\big) - i\big(\beta(a+ib,a+ib) - \beta(a-ib,a-ib)\big) = 4\overline{\beta(a,b)},
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Далее,

$$0 \le \beta(x-\lambda y, x-\lambda y) = \beta(x,x) - \lambda\beta(y,x) - \bar\lambda\beta(x,y) + |\lambda|^2\beta(y,y).$$

Подставим $\lambda = \beta(x,y)/\beta(y,y)$. Получим:

$$\begin{aligned}
0 \le \beta(x,x) - \beta(x,y)\beta(y,x)/\beta(y,y) - \overline{\beta(x,y)}\beta(x,y)/b(y,y) + \big|\beta(x,y)\big|^2\beta(y,y)/\beta(y,y) = \\
= \beta(x,x) - \big|\beta(x,y)\big|^2\beta(y,y)/\beta(y,y),
\end{aligned}$$

откуда $\big|\beta(x,y)\big|^2 \le \beta(x,x)\beta(y,y)$.

Наконец, $h(\lambda a) = \sqrt{\beta(\lambda a, \lambda a)} = \sqrt{|\lambda|^2\beta(a,a)} = |\lambda|\sqrt{\beta(a,a)} = |\lambda| h(a)$. Неравенство Шварца в этих обозначениях имеет вид $\big|\beta(x,y)\big| \le h(x)h(y)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
h(x+y)^2 = \beta(x+y,x+y) = \beta(x,x) + \beta(y,x) + \beta(x,y) + \beta(y,y) = \beta(x,x) + b(y,y) + 2\operatorname{Re}\beta(x,y) \le \\
\le h(x)^2 + h(y)^2 + 2\big|\beta(x,y)\big| \le h(x)^2 + h(y)^2 + 2h(x)h(y) = \big(h(x) + h(y)\big).
\end{aligned}$$

Таким образом, функция h положительно однородна и удовлетворяет неравенству треугольника. ☐

Свойства полуторалинейной формы можно переформулировать так.

Следствие 4.45. *В сделанных обозначениях,*

$$\overline{\tau(a^*b)} = \tau(b^*a), \qquad \text{и} \qquad \left|\tau(b^*a)\right| \le \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2},$$

а функция $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ является полунормой на A.

Предложение 4.46. *Пусть A — произвольная C^*-алгебра, $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ — линейный функционал (не обязательно непрерывный), $B_1(0) \subset A$ — замкнутый единичный шар с центром в нуле, M — неотрицательное вещественное число. Предположим, что для любого $a \in B_1(0) \cap A^+$ выполняется $\left|\tau(a)\right| \le M$, тогда $\|\tau\| \le 4M$, так что τ ограничен и, значит, непрерывен.*

Доказательство. Пусть сначала $a \in A_{sa} \cap B_1(0)$. Тогда существуют $a^+, a^- \in A^+$ такие, что $a = a^+ - a^-$ (см. конструкцию 4.11). По предложению 4.12, $\|a^\pm\| \le 1$, так что $a^\pm \in B_1(0) \cap A^+$, поэтому

$$\left|\tau(a)\right| = \left|\tau(a^+ - a^-)\right| = \left|\tau(a^+) - \tau(a^-)\right| \le \left|\tau(a^+)\right| + \left|\tau(a^-)\right| \le 2M.$$

Пусть теперь a — произвольный элемент из $B_1(0)$. По предложению 3.2, $a = b + ic$ для некоторых $b, c \in A_{sa}$. По предложению 3.16, имеем $\|b\| \le \|a\| \le 1$ и $\|c\| \le \|a\| \le 1$. Но тогда

$$\left|\tau(a)\right| = \left|\tau(b) + i\tau(c)\right| \le \left|\tau(b)\right| + \left|\tau(c)\right| \le 4M.$$

Осталось воспользоваться тем, что доказанное неравенство имеет место для любого $a \in B_1(0)$. $\square$

Теорема 4.47. *Пусть $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A, тогда τ ограничен и, значит, непрерывен.*

Доказательство. Предположим, что τ неограничен. В силу предложения 4.46, функционал τ неограничен также на множестве S всех положительных элементов единичной нормы (иначе он ограничен в шаре). Это означает, что в S существует последовательность a_n, для которой $\tau(a_n) \ge 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n/2^n$, и пусть $s_k = \sum_{n=1}^k a_n/2^n$ — его частичная сумма. Тогда для $p < q$

$$\|s_p - s_q\| \le \sum_{n=p}^{q} \|a_n\|/2^n = \sum_{n=p}^{q} 1/2^n = 1/2^{p-1} - 1/2^q,$$

поэтому последовательность s_k фундаментальна и, значит, она сходится к $a := \sum_{n=1}^\infty a_n/2^n$. По лемме 4.17, каждый элемент s_k положительный. По следствию 4.16, элемент a также положительный. Так как $\tau(a_n/2^n) \ge 1$, то $\tau(s_k) = \sum_{n=1}^k \tau(a_n/2^n) \ge k$. Однако, аналогично показанному выше, $a - s_k = \sum_{n=k+1}^\infty a_n/2^n$ — положительный элемент, поэтому $s_k \le a$. Так как функционал τ положительный, то $\tau(a - s_k) = \tau(a) - \tau(s_k)$ положительно, поэтому $\tau(a) \ge \tau(s_k) \ge k$. Так как k можно выбрать сколь угодно большим, приходим к противоречию, т.е. τ должен быть ограниченным. $\square$

Лемма 4.48. *Пусть $u \in A^+$, $\|u\| \le 1$. Тогда $u \le 1$, $u^2 \le u$, и $\|u^2\| \le 1$.*

Доказательство. Действительно, u — эрмитов, $r(u) = \|u\| \le 1$, и u — положителен, поэтому $\sigma(u) \in [0, 1]$. Поэтому $\sigma(1 - u) \subset \mathbb{R}_+$, откуда $u \le 1$. Далее, неравенство $u^2 \le u$ получается из предыдущего сопряжением с $u^{1/2}$. Наконец, $u^2 \le u \le 1$, поэтому $\|u^2\| \le 1$, что и требовалось. $\square$

Утверждение 4.49. *Пусть $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A, тогда для всех $a \in A$ выполняется*

(1) $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ *и*

(2) $\left|\tau(a)\right|^2 \le \|\tau\|\, \tau(a^*a)$.

Доказательство. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица в A. Тогда, используя следствие 4.45, имеем:

$$\tau(a^*) = \lim_\lambda \tau(a^*u_\lambda) = \lim_\lambda \overline{\tau\big((a^*u_\lambda)^*\big)} = \lim_\lambda \overline{\tau(u_\lambda a)} = \overline{\tau(a)}.$$

Аналогично,

$$\left|\tau(a)\right|^2 = \lim_\lambda \left|\tau(u_\lambda a)\right|^2 \le \sup_\lambda \tau(u_\lambda^* u_\lambda)\, \tau(a^*a) \le \|\tau\| \tau(a^*a),$$

где в последнем неравенстве использована лемма 4.48. $\square$

Теорема 4.50. *Пусть τ — ограниченный линейный функционал на C^*-алгебре A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *функционал τ — положителен*;

(2) *для любой аппроксимативной единицы $\{u_\lambda\}$ в алгебре A выполняется равенство $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$*;

(3) *для некоторой аппроксимативной единицы $\{u_\lambda\}$ в алгебре A выполняется равенство $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что из (1) следует (2). Предположим для простоты, что $\|\tau\| = 1$. Так как τ — положительный, монотонный и ограниченный, направленность $\big\{\tau(u_\lambda)\big\}$ — возрастающая, содержится в отрезке $\big[0,1\big]$, поэтому $0 \le \lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \sup_\lambda \big\{\tau(u_\lambda)\big\} \le 1$.

Мы воспользовались следующей леммой (докажите).

Лемма 4.51. *Пусть $\{x_\lambda\}_\lambda \subset \mathbb{R}$ — направленность относительно стандартного отношения порядка, и предположим, что $\{x_\lambda\}_\lambda$ ограничена сверху. Тогда направленность $\{x_\lambda\}_\lambda$ сходится и $\lim_\lambda x_\lambda = \sup_\lambda x_\lambda$.*

Пусть теперь $a \in A$, $\|a\| \le 1$. Тогда $\tau(a) \le 1$ и, так как $\|a^*a\| = \|a\|^2 \le 1$, то $\tau(a^*a) \le 1$. Далее,

$$\big|\tau(u_\lambda a)\big|^2 = \big|\tau(u_\lambda^* a)\big|^2 \le \tau(u_\lambda^* u_\lambda)\tau(a^*a) \le \tau(u_\lambda^* u_\lambda) = \tau(u_\lambda^2).$$

Далее, так как отображение τ — неубывающее (предложение 4.39), то

$$\big|\tau(u_\lambda a)\big|^2 \le \tau(u_\lambda^2) \le \tau(u_\lambda) \le \sup_\lambda \tau(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda).$$

Переходя к пределу, заключаем, что $\big|\tau(a)\big| = \lim_\lambda \big|\tau(u_\lambda a)\big|$, поэтому $\big|\tau(a)\big| \le \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Так как a — произвольный элемент с нормой не больше 1 и $\|\tau\| = 1$, получаем, что $1 \le \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$, откуда и вытекает требуемое.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Докажем теперь импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\{u_\lambda\}$ — некоторая аппроксимативная единица, для которой выполняется равенство $1 = \|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_l)$. Пусть a — некоторый эрмитов элемент, $\|a\| \le 1$. Положим $\tau(a) = \alpha + i\beta$, где α, $\beta \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\tau(a) \in \mathbb{R}$, то есть $\beta = 0$. Рассмотрим случай $\beta \le 0$, случай неотрицательного β рассматривается аналогично. Для любого натурального n имеем:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 = \big\|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\big\| = \big\|a^2 + n^2u_\lambda^2 - in(au_\lambda - u_\lambda a)\big\| \le \\ \le \|a^2\| + \|n^2u_\lambda^2\| + \big\|in(au_\lambda - u_\lambda a)\big\| \le 1 + n^2 + n\|au_\lambda - u_\lambda a\|.\end{aligned}$$

Поэтому, применяя утверждение 4.49, получаем

$$\big|\tau(a - inu_\lambda)\big|^2 \le \|t\|^2\|a - inu_\lambda^2 \le 1 + n^2 + n\|au_\lambda - u_\lambda a\|.$$

Переходя к пределу и учитывая, что $\lim_\lambda \tau(a - inu_\lambda) = \tau(a) - in\lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \tau(a) - in = \alpha + i\beta - in$, а также $\lim_\lambda(au_\lambda - u_\lambda a) = 0$, имеем $|\alpha + i\beta - in|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \le 1 + n^2$, откуда заключаем, что неравенство $-2n\beta \le 1 - \alpha^2 - \beta^2$ выполнено при всех натуральных n. Учитывая, что $\beta \le 0$, последнее возможно только при $\beta = 0$. Таким образом, если a эрмитов, то $\tau(a) \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь $a \in A^+$, $\|a\| \le 1$. Тогда элемент $u_\lambda - a$ эрмитов, $\|u_\lambda - a\| \le 1$, поэтому $\tau(u_\lambda - a) \le 1$. Но тогда $1 \ge \lim_\lambda \tau(u_\lambda - a) = 1 - \tau(a)$, поэтому $\tau(a) \ge 0$, то есть τ — положительный. Теорема доказана. □

Следствие 4.52. *Ограниченный линейный функционал τ на унитальной C^*-алгебре A положителен тогда и только тогда, когда $\tau(1) = \|\tau\|$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{u_i = 1\}$. Это — аппроксимативная единица в алгебре A. Теперь утверждение следствия следует из теоремы 4.50 (равносильность пунктов (1) и (3)). □

Следствие 4.53. *Пусть τ и τ' — положительные линейные функционалы на C^*-алгебре A. Тогда $\|\tau + \tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\|$.*

Доказательство. Действительно, если $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица, то по теореме 4.50 имеем:

$$\|\tau + \tau'\| = \lim_\lambda(\tau + \tau')(u_\lambda) = \lim_\lambda\big(\tau(u_\lambda) + \tau'(u_\lambda)\big) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau'(u_\lambda) = \|\tau\| + \|\tau'\|.$$

Следствие доказано. □

Состоянием C^*-алгебры A называется всякий положительный линейный функционал на A нормы 1. Множество всех состояний алгебры A обозначим через $\mathcal{S}(A)$.

В силу следствия 4.52, имеет место следующий результат, который можно принять за эквивалентное определение состояния.

Следствие 4.54. *Для унитальной C^*-алгебры A, положительный функционал τ является состояниям, если и только если $\tau(1) = 1$.*

Напомним, что элемент $a \in A$ называется нормальным, если $a^* a = a\, a^*$.

Теорема 4.55. *Пусть a — нормальный элемент ненулевой C^*-алгебры A. Тогда существует такое состояние $\tau \in \mathcal{S}(A)$, что $\bigl|\tau(a)\bigr| = \|a\|$.*

Доказательство. Без ограничения общности $a \neq 0$. Рассмотрим коммутативную алгебру $B = C^*(a, 1)$, порожденную элементами 1 и a в унитализации $\tilde{A}$ алгебры A. Так как B коммутативна, по теореме Гельфанда (теорема 3.48) пространство характеров $\Omega(B)$ компактно, и, так как функция $\hat{a}$ непрерывна, существует характер $\tau_2 \in \Omega(B)$ такой, что $\bigl|\tau_2(a)\bigr| = \|\hat{a}\|_\infty = \|a\|$. Кроме того, $\tau_2(1) = 1$, поэтому $\|\tau_2\| = 1$.

Далее, по теореме Хана–Банаха, τ_2 можно продолжить на алгебру $\tilde{A}$ с сохранением нормы. Обозначим продолжение через τ_1. Так как $\tau_1(1) = \tau_2(1) = 1 = \|\tau_1\|$, то функционал τ_1 положителен по следствию 4.52. Положим $\tau = \tau_1|_A$. Тогда τ — положительный линейный функционал на A, $\bigl|\tau(a)\bigr| = \|a\|$, и $\|\tau\| \le \|\tau_1\| = 1$. С другой стороны, $\|a\| = \bigl|\tau(a)\bigr| \le \|\tau\|\|a\|$, откуда $\|\tau\| \ge 1$, то есть $\|\tau\| = 1$. Таким образом, τ — положительный функционал единичной нормы, что и требовалось. □

Утверждение 4.56. *Пусть τ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A. Тогда*

(1) *для данного $a \in A$ равенство $\tau(a^*a) = 0$ выполняется, если и только если $\tau(ba) = 0$ при всех $b \in A$;*

(2) *при всех $a, b \in A$ выполняется неравенство $\tau(b^*a^*ab) \le \|a^*a\|\tau(b^*b)$.*

Доказательство. Напомним неравенство Шварца (следствие 4.45): $\bigl|\tau(b^*a)\bigr| \le \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2}$. Поэтому, если $\tau(a^*a) = 0$, то $\tau(b^*a) = 0$ для всех b. Обратное утверждение очевидно, достаточно взять $b = a^*$.

При доказательстве второго утверждения можно предполагать, что $\tau(b^*b) > 0$ (иначе, в силу первого утверждения, в левой и правой части — нули). Рассмотрим функцию

$$f\colon A \to \mathbb{C}, \qquad f(c) = \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)}.$$

Функция f линейна, так как τ — линейный функционал. Более того, если c положителен, то элемент b^*cb тоже положителен по теореме 4.24, поэтому $f(c) \ge 0$, то есть f — линейный положительный функционал. Применим теорему 4.50. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица. Получаем:

$$\|f\| = \lim_\lambda f(u_\lambda) = \lim_\lambda \frac{\tau(b^*u_\lambda b)}{\tau(b^*b)} = \frac{\tau(b^*b)}{\tau(b^*b)} = 1.$$

Значит $f(a^*a) \le \|a^*a\|$, откуда $f(a^*a) = \tau(b^*a^*ab)/\tau(b^*b) \le \|a^*a\|$, то есть $\tau(b^*a^*ab) \le \tau(b^*b)\|a^*a\|$, что и требовалось. □

Следующий результат касается продолжения положительных функционалов.

Теорема 4.57. *Пусть B — некоторая C^*-подалгебра в C^*-алгебре A и τ — положительный линейный функционал на B. Тогда на A существует положительный линейный функционал τ', продолжающий τ, так что $\|\tau\| = \|\tau'\|$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $A = \tilde{B}$. Определим линейный функционал так: $\tau'(b + \lambda 1) = \tau(b) + \lambda\|\tau\|$, $b \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица в B, тогда $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$ согласно теореме 4.50. Пусть теперь $b \in B$ и $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\bigl|\tau'(b+\mu)\bigr| = \bigl|\tau(b) + \mu\|\tau\|\bigr| = \bigl|\lim_\lambda \tau(bu_\lambda) + \mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)\bigr| = \bigl|\lim_\lambda \tau\bigl((b+\mu)u_\lambda\bigr)\bigr|,$$

где последнее равенство справедливо, поскольку B — идеал в $\tilde{B}$. Продолжим оценку:

$$\bigl|\tau'(b+\mu)\bigr| = \bigl|\lim_\lambda \tau\bigl((b+\mu)u_\lambda\bigr)\bigr| \le \sup_\lambda \|\tau\|\bigl\|(b+\mu)u_\lambda\bigr\| = \|\tau\| \sup_\lambda \bigl\|(b+\mu)u_\lambda\bigr\| \le \|\tau\|\|b+\mu\|,$$

так как $\|u_\lambda\| \le 1$. Поэтому $\|\tau'\| \le \|\tau\|$. Обратное неравенство очевидно, поскольку τ' — продолжение τ. Таким образом, $\|\tau'\| = \|\tau\| = \tau'(1)$, где последнее равенство очевидно из определения τ'. Поэтому τ' положителен в силу следствия 4.52. Утверждение теоремы доказано для случая $A = \tilde{B}$.

Перейдем к общему случаю. При необходимости, заменим B и A на их унитализации $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ и продолжим τ с подалгебры B на $\tilde{B}$ как описано выше. Поэтому можно предполагать, что A содержит 1, которая лежит в B. Тогда $\tau(1) = \|\tau\|$. Воспользуемся теоремой Хана–Банаха и продолжим линейный ограниченный функционал τ до линейного функционала τ' на A с сохранением нормы. Но тогда $\tau'(1) = \tau(1) = \|\tau\| = \|\tau'\|$, и функционал τ' положителен в силу следствия 4.52. □

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.58. *Пусть A — некоторая C^*-алгебра и τ — ограниченный линейный функционал на ней. Тогда*

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\| \le 1} \big|\operatorname{Re}\tau(a)\big|.$$

Доказательство. Действительно, $\big|\operatorname{Re}\tau(a)\big| \le \big|\tau(a)\big|$, поэтому $\sup_{\|a\|\le 1} \big|\operatorname{Re}\tau(a)\big| \le \|\tau\|$. С другой стороны, если $a \in A$, $\|a\| \le 1$, то существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, что $\lambda\tau(a) \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\big|\tau(a)\big| = \big|\lambda\tau(a)\big| = \big|\tau(\lambda a)\big| = \big|\operatorname{Re}(\lambda\tau(a))\big| = \big|\operatorname{Re}(\tau(\lambda a))\big|,$$

причем $\|\lambda a\| \le 1$, поэтому искомое равенство достигается. □

Пусть τ — ограниченный линейный функционал на A. Определим отображение τ^* так: $\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)}$. Заметим, что τ^* — комплексно-линейный функционал на A, тем самым, мы определили отображение $A^* \to A^*$. Ясно, что это отображение сопряженно линейно, $(\tau^*)^* = \tau$ и $\|\tau^*\| = \|\tau\|$.

Далее, назовем функционал τ ***самосопряженным***, если $\tau^* = \tau$. Каждый ограниченный линейный функционал представим в виде $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, где τ_1 и τ_2 — однозначно определенные самосопряженные функционалы, $\tau_1 = (\tau + \tau^*)/2$, $\tau_2 = (\tau - \tau^*)/2i$.

Лемма 4.59. *Функционал τ самосопряжен тогда и только тогда, когда $\tau(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Если $a \in A_{sa}$, $\tau(a) = \tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \overline{\tau(a)}$, поэтому $\tau(a) \in \mathbb{R}$. Обратно, представим произвольный элемент $a \in A$ в виде $a = b + ic$, где $b = (a + a^*)/2$ и $c = (a - a^*)/2i$ — эрмитовы элементы алгебры. Тогда $\tau(b)$, $\tau(c) \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\tau(a^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)} = \overline{\tau(b + ic)} = \overline{\tau(a)},$$

откуда $\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \tau(a)$, что и требовалось. □

Обозначим через τ' ограничение функционала τ на A_{sa}. Напомним, что A_{sa} — вещественное линейное подпространство. Если τ — самосопряжен, то $\tau' \colon A_{sa} \to \mathbb{R}$ — ограниченный вещественный линейный функционал.

Лемма 4.60. *В сделанных обозначениях, если τ самосопряжен, то $\|\tau'\| = \|\tau\|$.*

Доказательство. Нужно проверить, что

$$\|\tau\| = \|\tau'\| = \sup_{\substack{a \in A_{sa} \\ \|a\| \le 1}} \big|\tau(a)\big|.$$

Действительно, так как τ самосопряжен, то $\operatorname{Re}\tau(a) = \tau\big(\operatorname{Re}(a)\big)$ (проверьте). Поэтому, по лемме 4.58,

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\| \le 1} \big|\operatorname{Re}\tau(a)\big| = \sup_{\|a\| \le 1} \big|\tau(\operatorname{Re} a)\big| \le \sup_{\substack{b \in A_{sa} \\ \|b\| \le 1}} \tau(b) \le \|\tau\|,$$

откуда и вытекает требуемое. □

Напоминание 4.61. Пусть Ω — компактное хаусдорфово пространство, и $C(\Omega,\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных вещественнозначных функций на Ω (операции — поточечные, норма — sup-норма). Тогда теорема Рисса–Маркова–Какутани утверждает, что для каждого вещественного непрерывного линейного функционала $\tau\colon C(\Omega,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ существует единственная знакопеременная мера μ, такая, что $\tau(f)=\int f\,d\mu$ для всех $f\in C(\Omega,\mathbb{R})$. Более того, $\|\mu\|=\|\tau\|$, и μ — мера, если и только если функционал τ — положителен, то есть $\tau(f)\ge 0$ для любой неотрицательной функции f.

Для знакопеременных мер известно разложение Жордана, а именно, для каждой знакопеременной меры μ существуют меры $\mu^\pm$, такие, что $\mu=\mu^+-\mu^-$ и $\|\mu\|=\|\mu^+\|+\|\mu^-\|$. Теорема Рисса превращает это утверждение в следующее.

Утверждение 4.62. *Для каждого ограниченного вещественного линейного функционала $\tau\colon\mathbb{C}(\Omega,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ существуют положительные ограниченные линейные функционалы $\tau_\pm\colon\mathbb{C}(\Omega,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, такие, что $\tau=\tau_+-\tau_-$ и $\|\tau\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|$.*

Наша ближайшая цель — обобщить это утверждение на случай C^*-алгебр.

Обозначим через A^*_{sa} множество всех самосопряженных функционалов. Ясно, что A^*_{sa} — вещественное линейное банахово пространство, а также вещественное линейное подпространство в A^*. Для вещественного линейного пространства X обозначим через $X^\#$ вещественное двойственное пространство, то есть пространство всех ограниченных вещественных линейных функционалов на X.

Лемма 4.63. *Определенное выше отображение $\tau\mapsto\tau'$ является изометричным вещественно-линейным изоморфизмом $A^*_{sa}\to A^\#_{sa}$.*

Доказательство. Действительно, линейность очевидна из определения, норма сохраняется по лемме 4.63. Инъективность отображения очевидна. Наконец, если $\tau'\in A^\#$, то определим $\tau\in A^*$ так. Представим произвольный элемент $a\in A$ в виде $a=b+ic$, где $b=(a+a^*)/2$ и $c=(a-a^*)/2i$ — эрмитовы элементы, и положим $\tau(a)=\tau'(b)+i\tau'(c)$. Тогда

$$\tau^*(a)=\overline{\tau(a^*)}=\overline{\tau(b-ic)}=\overline{\tau'(b)-i\tau'(c)}=\tau'(b)+i\tau'(c)=\tau(a),$$

то есть $\tau\in A^*_{sa}$ и, очевидно, ограничение τ на A_{sa} совпадает с τ'. Поэтому отображение $\tau\mapsto\tau'$ сюръективно. Лемма доказана. □

Теорема 4.64 (разложение Жордана). *Для каждого самосопряженного ограниченного линейного функционала τ на C^*-алгебре A существуют положительные ограниченные функционалы $\tau_\pm$ на A, такие, что $\tau=\tau_+-\tau_-$ и $\|\tau\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через Ω множество всех положительных функционалов τ, таких, что $\|\tau\|\le 1$. Тогда множество Ω замкнуто в $*$-слабой топологии, содержится в единичном шаре в пространстве A^*, который компактен в $*$-слабой топологии (теорема Банаха–Алаоглу), поэтому Ω — хаусдорфов компакт (в $*$-слабой топологии).

Определим отображение $\theta\colon A_{sa}\to C(\Omega,\mathbb{R})$, задав функцию $\theta(a)\in C(\Omega,\mathbb{R})$ так: $\theta(a)(\tau)=\tau(a)$, $\tau\in\Omega$. Ясно, что отображение θ вещественно-линейное, кроме того, если $a\in A^+$ — положительный элемент, то $\tau(a)\in\mathbb{R}_+$, то есть функция $\theta(a)$ принимает неотрицательные значения. Далее, $\big\|\theta(a)\big\|=\sup_{\tau\in\Omega}|\tau(a)|\le\|a\|$, так как $\|\tau\|\le 1$. С другой стороны, по теореме 4.55 существует такой положительный функционал τ единичной нормы, то есть $\tau\in\Omega$, что $\big|\tau(a)\big|=\|a\|$, поэтому $\big\|\theta(a)\big\|=\|a\|$, то есть отображение θ сохраняет норму. Положим $L=\theta(A_{sa})\subset C(\Omega,\mathbb{R})$ — (вещественное) линейное подпространство. Тогда $\theta\colon A_{sa}\to L$ — линейный изоморфизм, сохраняющий норму.

Пусть $\tau\in A^*_{sa}$, тогда $\tau'=\tau\big|_{A_{sa}}\in A^\#_{sa}$ можно рассматривать как функционал на L той же нормы. Тогда, по теореме Хана–Банаха, существует продолжение $\rho\in C(\Omega,\mathbb{R})^\#$ с L на $C(\Omega,\mathbb{R})$, то есть $\rho\circ\theta=\tau'$, причем $\|\rho\|=\|\tau'\|$. Теперь применим к ρ утверждение 4.62, согласно которому существуют положительные функционалы $\rho_\pm\in C(\Omega,\mathbb{R})^\#$, такие, что $\rho=\rho_+-\rho_-$ и $\|\rho\|=\|\rho_+\|+\|\rho_-\|$. Положим $\tau'_\pm=\rho_\pm\circ\theta$. Ясно, что $\tau'_\pm\in A^\#_{sa}$. Как в доказательстве леммы 4.63, построим соответствующие $\tau_\pm\in A^*_{sa}$. Тогда $\tau=\tau_+-\tau_-$. Легко проверить, что функционалы $\tau_\pm$ — положительны. Наконец, используя лемму 4.58, получаем

$$\|\tau\|=\|\tau'\|=\|\rho\|=\|\rho_+\|+\|\rho_-\|\ge\|\tau'_+\|+\|\tau'_-\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|\ge\|\tau\|,$$

где первое неравенство имеет место, поскольку $\rho_\pm$ является продолжением $\tau'_\pm$, последнее неравенство — это неравенство треугольника. Поэтому $\|\tau_+\|+\|\tau_-\|=\|\tau\|$. Теорема доказана. □

Замечание 4.65. Можно показать, что функционалы $\tau_\pm$ из теоремы 4.64 определены однозначно.

4.6 Конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала

Представлением C^****-алгебры*** A называется пара (H,φ), где H — некоторое гильбертово пространство, а $\varphi\colon A\to\mathcal{B}(H)$ — $*$-гомоморфизм в алгебру ограниченных линейных операторов на H. Представление называется ***точным***, если φ инъективен.

Пусть $(H_\lambda)_\lambda$ — семейство гильбертовых пространств. Тогда определена их прямая сумма $\bigoplus_\lambda H_\lambda=\big\{(h_\lambda)\in\prod_\lambda H_\lambda:\sum_\lambda\|h_\lambda\|<\infty\big\}$, которая является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\big\langle(u_\lambda),(v_\lambda)\big\rangle=\sum_\lambda\langle u_\lambda,v_\lambda\rangle$.

Задача 4.66. Проверьте, что $\bigoplus_\lambda H_\lambda$ с очевидными покомпонентными операциями и определенным выше скалярным произведением действительно является линейным пространством с корректно определенным скалярным произведением, полным относительно соответствующей нормы, то есть является гильбертовым пространством.

Далее, пусть $\big((H_\lambda,\varphi_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство представлений алгебры A. Тогда определена их ***прямая сумма*** (H,φ), где $H=\bigoplus_\lambda H_\lambda$, а $\varphi(a)\big((h_\lambda)\big)=\big(\varphi_\lambda(a)(h_\lambda)\big)$. Если для любого $a\in A$ найдется индекс λ, такой, что $\varphi_\lambda(a)\neq 0$, то представление (H,φ) — точное.

Задача 4.67. Проверьте, что (H,φ) действительно является представлением алгебры A, то есть что $\varphi\colon A\to\mathcal{B}(H)$ — некоторый $*$-гомоморфизм.

Напомним, что для каждого линейного пространства L со скалярным произведением можно определить пополнение $\hat{L}$ соответствующего нормированного пространства, на котором, в свою очередь, определено скалярное произведение, являющееся продолжением исходного. В результате получается гильбертово пространство, которое называется ***гильбертовым пополнением*** L.

Пусть τ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A.

$$N_\tau=\big\{a\in A:\tau(a^*a)=0\big\}.$$

Лемма 4.68. *В сделанных обозначениях, N_τ — замкнутый левый идеал в A.*

Доказательство. Действительно, для любого $x\in A$ и $a\in N_\tau$ имеем: $\tau\big((xa)^*(xa)\big)=t\big((a^*x^*x)a\big)=0$ по утверждению 4.56, поэтому $xa\in N_\tau$, то есть N_τ — левый идеал. Замкнутость его следует из непрерывности τ. □

Рассмотрим фактор-пространство A/N_τ и определим отображение

$$F_\tau\colon\big(A/N_\tau\big)^2\to\mathbb{C},\qquad F_\tau:(a+N_\tau,b+N_\tau)\mapsto\tau(b^*a).$$

Лемма 4.69. *Определенное только что отображение задает на A/N_τ полуторалинейное скалярное произведение.*

Доказательство. Согласно лемме 4.43, отображение $f_\tau:(a,b)\mapsto\tau(b^*a)$ задает на A положительную полуторалинейную форму. Нужно показать, что F_τ невырождена на A/N_τ. Действительно, $F_\tau(a+N_\tau,a+N_\tau)=\tau(a^*a)=0$, если и только если $a\in N_\tau$, то есть, $a+N_\tau=0$ в A/N_τ, что и требовалось. □

Обозначим через H_τ гильбертово пополнение пространства A/N_τ. Для каждого $a\in A$ определим отображение $\varphi(a)\colon A/N_\tau\to A/N_\tau$ так: $\varphi(a)(b+N_\tau)=ab+N_\tau$.

Лемма 4.70. *Отображение $\varphi(a)$ — линейно, более того $\big\|\varphi(a)\big\|\le\|a\|$, в частности, $\varphi(a)\in\mathcal{B}(A/N_\tau)$.*

Доказательство. Линейность очевидна:

$$\begin{aligned}\varphi(a)\big((b_1+N_\tau)+(b_2+N_\tau)\big)=\varphi(a)(b_1+b_2+N_\tau)=a(b_1+b_2)+N_\tau=(ab_1+N_\tau)+(ab_2+N_\tau)=\\=\varphi(a)(b_1+N_\tau)+\varphi(a)(b_2+N_\tau),\end{aligned}$$

и

$$\varphi(a)\big(\lambda(b+N_\tau)\big)=\varphi(a)(\lambda b+N_\tau)=a(\lambda b)+N_\tau=\lambda ab+N_\tau=\lambda\varphi(a)(b+N_\tau).$$

Далее, по определению скалярного произведения на A/N_τ имеем:

$$\big\|\varphi(a)(b+N_\tau)\big\|^2=\|ab+N_\tau\|^2=\tau\big((ab)^*(ab)\big)=\tau(b^*a^*a\,b)\le\|a^*a\|\tau(b^*b)=\|a\|^2\|b+N_\tau\|^2$$

где неравенство следует из утверждения 4.56, откуда $\big\|\varphi(a)\big\|\le\|a\|$, что и требовалось. □

Оператор $\varphi(a)$ единственным образом продолжается до непрерывного оператора $\varphi_\tau(a)$ на пополнении H_τ, в результате получаем отображение $\varphi_\tau\colon A \to \mathcal{B}(H_\tau)$, $\varphi_\tau\colon a \mapsto \varphi_\tau(a)$.

Лемма 4.71. *Отображение $\varphi_\tau\colon A \to \mathcal{B}(H_\tau)$, $\varphi_\tau\colon a \mapsto \varphi_\tau(a)$, является $*$-гомоморфизмом алгебр, то есть пара (H_τ, φ_τ) — это некоторое представление алгебры A.*

Доказательство. Действительно,

$$\varphi_\tau(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)(b + N_\tau) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)b + N_\tau = \lambda_1(a_1 b + N_\tau) + \lambda_2(a_2 b + N_\tau) = \\ = \lambda_1 \varphi_\tau(a_1)(b + N_\tau) + \lambda_2 \varphi_\tau(a_2)(b + N_\tau),$$

и

$$\varphi_\tau(a_1) \circ \varphi_\tau(a_2)(b + N_\tau) = \varphi_\tau(a_1)(a_2 b + N_\tau) = a_1 a_2 b + N_\tau = \varphi_\tau(a_1 a_2)(b + N_\tau),$$

поэтому φ_τ — гомоморфизм алгебр. Остается проверить, что $\varphi_\tau(a^*) = \big(\varphi_\tau(a)\big)^*$. Для любых b_1, $b_2 \in A$ имеем:

$$\big\langle \varphi_\tau(a^*)(b_1 + N_\tau), b_2 + N_\tau \big\rangle = \langle a^* b_1 + N_\tau, b_2 + N_\tau \rangle = \tau\big(b_2^*(a^* b_1)\big) = \tau\big((ab_2)^* b_1\big) = \\ = \langle b_1 + N_\tau, ab_2 + N_\tau \rangle = \big\langle b_1 + N_\tau, \varphi_\tau(a)(b_2 + N_\tau) \big\rangle = \big\langle \big(\varphi_\tau(a)\big)^*(b_1 + N_\tau), b_2 + N_\tau \big\rangle,$$

поэтому $\varphi_\tau(a^*) = \big(\varphi_\tau(a)\big)^*$, что и требовалось. □

Представление (H_τ, φ_τ) называется ***представлением Гельфанда–Наймарка–Сигала*** или ***ГНС-представлением***, ассоциированным с τ. Прямая сумма представлений (H_τ, φ_τ) по всем состояниям $\tau \in \mathcal{S}(A)$ алгебры A называется ***универсальным представлением алгебры*** A.

Теорема 4.72 (Гельфанд–Наймарк)**.** *Всякая C^*-алгебра A допускает точное представление. В частности, ее универсальное представление является точным.*

Доказательство. Обозначим универсальное представление алгебры A через (H, φ), и пусть $\varphi(a) = 0$ для некоторого элемента $a \in A$. По теореме 4.55 для нормального элемента $a^* a$ существует состояние $\tau \in \mathcal{S}(A)$, такое, что $\tau(a^* a) = \|a^* a\|$. По теореме 4.18 элемент $a^* a$ положителен, поэтому определен положительный элемент $b = (a^* a)^{1/4}$. Тогда $\|a\|^2 = \|a^* a\| = \tau(a^* a) = \tau(b^4)$, а с другой стороны,

$$\big\|\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)\big\|^2 = \big\langle \varphi_\tau(b)(b + N_\tau), \varphi_\tau(b)(b + N_\tau) \big\rangle = \langle b^2 + N_\tau, b^2 + N_\tau \rangle = \tau\big((b^2)^* b^2\big) = \tau(b^4),$$

поэтому $\|a\|^2 = \big\|\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)\big\|^2$. Наконец, $\varphi_\tau(b^4) = \varphi_\tau(a^* a) = \varphi_\tau(a^*)\varphi_\tau(a) = 0$ для любого $\tau \in \mathcal{S}(A)$, поэтому $\varphi_\tau(b^4) = \big(\varphi_\tau(b)\big)^4 = 0$. Но элемент b — эрмитов, поэтому $\varphi_\tau(b)$ — тоже эрмитов, и, значит, $\varphi_\tau(b) = 0$ по следствию 3.27. Итак, $\|a\| = 0$, поэтому $a = 0$, откуда φ — инъективно, что и требовалось. □

В качестве примера использования ГНС-конструкции опишем конструкцию, превращающую матричную алгебру над C^*-алгеброй в C^*-алгебру. Пусть A — некоторая алгебра, и $M_n(A)$ — алгебра всех $(n \times n)$-матриц с элементами из A. Стандартным образом определенные операции над матрицами превращают $M_n(A)$ в алгебру, а если исходная алгебра A является $*$-алгеброй, то операция $*\colon (a_{ij}) \mapsto (a_{ji}^*)$ является, очевидно, инволюцией и превращает алгебру $M_n(A)$ в $*$-алгебру.

Пусть $\varphi\colon A \to B$ — некоторый $*$-гомоморфизм между $*$-алгебрами A и B. Несложно проверить, что отображение $M_n(A) \to M_n(B)$, заданное так: $(a_{ij}) \mapsto (\varphi(a_{ij}))$ также является $*$-гомоморфизмом матричных алгебр. Будем обозначать это отображение той же буквой φ и называть ***раздутием*** исходного гомоморфизма.

Задача 4.73. Проверьте, что раздутие $*$-гомоморфизма является $*$-гомоморфизмом матричных алгебр. Докажите, что если исходный гомоморфизм инъективен, то его раздутие — тоже.

Пусть H — гильбертово пространство. Через $H^{(n)}$ обозначим прямую ортогональную сумму n экземпляров H. Определим отображение $\varphi\colon M_n(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{B}(H^{(n)})$ так: для каждого $u = (u_{ij}) \in M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ и $x = (x^1, \ldots, x^n) \in H^{(n)}$ положим

$$\varphi(u)(x) = u \cdot x = \Big(\sum_{j=1}^n u_{1j} x^j\ \ldots, \sum_{j=1}^n u_{nj} x^j\Big),$$

где точка обозначает матричное умножение.

Лемма 4.74. *В сделанных обозначениях, отображение $\varphi\colon M_n\big(\mathcal{B}(H)\big) \to \mathcal{B}(H^{(n)})$ задает $*$-изоморфизм.*

Доказательство. Линейность отображения φ очевидна из формулы $\varphi(u) = u \cdot x$ и правила умножения матриц. Далее, $\varphi(u_1 \cdot u_2)(x) = (u_1 \cdot u_2) \cdot x = u_1 \cdot (u_2 \cdot x) = \varphi(u_1)\big(\varphi(u_2)(x)\big)$, поэтому $\varphi(u_1 \cdot u_2) = \varphi(u_1) \circ \varphi(u_2)$. Наконец, для любых x, $y \in H^{(n)}$ имеем:

$$\big\langle \varphi(u^*)(x), y \big\rangle = \langle u^* \cdot x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \Big\langle \sum_{j=1}^n u^*_{ji} x^j, y^i \Big\rangle = \sum_{i,\,j=1}^n \langle u^*_{ji} x^j, y^i\rangle = \sum_{i,\,j=1}^n \langle x^j, u_{ji} y^i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Big\langle x^j, \sum_{j=1}^n u_{ji} y^i \Big\rangle = \big\langle x, \varphi(u)(y)\big\rangle = \big\langle \varphi(u)^*(x), y\big\rangle,$$

откуда $\varphi(u^*) = \big(\varphi(u)\big)^*$, что и требовалось. □

Будем называть ***матрицей оператора*** $v \in \mathcal{B}(H^{(n)})$ такую матрицу $u \in M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$, что $\varphi(u) = v$. По лемме 4.74 эта матрица однозначно определена.

Определим норму на алгебре $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$, положив $\|u\| = \big\|\varphi(u)\big\| = \sup_x \big\|\varphi(u)(x)\big\|$, где супремум берется по всем $x \in H^{(n)}$, $\|x\| \le 1$.

Нам будут полезны следующие оценки.

Задача 4.75. Докажите, что для нормы $\|u\| = \big\|\varphi(u)\big\|$ на алгебре $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ имеют место следующие неравенства*:*

$$\|u_{ij}\| \le \|u\| \le \sum_{p,\,q=1}^n \|u_{pq}\|.$$

Лемма 4.76. *Норма $\|u\| = \big\|\varphi(u)\big\|$ превращает алгебру $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ в C^*-алгебру.*

Доказательство. Действительно,

$$\|u^* \cdot u\| = \big\|\varphi(u^* \cdot u)\big\| = \big\|\varphi(u^*) \circ \varphi(u)\big\| = \big\|\varphi(u)^* \circ \varphi(u)\big\| = \big\|\varphi(u)\big\|^2 = \|u\|^2,$$

где первое и последнее равенства — определение нормы на $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$, второе и третье выполнены, так как φ — $*$-гомоморфизм, а четвертое — так как $\mathcal{B}(H^{(n)})$ является C^*-алгеброй. Полноту можно проверить с помощью оценок из задачи 4.75. Лемма доказана. □

Теорема 4.77. *Для всякой C^*-алгебры A на соответствующей матричной алгебре $M_n(A)$ существует единственная норма, превращающая ее в C^*-алгебру.*

Доказательство. Рассмотрим универсальное представление (H, φ) алгебры A, которое существует по теореме Гельфанда–Наймарка. Напомним, что это инъективный $*$-гомоморфизм $\varphi\colon A \to \mathcal{B}(H)$, тогда его раздутие $\varphi\colon M_n(A) \to M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ — также инъективный $*$-гомоморфизм (см. задачу 4.73). Для произвольного $a \in A$ положим $\|a\| = \big\|\varphi(a)\big\|$, где слева стоит определенная выше норма, превращающая $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ в C^*-алгебру в соответствии с леммой 4.76. Единственность следует из следствия 3.28. □

Замечание 4.78. Согласно G.J. Murphy, использование ГНС-конструкции — единственный способ доказать теорему 4.77

Другое приложение — «естественное» доказательство следующей важной теоремы.

Теорема 4.79. *Пусть $a \in A_{sa}$ — некоторый самосопряженный элемент C^*-алгебры A. Тогда a положителен в том и только том случае, когда $\tau(a) \ge 0$ для всех положительных линейных функционалов τ на A.*

Доказательство. Если a — положителен, то $\tau(a) \in \mathbb{R}^+$ по определению положительного функционала. Обратно, пусть $\tau(a) \ge 0$ для всех положительных τ. Рассмотрим универсальное представление (H, φ) алгебры A. Фиксируем произвольный $x \in H$. Определим на A следующий линейный функционал: $\psi_x\colon b \mapsto \big\langle \varphi(b)(x), x\big\rangle$.

Лемма 4.80. *Функционал $\psi_x\colon A \to \mathbb{C}$, $\psi_x\colon b \mapsto \big\langle \varphi(b)(x), x\big\rangle$ положителен для каждого $x \in H$.*

Доказательство. Действительно, если $b \in A^+$, то оператор $\varphi(b) \in \mathcal{B}(H)^+$, поскольку φ — это $*$-изоморфизм. Тогда определен самосопряженный положительный оператор $\beta = \big(\varphi(b)\big)^{1/2} \in \mathcal{B}(H)^+$, причем $\beta \circ \beta = \varphi(b)$ и

$$\big\langle \varphi(b)(x), x \big\rangle = \big\langle \beta\big(\beta(x)\big), x \big\rangle = \big\langle \beta(x), \beta(x) \big\rangle \geq 0,$$

что и требовалось. $\square$

Итак, каждый функционал ψ_x положителен, поэтому, по предположению, $\psi_x(a) =< \varphi(a)(x), x\big\rangle \geq 0$, причем последнее неравенство выполнено для любого x. Кроме того, так как a самосопряжен по условию, а φ — это $*$-изоморфизм, то $\varphi(a)$ тоже самосопряжен, поэтому $\varphi(a)$ — положительный оператор, то есть, $\varphi(a) \in \varphi(A)^+$, откуда $a \in A^+$, так как φ является $*$-изоморфизмом. $\square$

Тема 5

Частичный порядок с единицей на векторных пространствах

План. Упорядоченные вещественные векторные пространства. Конус положительных элементов. Порядковая единица и архимедова порядковая единица. Положительные вещественные функционалы. Состояния. Порядковая полунорма. Упорядоченные $*$-пространства, положительные функционалы, состояния и порядковые полунормы на них. Минимальная и максимальная порядковые полунормы.

Этот раздел лекций основан на [13].

5.1 Вещественные векторные пространства с порядком

В этом разделе ***все рассматриваемые векторные пространства будут вещественными***.

Пусть V — (вещественное) векторное пространство. Тогда ***конусом*** в V назовем каждое непустое $C \subset V$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) для каждого $a \in [0, \infty)$ и $v \in C$ выполняется $av \in C$;

(2) для любых $v, w \in C$ имеем $v + w \in C$.

Заметим, что каждый конус содержит нулевой вектор 0, так как $0 = 0v$ для любого $v \in C$.

Пример 5.1. Тривиальным примером конуса может служить подпространство $C = \{0\}$.

Пусть в векторное пространстве V фиксирован некоторый конус $V^+ \subset V$, такой, что $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$. Тогда конус V^+ порождает на V естественный частичный порядок: $v \leq w$, если и только если $w - v \in V^+$. Векторное пространство V вместе с таким фиксированным конусом называется ***упорядоченным векторным пространством***.

Пример 5.2. В качестве V^+ можно взять тривиальный конус $\{0\}$. Тогда соответствующий частичный порядок также будет тривиальным: в нем никакие два различных элемента несравнимы.

Предложение 5.3. *Определенный выше частичный порядок инвариантен относительно сдвигов и умножения на неотрицательные числа. Кроме того, $0 \in V^+$, поэтому $v \in V^+$ тогда и только тогда, когда $v \geq 0$.*

Доказательство. Если $v \leq w$, то для каждого $x \in V$ и $a \in [0, \infty)$ имеем $(w+x)-(v+x) = w - v \in V^+$, так что $v + x \leq w + x$, и $aw - av = a(w - v) \in V^+$ откуда $av \leq aw$. Далее, 0 принадлежит любому конусу, в частности, конусу V^+. Наконец, если $v = v - 0 \in V^+$, то $v \geq 0$. Обратно, если $v \geq 0$, то $v = v - 0 \in V^+$. □

Предложение 5.3 дает мотивацию называть V^+ ***конусом положительных элементов*** или, короче, ***положительным конусом***, что мы и будем делать.

Предложение 5.4. *Пусть на векторном пространстве V задан частичный порядок, инвариантный относительно сдвигов и умножения на неотрицательные числа. Тогда множество $V^+ = \{v \in V : v \geq 0\}$ является конусом в V, для которого $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, так что V с таким V^+ — упорядоченное векторное пространство, причем отношение порядка, порожденное на нем конусом V^+, совпадает с исходным.*

Доказательство. Пусть $a \in [0, \infty)$ и $v \in V^+$, тогда $av \in V^+$ по условию, так что первое свойство из определения конусов выполнено. Далее, пусть v, $w \in V^+$. Тогда из $v \geq 0$ и инвариантности относительно сдвигов следует, что $v + w \geq w \geq 0$, откуда $v + w \in V^+$, что доказывает и второе свойство. Итак, V^+ —конус. Покажем теперь, что $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$. Пусть это не так, т.е. существует ненулевой $v \in V^+ \cap (-V^+)$. Последнее означает, что $v \geq 0$ и $-v \geq 0$. Так как порядок инварианте относительно сдвигов, из второго неравенства заключаем, что $0 \geq v$. В силу антисимметричности частичного порядка, заключаем, что $v = 0$. Наконец, $v \leq w$ в исходном порядке тогда и только тогда, когда $0 = v - v \leq w - v$, то есть $w - v \in V^+$, то есть $v \leq w$ в упорядоченном векторном пространстве V с конусом V^+. □

Итак, мы показали эквивалентность определения упорядоченного метрического пространства с помощью конуса положительных элементов и в терминах свойств инвариантности частичного порядка относительно сдвигов и растяжений.

Следствие 5.5. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство. Тогда для любых v, v', w, $w' \in V$ и $a \leq 0$ таких, что $v \leq w$ и $v' \leq w'$, имеем $v + v' \leq w + w'$ и $aw \leq av$, в частности, $-w \leq -v$.*

Доказательство. Так как $w - v \geq 0$ и $w' - v' \geq 0$, то $(w + w') - (v + v') = (w - v) + (w' - v') \geq 0$, что доказывает первое неравенство. Для доказательства второго достаточно заметить, что $(-v) - (-w) = w - v \geq 0$ и воспользоваться инвариантностью порядка относительно умножения на неотрицательные числа. □

Элемент $e \in V$ упорядоченного векторного пространства называется ***порядковой единицей***, если для каждого $v \in V$ существует число $r > 0$, для которого $v \leq re$.

Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство. Конус V^+ называется ***полным***, если $V = V^+ - V^+$ (то есть любой вектор из V представим в виде разности двух положительных векторов).

Лемма 5.6. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей $e \in V$. Тогда*

(1) *$e \in V^+$;*

(2) *если $v \in V$, $a \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ таковы, что $v \leq re$, то для всех $s \geq r$ выполняется $v \leq se$;*

(3) *для любых $v_1, \ldots, v_n \in V$ существует $r > 0$, для которого $v_i \leq re$ при всех i;*

(4) *конус V^+ — полный;*

(5) *если $v_1, \ldots, v_n \in V^+$ таковы, что $v_1 + \ldots + v_n = 0$, то $v_1 = \cdots = v_n = 0$;*

(6) *если $v_1, \ldots, v_n \in V^+$ и $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$ таковы, что $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$, то для каждого i или $a_i = 0$, или $v_i = 0$.*

Доказательство. (1) Существует $r > 0$, для которого $re \geq -e$. Инвариантность относительно сдвигов дает $(r + 1)e = re + e \geq 0$, и так как $r + 1 > 0$, то $e = (r + 1)^{-1}(r + 1)e \geq 0$, что и требовалось.

(2) Так как $e \geq 0$ по пункту (1) и $s - r \geq 0$, то $(s - r)e \geq 0$, поэтому, в силу следствия 5.5, имеем $se = (s - r)e + re \geq 0 + v = v$, что и требовалось.

(3) Для каждого i найдем $r_i > 0$ такое, что $v_i \leq r_i e$, и положим $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Остается применить пункт (2).

(4) Выберем произвольное $v \in V$. Мы должны показать, что $v = u - w$ для некоторых $u, w \in V^+$. По пункту (3), существует $r > 0$, для которого $v \leq re$ и $-v \leq re$, откуда $re - v \geq 0$ и $re + v \geq 0$. Положим $u = (re + v)/2$ и $w = (re - v)/2$, получаем требуемое представление для v.

(5) Докажем индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть для $n - 1$ утверждение доказано. Так как $v_n = -v_1 - \cdots - v_{n-1} \in V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, откуда $v_n = 0$. Но тогда, по индукции, $v_1 = \cdots = v_{n-1} = 0$.

(6) Мгновенно следует из пункта (5). □

Замечание 5.7. Отметим, что для пространства $V = \{0\}$ элемент 0 является порядковой единицей. Если же $V \neq \{0\}$, но $V^+ = \{0\}$, то порядковая единица e, если есть, должна, в силу леммы 5.6, равняться 0, но тогда вектор $re = 0$ при всех $r \in \mathbb{R}$, поэтому $v \leq re$ не может быть выполнено ни для ненулевого $v \in V$ ни при каком $r \in \mathbb{R}$, что противоречит определению порядковой единицы. Так что такое пространство порядковой единицы не содержит. Итак, если упорядоченное линейное пространство V отлично от нуля и обладает порядковой единицей e, то $V^+ \neq \{0\}$ и $e \neq 0$.

Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда e называется ***архимедовой порядковой единицей***, если для каждого $v \in V$ такого, что $re + v \geq 0$ для всех $r > 0$, выполняется $v \in V^+$ (пространство V не содержит «неположительных инфинитезимальных элементов»).

Лемма 5.8. *Пусть V — упорядоченное пространство с архимедовой порядковой единицей e. Предположим, что для некоторых $v \in V$, $r_0 \geq 0$ и всех $r > r_0$ выполняется $re + v \geq 0$. Тогда $r_0 e + v \geq 0$.*

Доказательство. Так как $re+v \geq 0$ для всех $r > r_0$, то $(s+r_0)e+v) \geq 0$ при всех $s > 0$, откуда $se+(r_0e+v) \geq 0$ при всех $s > 0$. Так как порядковая единица — архимедова, то $r_0 e + v \geq 0$, что и требовалось. □

5.1.1 Положительные $\mathbb{R}$-линейные функционалы и состояния

Пусть V — упорядоченное векторное пространство и $f\colon V \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Тогда f называется ***положительным функционалом***, если $f(V^+) \subset [0, \infty)$.

Предложение 5.9. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство. Линейный функционал f на V положителен, если и только если он сохраняет порядок.*

Доказательство. Действительно, пусть f положителен, и $v, w \in V$ таковы, что $v \leq w$, т.е. $w - v \in V^+$. Тогда $f(w - v) \geq 0$ по условию, откуда $f(w) \geq f(v)$, то есть f сохраняет порядок. Обратно, пусть f сохраняет порядок. Заметим, что для каждого элемента $u \in V^+$ выполнено $u \geq 0$, где 0 — нулевой вектор. Поэтому, так как f сохраняет порядок, то $f(u) \geq f(0) = 0$, то есть f — положителен. □

Говорят, что $S \subset V$ ***мажорирует*** V^+, если для каждого $v \in V^+$ существует $w \in S$ такой, что $v \leq w$.

Предложение 5.10. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство.*

(1) *Если $S \subset V$ мажорирует V^+, и $T \supset S$, то T также мажорирует V^+.*

(2) *Если $e \in V$ — порядковая единица, а E — подпространство в V, содержащее e, то E мажорирует V^+.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Действительно, так как e — порядковая единица, то для любого $v \in V$ найдется $r > 0$, для которого $r\,e \geq v$. Но $r\,e \in E$, поэтому E, что и требовалось. □

Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство с полным положительным конусом, E — подпространство в V, которое мажорирует V^+. Для каждого $h \in V$ положим

$$L_h = \{z \in E : z \leq h\}, \qquad \text{и} \qquad U_h = \{z \in E : h \leq z\}.$$

Лемма 5.11. *В сделанных обозначениях, множества L_h и U_h непусты для любого $h \in V$.*

Доказательство. Так как V^+ — полный конус, то каждое $h \in V$ представимо в виде $w - v$, где $v, w \in V^+$. Но тогда $-v \leq w - v \leq w$, так как $0 \leq w \leq w + v$, а порядок инвариантен относительно сдвигов. Так как E мажорирует V^+, то существуют $\alpha, \beta \in E$ такие, что $\alpha \geq v$ и $\beta \geq w$. Но тогда, в силу леммы 5.5, $-\alpha \leq -v \leq w - v = h$, так что $-\alpha \in L_h$, и $\beta \geq w \geq w - v = h$, то есть $\beta \in U_h$, что и требовалось. □

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Положим

$$\ell_f(h) = \sup\{f(z) : z \in L_h\}, \qquad \text{и} \qquad u_f(h) = \inf\{f(z) : z \in U_h\}.$$

Так как для каждых $z \in L_h$ и $w \in U_h$ выполняется $z \leq w$, а f сохраняет порядок, то $\ell_f(h) \leq u_f(h)$. Ясно также, что если $h \in E$, то $h \in L_h \cap U_h$ и, так как f сохраняет порядок, $\ell_f(h) = f(h) = u_f(h)$.

Лемма 5.12. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство с полным положительным конусом, линейное подпространство $E \subset V^+$ мажорирует V^+, вектор $h \in V$ не содержится в E, и $f\colon E \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Рассмотрим линейное подпространство $W = \{ah + v : a \in \mathbb{R}, v \in E\}$, натянутое на E и h, и пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ таково, что $\ell_f(h) \leq \gamma \leq u_f(h)$, а $f_\gamma\colon W \to \mathbb{R}$ определяется так: $f_\gamma(ah + v) = a\gamma + f(v)$. Тогда f_γ — положительный линейный функционал такой, что $f_\gamma|_E = f$. Более того, если $g\colon W \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, для которого $g|_E = f$, то $\ell_f(h) \leq g(h) \leq u_f(h)$ и $g = f_\gamma$ для $\gamma = g(h)$.*

Доказательство. Линейность $f_\gamma(ah+v) = af(h) + f(v) = a\gamma + f(v)$ и то, что f_γ продолжает f, очевидны. Покажем, что f_γ положительный. Для этого выберем произвольный положительный $ah+v \in W$ и покажем, что $f(ah+v) \geq 0$. Рассмотрим три случая.

(1) Пусть $a = 0$, тогда $ah+v = v \geq 0$ и $f(ah+v) = f(v) \geq 0$, так как $v \in E$ и f — положительный линейный функционал на E.

(2) Пусть $a > 0$. Так как $ah + v \geq 0$, то $h \geq (-1/a)v$, откуда $(-1/a)v \in L_h$. Но тогда $(-1/a)f(v) = f\big((-1/a)v\big) \leq \ell_f(h) \leq \gamma$, откуда $0 \leq f(v) + a\gamma = f_\gamma(ah+v)$.

(3) Пусть $a < 0$, тогда $-a > 0$ и условие $ah + v \geq 0$ влечет $(-1/a)v \geq h$, откуда $(-1/a)v \in U_h$. Но тогда $\gamma \leq u_f(h) \leq f\big((-1/a)v\big) = (-1/a)f(v)$, так что $0 \leq f(v) + a\gamma = f_\gamma(ah+v)$.

Итак, мы доказали, что f_γ положителен.

Пусть теперь $g\colon W \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, $g|_E = f$. Выберем произвольные $z \in L_h$ и $w \in U_h$, тогда $z \leq h \leq w$. В силу предложения 5.9 и условия $g|_E = f$, имеем $f(z) = g(z) \leq g(h) \leq g(w) = f(w)$. Применяя к полученным неравенствам супремум по $z \in L_h$ и инфимум по $w \in U_h$, получаем $\ell_f(h) \leq g(h) \leq u_f(h)$.

Положим теперь $\gamma = g(h)$, тогда

$$g(ah+v) = a\,g(h) + g(v) = a\gamma + f(v) = f_\gamma(ah+v),$$

откуда $g = f_\gamma$. Лемма доказана. □

Из леммы 5.6 и предложения 5.10 вытекает следующий важный частный случай леммы 5.12. Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e, $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$, $v \in V \setminus E$. Тогда, в обозначениях леммы 5.12, $L_v = \{re : re \leq v$, и $U_v = \{re : re \geq v\}$. Рассмотрим положительный линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенный так: $f(re) = r$. Положим

$$\alpha = \sup\{r \in \mathbb{R} : re \leq v\}, \qquad \text{и} \qquad \beta = \inf\{r \in \mathbb{R} : v \leq re\},$$

тогда $\alpha = \ell_f(v)$, $\beta = u_f(v)$, и $\alpha \leq \beta$, в частности, α и β конечны. Рассмотрим линейное подпространство $W = \{av + re : a, r \in \mathbb{R}\}$, натянутое на v и e, выберем произвольное $\gamma \in [\alpha, \beta]$, и определим $f_\gamma\colon W \to \mathbb{R}$, положив $f_\gamma(av + re) = a\gamma + r\,f(e)$.

Следствие 5.13. *В сделанных обозначениях, f_γ — положительный линейный функционал, такой, что $f_\gamma|_E = f$. Более того, если $g\colon W \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, для которого $g|_E = f$, то $g(v) \in [\alpha, \beta]$ и $g = f_\gamma$ для $\gamma = g(v)$.*

Имеет место следующий аналог теоремы Хана–Банаха.

Теорема 5.14. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство с полным положительным конусом, линейное подпространство $E \subset V$ мажорирует V^+, и $f\colon E \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Тогда существует положительный линейный функционал $\tilde f\colon V \to \mathbb{R}$ такой, что $\tilde f|_E = f$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}$ всех пар (E', f'), где $E' \subset V$ — линейное подпространство, мажорирующее V^+, а $f'\colon E' \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, продолжающий f, и введем на нем частичный порядок: $(E_1, f_1) \leq (E_2, f_2)$, если и только если $E_1 \subset E_2$ и $f_2|_{E_1} = f_1$. Нетрудно проверить, что к этому семейству применима лемма Цорна[1] поэтому в нем существует максимальный элемент $(\tilde E, \tilde f)$. Остается показать, что $\tilde E = V$.

Пусть $\tilde E \neq V$. Тогда, так как конус V^+ полон, найдется $p \in V^+ \setminus \tilde E$. Обозначим через W линейную оболочку $\{p\} \cup \tilde E$. Тогда $\tilde E \subset W$ — собственное подпространство. Далее, $E \subset \tilde E$, поэтому $\tilde E$ мажорирует V^+. Применим лемму 5.12 и продолжим $\tilde f$ до положительного функционала f_W на W. Но тогда $(W, f_W) \in \mathcal{C}$ причем (W, f_W) строго больше максимального элемента $(\tilde E, \tilde f)$. Из полученного противоречия следует, что $\tilde E = V$. Теорема доказана. □

Следствие 5.15. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e, линейное подпространство $E \subset V$ содержит e, и $f\colon E \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Тогда существует положительный линейный функционал $\tilde f\colon V \to \mathbb{R}$ такой, что $\tilde f|_E = f$.*

Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Положительный линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{R}$, для которого $f(e) = 1$, называется ***состоянием***, а множество всех состояний — ***пространством состояний***.

[1] В качестве верхней грани цепи $\big\{(E_\lambda, g_\lambda)\big\}$ можно взять $\big(\cup_\lambda E_\lambda, g\big)$, где $g(x) = f_\lambda(x)$ для $x \in E_\lambda$.

Замечание 5.16. Напомним, что для C^*-алгебры под состоянием мы понимали положительный линейный функционал единичной нормы. Далее мы показали, что для унитальной C^*-алгебры это определение равносильно следующему: состоянием называется положительный линейный функционал τ, для которого $\tau(1) = 1$, где 1 в левой части равенства — это единица унитальной алгебры. Отметим, что такое определение стало возможным в связи с леммой 4.52. Упорядоченные векторные пространства с порядковой единицей являются обобщением унитальных алгебр, поэтому для них данное нами определение естественно. С другой стороны, мы еще не определили норму на таких пространствах, так что это — еще одна мотивация эквивалентной переформулировки определения состояния.

Предложение 5.17. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда пространство состояний непусто.*

Доказательство. Действительно, пусть $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$ — одномерное пространство, натянутое на e. Тогда $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(re) = r$, — положительный линейный функционал, для которого $f(e) = 1$. По теореме 5.14, этот функционал продолжается до положительного функционала $\tilde{f}\colon V \to \mathbb{R}$, для которого $\tilde{f}(e) = f(e) = 1$, т.е. $\tilde{f}$ — состояние. □

Теорема 5.18. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Выберем произвольный $v \in V$ и положим*

$$\alpha = \sup\{r \in \mathbb{R} : re \le v\}, \qquad \beta = \inf\{r \in \mathbb{R} : v \le re\}.$$

Тогда $\alpha \le \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и для каждого $\gamma \in [\alpha, \beta]$ существует состояние $f_\gamma\colon V \to \mathbb{R}$, для которого $f_\gamma(v) = \gamma$.

Доказательство. Пусть $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$. Определим $g\colon E \to R$, положив $g(re) = r$, тогда g — положительный линейный функционал и $g(e) = 1$.

Пусть сначала $v \in E$, т.е. $v = re$, тогда $\alpha = \beta = r = \gamma$. В силу следствия 5.15, функционал g продолжается до положительного линейного функционала $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{R}$, откуда $\tilde{g}(e) = 1$, так что $\tilde{g}$ — состояние, и $\tilde{g}(v) = \tilde{g}(re) = r = \gamma$, поэтому $\tilde{g}$ можно взять в качестве f_γ.

Пусть теперь $v \notin E$. Рассмотрим $W = \{av+re : a, r \in \mathbb{R}\}$, тогда, по следствию 5.13, определен положительный линейный функционал $g_\gamma\colon W \to \mathbb{R}$, $g_\gamma(av + re) = a\gamma + r$, продолжающий g. По определению, $g(e) = a\gamma + r$. Снова воспользуемся следствием 5.15 и продолжим g_γ до положительного линейного функционала $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{R}$. Тогда $\tilde{g}(1) = g_\gamma(e) = g(e) = 1$, так что $\tilde{g}$ — состояние, и $\tilde{g}(v) = g_\gamma(v) = \gamma$, поэтому $\tilde{g}$ может быть взято в качестве искомого f_γ. □

Из теоремы 5.18 легко получается следующий результат.

Следствие 5.19. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Выберем произвольный $v \in V$ и положим*

$$\alpha = \sup\{r \in \mathbb{R} : re \le v\}, \qquad \beta = \inf\{r \in \mathbb{R} : v \le re\}.$$

Тогда $[\alpha, \beta] = \big\{f(v) : f$ — состояние на $V\big\}$.

Доказательство. По теореме 5.18, $[\alpha, \beta] \subset \big\{f(v) : f$ — состояние на $V\big\}$. Докажем обратное включение.

Пусть $f\colon V \to \mathbb{R}$ — произвольное состояние. Если $v = re$, то $\alpha = \beta = r = \gamma$ и $f(v) = f(re) = r = \gamma$.

Пусть теперь $v \ne re$ ни для какого $r \in \mathbb{R}$. Тогда ограничение f на $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$ и на $W := \{av + re : a, r \in \mathbb{R}\}$ — положительные линейные функционалы такие, что ограничение $f|_W$ на E совпадает с $f|_E$. Эта ситуация описывается в следствии 5.13, в силу которого $f(v) \in [a, b]$, откуда и вытекает обратное включение. □

Предложение 5.20. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с архимедовой порядковой единицей e. Тогда если для $v \in V$ и всех состояний $f\colon V \to \mathbb{R}$ выполняется $f(v) = 0$, то $v = 0$.*

Доказательство. Так как $\big\{f(v) : f$ — состояние на $V\big\} = \{0\}$, то, в обозначениях следствия 5.19, имеем $\alpha = \beta = 0$. Так как $\alpha = 0$, то $re \le v$ имеет место для всех $r < 0$. Положив $s = -r$ заключаем, что $v + se \ge 0$ при всех $s > 0$. Так как e — архимедова единица, заключаем, что последнее неравенство верно и при $s = 0$, то есть $v \in V^+$. С другой стороны, $\beta = 0$ влечет, что $v \le re$ при всех $r > 0$, так что $-v + re \ge 0$ при всех $r > 0$, и архимедовость e дает $-v \in V^+$. Так как $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, заключаем, что $v = 0$. □

Предложение 5.21. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с архимедовой порядковой единицей e. Тогда если для $v \in V$ выполняется $f(v) \ge 0$ для всех состояний $f\colon V \to \mathbb{R}$, то $v \in V^+$.*

Доказательство. В обозначениях следствия 5.19, имеем $\alpha \geq 0$, так что $v \geq re$ для всех $r \leq \alpha$, в частности, для всех $r < 0$. Полагая $s = -r$, заключаем, что $v + se \geq 0$ для всех $s > 0$, откуда, в силу архимедовости порядковой единицы, получаем $v \in V^+$. $\square$

5.1.2 Порядковая полунорма

Зададим естественную полунорму на упорядоченном векторном пространстве с единицей и покажем, что если единица архимедова, то эта полунорма является нормой.

Предложение 5.22. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда для каждого $v \in V$ множество $\{r \in \mathbb{R} : -re \leq v \leq re\}$ непусто. Если $V \neq \{0\}$, то множество $\{r \in \mathbb{R} : -re \leq v \leq re\}$ содержится в $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$.*

Доказательство. По определение порядковой единицы, существует $r > 0$, для которого $v \leq re$ и существует $s > 0$, для которого $-v \leq se$, т.е. $v \geq -se$. Пусть $t = \max\{r, s\}$, тогда $re \leq te$ и $-te \leq -se$, поэтому $t \in \{r \in \mathbb{R} : -re \leq v \leq re\}$.

Из неравенства $-re \leq re$ вытекает, что $2re \geq 0$. Если $V \neq \{0\}$, то, по замечанию 5.7, $e \neq 0$, откуда, в силу леммы 5.6, $e > 0$ и, значит, $r \geq 0$. $\square$

Итак, пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Для каждого $v \in V$ положим

$$\|v\| = \inf\{r \in \mathbb{R} : -re \leq v \leq re\}.$$

Из предложения 5.22 вытекает, что $\|v\|$ — неотрицательное вещественное число.

Замечание 5.23. В сделанных обозначениях, $\|e\| = 1$.

Предложение 5.24. *В терминах следствия* 5.19, *имеем* $\|v\| = \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$.

Доказательство. Пусть $r \in \mathbb{R}$ такое, что $-re \leq v \leq re$, тогда $-r \leq \alpha \leq \beta \leq r$, следовательно, $\max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\} \leq |r| = r$, где последнее равенство имеет место в силу предложения 5.22. Так как r произвольно, имеем $\max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\} \leq \|v\|$. Обратно, если $t > \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$, то $-t < \alpha \leq \beta < t$, так что $-te \leq v \leq te$ и, значит, $\|v\| \leq t$, поэтому, в силу произвольности t, заключаем, что $\|v\| \leq \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$, что и завершает доказательство. $\square$

Предложение 5.25 (Кэдисон [18]). *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда определенная выше функция $\|\cdot\|$ является полунормой на V, причем*

$$\|v\| = \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} \ — \textit{ состояние на } V\Big\}.$$

Если при этом e — архимедова порядковая единица, то $\|\cdot\|$ — норма.

Доказательство. В силу следствия 5.19, имеем

$$\big\{f(v) : f\colon V \to \mathbb{R} — \text{состояние на } V\big\} = [\alpha, \beta],$$

поэтому, применяя предложение 5.24, получаем, что

$$\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} — \text{состояние на } V\Big\} = \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\} = \|v\|.$$

Следовательно, для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|tv\| = \sup\Big\{\big|f(tv)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} — \text{состояние на } V\Big\} = |t| \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} — \text{состояние на } V\Big\} = |t|\,\|v\|,$$

что доказывает положительную однородность функции $\|\cdot\|$. Далее,

$$\|v + w\| = \sup\big|f(v + w)\big| \leq \sup\Big(\big|f(v)\big| + \big|f(w)\big|\Big) \leq \sup\big|f(v)\big| + \sup\big|f(w)\big| = \|v\| + \|w\|,$$

где все супремумы берутся по множеству всех состояний $f\colon V \to \mathbb{R}$, что доказывает полуаддитивность $\|\cdot\|$. Таким образом, мы показали, что $\|\cdot\|$ — полунорма.

Пусть теперь порядковая единица e — архимедова. Заметим, что $\|v\| = 0$, если и только если для всех состояний f выполняется $f(v) = 0$. Но тогда, в силу предложения 5.20, имеем $v = 0$, что доказывает положительную определенность $\|\cdot\|$. $\square$

Определенная выше функция $\|\cdot\|$ на упорядоченном векторном пространстве с порядковой единицей e называется ***порядковой полунормой*** или, в случае, когда $\|\cdot\|$ — норма, например для архимедовых единиц, — ***порядковой нормой***. Также говорят, что эта полунорма (или норма) ***задана*** e.

Замечание 5.26. Если $\|\cdot\|$ является нормой, то не обязательно порядковая единица — архимедова. Действительно, пусть $V = \mathbb{R}^2$ и $V^+ = \big\{(x,y) : x > 0,\ y > 0\big\} \cup \{0\}$, и $e = (1,1)$. Тогда e — порядковая единица, так как для каждого $v = (x,y) \in V$ и $r > \max\big\{|x|,|y|\big\}$ имеем $v \leq re$. Единица e не является архимедовой, так как $(1,0) + re \in V^+$ при всех $r > 0$, но $(1,0) \notin V^+$. Тем не менее, $\|\cdot\|$ — норма. Действительно, для $v = (x,y)$ имеем $\|v\| = \inf\big\{r : (-r,-r) \leq (x,y) \leq (r,r)\big\}$. Если x или y отличны от нуля, то $\|v\| \neq 0$, что доказывает положительную определенность $\|\cdot\|$.

Определение 5.27. ***Топологией*** упорядоченного векторного пространства с порядковой единицей называется метрическая топология, заданная введенной выше полунормой. Отметим, что эта топология не всегда хаусдорфова.

Замечание 5.28. Линейное отображение между пространствами с полунормами непрерывно, если и только если оно ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества в ограниченные.

Предложение 5.29. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Если $f\colon V \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, то f непрерывен и $\|f\| = f(e)$. В частности, $\big|f(v)\big| \leq f(e)\,\|v\|$.*

Доказательство. Выберем произвольные $v \in V$ и $r \in \mathbb{R}$, для которых $\|v\| < r$, тогда $-re \leq v \leq re$. По предложению 5.9, функционал f сохраняет порядок, поэтому $-r\,f(e) \leq f(v) \leq r\,f(e)$, так что $|f(v)| \leq r\,f(e)$. Так как $\|v\|$ — точная нижняя грань таких r, то $|f(v)| \leq f(e)\|v\|$, поэтому функционал f ограничен и, значит, непрерывен, а его норма не превосходит $f(e)$. Так как $\|e\| = 1$, то $\|f\| = \sup_{\|v\|\leq 1}|f(v)| \geq |f(e)|$, откуда $\|f\| \geq f(e)$ и, значит, $\|f\| = f(e)$. $\square$

Предложение 5.30. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Если $f\colon V \to \mathbb{R}$ — линейный функционал с $\|f\| = f(e)$ (в частности, f — непрерывный), то f — положительный.*

Доказательство. Выберем произвольный $v \in V^+$ и любой $r \in \mathbb{R}$ такой, что $r > \|v\|$, тогда, по определению порядковой полунормы, $0 \leq v \leq re$, откуда $0 \leq re - v \leq re$. Снова в силу определения порядковой полунормы, имеем $\|re - v\| \leq r$. Так как f непрерывен и $\|f\| = f(e)$, то

$$\big|f(re - v)\big| \leq \|f\|\,\|re - v\| \leq f(e)r,$$

поэтому $f(re-v) \leq r\,f(e)$, откуда $rf(e) - f(v) \leq rf(e)$, следовательно, $f(v) \geq 0$, так что f — положительный. $\square$

Собирая вместе результаты из предложений 5.29 и 5.30, получаем

Следствие 5.31. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Тогда линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{R}$ — положительный, если и только если $\|f\| = f(e)$.*

Следствие 5.32. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Тогда линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{R}$ является состоянием, если и только если $\|f\| = f(e) = 1$.*

Теорема 5.33. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда порядковая полунорма, заданная e, — это единственная полунорма на V, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $\|e\| = 1$;

(2) *если $-w \leq v \leq w$, то $\|v\| \leq \|w\|$;*

(3) *если $f\colon V \to \mathbb{R}$ — состояние, то $\big|f(v)\big| \leq \|v\|$.*

Доказательство. Покажем, что порядковая полунорма, заданная e, удовлетворяет всем трем свойствам. Первое свойство очевидно и уже отмечалось выше. Чтобы доказать свойство (2), выберем произвольное $r > \|w\| = \|-w\|$, тогда $-re \leq w \leq re$, откуда $-re \leq -w \leq v \leq w \leq re$, откуда, по определению порядковой полунормы, $\|v\| \leq r$. В силу произвольности r имеем $\|v\| \leq \|w\|$. Свойство (3) мгновенно вытекает из предложения 5.25.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\|\cdot\|'$ — полунорма на V, удовлетворяющая трем условиям теоремы. Пусть $v \in V$ и $r > \|v\|$, тогда $-re \leq v \leq re$ по определению $\|v\|$. Условия (1) и (2) дают

$$\|v\|' \leq \|re\|' = r\|e\|' = r,$$

откуда $\|v\|' \leq \|v\|$ в силу произвольности r. Обратно, из условия (3) вытекает

$$\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f \text{ — состояние на } V\Big\} \leq \|v\|'$$

откуда, снова по предложению 5.25, имеем $\|v\| \leq \|v\|'$ и, тем самым $\|v\| = \|v\|'$. □

Теорема 5.34. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *порядковая единица e — архимедова*;

(2) *V^+ — замкнутое подмножество в V в топологии, индуцированной $\|\cdot\|$*;

(3) *$-\|v\|e \leq v \leq \|v\|e$ для всех $v \in V$.*

Доказательство. (1)⇒(2) Пусть $v \in V$ — предел некоторой последовательности элементов из V^+. Мы должны показать, что $v \in V^+$. Из определения предела вытекает, что для каждого $r > 0$ существует $v_r \in U_r(v) \cap V^+$ такой, что $\|v - v_r\| < r$, откуда $re + v - v_r \geq 0$. Так как $v_r \geq 0$, то $re + v \geq v_r \geq 0$, и так как e —архимедова единица, а $r > 0$ — произвольно, то $v \in V^+$, что и требовалось.

(2)⇒(1) Пусть V^+ замкнуто в топологии, индуцированной $\|\cdot\|$. Рассмотрим произвольное $v \in V$, для которого $re + v \geq 0$ при всех $r > 0$. Мы должны показать, что $v \geq 0$. Так как $\|re\| = r\|e\| = r$, то для каждого $r > 0$ имеем $re + v \in U_{2r}(v) \cap V^+$ (вместо $2r$ можно написать $r + \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$). Последнее означает, что v является пределом последовательности, лежащей в V^+, и, в силу замкнутости V^+, заключаем $v \in V^+$, что и требовалось.

(1)⇒(3) Выберем произвольное $v \in V$. Так как

$$\|v\| = \inf\{r : re + v \geq 0 \text{ и } re - v \geq 0\}$$

по определению нормы, то $re + v \geq 0$ и $re - v \geq 0$ для всех $r > \|v\|$. По лемме 5.8, имеем $\|v\|e + v \geq 0$ и $\|v\|e - v \geq 0$, так что $-\|v\|e \leq v \leq \|v\|e$, что и требовалось.

(3)⇒(1) Рассмотрим произвольный $v \in V$, для которого $re + v \in V^+$ при всех $r > 0$. Мы должны показать, что $v \geq 0$. Так как $\|v\|e - v \geq 0$, то $re + \big(\|v\|e - v\big) \geq 0$ при всех $r > 0$. Кроме того, так как $re + v \geq 0$ для всех $r > 0$, то $\big(r - \|v\|\big)e + v$ при всех $r - \|v\| > 0$, т.е. $re - \big(\|v\|e - v\big) \geq 0$ при всех $r > \|v\|$. Итак,

$$-re \leq \big(\|v\|e - v\big) \leq re$$

при всех $r > \|v\|$, поэтому, вспоминая определение порядковой нормы, заключаем, что $\big\|\|v\|e - v\big\| \leq \|v\|$. С другой стороны, применяя предположение настоящего пункта к вектору $\|v\|e - v$, получаем, что $\|v\|e - v \leq \big\|\|v\|e - v\big\|e$, откуда $\|v\|e - v \leq \|v\|e$ и, значит, $v \geq 0$, что и требовалось. □

Пусть V и W — упорядоченные векторные пространства. Линейное отображение $f\colon V \to W$ называется ***положительным***, если $f(V^+) \subset W^+$. Если V и W содержат порядковые единицы e и e' соответственно, то положительное отображение f называется ***унитальным***, если $f(e) = e'$. Биективное линейное отображение $f\colon V \to W$ называется ***изоморфизмом упорядоченных пространств***, если $v \in V^+$ равносильно $f(v) \in W^+$. Иными словами, линейный изоморфизм f является изоморфизмом упорядоченных пространств, если и только если f и f^{-1} — положительные.

5.2 Упорядоченные $*$-пространства

Напомним, что комплексное векторное пространство V называется ***$*$-пространством***, если на нем задана сопряженно линейная инволюция $*$, т.е. отображение $*: V \to V$, для которого $v^{**} := (v^*)^* = v$ и $(\lambda v + \mu w) = \bar\lambda v^* + \bar\mu w^*$ для всех v, $w \in V$ и λ, $\mu \in \mathbb{C}$. Напомним также, что элемент $v \in V$, для которого $v = v^*$, называется ***самосопряженным*** или ***эрмитовым***. Множество эрмитовых элементов мы обозначали через V_{sa}.

По предложению 3.1, множество V_{sa} является вещественным линейным подпространством в V, а, по предложению 3.2, каждый $v \in V$ однозначно представим в виде $x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$ и имеют вид $x = (v + v^*)/2$ и $y = (v - v^*)/(2i)$. Будем называть x и y ***вещественной*** и ***мнимой*** частью v и обозначать $\mathrm{Re}(v)$ и $\mathrm{Im}(v)$ соответственно. Ясно также, что $V = V_{sa} \oplus iV_{sa}$.

Пусть V — (комплексное) $*$-пространство, тогда V называется ***упорядоченным векторным $*$-пространством***, если в нем фиксирован конус $V^+ \subset V_{sa}$, для которого $V^+ \cap (-V^*) = \{0\}$. Таким образом, V называется упорядоченным $*$-пространством тогда и только тогда, когда V_{sa} является упорядоченным вещественным линейным пространством. ***Порядковая единица*** и ее ***архимедовость*** для V — определяются как порядковая единица (архимедова порядковая единица) для V_{sa}. Далее, $\mathbb{C}$-линейный функционал $f: V \to \mathbb{C}$ на упорядоченном $*$-пространстве V называется ***положительным***, если $f(V^+) \subset [0, \infty)$. Если V содержит порядковую единицу e, то $\mathbb{C}$-линейный функционал $f: V \to \mathbb{C}$ называется ***состоянием***, если он — положительный, и $f(e) = 1$. Линейный изоморфизм $f: V \to W$ упорядоченных $*$-пространств называется ***изоморфизмом***, если f и f^{-1} — положительны.

Предложение 5.35. *Пусть V и W — упорядоченные $*$-пространства, V содержит порядковую единицу, а $f: V \to W$ — положительное линейное отображение. Тогда для каждого $v \in V$ имеем $f(v^*) = f(v)^*$.*

Доказательство. Так как V содержит порядковую единицу, то, в силу леммы 5.6, конус V^+ — полный, т.е. $V_{sa} = V^+ - V^+$. Далее, так как f — положительный функционал, то $f(V^+) \subset W^+$ и, значит, $f(V_{sa}) = f(V^+) - f(V^+) \subset W^+ - W^+ \subset W_{sa}$. Иными словами, эрмитовы элементы переходят в эрмитовы при отображении f. Так как для каждого $v \in V$ существуют $x, y \in V_{sa}$ такие, что $v = x + iy$, имеем:

$$f(v^*) = f(x^* - iy^*) = f(x - iy) = f(x) - if(y) = f(x)^* - if(y)^* = \big(f(x) + if(y)\big)^* = f(x + iy)^* = f(v)^*,$$

что и требовалось. □

Следствие 5.36. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство, а $f: V \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал. Тогда для каждого $v \in V$ имеем $f(v^*) = \overline{f(v)}$.*

Пусть V — упорядоченное $*$-пространство и $f: V_{sa} \to \mathbb{R}$ — это $\mathbb{R}$-линейный функционал. Определим отображение $\tilde f: V \to \mathbb{C}$, положив $\tilde f(v) = f\big(\mathrm{Re}(v)\big) + if\big(\mathrm{Im}(v)\big)$.

Предложение 5.37. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство, и $f: V_{sa} \to \mathbb{R}$ — некоторый $\mathbb{R}$-линейный функционал. Тогда $\tilde f: V \to \mathbb{C}$ — это $\mathbb{C}$-линейный функционал, причем $\tilde f|_{V_{sa}} = f$. Более того, если f — положительный, то и $\tilde f$ — положительный. Если же V содержит порядковую единицу, и f — состояние, то и $\tilde f$ — также состояние.*

Доказательство. Проверим сначала $\mathbb{C}$-линейность функционала $\tilde f$, т.е. что для любых $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, а также $v = x + iy$, $w = x' + iy' \in V$, $x, y, x', y' \in V_{sa}$, выполняется $\tilde f(v + w) = f(v) + f(w)$ и $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde f(v + w) &= \tilde f\big((x + iy) + (x' + iy')\big) = \tilde f\big((x + x') + i(y + y')\big) = f(x + x') + if(y + y') = \\ &= f(x) + f(x') + i\,f(y) + if(y') = \big(f(x) + if(y)\big) + \big(f(x') + if(y')\big) = \tilde f(v) + \tilde f(w),\end{aligned}$$

где третье и последнее равенства выполнены по определению отображения $\tilde f$, а остальные — в силу линейности f. Аналогично,

$$\begin{aligned}\tilde f(\lambda v) &= \tilde f\big((a + ib)(x + iy)\big) = \tilde f\big((ax - by) + i(bx + ay)\big) = f(ax - by) + if(bx + ay) = \\ &= af(x) - bf(y) + i\,bf(x) + i\,af(y) = (a + ib)\big(f(x) + if(y)\big) = \lambda \tilde f(v).\end{aligned}$$

Далее, для $v \in V_{sa}$ имеем $\mathrm{Im}(v) = (v - v^*)/(2i) = 0$ и $\mathrm{Re}(v) = (v + v^*)/2 = v$, откуда $\tilde f(v) = f(v)$ и $\tilde f(V_{sa}) = f(V_{sa})$. В частности, если $v \in V^+$, то f и $\tilde f$ одновременно положительные или нет, так как $\tilde f(v) = f(v)$. Наконец, если V содержит порядковую единицу e, то, по лемме 5.6, $e \in V^+$, поэтому, в силу сказанного выше, $f(e) = \tilde f(e)$, так что оба этих функционала являются состояниями или нет одновременно. □

Предложение 5.38. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e. Тогда $\mathbb{C}$-линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{C}$ положительный, если и только если существует положительный $\mathbb{R}$-линейный функционал $g\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$, для которого $f = \tilde{g}$.*

Доказательство. Пусть сначала $f = \tilde{g}$, тогда $f(V^+) = g(V^+) \subset [0, \infty)$ по предложению 5.37, поэтому функционал f — положительный.

Обратно, пусть f — положительный функционал, т.е. $f(V^+) \subset [0, \infty)$. Так как V содержит порядковую единицу, то, в силу леммы 5.6, конус V^+ — полный, поэтому для каждого $x \in V_{sa}$ существуют x^+, $x^- \in V^+$, такие, что $x = x^+ - x^-$, откуда $f(x) = f(x^+) - f(x^-) \in \mathbb{R}$, так что $f(V_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Положим $g = f|_{V_{sa}}$. Тогда g — положительный $\mathbb{R}$-линейный функционал. Более того, пусть $v \in V$ и $v = x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$, тогда

$$\tilde{g}(v) = g(x) + ig(y) = f(x) + if(y) = f(x + iy) = f(v),$$

так что $\tilde{g} = f$, что и требовалось. □

Предложение 5.39. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с архимедовой порядковой единицей e. Если для некоторого $v \in V$ равенство $f(v) = 0$ выполняется для каждого состояния $f\colon V \to \mathbb{C}$, то $v = 0$.*

Доказательство. Положим $v = x+iy$, где $x, y \in V_{sa}$. В силу предложения 5.37, для каждого состояния $g\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$ соответствующее отображение $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{C}$ также является состоянием. По предположению, $\tilde{g}(v) = 0$ для всех состояний g. Следовательно, $g(x) + ig(y) = 0$, откуда, в силу единственности разложения на вещественную и мнимую части, имеем $g(x) = g(y) = 0$. Так как порядковая единица — архимедова, применимо предложение 5.20, в силу которого $x = y = 0$, откуда $v = 0$, что и требовалось. □

Предложение 5.40. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с архимедовой порядковой единицей e. Если для некоторого $v \in V$ неравенство $f(v) \geq 0$ выполняется для каждого состояния $f\colon V \to \mathbb{C}$, то $v \in V^+$.*

Доказательство. Положим $v = x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$. В силу предложения 5.37, для каждого состояния $g\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$ соответствующее отображение $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{C}$ также является состоянием. По предположению, $\tilde{g}(v) \geq 0$ для всех состояний g. Следовательно, $g(x) + ig(y) \geq 0$, откуда, в силу единственности разложения на вещественную и мнимую части, имеем $g(x) \geq 0$ и $g(y) = 0$. Так как порядковая единица — архимедова, применимы предложения 5.20 и 5.21, в силу которых $x \geq 0$ и $y = 0$, откуда $v \in V^+$, что и требовалось. □

5.2.1 Полунормы на упорядоченных $*$-пространствах

В теореме 5.33 мы показали, что порядковая полунорма на вещественном упорядоченном пространстве с порядковой единицей определена однозначно тремя естественными свойствами. В настоящем разделе мы будем продолжать такую полунорму с (вещественного) подпространства V_{sa} на все комплексное V, следя за тем, чтобы полученная полунорма уважала инволюцию $*$. Оказывается, имеется много таких продолжений, и среди них можно выделить минимальные и максимальные полунормы.

Итак, пусть V — произвольное $*$-пространство, тогда полунорма (норма) на V называется ***$*$-полунормой*** (соответственно, ***$*$-нормой***), если $\|v^*\| = \|v\|$ для всех $v \in V$.

Лемма 5.41. *Пусть V — произвольное $*$-пространство и $\|\cdot\|$ — некоторая $*$-полунорма на V. Тогда для каждого $v \in V$ выполняется $\big\|\mathrm{Re}(v)\big\| \leq \|v\|$ и $\big\|\mathrm{Im}(v)\big\| \leq \|v\|$*

Доказательство. Имеем

$$\big\|\mathrm{Re}(v)\big\| = \frac{1}{2}\big\|\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Re}(v) - i\,\mathrm{Im}(v)\big\| \leq \frac{1}{2}\big\|\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)\big\| + \frac{1}{2}\big\|\mathrm{Re}(v) - i\,\mathrm{Im}(v)\big\| = \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v^*\| = \|v\|.$$

Аналогично оценивается и $\mathrm{Im}(v)$. □

Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e и порядковой полунормой $\|\cdot\|$ на V_{sa}. Тогда ***порядковой полунормой на*** V называется $*$-полунорма $\|\cdot\|'$ такая, что $\|v\|' = \|v\|$ для всех $v \in V_{sa}$.

5.2.1.1 Минимальная порядковая полунорма $\|\cdot\|_m$

Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e. Определим ***минимальную порядковую полунорму*** $\|\cdot\|_m\colon V\to[0,\infty)$ так:

$$\|v\|_m=\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}.$$

Теорема 5.42. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e, и пусть $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма на V_{sa}. Тогда*

(1) $\|\cdot\|_m$ *является $*$-полунормой на V;*

(2) $\|v\|_m=\|v\|$ *для всех $v\in V_{sa}$, т.е. $\|\cdot\|_m$ — порядковая полунорма на V;*

(3) *если $\|\cdot\|'$ — любая порядковая $*$-полунорма на V, то $\|w\|_m\le\|w\|'$ для всех $w\in V$.*

Доказательство. (1) Покажем сначала, что $\|\cdot\|_m$ является полунормой. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$ и $v,w\in V$, тогда

$$\|\lambda v\|_m=\sup\Big\{\big|f(\lambda v)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}=\sup\Big\{|\lambda|\,\big|f(v)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}=|\lambda|\,\|v\|_m;$$

$$\|v+w\|_m=\sup\Big\{\big|f(v+w)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}\le$$

$$\le\sup\Big\{\big|f(v)\big|+\big|f(w)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}\le\|v\|_m+\|w\|_m.$$

Покажем теперь, что $\|\cdot\|_m$ — это $*$-полунорма. Для этого воспользуемся следствием 5.36:

$$\|v^*\|_m=\sup\Big\{\big|f(v^*)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}=\sup\Big\{\big|\overline{f(v)}\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}=$$

$$=\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}=\|v\|_m.$$

(2) Докажем, что $\|\cdot\|_m$ — порядковая полунорма на V. Для этого используем предложения 5.38 и 5.25:

$$\|v\|_m=\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V\to\mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}=\sup\Big\{\big|\tilde g(v)\big| : g\colon V_{sa}\to\mathbb{R} - \text{состояние}\Big\}=$$

$$=\sup\Big\{\big|g(v)\big| : g\colon V_{sa}\to\mathbb{R} - \text{состояние}\Big\}=\|v\|.$$

(3) Выберем произвольное $v\in V$ и любое состояние $f\colon V\to\mathbb{C}$. Существует единственное $\theta\in\mathbb{R}$ такое, что $\big|f(v)\big|=e^{i\theta}f(v)=f(e^{i\theta}v)$. Положим $w=e^{i\theta}v$. Так как функционал f — положительный, то $f\big(\mathrm{Re}(w)\big)$, $f\big(\mathrm{Im}(w)\big)\in\mathbb{R}$, и так как $f(w)=\big|f(v)\big|\in\mathbb{R}$, а $f(w)=f\big(\mathrm{Re}(w)\big)+if\big(\mathrm{Im}(w)\big)$, имеем: $f\big(\mathrm{Im}(w)\big)=0$ и $f(w)=f\big(\mathrm{Re}(w)\big)$. Следовательно,

$$\big|f(v)\big|=f(w)=f\big(\mathrm{Re}(w)\big)\le\big\|\mathrm{Re}(w)\big\|=\big\|\mathrm{Re}(w)\big\|'=\Big\|\frac{w+w^*}{2}\Big\|'\le\frac12\big(\|w\|'+\|w^*\|'\big)=\|w\|'=\|v\|',$$

где первое неравенство имеет место в силу того, что $\mathrm{Re}(w)\in V_{sa}$ и, поэтому,применима теорема 5.33. Так как $\|v\|_m$ равно супремуму левой части полученного соотношения по всем состояниям f, то $\|v\|_m\le\|v\|'$, что и требовалось. $\square$

5.2.1.2 Максимальная порядковая полунорма $\|\cdot\|_m$

Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e и соответствующей порядковой полунормой $\|\cdot\|$ на V_{sa}. Напомним, что каждый элемент $v\in V$ представим в виде $v=x+iy$, где $x,y\in V_{sa}$. Определим ***максимальную порядковую полунорму*** $\|\cdot\|_M\colon V\to[0,\infty)$ так:

$$\|v\|_M=\inf\Big\{\sum_{k=1}^n|\lambda_k|\,\|v_k\| : v=\sum_{k=1}^n\lambda_k v_k,\ v_k\in V_{sa},\ \lambda_k\in\mathbb{C}\Big\}.$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 5.42.

Теорема 5.43. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e, и пусть $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма на V_{sa}. Тогда*

(1) *$\|\cdot\|_M$ является ∗-полунормой на V;*

(2) *$\|v\|_M = \|v\|$ для всех $v \in V_{sa}$, т.е. $\|\cdot\|_M$ — порядковая полунорма на V;*

(3) *если $\|\cdot\|'$ — любая ∗-полунорма на V, для которой $\|v\|' = \|v\|$ при всех $v \in V_{sa}$, то $\|w\|_M \geq \|w\|'$ для всех $w \in V$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\|\cdot\|_M$ является полунормой на V. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v \in V$. При $\lambda = 0$ равенство $\|\lambda v\|_M = |\lambda|\|v\|_M$ очевидно, так как обе его части равны нулю. При $\lambda \neq 0$ каждое представление $\lambda v = \sum_k \lambda_k v_k$ можно записать в виде $\lambda v = \sum_k \lambda(\lambda_k/\lambda)v_k$, и, обозначив $\mu_k = \lambda_k/\lambda$, переписать так: $\lambda v = \sum_k \lambda\mu_k v_k$, откуда, переходя к инфимуму по μ_k, получим равенство $\|\lambda v\|_M = |\lambda|\|v\|_M$.

Неравенство треугольника следует из того, что каждому представлению $v = \sum_k \lambda_k v_k$ и $w = \sum_k \mu_k u_k$, соответствует представление $v + w = \sum_k \lambda_k v_k + \sum_k \mu_k u_k$.

Далее, если $v = \sum_k \lambda_k v_k$, где $v_k \in V_{sa}$ и $\lambda_k \in \mathbb{C}$, то $v^* = \sum_k \overline{\lambda_k} v_k$, откуда следует, что $\|v\|_M = \|v^*\|_M$, то есть $\|\cdot\|_M$ — это ∗-полунорма.

Пусть теперь $v \in V_{sa}$. Тогда среди представлений v в виде $v = \sum_k \lambda_k v_k$ есть тривиальное $v = 1v$, поэтому из неравенства треугольник вытекает, что в этом случае на нем достигается инфимум, и поэтому $\|v\|_M = \|v\|$.

Наконец, пусть $\|\cdot\|'$ — любая порядковая ∗-полунорма на V. Если $v = \sum_k \lambda_k v_k$, то

$$\|v\|' \leq \sum_k |\lambda_k|\|v_k\|' = \sum_k |\lambda_k|\|v_k\|,$$

где неравенство — это неравенство треугольника, а равенство имеет место поскольку $\|v\|' = \|v\|$ для любого $v \in V_{sa}$ по предположению. Переходя к инфимуму, получаем $\|v\|' \leq \|v\|_M$, что и требовалось. □

Предложение 5.44. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e. Тогда любые две порядковые полунормы на V эквивалентны. Более того, если $\|\cdot\|'$ — произвольная порядковая полунорма на V, то*

$$\big\{v \in V : \|v\|' = 0\big\} = \bigcap_{\substack{f\colon V \to \mathbb{C}\ — \\ \text{состояние}}} \ker f.$$

Доказательство. Так как $\|v\|_m \leq \|v\|' \leq \|v\|_M$ для всех $v \in V$, достаточно проверить эквивалентность минимальной и максимальной порядковых полунорм. Неравенство $\|v\|_m \leq \|v\|_M$ справедливо для каждого $v \in V$ в силу теорем о минимальности и максимальности норм $\|\cdot\|_m$ и $\|\cdot\|_M$. С другой стороны, пусть $\|\cdot\|$ обозначает порядковую полунорму на V_{sa}, тогда, представив v в виде $\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)$ и воспользовавшись леммой 5.41, получим

$$\|v\|_M \leq \big\|\mathrm{Re}(v)\big\|_M + |i|\,\big\|\mathrm{Im}(v)\big\|_M = \big\|\mathrm{Re}(v)\big\| + \big\|\mathrm{Im}(v)\big\| = \big\|\mathrm{Re}(v)\big\|_m + \big\|\mathrm{Im}(v)\big\|_m \leq \|v\|_m + \|v\|_m = 2\|v\|_m,$$

что и завершает доказательство эквивалентности полунорм.

Далее, эквивалентность полунорм влечет $\big\{v \in V : \|v\|' = 0\big\} = \big\{v \in V : \|v\|_m = 0\big\}$. Теперь второе утверждение предложения вытекает из определения минимальной порядковой полунормы. □

Следующий результат легко вытекает из предложений 5.25, 5.37 и 5.44.

Предложение 5.45. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *порядковая полунорма на V_{sa} является нормой;*

(2) $\displaystyle\bigcap_{\substack{f\colon V_{sa} \to \mathbb{R}\ — \\ \text{состояние}}} \ker f = \{0\};$

(3) $\displaystyle\bigcap_{\substack{f\colon V \to \mathbb{C}\ — \\ \text{состояние}}} \ker f = \{0\};$

(4) *существует порядковая полунорма, являющаяся нормой;*

(5) *все порядковые полунормы на V являются нормами.*

Непосредственно из предложений 5.45 и 5.39 выводим следующий результат.

Следствие 5.46. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с архимедовой порядковой единицей e. Тогда каждая порядковая полунорма является нормой.*

Тема 6

Квантовые метрические пространства

План. Обобщенная полунорма, обобщенная полуметрика, обобщенное полуметрическое пространство, факторизация обобщенной полунормы, обобщенная липшицева полунорма, продолжение липшицевых функций, комплексные меры, положительные меры, полная вариация комплексной меры, абсолютная непрерывность одной меры относительно другой, мера, сконцентрированная на данном множестве, взаимно сингулярные меры, σ-конечная мера, теорема Лебега–Радона–Никодима, производная одной меры по другой, полярное разложение комплексной меры, борелевская комплексная мера, регулярная комплексная мера, теорема Рисса о связи борелевской комплексной меры и комплексных линейных функционалов, расстояние Монжа–Канторовича, мера Радона, теорема Рисса о связи борелевской вещественной меры и вещественных линейных функционалов, транспортный план, функционал Монжа–Канторовича, проблема Монжа–Канторовича, упорядоченные пространства с архимедовой порядковой единицей (напоминание), состояния, представление Кэдисона, липшицева полунорма на упорядоченном линейном пространстве, Lip-норма, компактное квантовое метрическое пространство, пространства с липшицевыми полунормами, липшицева топология и $*$-слабая топология, критерий совпадения липшицевой и $*$-слабой топологий, равномерно ограниченное семейство функций, равностепенно непрерывное семейство функций, теорема Арцела–Асколи, критерий того, что индуцированная липшицевой полунормой обобщенная метрика на пространстве состояний задает $*$-слабую топологию, преобразование компактного метрического пространства в квантовое, полунепрерывность снизу липшицевых полунорм и восстановление полунормы из метрики, полунепрерывная снизу обобщенная полунорма, поляра, преполяра, сбалансированное подмножество векторного пространства, замкнутая выпуклая сбалансированная оболочка, функционал Минковского, радиальное подмножество векторного пространства, пополнение Минковского и замыкание полунорм, радиус квантового метрического пространства.

Приведем одну конструкцию, которая позволяет в случае "некоммутативной геометрии", т.е. для C^*-алгебр, определить метрику на пространствах состояний. Эта метрика порождается так называемой липшицевой полунормой. В действительности, эта метрика обобщает расстояние Монжа–Канторовича, заданного на пространстве вероятностных мер. При этом, семейство вероятностных мер можно рассматривать как пространство состояний соответствующей C^*-алгебры. Перейдем к деталям.

В дальнейшем мы введем в рассмотрение обобщенную липшицеву полунорму, которая может принимать и бесконечные значения. При работе с такими нормами возникают тонкости, связанные с необходимостью вводить соглашение о том, как трактовать неопределенность $0 \cdot \infty$. Приведем начала теории таких полунорм.

6.1 Обобщенные полунормы и обобщенные полуметрики

Пусть V — произвольное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Отображение $L\colon V \to [0, \infty]$ называется ***обобщенной полунормой***, если оно

- $L(0) = 0$;
- ***субаддитивно***, т.е. $L(v + w) \le L(v) + L(w)$ для любых $v, w \in V$;
- ***положительно однородно***, т.е. $L(\alpha v) = |\alpha| L(v)$ для любых $\alpha \in \mathbb{F}$ и $v \in V$, с учетом следующего ***соглашения***: $0 \cdot \infty = 0$.

Если $L(v) = 0$ влечет $v = 0$, то слово "полунорма" мы заменяем на "норма". Если отображение L конечно, то слово "обобщенный" будем опускать.

Замечание 6.1. Отметим, что введенное соглашение разрешать неопределенность в данном случае однозначно определено, так как $L(0\,v) = L(0) = 0$, поэтому если $L(v) = \infty$, то для выполнения и в этом случае положительной однородности необходимо выполнение соглашения $0 = 0 \cdot \infty$. Впрочем, есть и другой подход к определению обобщенных полунорм: положительную однородность можно требовать лишь для $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. При таком условии мы все равно получим положительную однородность для $\alpha = 0$ и $L(v) < \infty$. Случай $\alpha = 0$ и $L(v) = \infty$ нужно будет обходить стороной.

Предложение 6.2. *Пусть L — обобщенная полунорма на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Тогда множество*

$$V_f = \{v \in V : L(v) < \infty\} \tag{6.1}$$

является линейное подпространством в V.

Доказательство. Для любых $v, w \in V_f$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ имеем

$$L(\alpha v + \beta w) \le |\alpha| L(v) + |\beta| L(v) < \infty,$$

так как все элементы этой формулы конечны. Следовательно, $\alpha v + \beta w \in V_f$, тем самым V_f — подпространство в V, что и требовалось. □

Покажем, что каждая обобщенная полунорма получается таким образом.

Предложение 6.3. *Пусть V — произвольное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а W — произвольное линейное подпространство V. Пусть $L_f\colon W \to [0,\infty)$ — полунорма. Определим теперь отображение $L\colon V \to [0,\infty]$, положив $L(v) = L_f(v)$ для всех $v \in W$, и $L(v) = \infty$ для всех $v \in V \setminus W$. Тогда L — обобщенная полунорма, и W совпадает с подпространством V_f, заданным формулой* (6.1).

Доказательство. Для $v, w \in W$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ свойства обобщенной полунормы выполняются, так как они имеют место для L_f. Рассмотрим оставшиеся случаи.

Начнем с субаддитивности L. Если $v \in W$ и $w \in V \setminus W$, то $v + w \in V \setminus W$, откуда

$$L(v + w) = \infty \le L(v) + L(w) = \infty.$$

Если $v, w \in V \setminus W$, то $L(v + w)$ может быть как конечным, так и бесконечным. Но, в любом случае,

$$L(v + w) \le \infty = L(v) + L(w).$$

Проанализируем положительную однородность. Как уже отмечалось, достаточно рассмотреть случай $v \in V \setminus W$, т.е. когда $L(v) = \infty$. Если $\alpha \ne 0$, то $\alpha v \in V \setminus W$, откуда

$$L(\alpha v) = \infty = |\alpha| L(v).$$

Если же $\alpha = 0$, то $L(\alpha v) = 0$, и, в силу соглашения, $|\alpha| L(v) = 0 \cdot \infty = 0$, так что снова имеется равенство. □

Для обобщенной полунормы L на V положим $V_0 = \{v \in V : L(v) = 0\}$. Легко видеть, что $V_0 \subset V_f$ также является линейным подпространством. Обозначим $\widetilde{V}$ фактор-пространство V/V_0, а через $\widetilde{V}_f$ — фактор-пространство V_f/V_0, тогда $\widetilde{V}_f \subset \widetilde{V}$. Пусть $\pi\colon V \to \widetilde{V}$ — отображение факторизации. Для удобства, обозначим $[v]$ элемент $\pi(v) \in \widetilde{V}$. Кроме того, положим $\widetilde{L}(v) = \inf\{L(v + k) : k \in V_0\}$.

Предложение 6.4. *Определенное выше отображение $\widetilde{L}\colon \widetilde{V} \to [0,\infty]$ является обобщенной нормой, а его ограничение на $\widetilde{V}_f$ — нормой.*

Доказательство. Проверим аддитивность $\widetilde{L}$: для $[v], [w] \in \widetilde{V}$ имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{L}\big([v] + [w]\big) = \widetilde{L}\big([v + w]\big) = \inf\big\{L(v + w + k) : k \in V_0\big\} = \inf\big\{L(v + k_1 + w + k_2) : k_1, k_2 \in V_0\big\} \le \\ \le \inf\{L(v + k_1) + L(w + k_2) : k_1, k_2 \in V_0\} = \\ = \inf\{L(v + k_1) : k_1 \in V_0\} + \inf\{L(w + k_2) : k_2 \in V_0\} = \widetilde{L}\big([v]\big) + \widetilde{L}\big([w]\big).\end{aligned}$$

Проверим положительную однородность. Выберем произвольные $[v] \in \widetilde{V}$ и $\alpha \in \mathbb{F}$. Пусть сначала $\alpha \ne 0$, тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{L}\big(\alpha[v]\big) = \widetilde{L}\big([\alpha v]\big) = \inf\big\{L(\alpha v + k) : k \in V_0\big\} = \inf\Big\{L\big(\alpha(v + k/\alpha)\big) : k/\alpha \in V_0\Big\} = \inf\Big\{L\big(\alpha(v + k)\big) : k \in V_0\Big\} = \\ = \inf\big\{|\alpha| L(v + k) : k \in V_0\big\} = |\alpha| \inf\big\{L(v + k) : k \in V_0\big\} = |\alpha| \widetilde{L}\big([v]\big).\end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha = 0$. Тогда
$$\widetilde{L}\big(\alpha[v]\big) = \widetilde{L}\big([0]\big) = \inf\big\{L(k) : k \in V_0\big\} = 0.$$
С другой стороны, не зависимо от значения $\widetilde{L}\big([v]\big)$, имеем
$$|\alpha|\widetilde{L}\big([v]\big) = 0\widetilde{L}\big([v]\big) = 0$$
в силу соглашения $0 \cdot \infty = 0$.

Тем самым, мы показали, что $\widetilde{L}$ является обобщенной полунормой на $\widetilde{V}$ и, поэтому, полунормой на $\widetilde{V}_f$. Докажем положительную определенность $\widetilde{L}$. Предположим противное, т.е. что для некоторого $[v] \ne [0]$ выполняется $\widetilde{L}\big([v]\big) = 0$. Тогда $\inf\big\{L(v+k) : k \in V_0\big\} = 0$, поэтому существует последовательность $k_i \in V_0$ такая, что $L(v-k_i) \to 0$. Так как $[v] = v + V_0 \ne [0] = V_0$, то $v \notin V_0$, откуда $L(v) > 0$. С другой стороны,
$$L(v) = L(v-k_i+k_i) \le L(v-k_i) + L(k_i) = L(v-k_i) \to 0,$$
противоречие. $\square$

Предложение 6.5 (Сравнение обобщенных полунорм)**.** *Пусть L_1 и L_2 — обобщенные полунормы на векторном пространстве V, и $X_i = \{v \in V : L_i(v) \le 1\}$, $i = 1, 2$. Тогда*

(1) *$X_1 \subset X_2$, если и только если $L_1 \ge L_2$;*

(2) *$L_1 = L_2$, если и только если $X_1 = X_2$.*

Доказательство. (1) Пусть сначала $X_1 \subset X_2$. Покажем, что тогда $L_1 \ge L_2$. Предположим противное, т.е. существует $v \in V$ такой, что $L_1(v) < L_2(v)$. Тогда $L_2(v) > 0$, в частности, $v \ne 0$. Если $L_2(v) = \infty$, то для любого ненулевого $r \in \mathbb{R}$ имеем $L_2(r\,v) = \infty$, но $L_1(v) < \infty$. Если $L_1(v) = 0$, то $v \in X_1 \subset X_2$, поэтому $L_2(v) \le 1$, противоречие. Если же $L_1(v) > 0$, то $w = v/L_1(v) \ne 0$ и $w \in X_1 \subset X_2$, поэтому $L_2(w) < \infty$, и снова противоречие.

Пусть теперь $L_2(v) < \infty$, тогда для $w = v/L_2(v)$ имеем $L_2(w) = 1$ и, в силу предположения $L_1(v) < L_2(v)$ и положительной однородности обобщенных полуметрик, имеем $L_1(w) < L_2(w) = 1$. Если $L_1(w) = 0$, то для произвольного вещественного $r > 1$ имеем $L_1(r\,w) = 0$ и $L_2(r\,w) > 1$, поэтому $r\,w \in X_1$, но $r\,w \notin X_2$, противоречие. Если же $L_1(w) \ne 0$, то положим $r = 1/L_1(w)$. Так как $L_1(w) < 1$, то $r > 1$. Но тогда $L_1(r\,w) = 1$ и $L_2(r\,w) > 1$, поэтому $r\,w \in X_1$, но $r\,w \notin X_2$, и снова получаем противоречие.

Обратно, пусть $L_1 \ge L_2$. Тогда для каждого $v \in X_1$ выполняется $L_2(v) \le L_1(v) \le 1$, поэтому $v \in X_2$, так что $X_1 \subset X_2$.

(2) Если $L_1 = L_2$, то и $X_1 = X_2$. Обратно, пусть $X_1 = X_2$, но $L_1 \ne L_2$, т.е. существует $v \in V$, для которого, без ограничения общности, выполняется $L_1(v) < L_2(v)$, в частности, $L_1(v) < \infty$. Если $L_1(v) = 0$, то $v \in X_1 = X_2$, поэтому $0 < L_2(v) \le 1$. Но тогда для вещественного $r > 1/L_2(v)$ имеем $L_1(r\,v) = 0$, но $L_2(r\,v) > 1$, поэтому $r\,v \in X_1$, но $r\,v \notin X_2$, противоречие.

Пусть теперь $L_1(v) > 0$, тогда для $w = v/L_1(v)$ имеем $1 = L_1(w) < L_2(w)$, поэтому $w \in X_1$, но $w \notin X_2$, противоречие. Доказательство закончено. $\square$

Обобщенная полунорма порождает на V обобщенную полуметрику. Напомним, что для множества X функция $\rho\colon X \times X \to [0, \infty]$ называется ***обобщенной полуметрикой***[1], если она обладает следующими свойствами:

- $\rho(x, x) = 0$ при всех $x \in X$;
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ при всех $x, y \in X$ (***симметричность***);
- $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (***неравенство треугольника***).

Множество X, на котором задана такая функция ρ, называется ***обобщенным полуметрическим пространством***. Если в качестве X взять векторное пространство V с обобщенной полунормой L, то $\rho_L(v, w) := \rho(v, w) = L(v - w)$ будет являться обобщенной полуметрикой. Доказательство стандартно.

Если $V_f \subset V$ — подпространство, определенное формулой (6.1), то $\rho(v, w) < \infty$, если и только если $v - w \in V_f$. Таким образом, все V распадается в объединение подпространства V_f и аффинных подпространств $u + V_f$, полученных их V_f всевозможными сдвигами $u \in V$. При этом все сдвиги являются изометриями V, в частности, все аффинные подпространства $u + V_f$ изометричны. На каждом из этих подпространств обобщенная

[1] Вместо термина “полуметрика” иногда используется другой термин — “псевдометрика”.

полуметрика ρ конечна, а на точках их разных подпространств — бесконечна. Соответствующая топология, заданная ρ, превращает V в несвязное объединение различных аффинных подпространств вида $u + V_f$, на каждом из которых топология порождена полунормой. Если L не является нормой, то топология нехаусдорфова, а если является — то хаусдорфова.

В общем случае, т.е. когда обобщенная полуметрика ρ задана на множестве X, используется терминология, аналогичная той, что мы ввели для обобщенных полунорм. А именно, если $\rho(x, y) < \infty$ для любых $x, y \in X$, то в названии для ρ опускается слово "обобщенный", а если $\rho(x, y) = 0$ в точности тогда, когда $x = y$, то вместо термина полуметрика употребляется термин метрика.

Далее, на множестве X с обобщенной полуметрикой естественно задаются две эквивалентности: $\sim_0$ и $\sim_\infty$. Для $\sim_0$ эквивалентными считаются элементы из X, находящиеся на нулевом расстоянии, а для $\sim_\infty$ — на конечном. Если X_i — классы эквивалентности $\sim_\infty$, то каждый X_i является полуметрическим пространством, а расстояние между любыми элементами разных классов равно ∞. Разбиение X, заданное эквивалентностью $\sim_0$, является подразбиением в $\{X_i\}$, при этом расстояние между элементами любых двух классов эквивалентности $\sim_0$ не зависит от выбора представителей. Таким образом, если на множестве $X/\sim_0$ классов эквивалентности $\sim_0$ задать расстояние, равное расстоянию между любыми представителями классов, то получится корректно определенная обобщенная метрика. При этом каждое $\{X_i/\sim_0\}$ — разбиение $X/\sim_0$ на классы эквивалентности $\sim_\infty$, и каждое $X_i/\sim_0$ представляет собой метрическое пространство.

6.1.1 Факторизация

Пусть A и B — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$, $\pi\colon A \to B$ — эпиморфизм, и L_A — обобщенная полунорма на A. Для $b \in B$ положим $L_B(b) = \inf\bigl\{L_A(a) : a \in \pi^{-1}(b)\bigr\}$.

Теорема 6.6. *Отображение $L_B\colon B \to [0, \infty]$ — обобщенная полунорма. При этом, если L_A — полунорма, то L_B — также полунорма.*

Доказательство. Положим $A_f = \bigl\{a \in A : L_A(a) < \infty\bigr\}$, тогда A_f — линейное подпространство в A по предложению 6.2. Ясно, что отображение L_B конечно в точности на тех $b \in B$, для которых $\pi^{-1}(b) \cap A_f \neq \emptyset$. Иными словами, L_B конечно в точности на $B_f := \pi(A_f)$, которое, в силу линейности π, является линейным подпространством в B. Так как вне A_f отображение L_A бесконечно, то ограничение отображения π на A_f порождает ту же самую функцию на B_f. Таким образом, если мы покажем, что эпиморфизм $\pi|_{A_f, B_f}\colon A_f \to B_f$ порождает на B_f полунорму, то, в силу предложения 6.3, L_B будет обобщенной полунормой. Чтобы не загромождать текст обозначениями, мы в оставшейся части доказательства будем сразу считать L_A полунормой.

Заметим сначала, что если $b \in B$ и $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, то $\pi^{-1}(\alpha b) = \alpha\pi^{-1}(b)$. Действительно, пусть $\pi(c) = \alpha b$, тогда $\pi(c/\alpha) = \pi(c)/\alpha = b$, поэтому $c \in \pi^{-1}(b)$ и, значит, $\alpha c \in \alpha\pi^{-1}(b)$, так что $\pi^{-1}(\alpha b) \subset \alpha\pi^{-1}(b)$. Пусть теперь $c \in \alpha\pi^{-1}(b)$, тогда $c = \alpha a$ для некоторого $a \in \pi^{-1}(b)$. Но тогда $\pi(c) = \pi(\alpha a) = \alpha\pi(a) = \alpha b$, поэтому $c \in \pi^{-1}(\alpha b)$, откуда $\pi^{-1}(\alpha b) \supset \alpha\pi^{-1}(b)$, откуда и вытекает декларируемое равенство. Если же $\alpha = 0$, то $\pi^{-1}(\alpha b) = \pi^{-1}(0) = \ker \pi$, но $\alpha\pi^{-1}(b) = \{0\}$, так что имеет место лишь включение $\alpha\pi^{-1}(b) \subset \pi^{-1}(\alpha b)$.

Таким образом, если $\alpha \neq 0$, то

$$
\begin{aligned}
L_B(\alpha b) = \inf\bigl\{L_A(a) : a \in \pi^{-1}(\alpha b)\bigr\} = \inf\bigl\{L_A(a) : a \in \alpha\pi^{-1}(b)\bigr\} = \\
= \inf\bigl\{L_A(\alpha c) : c \in \pi^{-1}(b)\bigr\} = \inf\bigl\{|\alpha| L_A(c) : c \in \pi^{-1}(b)\bigr\} = |\alpha| L(b).
\end{aligned}
$$

Если же $\alpha = 0$, то $L_B(\alpha b) = L_B(0) = \inf\bigl\{L_A(a) : a \in \pi^{-1}(0)\bigr\} = 0$, и мы доказали положительную однородность функции L_B.

Пусть теперь $b, b' \in B$. Покажем, что $\pi^{-1}(b + b') = \pi^{-1}(b) + \pi^{-1}(b')$. Действительно, если $c \in \pi^{-1}(b) + \pi^{-1}(b')$, то $c = a + a'$, где $a \in \pi^{-1}(b)$ и $a' \in \pi^{-1}(b')$. Но тогда $\pi(c) = \pi(a + a')$, откуда $c \in \pi^{-1}(a + a')$ и, значит, $\pi^{-1}(b) + \pi^{-1}(b') \subset \pi^{-1}(b + b')$. Обратно, пусть $c \in \pi^{-1}(b + b')$ и $a \in \pi^{-1}(b)$, тогда $\pi(c - a) = \pi(c) - \pi(a) = b + b' - b = b'$, откуда $c - a = a'$ для некоторого $a' \in \pi^{-1}(b')$, так что $c = a + a'$ и, значит $c \in \pi^{-1}(b) + \pi^{-1}(b')$, т.е. $\pi^{-1}(b + b') \subset \pi^{-1}(b) + \pi^{-1}(b')$, откуда и вытекает декларированное равенство.

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
L_B(b + b') = \inf\bigl\{L_A(c) : c \in \pi^{-1}(b + b')\bigr\} = \inf\bigl\{L_A(a + a') : a \in \pi^{-1}(b),\ a' \in \pi^{-1}(b')\bigr\} = \\
= \inf\bigl\{L_A(a) + L_A(a') : a \in \pi^{-1}(b),\ a' \in \pi^{-1}(b')\bigr\} = L_B(b) + L_B(b').
\end{aligned}
$$

Доказательство закончено. □

Определение 6.7. Обобщенная полунорма L_B из теоремы 6.6 называется ***обобщенной фактор-полунормой***, и если L_B — полунорма, то — ***фактор-полунормой***.

Предложение 6.8. *Пусть A и B — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$, $\pi\colon A \to B$ — эпиморфизм, L_A — обобщенная полунорма на A, а L_B — фактор-полунорма. Пусть для $t \in (0,\infty)$*

$$B_A^t = \{a \in A : L_A(a) \le t\} \qquad \text{и} \qquad B_B^t = \{b \in B : L_B(b) \le t\}$$

обозначают шары радиуса t для полунорм L_A и L_B соответственно. Тогда имеем $\pi(B_A^t) \subset B_B^t$.

Доказательство. Действительно, для каждого $a_0 \in B_A^t$ и $b_0 = \pi(a_0)$ выполняется

$$L_B(b_0) = \inf\bigl\{L_A(a) : a \in \pi^{-1}(b_0)\bigr\} \le L_A(a_0) \le t,$$

что и требовалось. □

6.2 Обобщенная липшицева полунорма на обобщенном метрическом пространстве

Пусть (X,ρ) — произвольное обобщенное метрическое пространство, $\mathbb{F}$ — поле действительных или комплексных чисел, и $f\colon X \to \mathbb{F}$ — функция. Положим

$$L_\rho(f) = \sup\left\{\frac{\bigl|f(x)-f(y)\bigr|}{\rho(x,y)} : x,y \in X,\, x \ne y\right\}. \tag{6.2}$$

Отметим, что $L_\rho(f)$ может быть бесконечным, а также равным нулю для ненулевой функции f. По определению, величина $L_\rho(f)$ конечна, если и только если функция f — липшицева. Напомним, что для липшицевой функции f величина $L_\rho(f)$ называется ***растяжением***, являясь наименьшей константой Липшица.

Замечание 6.9. Для обобщенной метрики определение липшицевой функции такое же, как и для метрики. Например, если $\rho(x,y) = \infty$ для каждой пары $x \ne y$, то все функции будут липшицевыми, а $L_\rho \equiv 0$. В общем случае, если $\{X_i\}$ — разбиение множества X на классы эквивалентности $\sim_\infty$ ($x \sim_\infty y$, если и только если $\rho(x,y) < \infty$), то функция $f\colon X \to \mathbb{F}$ — липшицева, если и только если каждое ограничение $f|_{X_i}$ является липшицевой функцией в обычном смысле, т.е. на метрическом пространстве.

Обозначим $\mathbb{F}^X$ векторное пространство всех функций на X со значениями в $\mathbb{F}$.

Предложение 6.10. *Для любых $f,g \in \mathbb{F}^X$ и произвольных $\alpha \in \mathbb{F}$ имеем*

(1) $L_\rho(f+g) \le L_\rho(f) + L_\rho(g)$;

(2) $L_\rho(\alpha f) = |\alpha| L_\rho(f)$, *где мы полагаем* $0 \cdot \infty = 0$;

(3) $L_\rho(0) = 0$, *где* $0\colon X \to \mathbb{F}$ *— постоянная функция, равная нулю.*

Иными словами, L_ρ является обобщенной полунормой на $\mathbb{F}^X$.

Доказательство. (1) Для любых $x,y \in X$, $x \ne y$ имеем

$$\frac{\bigl|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)\bigr|}{\rho(x,y)} \le \frac{\bigl|f(x)-f(y)\bigr|}{\rho(x,y)} + \frac{\bigl|g(x)-g(y)\bigr|}{\rho(x,y)},$$

откуда и вытекает требуемое в силу того, что супремум суммы двух функций не превосходит суммы супремумов этих функций.

(2) Снова для любых $x,y \in X$, $x \ne y$ имеем

$$\frac{\bigl|\alpha f(x)-\alpha f(y)\bigr|}{\rho(x,y)} = |\alpha|\frac{\bigl|f(x)-f(y)\bigr|}{\rho(x,y)},$$

поэтому супремумы левой и правой частей равны. При этом супремум левой части равен $L_\rho(\alpha f)$, а супремум правой при $L_\rho(f) < \infty$ или при $\alpha \ne 0$ равен $|\alpha| L_\rho(f)$, а при $L_\rho(f) = \infty$ и $\alpha = 0$ равен нулю, что, в силу соглашения $0 \cdot \infty = 0$, приводит к формуле $0 = 0 \cdot \infty = |\alpha| L_\rho(f)$, значит и в этом случае утверждение имеет место.

(3) Очевидно. □

Обобщенная полунорма L_ρ называется ***обобщенной липшицевой полунормой***, порожденной обобщенной метрикой ρ пространства X. Отметим, что в дальнейшем мы введем еще одно понятие, которое будем называть липшицевой полунормой, однако эта новая обобщенная полунорма будет задаваться аксиоматически, без помощи заранее заданной обобщенной полуметрики, и всегда будет предполагаться конечной, т.е. полунормой.

Оказывается, исходная обобщенная метрика однозначно восстанавливается по порожденной ей обобщенной липшицевой полунорме L_ρ. Мы начнем с разбора случая, когда ρ — метрика.

Предложение 6.11. *Пусть ρ — метрика на множестве X, а L_ρ — обобщенная липшицева полунорма, порожденная ρ. Тогда для любых $x, y \in X$ выполняется*

$$\rho(x,y) = \sup\Big\{\big|f(x)-f(y)\big| : L_\rho(f) \le 1\Big\}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Так как $\big|f(x)-f(y)\big| \le L_\rho(f)\rho(x,y)$, то правая часть формулы (6.3) не превосходит $\rho(x,y)$. С другой стороны, возьмем в качестве f функцию $f(y)=\rho(x,y)$, тогда $L_\rho(f)\le 1$, так как $\big|f(y)-f(z)\big| = \big|\rho(x,y)-\rho(x,z)\big| \le \rho(y,z)$. Кроме того, $\big|f(x)-f(y)\big| = \rho(x,y)$, откуда правая часть формулы (6.3) не меньше $\rho(x,y)$. $\square$

Обобщим предложение 6.11 на произвольные обобщенные метрики.

Предложение 6.12. *Пусть ρ — обобщенная метрика на множестве X, а L_ρ — обобщенная липшицева полунорма, порожденная ρ. Тогда для любых $x, y \in X$ выполняется*

$$\rho(x,y) = \sup\Big\{\big|f(x)-f(y)\big| : L_\rho(f) \le 1\Big\}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Пусть $\sim_\infty$ — определенная выше эквивалентность на X, в которой эквивалентными являются пары точек, находящихся на конечном расстоянии, и пусть $\{X_i\}$ — разбиение X на классы этой эквивалентности. Обозначим ρ_i ограничения ρ на X_i, тогда ρ_i — полуметрика. Покажем, что для $x, y \in X_i$ выполняется

$$\rho(x,y) = \sup\Big\{\big|g(x)-g(y)\big| : g\colon X_i \to \mathbb{F},\, L_{\rho_i}(g) \le 1\Big\}.$$

Действительно, если $f\colon X \to \mathbb{F}$ такова, что $L_\rho(f) \le 1$, то и для $g = f|_{X_i}$ имеем $L_{\rho_i}(g) \le 1$. С другой стороны, для каждой функции $g\colon X_i \to \mathbb{F}$ функция $f\colon X \to \mathbb{F}$, являющаяся продолжением g на все X нулем, удовлетворяет $L_{\rho_i}(g) = L_\rho(f)$, что и завершает доказательство приведенной только что формулы для $\rho(x,y)$.

Из сказанного вытекает, что формула (6.4) восстанавливает ρ на каждом X_i. Пусть теперь $x \in X_i$, а $y \in X_j$ для $i \ne j$. Заметим, что для функции f, постоянной на каждом X_i, имеем $L_\rho(f) = 0$, поэтому все такие функции можно выбирать для вычисления супремума в формуле (6.4). Но тогда этот супремум равен ∞, что и завершает восстановление ρ на всем X. $\square$

Замечание 6.13. Как видно из формулировки предложения 6.11, для восстановления исходной ***метрики*** совсем не обязательно знать L_ρ на всем пространстве $\mathbb{F}^X$. Ее достаточно знать на подмножестве $\mathrm{Lip}_1^\rho(X) \subset \mathbb{F}^X$, состоящем из всех 1-липшицевых функций относительно ρ. Это подмножество не является векторным пространством. С другой стороны, множество $\mathrm{Lip}^\rho(X) \supset \mathrm{Lip}_1^\rho(X)$, состоящее из всех липшицевых функций, является, в силу предложения 6.10, векторным пространством. Отметим, что L_ρ является полунормой на $\mathrm{Lip}^\rho(X)$. Более того, если $L_\rho(f)=0$, то это означает, что $f(x)-f(y)=0$ при всех $x,y\in X$, т.е. f — константа. Таким образом, если $\mathrm{Lip}^\rho(X)$ профакторизовать по всем константам, то на полученном векторном пространстве функция L_ρ индуцирует норму, которую мы также обозначим L_ρ. Именно такая конструкция будет возникать в дальнейшем в различных ситуациях.

Соглашение 6.14. Если из контекста понятно, о какой метрике идет речь, то вместо $\mathrm{Lip}^\rho(X)$ и $\mathrm{Lip}_1^\rho(X)$ будем сокращенно писать $\mathrm{Lip}(X)$ и $\mathrm{Lip}_1(X)$ соответственно.

6.2.1 Продолжение липшицевых функций

Пусть (Z,ρ) — произвольное метрическое пространство и $X \subset Z$ — непустое замкнутое подмножество. Пусть $\mathrm{Lip}(Z)$ и $\mathrm{Lip}(X)$ — пространства вещественнозначных липшицевых функций, а $\pi\colon \mathrm{Lip}(Z) \to \mathrm{Lip}(X)$ — отображение ограничения на X функций, заданных на Z. Пусть L_X и L — липшицевы полунормы на $\mathrm{Lip}(X)$ и $\mathrm{Lip}(Z)$, соответствующие метрикам ρ_X и ρ соответственно. Так как липшицева полунорма определяется как супремум выражений по всем парам точек из пространства, переход от пространства к подмножеству не увеличивает этот супремум, поэтому $L_X\big(\pi(f)\big) \le L(f)$ для каждой $f \in \mathbb{R}^Z$.

Теорема 6.15 (Макшейн, Уитни). *Для каждой функции $g \in \mathrm{Lip}(X)$ существует $f \in \mathrm{Lip}(Z)$ такая, что $\pi(f) = g$ и $L_X(g) = L(f)$.*

Доказательство. Положим для краткости $M = L_X(g)$ и для каждого $x \in X$ определим функцию $f_x\colon Z \to \mathbb{R}$ так:

$$f_x(z) = g(x) + M\,\rho(z, x).$$

Лемма 6.16. *Каждая функция f_x является M-липшицевой.*

Доказательство. Для произвольных $z, w \in Z$ имеем

$$\big|f_x(z) - f_x(w)\big| = M\big|\rho(z, x) - \rho(w, x)\big| \le M\,\rho(z, w),$$

что и требовалось. $\square$

Из определения функции f_x и M-липшицевости функции g вытекает, что $f_x(x) = g(x)$, и для каждого $y \in X$ выполняется

$$f_y(x) = g(y) + M\,\rho(x, y) \ge g(x) = f_x(x),$$

т.е. в точке $x \in X$ значение функции f_x не превосходит значений всех остальных функций f_y, $y \in X$.

Положим $f(z) = \inf_{x\in X} f_x(z)$. Из сказанного выше вытекает, что для каждого $x \in X$ выполняется $f(x) = \inf_{y\in X} f_y(x) = f_x(x) = g(x)$, т.е. f действительно продолжает g.

Лемма 6.17. *Пусть на множестве W заданы две функции $\varphi, \psi\colon W \to \mathbb{R}$, причем их инфимумы конечны. Тогда*

$$\inf_W \varphi - \inf_W \psi \le \sup_W (\varphi - \psi).$$

Доказательство. Действительно,

$$\inf_W \varphi - \inf_W \psi = \sup_{w'\in W}\big(\inf_{w\in W} \varphi(w) - \psi(w')\big) \le \sup_{w'\in W}\big(\varphi(w') - \psi(w')\big).$$

$\square$

Применим лемму 6.17 к нашему случаю. Имеем

$$f(z) - f(y) = \inf_{x\in X} f_x(z) - \inf_{x\in X} f_x(y) \le \sup_{x\in X}\big(f_x(z) - f_x(y)\big) \le M\,\rho(z, y),$$

где последнее неравенство вытекает из леммы 6.16. Таким образом, функция f является M-липшицевой, что и требовалось. $\square$

Замечание 6.18. В теореме 6.15 нельзя заменить вещественнозначные функции на комплекснозначные. Действительно, пусть $Z = \{e, p_1, p_2, p_3\}$ четырехточечное метрическое пространство, в котором расстояние от e до всех p_i равно 1, а расстояние между разными p_i равно 2. Пусть $X = \{p_1, p_2, p_3\}$ и $g\colon X \to \mathbb{C}$ изометричное вложение, так что $M = L_X(g) = 1$. Тогда если $f(e)$ не совпадает с центром треугольника $g(X)$, то расстояние от $g(e)$ до одной из вершин этого треугольника будет больше радиуса описанной вокруг треугольника окружности, т.е. больше $2/\sqrt{3}$. Поэтому минимальное расстояние от $f(e)$ до вершин треугольника $f(X)$ равно $2/\sqrt{3}$, и эта последняя величина — наименьшая липшицева константа всевозможных продолжений функции g. Следовательно, такое g невозможно продолжить до липшицевой функции с той же константой Липшица.

Из теоремы 6.15 и предыдущих рассуждений немедленно получаем

Следствие 6.19. *Во введенных выше обозначениях, для каждой $g \in \mathrm{Lip}(X)$ имеем $L_X(g) = \min L(f)$, где минимум берется по всевозможным липшицевым продолжениям функции g на все Z.*

6.3 Комплексные меры

Как мы уже отмечали, обсуждаемые ниже метрики являются обобщением расстояния Монжа–Канторовича, заданного на пространстве вероятностных мер, которое рассматривается как пространство состояний C^*-алгебры. Чтобы определить такое представление, мы напомним понятие комплексной меры и некоторые факты, связанные с такими мерами. Детали см., например, в монографии Рудина [22].

Для удобства изложения, ***счетным разбиением множества*** E назовем каждую последовательность $E_1, E_2, \dots$ подмножеств E, в которой $E_i \cap E_j = \emptyset$ при всех $i \neq j$ и $\cup E_i = E$. Отметим, что если такая последовательность содержит лишь конечное число E_i, отличных от пустого множества, то такое разбиение фактически является конечным.

В настоящем разделе обозначим X некоторое множество и фиксируем на нем некоторую σ-алгебру $\mathcal{A}$ его подмножеств, элементы которой будем традиционно называть ***измеримыми множествами***. Каждое счетное разбиение множества $E \in \mathcal{A}$, состоящее из измеримых множеств, будем называть ***измеримым***. Напомним, что функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется ***измеримой***, если для каждого борелевского подмножества $B \subset \mathbb{C}$ имеем $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Комплексной мерой на $\mathcal{A}$ называется каждая функция $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ такая, что

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, и

(2) для каждого счетного измеримого разбиения $\{E_i\}$ множества $E \in \mathcal{A}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ абсолютно сходится и

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad \text{(счетная аддитивность).}$$

Стандартные меры на $\mathcal{A}$, т.е. принимающие значения в $[0, \infty]$, будем называть ***положительными***. Так как абсолютна сходимость ряда в определении комплексной меры означает конечность суммы модулей элементов этого ряда, то положительная мера является комплексной, если и только если она конечна.

Определим функцию $|\mu|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, положив $|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \bigl|\mu(E_i)\bigr|$, где супремум берется по всевозможным счетным измеримым разбиениям $\{E_i\}$ множества $E \in \mathcal{A}$.

Теорема 6.20. *Функция $|\mu|$ является положительной мерой на $\mathcal{A}$, причем $|\mu|(X) < \infty$.*

Мера $|\mu|$ называется ***полной вариацией*** комплексной меры μ. Из теоремы 6.20 вытекает, что лишь ограниченные меры могут являться полными вариациями комплексных мер.

Легко видеть, что линейная комбинация комплексных мер также является комплексной мерой, поэтому семейство всех комплексных мер образует комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$. Из теоремы 6.20 вытекает, что для каждой $\mu \in \mathcal{M}$ выполняется $|\mu| \in \mathcal{M}$.

Положим $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Задача 6.21. Докажите, что определенная нами функция $\|\cdot\|$ на $\mathcal{M}$ является нормой.

Для $\lambda, \mu \in \mathcal{M}$, говорят, что λ ***абсолютно непрерывна относительно*** μ и пишут $\lambda \ll \mu$, если для каждого $E \in \mathcal{A}$ такого, что $\mu(E) = 0$, выполняется $\lambda(E) = 0$.

Пример 6.22. Так как $|\mu(E)| \le |\mu|(E)$ для каждого $E \in \mathcal{A}$, то $\mu \ll |\mu|$.

Для $\mu \in \mathcal{M}$ и $A \in \mathcal{A}$ говорят, что μ ***сконцентрирована на*** A, если для каждого $E \in \mathcal{A}$ выполняется $\mu(E) = \mu(E \cap A)$. Последнее равносильно тому, что $\mu(E) = 0$ для всех $E \in \mathcal{A}$ таких, что $E \cap A = \emptyset$.

Если для мер $\lambda, \mu \in \mathcal{M}$ существуют $A, B \in \mathcal{A}$ такие, что $A \cap B = \emptyset$, λ сконцентрирована на A, μ сконцентрирована на B, то эти меры называются ***взаимно сингулярными***, что записывается $\lambda \perp \mu$.

Напомним, что положительная мера называется ***σ-конечной***, если X представимо в виде счетного объединения измеримых множеств конечной меры.

Также для $\mu \in \mathcal{M}$ обозначим через $L^1(\mu)$ множество всех измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{C}$, рассматриваемых с точностью до их значений на множествах μ-меры ноль и таких, что

$$\|f\|_1 := \int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Теорема 6.23 (Лебег–Радон–Никодим). *Пусть μ — положительная σ-конечная мера, а $\lambda \in \mathcal{M}$. Тогда*

(1) *существует и единственна пара $\lambda_a, \lambda_s \in \mathcal{M}$ такая, что*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

Если λ — положительна (и конечна), то λ_a и λ_s — такие же.

(2) *Существует единственная $h \in L^1(\mu)$ такая, что*

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu$$

для всех $E \in \mathcal{A}$.

Функция h из теоремы 6.23 называется ***производной меры** λ_a **по** μ* и записывается $h = d\lambda_a/d\mu$ или $d\lambda_a = h \, d\mu$.

Как следствие, получим ***полярное разложение*** комплексной меры μ.

Следствие 6.24. *Для $\mu \in \mathcal{M}$ существует измеримая функция $h\colon X \to \mathbb{C}$ такая, что $\big|h(x)\big| = 1$ для всех $x \in X$ и $d\mu = h \, d|\mu|$.*

Приведем еще одно следствие.

Следствие 6.25. *Пусть μ — положительная мера, $g \in L^1(\mu)$, и $\lambda \in \mathcal{M}$. Предположим, что для каждого $E \in \mathcal{A}$ выполняется*

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\mu.$$

Тогда

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| \, d\mu.$$

Пусть теперь X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, а $\mathcal{A}$ — борелевская σ-алгебра (наименьшая σ-алгебра, содержащая топологию). Каждая мера на таком $\mathcal{A}$, комплексная или положительная, называются ***борелевской***. Если для ***положительной конечной*** меры μ и каждого $E \in \mathcal{A}$ выполняется

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(V) : E \subset V, \text{ где } V \subset X \text{ — открытое множество}\} = \\ &= \sup\{\mu(K) : E \supset K, \text{ где } K \subset X \text{ — компактное множество}\},\end{aligned}$$

то мера μ называется ***регулярной***.[2] ***Комплексная борелевская мера*** $\mu \in \mathcal{M}$ называется ***регулярной***, если таковой является ее полная вариация $|\mu|$.

Напомним, что через $C_0(X)$ мы обозначали все непрерывные функции на X, зануляющиеся на бесконечности, т.е. такие $f\colon X \to \mathbb{C}$, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset X$, для которого $|f|(x) < \varepsilon$ при всех $x \in X \setminus K$. Напомним также, что пространство $C_0(X)$ с sup-нормой является одним из важнейших примеров коммутативной C^*-алгебры. Как и раньше, через $C_0(X)^*$ обозначим двойственное банахово пространство, состоящее из всех непрерывных (т.е. ограниченных) линейных отображений (функционалов) $\varPhi\colon C_0(X) \to \mathbb{C}$.

Теорема 6.26 (Рисс, см. [22])**.** *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Каждая борелевская комплексная мера $\mu \in \mathcal{M}$ порождает непрерывный линейный функционал $\varPhi\colon C_0(X) \to \mathbb{C}$ по формуле $\varPhi(f) = \int_X f \, d\mu$. Обратно, для каждого $\varPhi \in C_0(X)^*$ существует единственная **регулярная** борелевская комплексная мера $\mu \in \mathcal{M}$ такая, что*

$$\varPhi(f) = \int_X f \, d\mu$$

для всех $f \in C_0(X)$. Более того,

$$\|\varPhi\| = |\mu|(X).$$

Кроме того, если для каждой вещественной неотрицательной $f \in C_0(X)$ число $\varPhi(f)$ также вещественное неотрицательное, то μ — положительная мера.

[2]Это определение взято из Рудина [22]. Часто в определении регулярности вместо компактов K рассматривают замкнутые множества.

Задача 6.27. Приведите пример двух разных борелевских комплексных мер, порождающих один и тот же линейный функционал $\Phi \in C_0(X)$.

Обозначим $\mathcal{M}_r(X) \subset \mathcal{M}(X)$ множество регулярных борелевских комплексных мер на локально компактном хаусдорфовом пространстве X. Легко видеть, что $\mathcal{M}_r(X)$ также является комплексным векторным пространством с нормой $\mu \mapsto |\mu|(X)$, а соответствие из теоремы 6.26 уважает комплексные линейные комбинации и сопряжение $*$. Тем самым, с учетом сказанного, теорема 6.26 влечет следующую переформулировку.

Следствие 6.28. *Соответствие между нормированными пространствами $C_0(X)^*$ и $\mathcal{M}_r(X)$, описанное в теореме* 6.26*, является линейным изометричным $*$-изоморфизмом.*

Напомним, что $C_0(X)$ является C^*-алгеброй, и что (пример 4.6) множество $C_0(X)_{sa}$ самосопряженных элементов в $C_0(X)$ состоит в точности из всех вещественных функций, а его подмножество $C_0(X)^+$ положительных элементов — из всех неотрицательных вещественных функций. Для C^*-алгебры $\mathbb{C}$ множество положительных элементов — это в точности все неотрицательные вещественные числа.

Далее, функционал $\Phi \in C_0(X)^*$ положителен, если он сопоставляет каждому $f \in C_0(X)^+$ неотрицательное вещественное число. Таким образом, в силу теоремы 6.26, положительные функционалы соответствуют в точности всем положительным мерам $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$.

Напомним, что состоянием называется положительный функционал единичной нормы. В силу сказанного выше, пространство состояний $\mathcal{S}\big(C_0(X)\big) \subset C_0(X)^*$ соответствует в точности пространству всех регулярных вероятностных мер $\mathcal{P}_r(X) \subset \mathcal{M}_r(X)$. Это пространство, будучи наделенным $*$-слабой топологией, компактно. Ниже мы зададим на $C_0(X)^*$ расстояние с помощью обобщенной липшицевой полунормы на $C_0(X)$, и покажем, что соответствующая топология, индуцированная на $\mathcal{S}\big(C_0(X)\big)$, — это, в точности, введенная выше $*$-слабая топология. Этим, в частности, объясняется важность рассматриваемых здесь липшицевых полунорм.

6.4 Расстояние Монжа–Канторовича

Покажем, как обобщенные липшицевы полунормы возникают в транспортной задаче Монжа–Канторовича. Мы приведем конструкцию функционала Монжа–Канторовича в частном случае. Более общие постановки смотри, например, в [19].

Пусть X — метрическое пространство. В этом случае (см. [21, Теорема 7.1.7, с. 85]), каждая борелевская мера μ регулярна в том смысле, что для каждого борелевского множества $B \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество $U \subset X$ и замкнутое множество $F \subset X$ такие, что $F \subset B \subset U$ и $|\mu|(U \setminus F) < \varepsilon$.

Напомним, что борелевская мера μ называется ***радоновской*** или ***мерой Радона***, если для каждого борелевского множества $B \subset X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $K \subset X$, что $K \subset B$ и $|\mu|(B \setminus K) < \varepsilon$ ([21, с. 82]). Не всякая борелевская мера на метрическом пространстве является радоновой. Тем не менее, если пространство X — полное и сепарабельное (польское), то все борелевские меры — меры Радона (см. [21, Теорема 7.1.7, с. 85]).

Таким образом, в случае польского метрического пространства, в частности, для компактных метрических пространств все борелевские меры регулярны в смысле Рудина (см. рассуждения перед теоремой 6.26). Переформулируем эту теорему в случае компактных метрических пространств.

Теорема 6.29 (Рисс, см. [22])**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство. Каждая борелевская комплексная мера $\mu \in \mathcal{M}$ порождает непрерывный линейный функционал $\Phi\colon C(X) \to \mathbb{C}$ по формуле $\Phi(f) = \int_X f\,d\mu$. Обратно, для каждого $\Phi \in C(X)^*$ существует единственная борелевская комплексная мера $\mu \in \mathcal{M}$ такая, что*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu$$

для всех $f \in C(X)$. Более того,

$$\|\Phi\| = |\mu|(X).$$

Кроме того, если для каждой вещественной неотрицательной $f \in C(X)$ число $\Phi(f)$ также вещественное неотрицательное, то μ — положительная мера.

Нам также понадобится вещественный аналог теоремы 6.29. Рассуждения про связь борелевости, регулярности и радоновости, проделанные перед этой теоремой, вместе с теоремой [21, теорема 7.10.4, с. 134], приводят к следующему результату.

Теорема 6.30 (Рисс)**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство. Каждая (конечная) борелевская вещественная мера $\mu \in \mathcal{M}$ порождает на пространстве $C(X)$ вещественных непрерывных функций непрерывный вещественный линейный функционал $\Phi\colon C(X) \to \mathbb{R}$ по формуле $\Phi(f) = \int_X f\,d\mu$. Обратно, для каждого $\Phi \in C(X)^*$ существует единственная (конечная) борелевская вещественная знакопеременная (принимающая значения в $\mathbb{R}$) мера $\mu \in \mathcal{M}$ такая, что*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu$$

для всех $f \in C(X)$. Более того,

$$\|\Phi\| = |\mu|(X).$$

Кроме того, если для каждой неотрицательной $f \in C(X)$ число $\Phi(f)$ также неотрицательное, то μ — положительная мера.

До конца этого раздела X обозначает компактное метрическое пространство. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех борелевских вероятностных мер на X (такие меры будем сокращенно называть просто вероятностными). Для каждых $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(X)$ обозначим $\Pi(\lambda, \mu)$ семейство всех борелевских вероятностных мер на $X \times X$ таких, что для любых борелевских $A, B \subset X$ и любой $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$ выполняется $\pi(A \times X) = \lambda(A)$ и $\pi(X \times B) = \mu(B)$. Говорят, что такая мера π ***соединяет*** λ и μ. Также, благодаря транспортной интерпретации, меры π называют ***транспортными планами типа*** (λ, μ).

Определим теперь отображение $K\colon \Pi(\lambda, \mu) \to [0, \infty]$, положив значение на π равным интегралу Лебега

$$K(\pi) = \int_{X \times X} |xy|\,d\pi(x, y). \tag{6.5}$$

Величина $K(\pi)$ может быть проинтерпретирована как стоимость перемещения сырья, распределение которого задается мерой λ, к потребителю, распределенному посредством меры μ. Это перемещение осуществляется с помощью плана перемещения, заданного мерой π. Здесь предполагается, что цена перемещения единицы сырья равна расстоянию, на которое оно перемещается. Впрочем, вместо функции $|xy|$ под интегралом в выражении 6.5 может стоять любая неотрицательная интегрируемая функция. Транспортная задача состоит в минимизации стоимости перемещения.

Отображение, заданное формулой 6.5, называется ***функционалом Монжа–Канторовича***, а проблема поиска точной нижней грани этого функционала — ***проблемой Монжа–Канторовича***. Положим

$$|\lambda\mu| = \inf_{\pi \in \Pi(\lambda, \mu)} K(\pi).$$

Напомним, что для каждой λ-интегрируемой по Лебегу функции f интеграл $\int_X f\,d\lambda$ часто обозначается $\lambda(f)$, что мы и будем делать. Также отметим, что все липшицевы функции интегрируемы по каждой вероятностной мере. Оказывается (см. например [24]), величину $|\lambda\mu|$ можно посчитать через липшицевы функции на X:

$$|\lambda\mu| = \sup\Big\{\big|\lambda(f) - \mu(f)\big| : L(f) \le 1\Big\}. \tag{6.6}$$

Полученная функция на $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ является метрикой и называется ***метрикой Монжа–Канторовича***. Как мы и описали в конце раздела 6.3, определенная выше метрика Монжа–Канторовича задается с помощью обобщенной липшицевой полунормы на C^*-алгебре $C(X)$. Кроме того, известно, что соответствующая метрическая топология является $*$-слабой.

6.5 Упорядоченные пространства с порядковой единицей (напоминание)

Проделанные выше построения естественно переносятся на упорядоченные векторные пространства. Напомним основные понятия и конструкции теории таких пространств. В данном разделе A обозначает **вещественное** векторное пространство.

Конусом в вещественном линейном пространстве A называется каждое подмножество A, инвариантное относительно всех неотрицательных линейных комбинаций его элементов. Каждый конус $A^+ \subset A$ такой, $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$ порождает на A следующий частичный порядок: $a \le b$, если и только если $b - a \in A^+$.

Ясно, $0 \in A^+$, и A^+ — это множество всех неотрицательных элементов из A. Кроме того, этот порядок инвариантен относительно сдвигов и умножения на неотрицательные числа. Более того, каждый частичный порядок, инвариантный относительно неотрицательных линейных комбинаций, задается некоторым конусом A^+ (предложение 5.4). Вещественное векторное пространство с таким частичным порядком называется ***упорядоченным***.

Элемент $e \in A$ упорядоченного векторного пространства называется ***порядковой единицей***, если для каждого $a \in A$ существует число $r > 0$, для которого $a \leq re$. Мы показывали (лемма 5.6), что в упорядоченном векторном пространстве с порядковой единицей сама единица всегда неотрицательна, и $A^+ - A^+ = A$ (такие порядки называются ***полными***).

Порядковая единица $e \in A$ называется ***архимедовой***, если для каждого $a \in A$ такого, что $re + a \geq 0$ для всех $r > 0$, выполняется $a \in A^+$. Собственный класс всех упорядоченных векторных пространств с архимедовой порядковой единицей обозначим $\mathcal{OUS}$ (от английского термина “order-unit space”). При этом, если мы желаем подчеркнуть, что e — порядковая единица для $A \in \mathcal{OUS}$, будем писать $(A, e) \in \mathcal{OUS}$. Если же из контекста понятно обозначение для порядковой единицы, будем пользоваться упрощенной записью $A \in \mathcal{OUS}$.

На $(A, e) \in \mathcal{OUS}$ естественно определяется норма:

$$\|a\| = \inf\{r \in \mathbb{R} : -re \leq a \leq re\}. \tag{6.7}$$

Отметим, что архимедовость порядковой единицы влечет положительную определенность $\|\cdot\|$, а без свойства архимедовости $\|\cdot\|$ является лишь полунормой (предложение 5.25). Кроме того, $\|e\| = 1$ (теорема 5.33).

Через A' будем обозначать двойственное пространство всех (вещественных) непрерывных линейных функционалов. В силу задачи 1.9, пространство A' банахово. Функционал $\mu \in A'$ называется ***положительным***, если $\mu(A^+) \subset [0, \infty)$. Отметим, что положительность функционала равносильна сохранению порядка (предложение 5.9).

Положительный функционал $\mu \in A'$ такой, что $\mu(e) = 1$, называется ***состоянием***.

Предложение 6.31. *Функционал $\mu \in A'$ является состоянием, если и только если $\|\mu\| \leq 1$ и $\mu(e) = 1$.*

Доказательство. Так как $\|e\| = 1$ и $\mu(e) = 1$, то $\|\mu\| \geq 1$. По условию, имеет место и обратное неравенство, поэтому $\|\mu\| = \mu(e)$. В силу следствия 5.31, положительность функционала $\mu \in A'$ равносильна $\|\mu\| = \mu(e)$. Следовательно, μ — положительный функционал, для которого $\mu(e) = 1$, т.е. μ — состояние. Обратно, каждое состояние удовлетворяет $\mu(e) = 1$ (по определению) и $\|\mu\| = \mu(e) = 1$ по следствию 5.31. □

Предложение 6.32. *Пространство состояний $\mathcal{S}(A)$ — выпуклое подмножество A', являющееся хаусдорфовым компактом в $*$-слабой топологии.*

Доказательство. Хаусдорфовость пространства состояний следует из хаусдорфовости $*$-слабой топологии (теорема 1.31). Докажем выпуклость.

Из предложения 6.31 вытекает, что $\mathcal{S}(A)$ представляет собой пересечение замкнутого единичного шара $B' = \{\mu \in A' : \|\mu\| \leq 1\}$ и аффинного гиперпространства $\Pi = \big\{\mu \in A' : \mu(e) = 1\big\}$. Так как B' — шар относительно нормы, то он — выпуклый. Гиперпространство тоже выпуклое. Таким образом, $\mathcal{S}(A)$ — выпукло как пересечение выпуклых множеств.

Наконец, докажем компактность. Шар B' компактен в $*$-слабой топологии в силу теоремы Банаха–Алаоглу 1.33. Так как $*$-слабая топология хаусдорфова (теорема 1.31), то шар B' замкнут в A'. Гиперпространство Π замкнуто в $*$-слабой топологии, так как эта топология определяется как самая слабая среди которых все линейные функционалы $J_a \in A''$, $a \in A$, $J_a(\varphi) = \varphi(a)$ непрерывны. В частности, J_e — непрерывный функционал в $*$-слабой топологии и, значит, множество $\Pi = J_e^{-1}(1) \subset A'$ — замкнуто. Таким образом, $B' \cap \Pi$ — замкнутое в $*$-слабой топологии подмножество A' и, значит, компактное подмножество B' и, тем самым, всего A'. □

Предложение 6.33. *Пусть L — полунорма на $A \in \mathcal{OUS}$. Для любых $\lambda, \mu \in A'$ положим*

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in A,\ L(a) \leq 1\Big\}. \tag{6.8}$$

Тогда ρ_L — обобщенная метрика.

Доказательство. То, что $\rho_L \geq 0$, $\rho_L(\lambda, \lambda) = 0$ для всех $\lambda \in A'$, симметричность и неравенство треугольника проверяются непосредственно. Покажем, что ρ_L положительно определенна. Предположим, что для $\lambda, \mu \in A'$

имеем $\rho_L(\lambda,\mu)=0$. Это равносильно $\lambda(a)=\mu(a)$ для всех a таких, что $L(a)\le 1$. Пусть $L(a)>1$. Положим $b=a/L(a)$, тогда $L(b)=1$ и, значит,

$$\lambda(b)=\lambda\left(\frac{a}{L(a)}\right)=\frac{\lambda(a)}{L(a)}=\mu(b)=\frac{\mu(a)}{L(a)},$$

откуда $\lambda(a)=\mu(a)$. Таким образом, $\lambda(a)=\mu(a)$ для всех $a\in A$ и, значит, $\lambda=\mu$. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится аналог представления Гельфанда, полученный Кэдисоном [18] в случае упорядоченных пространств.

6.6 Представление Кэдисона

Этот раздел основан на работах [18] и [25].

Пусть K — произвольное выпуклое подмножество вещественного векторного пространства V. Функция $f\colon K\to\mathbb{R}$ называется ***аффинной***, если для любых $x,y\in K$ и каждого $t\in[0,1]$ выполняется

$$f\bigl((1-t)x+t\,y\bigr)=(1-t)f(x)+t\,f(y).$$

Легко видеть, что линейная комбинация аффинных функция также является аффинной функцией. Пусть теперь V — топологическое векторное пространство, т.е. на V задана некоторая топология, в которой линейные комбинации непрерывны. Тогда линейные комбинации непрерывных аффинных функций на K снова непрерывны, поэтому множество $\mathrm{Aff}(K)$ всех непрерывных аффинных функций на K образует векторное пространство. Отметим, что на $\mathrm{Aff}(K)$ имеется естественный частичный порядок (как на пространстве функций) и что все постоянные функции лежат в $\mathrm{Aff}(K)$.

Предложение 6.34. *Пусть $K\subset V$ — выпуклое компактное подмножество топологического векторного пространства V. Тогда $\mathrm{Aff}(K)$ — нормированное подпространство в $C(K)$ с индуцированным из $C(K)$ частичным порядком и порядковой единицей e, равной постоянной функции 1, причем порядковая единица e — архимедова.*

Доказательство. Так как все функции в $\mathrm{Aff}(K)$ ограничены в силу компактности K, то $\mathrm{Aff}(K)\subset C(K)$ — нормированное пространство с sup-нормой.

Как мы уже отмечали выше, все постоянные функции содержатся в $\mathrm{Aff}(K)$, в частности, $1\in\mathrm{Aff}(K)$. Так как каждая $f\in\mathrm{Aff}(K)$ ограничена, $f\le r\cdot 1$ для некоторого $r\ge 0$, а это и означает, что $e=1$ — порядковая единица.

Докажем теперь, что порядковая единица e является архимедовой. Действительно, пусть для $f\in\mathrm{Aff}(K)$ и каждого $r>0$ выполняется $f+r\ge 0$, т.е. для каждого $x\in K$ имеем $f(x)+r\ge 0$ при всех $r>0$. Но тогда и $f(x)\ge 0$ при всех x, так что $f\ge 0$. $\square$

Пусть $A\in\mathcal{OUS}$, A' — двойственное пространство относительно нормы (6.7), а $S(A)\subset A'$ — пространство состояний со $*$-слабой топологией, являющееся выпуклым хаусдорфовым компактом в силу предложения 6.32. Применим полученные выше результаты к случаю $K=\mathcal{S}(A)$.

Следствие 6.35. *Пространство $\mathrm{Aff}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$ с sup-нормой является подпространством в $C\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$ и представляет собой упорядоченное векторное пространство с архимедовой порядковой единицей $e=1$.*

Для каждого $a\in A$ рассмотрим отображение $\varkappa(a)\colon\mathcal{S}(A)\to\mathbb{R}$, заданное так: $\varkappa(a)\colon f\mapsto f(a)$. Так как на $\mathcal{S}(A)$ введена $*$-слабая топология, каждое отображение $\varkappa(a)$ непрерывно. Кроме того, для любых $f,g\in\mathcal{S}(A)$ и $t\in[0,1]$ элемент $(1-t)f+t\,g$ содержится в $\mathcal{S}(A)$ по предложению 6.32, и

$$\varkappa(a)\bigl((1-t)f+t\,g\bigr)=\bigl((1-t)f+t\,g\bigr)(a)=(1-t)f(a)+t\,g(a)=\bigl((1-t)\varkappa(f)+t\,\varkappa(g)\bigr)(a),$$

так что $\varkappa(a)\in\mathrm{Aff}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$ при каждом $a\in A$.

Предложение 6.36. *Отображение $\varkappa\colon A\to\mathrm{Aff}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$ линейно.*

Доказательство. Для любых $a,b\in A$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $f\in\mathcal{S}(A)$ имеем

$$\varkappa(\alpha a+\beta b)(f)=f(\alpha a+\beta b)=\alpha f(a)+\beta f(b)=\alpha\varkappa(a)(f)+\beta\varkappa(b)(f),$$

поэтому $\varkappa(\alpha a+\beta b)=\alpha\varkappa(a)+\beta\varkappa(b)$. $\square$

Предложение 6.37. *Отображение $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ инъективно.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют $a, b \in A$ такие, что $\varkappa(a) = \varkappa(b)$. Тогда для любого $f \in \mathcal{S}(A)$ имеем $f(a) = f(b)$, т.е. $f(a-b) = 0$ для всех состояний f. Однако, в силу предложения 5.20, имеем $a - b = 0$, и полученное противоречие завершает доказательство. □

Предложение 6.38. *Отображение $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ является порядковым изоморфизмом (т.е. $\varkappa$ и ему обратное, определенное на образе $\varkappa$, сохраняют порядки). Более того, если e_A — порядковая единица в A, то $\varkappa(e_A)$ — порядковая единица в $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$, т.е. $\varkappa$ — унитальный порядковый изоморфизм.*

Доказательство. Так как $\mathcal{S}(A)$ состоит из положительных линейных функционалов f, то для $a, b \in A$, $a \le b$, если и только если $f(a) \le f(b)$. Последнее означает, что $a \le b$ равносильно $\varkappa(a)(f) \le \varkappa(b)(f)$ для любого $f \in \mathcal{S}(A)$, т.е. $\varkappa(a) \le \varkappa(b)$. Этим доказано, что $\varkappa$ — порядковый изоморфизм.

Далее, по определению состояния, для каждого $f \in \mathcal{S}(A)$ выполняется $f(e_A) = 1$, т.е. $\varkappa(e_A)(f) = f(e_A) = 1$ для всех f, поэтому $\varkappa(e_A)$ — порядковая единица в $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$. Доказательство закончено. □

Так как нормы на упорядоченных векторных пространствах с порядковыми единицами задаются в терминах порядков, мгновенно заключаем

Следствие 6.39. *Построенное выше отображение $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ является линейным изометричным вложение, если на $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ задавать расстояние с помощью порядковой нормы.*

Следующее почти очевидное предложение имеет важное следствие.

Предложение 6.40. *Пусть $C(K)$ — пространство вещественных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K. Тогда $\sup$-норма $\|\cdot\|_\infty$ совпадает с порядковой нормой, заданной стандартным частичным порядком: $f \le g$, если и только если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in K$.*

Доказательство. По определению порядковой нормы, для $f \in C(K)$ имеем

$$\|f\| = \inf\big\{r \in \mathbb{R} : -r \cdot 1 \le f(x) \le r \cdot 1,\ x \in K\big\} = \sup\big\{|f(x)| : x \in K\big\} = \|f\|_\infty,$$

что и требовалось. □

Следствие 6.41. *Построенное выше отображение $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ является изометричным вложением пространства A с порядковой нормой в пространство $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ с $\sup$-нормой. Иными словами, для каждого $a \in A$ имеем*

$$\|a\| = \sup_{f \in \mathcal{S}(A)} \big|f(a)\big|.$$

Отображение $\varkappa$ называется ***представлением Кэдисона***. Оно позволяет рассматривать каждое упорядоченное вещественное пространство с архимедовой порядковой единицей как линейное подпространство в вещественном векторном пространстве $\mathrm{Aff}(K) \subset C(K)$, состоящем из всех аффинных функций на выпуклом хаусдорфовом компактном подмножестве K некоторого вещественного топологического векторного пространства. Как и в случае с представлением Гельфанда, представление Кэдисона позволяет извлекать разные нетривиальные результаты относительно упорядоченных вещественных векторных пространств из соответствующих результатов о пространствах вещественных функций с sup-нормой.

Соглашение 6.42. По аналогии с тем, как мы это делали в случае с представлением Гельфанда, для каждого $a \in A$ функцию $\varkappa(a) \in \mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ будем также обозначать $\widehat{a}$.

6.7 Компактные квантовые метрические пространства

Обсудим теперь конструкцию квантового метрического пространства, введенную Риффелем [7]. В ней, вместо исходного вещественного пространства самосопряженных элементов C^*-алгебры, выступает вещественное пространство A с частичным порядком и архимедовой порядковой единицей. Этот порядок и порядковая единица задают норму. Положительный конус A^+, порождающий частичный порядок, служит аналогом положительных самосопряженных элементов. Последнее позволяет определить на этом пространстве положительные вещественные функционалы и состояния — такие функционалы с единичной нормой (сравните с определением состояний на C^*-алгебре). На множестве $\mathcal{S}(A)$ всех состояний вводится $*$-слабая топология, в которой

$\mathcal{S}(A)$ является компактом (теорема Алаоглу). Далее показывается, что эту топологию можно задать с помощью метрики на вещественно-двойственном к A пространстве A', причем эта метрика порождается с помощью липшицевой полунормы L на A. Собственно, эти метрические пространства и будут играть основную роль в изложении. Впрочем, Риффель предпочитает называть квантовыми метрическими пространствами не метрические компакты $\mathcal{S}(A)$, а пары (A, L). Отметим, что таким образом у Риффеля возникают ***компактные*** квантовые метрические пространства. Латремольер [23] предложил обобщение конструкции Риффеля, получив более широкий класс квантовых метрических пространств.

6.7.1 Липшицева полунорма на упорядоченном пространстве

Определение 6.43. Пусть $(A, e) \in \mathcal{OUS}$. ***Липшицевой полунормой на*** A назовем полунорму $L\colon A \to [0, \infty)$, удовлетворяющую следующему свойству: для каждого $a \in A$ условие $L(a) = 0$ равносильно $a \in \mathbb{R}e = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Замечание 6.44. Стоит отличать липшицеву полунорму из определения 6.43 от обобщенной липшицевой полунормы, введенной для метрических пространств по формуле (6.2).

Пусть L — липшицева полунорма на $(A, e) \in \mathcal{OUS}$. Определим $\rho_L\colon A' \times A' \to [0, \infty]$ по формуле (6.8):

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in A,\ L(a) \le 1\Big\}.$$

По предложению 6.33, ρ_L является обобщенной метрикой, в частности, ρ_L может, вообще говоря, принимать на $\mathcal{S}(A)$ бесконечные значения.

Замечание 6.45. Отметим, что если $\lambda(e) \ne \mu(e)$, то $\rho_L(\lambda, \mu) = \infty$, так как в качестве $a \in A$ в формуле (6.8) можно брать всевозможные re, $r \in \mathbb{R}$. Таким образом, отображение ρ_L может быть конечным лишь на аффинных подпространствах $\{\lambda \in A' : \lambda(e) = \mathrm{const}\}$. Положим

$$A'^{\circ} = \ker J_e = \big\{\lambda \in A' : \lambda(e) = 0\big\}.$$

Тогда все аффинные подпространства $\{\lambda \in A' : \lambda(e) = \mathrm{const}\}$ получаются из A'° сдвигом на некоторый вектор $\nu \in A'$, и если $\lambda, \mu \in A'^{\circ}$, то $\lambda + \nu, \mu + \nu \in \nu + A'^{\circ}$ и $\rho_L(\lambda + \nu, \mu + \nu) = \rho_L(\lambda, \mu)$, т.е. такие сдвиги на ν сохраняют расстояние ρ_L. Таким образом, достаточно описать ρ_L на A'°.

Предложение 6.46. *Для любого $a \in A$ и произвольных λ, $\mu \in \mathcal{S}(A)$ имеем*

$$\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| \le L(a)\rho_L(\lambda, \mu).$$

Доказательство. Действительно, по определению,

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in A,\ L(a) \le 1\Big\},$$

поэтому для каждого $a \in A$, $L(a) \le 1$ выполняется

$$\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| \le \rho_L(\lambda, \mu).$$

Пусть теперь $L(a) > 1$. Положим $b = a/L(a)$, тогда

$$\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| = \big|L(a)\lambda(b) - L(a)\mu(b)\big| = L(a)\big|\lambda(b) - \mu(b)\big| \le L(a)\rho_L(\lambda, \mu),$$

что и требовалось. □

6.7.2 Lip-норма

Определение 6.47. Для $(A, e) \in \mathcal{OUS}$ назовем Lip-***нормой*** каждую липшицеву полунорму L, удовлетворяющую следующему условию: обобщенная метрика $\rho_L\colon A' \times A' \to [0, \infty]$, заданная формулой (6.8), т.е.

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in A,\ L(a) \le 1\Big\}, \tag{6.9}$$

порождает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$.

Замечание 6.48. Термин Lip-норма является традиционным и активно используется в цитированных выше работах Риффеля. Тем не менее, следует помнить, что в действительности Lip-норма является **полунормой**, а использование термина норма — лишь дань традиции.

Предложение 6.49. *Пусть L — произвольная* Lip*-норма на A, тогда ρ_L — метрика на $\mathcal{S}(A)$.*

Доказательство. То, что ρ_L — обобщенная метрика вытекает из предложения 6.33. Покажем теперь, что ρ_L — метрика, т.е. что она — конечна.

Предположим противное, т.е. существуют $\lambda_0, \mu_0 \in \mathcal{S}(A)$ такие, что $\rho_L(\lambda_0, \mu_0) = \infty$. Тогда множество $Y = \big\{\lambda \in \mathcal{S}(A) : \rho_L(\lambda, \mu_0) < \infty\big\}$ непусто (содержит, например, μ_0) и не совпадает с $\mathcal{S}(A)$. С другой стороны, Y открыто (так как равно объединению открытых шаров с центром в μ_0) и замкнуто, так как $\mathcal{S}(A)\setminus Y$ непусто ($\lambda_0 \notin Y$) и, в силу неравенства треугольника, для каждого $\lambda' \in \mathcal{S}(A)\setminus Y$, конечного $r > 0$ и $\lambda \in U_r(\lambda')$ выполняется

$$\rho_L(\lambda, \mu_0) \ge \rho_L(\lambda', \mu_0) - \rho_L(\lambda', \lambda) = \infty,$$

так что $U_r(\lambda') \subset \mathcal{S}(A)\setminus Y$. Таким образом, если ρ_L не является метрикой на $\mathcal{S}(A)$, то $\mathcal{S}(A)$ несвязно. Но, в силу предложения 6.32, пространство $\mathcal{S}(A)$ выпукло и, значит, связно, так что полученное противоречие завершает доказательство. □

Определение 6.50. ***Компактным квантовым метрическим пространством*** называется каждая пара (A, L), где $A \in \mathcal{OUS}$, а L — это Lip-норма на A. Семейство всех компактных квантовых метрических пространства обозначим $\mathcal{CQ}$ (от “compact quantum”).

Прежде чем переходить к изучению компактных квантовых метрических пространств, приведем ряд полезных для дальнейшего результатов о пространствах, в которых полунормы L липшицевы, т.е. не требуется, чтобы липшицева полунорма порождала $*$-слабую топологию на пространстве состояний.

6.8 Пространства с липшицевыми полунормами

Для $(A, e) \in \mathcal{OUS}$ пусть $\widetilde{A}$ обозначает факторпространство $A/(\mathbb{R}e)$ и $\pi\colon A \to \widetilde{A}$ — каноническую проекции. Рассмотрим на A произвольную липшицеву полунорму L, и пусть $L^\sim$ — полученная из L фактор-полунорма на $\widetilde{A}$ (см. определение 6.7 и теорему 6.6, гарантирующую, что $L^\sim$ — полунорма, так как получена из полунормы L). Также обозначим $\|\cdot\|^\sim$ полунорму на $\widetilde{A}$, полученную из порядковой нормы $\|\cdot\|$ на A.

Предложение 6.51. *Полунорма $\|\cdot\|^\sim$ является нормой.*

Доказательство. Заметим сначала, что как пространство $\mathbb{R}e$, так и все его сдвиги, т.е. $\pi^{-1}(b)$ для всех $b \in \widetilde{A}$, — полные относительно индуцированной нормы в силу их конечномерности. Далее, предположим противное, т.е. существует ненулевой $b \in \widetilde{A}$, для которого $\|b\|^\sim = 0$. По определению фактор-полунормы, существует последовательность $a_i \in \pi^{-1}(b)$, для которой $\|a_i\| \to 0$. Но тогда последовательность a_i фундаментальна и, в силу полноты пространства $\pi^{-1}(b)$, сходится к некоторому $a \in \pi^{-1}(b)$. Из непрерывности нормы, $\|a\| = 0$, поэтому $a = 0$ и, значит, $b = \pi(a) = 0$, противоречие. □

Далее, покажем, что ограничение на диаметр пространства состояний относительно расстояния ρ_L, заданного липшицевой полунормой L, равносильно неравенству, связывающему норму элементов факторпространства $A/(\mathbb{R}e)$ и значения L на этих элементах.

Теорема 6.52. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и L — произвольная липшицева полунорма на A. Тогда для каждого положительного $r \in \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) *для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ выполняется $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$;*

(2) *для всех $b \in \widetilde{A}$ имеем $\|b\|^\sim \le r\, L^\sim(b)$.*

Доказательство. Докажем сначала две леммы.

Лемма 6.53. *Условие $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$ для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ равносильно*

$$\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| \le 2r\, L(a) \qquad (6.10)$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ и всех $a \in A$.

Доказательство. Пусть $\rho_L(\lambda,\mu)\le 2r$ для всех $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$. Тогда, по предложению 6.46, имеем
$$\big|\lambda(a)-\mu(a)\big|\le L(a)\rho_L(\lambda,\mu)\le 2r\,L(a).$$

Обратно, если $\big|\lambda(a)-\mu(a)\big|\le 2r\,L(a)$ для всех $a\in A$ и любых $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$, то $\big|\lambda(a)-\mu(a)\big|\le 2r$ для всех a таких, что $L(a)\le 1$, откуда
$$\rho_L(\lambda,\mu)=\sup\Big\{\big|\lambda(a)-\mu(a)\big|:a\in A,\ L(a)\le 1\Big\}\le 2r.$$
Доказательство закончено. □

Лемма 6.54. *Пусть $\pi\colon A\to\widetilde{A}$ — каноническая проекция. Тогда для любого $b\in\widetilde{A}$ существуют $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$ такие, что для каждого $a\in\pi^{-1}(b)$ выполняется*
$$\mu(a)=\max\big\{\nu(a):\nu\in\mathcal{S}(A)\big\},\quad \lambda(a)=\min\big\{\nu(a):\nu\in\mathcal{S}(A)\big\},\quad \|b\|^{\sim}=\frac{\mu(a)-\lambda(a)}{2}.$$

Доказательство. Для каждого $a\in A$ положим $\alpha(a)=\sup\{r\in\mathbb{R}:re\le a\}$ и $\beta(a)=\inf\{r\in\mathbb{R}:a\le re\}$. По теореме 5.18, величины $\alpha:=\alpha(a)$ и $\beta:=\beta(a)$ конечны и $\alpha\le\beta$. По следствию 5.19, для любого $a\in A$ и выполняется
$$[\alpha,\beta]=\big\{\lambda(a):\lambda\in\mathcal{S}(A)\big\},$$
а по предложению 5.24, $\|a\|=\max\big\{|\alpha|,|\beta(a)|\big\}$. Поэтому для любого $s\in\mathbb{R}$ и $\alpha_s:=\alpha(a+s\,e)$, $\beta_s:=\beta(a+s\,e)$ имеем
$$[\alpha_s,\beta_s]=\big\{\lambda(a+s\,e):\lambda\in\mathcal{S}(A)\big\}=\big\{\lambda(a):\lambda\in\mathcal{S}(A)\big\}+s=[\alpha+s,\beta+s]$$
и $\|a+s\,e\|=\max\big\{|\alpha+s|,|\beta+s|\big\}$. Иными словами, $\|a+s\,e\|$ равно расстоянию от $0\in\mathbb{R}$ до наиболее удаленного от 0 конца отрезка $s+[\alpha,\beta]$.

Выберем теперь в качестве a любой элемент из $\pi^{-1}(b)$, тогда
$$\|b\|^{\sim}=\inf_{s\in\mathbb{R}}\|a+s\,e\|=\inf_{s\in\mathbb{R}}\max\big\{|\alpha+s|,|\beta+s|\big\}=\frac{\beta-\alpha}{2},$$
так как при всевозможных сдвигах отрезка $[\alpha,\beta]$ на s наиболее удаленный конец сдвинутого отрезка находится на минимальном расстоянии, если и только если середина этого отрезка совмещена с 0, и тогда это расстояние равно половине длины отрезка.

Напомним, что $\mathcal{S}(A)$ со $*$-слабой топологией является компактом, причем эта топология индуцируется из $*$-слабой топологии на всем A', а в этой топологии отображения $J_a\colon A'\to\mathbb{R}$, $J_a(\lambda)=\lambda(a)$ непрерывны. Поэтому существуют $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$, для которых $\alpha=\min\big\{\nu(a):\nu\in\mathcal{S}(A)\big\}=\lambda(a)$ и $\beta=\max\big\{\nu(a):\nu\in\mathcal{S}(A)\big\}=\mu(a)$, откуда, в силу леммы 6.53,
$$\|b\|^{\sim}=\frac{\mu(a)-\lambda(a)}{2},$$
что и требовалось. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть выполняется условие (1). Пользуясь леммой 6.54, выберем $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$, для которых $\|b\|^{\sim}=\frac{|\lambda(a)-\mu(a)|}{2}$ для каждого $a\in\pi^{-1}(b)$. По лемме 6.53, $\big|\lambda(a)-\mu(a)\big|\le 2r\,L(a)$, откуда
$$\|b\|^{\sim}=\frac{\big|\lambda(a)-\mu(a)\big|}{2}\le\frac{2r\,L(a)}{2}=r\,L(a).$$
С другой стороны, так как для любого $t\in\mathbb{R}$ выполняется $\lambda(a+t\,e)-\mu(a+t\,e)=\lambda(a)-\mu(a)$, то неравенство $\|b\|^{\sim}\le r\,L(a)$ выполняется для любого $a\in\pi^{-1}(b)$, в частности,
$$\|b\|^{\sim}\le\inf\big\{r\,L(a):a\in\pi^{-1}(b)\big\}=r\,L^{\sim}(b).$$
Тем самым, мы показали, что условие (1) теоремы влечет условие (2).

Обратно, пусть выполняется условие (2), т.е. $\|b\|^{\sim}\le r\,L^{\sim}(b)$ для всех $b\in\widetilde{A}$. Выберем произвольные $\lambda',\mu'\in\mathcal{S}(A)$. В силу леммы 6.53, достаточно показать, что $\big|\lambda'(a)-\mu'(a)\big|\le 2r\,L(a)$ для всех $a\in A$. Выберем любое $a\in A$ и пусть $b=\pi(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda'(a)\le\mu'(a)$. По лемме 6.54, существуют $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$ такие, что $\lambda(a)\le\lambda'(a)\le\mu'(a)\le\mu(a)$ и $\|b\|^{\sim}=\big(\mu(a)-\lambda(a)\big)/2$. Но тогда
$$\big|\lambda'(a)-\mu'(a)\big|=\mu'(a)-\lambda'(a)\le\mu(a)-\lambda(a)=2\|b\|^{\sim}\le 2r\,L^{\sim}(b)\le 2r\,L(a),$$
где последнее неравенство вытекает из определения $L^{\sim}$. Доказательство теоремы закончено. □

Предложение 6.55. *Обозначим $D_2 \subset A'^{\circ}$ замкнутый шар (относительно ограничения на A'° двойственной нормы) с центром в нуле и радиусом 2. Тогда*

$$D_2 = \{\lambda - \mu : \lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)\}.$$

Доказательство. По определению состояния, $\|\lambda\| = \lambda(e) = 1$ и $\|\mu\| = \mu(e) = 1$, где e — порядковая единица в A, поэтому $(\lambda - \mu)(e) = \lambda(e) - \mu(e) = 0$, так что $\lambda - \mu \in A'^{\circ}$, и $\|\lambda - \mu\| \le \|\lambda\| + \|\mu\| = 2$, поэтому $\lambda - \mu \in D_2 \subset A'^{\circ}$.

Обратно, пусть $\nu \in D_2$. Если $\nu = 0$, то для каждого $\lambda \in \mathcal{S}(A)$ имеем $\nu = \lambda - \lambda$. Пусть теперь $\nu \ne 0$, тогда $\|\nu\| > 0$. Для краткости, положим $K = \mathcal{S}(A)$ и рассмотрим представление Кэдисона $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}(K) \subset C(K)$, тогда ν, в силу следствия 6.41, можно рассматривать как непрерывный линейный функционал на $\varkappa(A) \subset C(K)$. По теореме Хана–Банаха 1.11, функционал ν продолжается до непрерывного линейного функционала ν' на все $C(K)$ с той же нормой. По теореме 6.30, функционал ν' можно рассматривать как вещественную (знакопеременную) меру на K, для которой полная вариация $|\nu'|$ равна ее норме $\|\nu'\|$. Так как $\nu \in A'^{\circ}$, то $\nu(e) = 0$. Так как $\varkappa$ — изометричный унитальный изоморфизмом с образом, а ν' — продолжение ν, то $\nu'(1) = 0$.

По теореме 4.64, вещественная мера ν' представима в виде разности положительных вещественных мер λ' и μ', т.е. $\nu' = \lambda' - \mu'$, причем

$$\|\nu'\| = |\nu'| = |\lambda'| + |\mu'| = \|\lambda'\| + \|\mu'\|.$$

Так как $\nu'(1) = 0$, то $\lambda'(1) = \mu'(1)$. Кроме того, для положительных мер λ' и μ' выполняется $\|\lambda'\| = \lambda'(1)$ и $\|\mu'\| = \mu'(1)$, откуда $\|\lambda'\| = \|\mu'\| = \|\nu'\|/2 \le 1$.

Положим

$$\lambda = \varkappa'(\lambda') = \lambda' \circ \varkappa = \lambda'|_{\varkappa(A)} \circ \varkappa \;\; \text{и} \;\; \mu = \varkappa'(\mu') = \mu' \circ \varkappa = \mu'|_{\varkappa(A)} \circ \varkappa,$$

где $\varkappa'\colon C(K)' \to A'$ — двойственное отображение. Так как $\varkappa$ — изоморфизм с образом и λ', μ' — положительные функционалы, то $\lambda, \mu \in A'$ — также положительные функционалы. Так как $\varkappa$ — изометрия с образом, то $\|\lambda\| = \big\|\lambda'|_{\varkappa(A)}\big\|$ и $\big\|\mu'|_{\varkappa(A)}\big\| = \|\mu\|$. Поскольку λ' и μ' определены на большем пространстве, чем их ограничения $\lambda'|_{\varkappa(A)}$ и $\mu'|_{\varkappa(A)}$, то

$$\|\lambda\| \le \|\lambda'\| \;\; \text{и} \;\; \|\mu\| \le \|\mu'\|.$$

Но $e \in A$, поэтому, в силу предложения 5.29, имеем $\|\lambda\| = \lambda(e)$ и $\|\mu\| = \mu(e)$. Но тогда, в силу унитальности $\varkappa$, заключаем, что $\|\lambda\| = \lambda(e) = \lambda'(1) = \|\lambda'\|$ и, аналогично, $\|\mu\| = \|\mu'\|$. В частности, $\|\lambda\| = \|\mu\|$. Таким образом, если мы покажем, что $\|\lambda'\| = \|\mu'\| = 1$, то отсюда мгновенно выведем $\|\lambda\| = \|\mu\| = 1$ и, значит, $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$.

Предположим противное, тогда $0 < \|\lambda\| = \|\mu\| < 1$. Положим $t = \|\lambda\|$, $\bar\lambda = \lambda/t$ и $\bar\mu = \mu/t$, тогда $\bar\lambda, \bar\mu \in \mathcal{S}(A)$. Кроме того,

$$\nu = t\,\bar\lambda - t\,\bar\mu = \bar\lambda - \big(t\,\bar\mu + (1-t)\,\bar\lambda\big).$$

Так как $\mathcal{S}(A)$ выпукло в силу предложения 6.32, то $t\,\bar\mu + (1-t)\bar\lambda \in \mathcal{S}(A)$, и мы снова получили искомое представление. Доказательство закончено. □

Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и L — липшицева полунорма на A. Зададим двойственную обобщенную полунорму L' на A', порожденную L, стандартным образом:

$$L'(\lambda) = \sup\Big\{\big|\lambda(a)\big| : a \in A,\ L(a) \le 1\Big\}.$$

Замечание 6.56. По предложению 6.33, функция $\rho_L\colon A' \times A' \to [0, \infty]$, заданная формулой (6.8), является обобщенной метрикой. Непосредственно из определений для ρ_L и L' вытекает, что имеет место следующее соотношение:

$$\rho_L(\lambda, \mu) = L'(\lambda - \mu).$$

Предложение 6.57. *Для $\lambda \in A'$, $\lambda \notin A'^{\circ}$ имеем $L'(\lambda) = \infty$.*

Доказательство. Если $\lambda \notin A'^{\circ}$, то $\lambda(e) \ne 0$. Так как для любого $r \in \mathbb{R}$ выполняется $L(r\,e) = 0$, то $L'(\lambda) \ge \big|\lambda(r\,e)\big| = |r| \cdot |\lambda(e)|$, откуда, устремляя r к бесконечности, получаем требуемое. □

Теорема 6.58. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и L — липшицева полунорма на A, а L' — двойственная обобщенная полунорма, порожденная L. Пусть $\|\cdot\|'$ обозначает норму на A', двойственную к порядковой норме. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для любых $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ имеем $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$;*

(2) *для любого $\lambda \in A'^{\circ}$ выполняется $L'(\lambda) \le r\,\|\lambda\|'$.*

Доказательство. Пусть сначала верно первое условие. Выберем произвольное $\lambda \in A'^{\circ}$ и докажем выполнение второго условия. Если $\lambda = 0$, то второе условие верно. Если же $\lambda \ne 0$, то второе условие равносильно $L'(\nu) \le 2r$ для всякого $\nu \in A'^{\circ}$, $\|\nu\|' = 2$. Напомним (замечание 6.56), что $\rho_L(\lambda, \mu) = L'(\mu - \lambda)$ для $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$, а также что, по предложению 6.55, шар $D_2 \subset A'^{\circ}$ радиуса 2 с центром в нуле (относительно двойственной нормы) состоит из всех разностей $\lambda - \mu$, $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$. Таким образом, для ν существуют $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ такие, что $\nu = \lambda - \mu$, откуда

$$L'(\nu) = L'(\lambda - \mu) = \rho_L(\lambda, \mu) \le 2r,$$

где последнее неравенство выполнено в силу первого условия. Тем самым, мы доказали, что из первого условия следует второе.

Обратно, пусть выполняется второе условие предложения. Тогда достаточно показать, что для произвольных $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ имеет место $L'(\lambda - \mu) \le 2r$. Положим $\nu = \lambda - \mu$, тогда все такие ν — это в точности точки из D_2, см. выше. Если $\nu = 0$, то условие выполняется. Пусть теперь $\nu \ne 0$. Пользуясь сформулированной выше эквивалентностью, второе условие влечет $L'(\nu) \le 2r$ для каждого $\nu \in A'^{\circ}$, $\|\nu\| = 2$. В силу положительной однородности полунормы, для каждого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$L'(\alpha\nu) = \alpha\, L'(\nu) \le L'(\nu) \le 2r,$$

поэтому неравенство $L'(\nu) \le 2r$ выполняется и для всех $\nu \in D_2$, что и требовалось. □

Следствие 6.59. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и L — произвольная липшицева полунорма на A. Тогда для каждого положительного $r \in \mathbb{R}$, следующие условия эквивалентны*:

(1) *для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ выполняется $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$;*

(2) *для всех $\lambda \in A'^{\circ}$ выполняется $L'(\lambda) \le r\,\|\lambda\|'$;*

(3) *для всех $b \in \widetilde{A}$ имеем $\|b\|^{\sim} \le r\, L^{\sim}(b)$.*

6.8.1 Липшицева топология и $*$-слабая топология

Обсудим связь $*$-слабой топологии на пространстве состояний с топологией, заданной с помощью липшицевой полунормы. Последнюю топологию будем называть ***липшицевой***.

Предложение 6.60. *Пусть L — липшицева полунорма на $A \in \mathcal{OUS}$. Топология, порожденная ρ_L на $\mathcal{S}(A)$, содержит $*$-слабую топологию.*

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.61. *Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{F}$ — семейство отображений $f\colon X \to \mathbb{F}$, и τ — самая слабая топология на X, в которой все $f \in \mathcal{F}$ непрерывны. Пусть $Y \subset X$ — подпространство в X, т.е. его топология τ_Y индуцирована из τ. Обозначим $\mathcal{F}'$ ограничения всех $f \in \mathcal{F}$ на Y. Обозначим τ' самую слабую топологию на Y, в которой все отображения $g \in \mathcal{F}'$ непрерывны. Тогда $\tau' = \tau_Y$.*

Доказательство. Обозначим $\tau_{\mathbb{F}}$ стандартную топологию на $\mathbb{F}$. Отметим, что предбаза топологии τ — это $\mathcal{S} = \big\{f^{-1}(U) : U \in \tau_{\mathbb{F}},\ f \in \mathcal{F}\big\}$. Далее, предбаза τ_Y — это $\{Y \cap V : V \in \mathcal{S}\}$, а предбаза для τ' — это

$$\big\{g^{-1}(U) : U \in \tau_{\mathbb{F}},\ g \in \mathcal{F}'\big\} = \big\{Y \cap f^{-1}(U) : U \in \tau_{\mathbb{F}},\ f \in \mathcal{F}\big\} = \{Y \cap V : V \in \mathcal{S}\},$$

что и требовалось. □

Из леммы 6.61 вытекает, что для доказательства предложения достаточно показать непрерывность для всех $a \in A$ функционалов $J_a\colon \mathcal{S}(A) \to \mathbb{R}$, $J_a(\lambda) = \lambda(a)$ в топологии, порожденной ρ_L (напомним, что $*$-слабая топология — это слабейшая из всех топологий, в которой все эти функционалы непрерывны). Выберем произвольный $\lambda \in \mathcal{S}(A)$, любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $\mu \in \mathcal{S}(A)$, $\rho_L(\lambda, \mu) < \delta$ вытекает $\big|J_a(\lambda) - J_a(\mu)\big| < \varepsilon$. Последнее равносильно $\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| < \varepsilon$. Условие $\rho_L(\lambda, \mu) < \delta$ эквивалентно $\sup\Big\{\big|\lambda(b) - \mu(b)\big| : L(b) \le 1\Big\} < \delta$. Если $L(a) \le 1$, то можно положить $\delta = \varepsilon$, так как

$$\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| \le \sup\Big\{\big|\lambda(b) - \mu(b)\big| : L(b) \le 1\Big\} < \delta = \varepsilon.$$

Пусть теперь $L(a) > 1$. Положим $c = a/L(a)$ и $\delta = \varepsilon/L(a)$, тогда $L(c) = 1$ и

$$\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| = L(a)\big|\lambda(c) - \mu(c)\big| < L(a)\delta = L(a)\frac{\varepsilon}{L(a)} = \varepsilon.$$

Доказательство закончено. □

6.8.2 Критерий совпадения липшицевой и $*$-слабой топологий

Выясним, когда липшицева полунорма L превращается в Lip-норму, т.е. когда ρ_L задает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$. Для доказательства соответствующей теоремы напомним теорему Арцела–Асколи в нужной нам упрощенной форме. Семейство функций $\mathcal{F} \subset C(X)$ на метрическом пространстве X называется ***равномерно ограниченным***, если существует положительное $M \in \mathbb{R}$ такое, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in X$ и $f \in \mathcal{F}$. Семейство $\mathcal{F} \subset C(X)$ называется ***равностепенно непрерывным***, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$ для всех $f \in \mathcal{F}$, как только $|xy| < \delta$.

Теорема 6.62 (теорема Арцела–Асколи, [22])**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство и $\mathcal{F} \subset C(X)$ — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство. Тогда $\mathcal{F}$ вполне ограничено в топологии на $C(X)$, заданной* sup*-нормой.*

Теорема 6.63. *Пусть L — липшицева полунорма $A \in \mathcal{OUS}$. Тогда ρ_L задает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$, если и только если*

(1) *множество $\mathcal{S}(A)$ ограничено относительно ρ_L, и*

(2) *множество $\mathcal{B}_1 := \big\{a \in A : L(a) \le 1,\ \|a\| \le 1\big\}$ вполне ограничено по отношению к норме $\|\cdot\|$.*

Доказательство. Пусть ρ_L задает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$, т.е. L является Lip-нормой, а ρ_L, в силу предложения 6.49, — метрикой. По предложению 6.32, $\mathcal{S}(A)$ с такой топологией компактно. Так как эта топология задается ρ_L, то ρ_L непрерывно и, значит, ограничено в силу компактности $\mathcal{S}(A)$.

Рассмотрим теперь элементы $a \in \mathcal{B}_1$ как линейные функционалы $J_a\colon \mu \mapsto \mu(a)$ на A' (см. обсуждение после следствия 1.12). Эти функционалы непрерывны в топологии, заданной нормой, и J является изометричным вложением A в A''. Так как для любых $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ и любого $a \in A$, $L(a) \le 1$, в частности, для любого $a \in \mathcal{B}_1$ выполняется

$$\big|J_a(\lambda) - J_a(\mu)\big| = \big|\lambda(a) - \mu(a)\big| \le \rho_L(\lambda, \mu),$$

то семейство функционалов $\{J_a\}_{a\in\mathcal{B}_1}$ равностепенно непрерывно. Так как отображение J изометрично (относительно расстояния, заданного нормами), а $\mathcal{B}_1$ содержится в единичном шаре относительно нормы, то семейство $\{J_a\}_{a\in\mathcal{B}_1}$ равномерно ограничено. Тогда, по теореме 6.62, семейство $\{J_a\}_{a\in\mathcal{B}_1}$ вполне ограничено в $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, наделенном sup-нормой.

Напомним, что через $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big) \subset C\big(\mathcal{S}(A)\big)$ мы обозначили пространство всех непрерывных аффинных функций, а через $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ — представление Кэдисона, сопоставляющее каждому $a \in A$ ограничение отображения J_a на $\mathcal{S}(A)$. По следствию 6.41, отображение $\varkappa$ — изометричное вложение A в $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$, где расстояние в A задается нормой, а в $\mathrm{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ — sup-нормой, т.е. индуцируется из $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$. Следовательно, $\mathcal{B}_1$, как и его образ $\{J_a\}_{a\in\mathcal{B}_1}$ в $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, — вполне ограничены.

Обратно, пусть $\mathcal{S}(A)$ ограничено относительно ρ_L и $\mathcal{B}_1$ вполне ограничено относительно $\|\cdot\|$. Мы должны показать, что ρ_L задает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$. По предложению 6.60, топология, заданная ρ_L содержит $*$-слабую топологию. Докажем обратное включение. Для этого выберем произвольное $\mu \in \mathcal{S}(A)$, любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что открытый шар $U_\varepsilon(\mu)$ в $\mathcal{S}(A)$ в метрике ρ_L содержит некоторую $*$-слабую окрестность μ.

Пусть r таково, что $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$ для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$. По теореме 6.52, для каждого $b \in \widetilde{A}$ выполняется $\|b\|^\sim \le r\, L^\sim(b)$. Положим

$$\mathcal{B}_r = \big\{a \in A : \|a\| \le r,\ L(a) \le 1\big\} \ \text{ и }\ \mathcal{B}_r^L = \big\{a \in A : L(a) \le r\big\}.$$

Для краткости будем писать $\mathcal{B}^L$ вместо $\mathcal{B}_1^L$.

Лемма 6.64. *Пусть $\pi\colon A \to \widetilde{A} = A/(\mathbb{R}e)$ — каноническая проекция, тогда $\pi(\mathcal{B}_r) = \pi(\mathcal{B}^L)$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}^L$, то $\pi(\mathcal{B}_r) \subset \pi(\mathcal{B}^L)$. Докажем обратное включение. Пусть $b \in \pi(\mathcal{B}^L)$, тогда $L^\sim(b) \le 1$ и $\|b\|^\sim \le r\, L^\sim(b) \le r$.

Лемма 6.65. *Для любого $b \in \widetilde{A}$ существует единственный $a \in \pi^{-1}(b)$ такой, что $\|a\| = \|b\|^{\sim}$. А именно, если $c \in \pi^{-1}(b)$, а*

$$\alpha(c) = \sup\{r \in \mathbb{R} : re \le c\} \quad и \quad \beta(c) = \inf\{r \in \mathbb{R} : c \le re\},$$

то $a = c - e\big(\alpha(c) + \beta(c)\big)/2$, причем a не зависит от выбора c. Более того, для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|a + s\,e\| = \|b\|^{\sim} + |s| = \frac{\beta(c) - \alpha(c)}{2} + |s|,$$

в частности, $\|b\|^{\sim} = \big(\beta(c) - \alpha(c)\big)/2$.

Доказательство. Действительно, $\pi^{-1}(b) = \{c+s\,e : s \in \mathbb{R}\}$, поэтому, как мы уже отмечали в доказательстве леммы 6.54, положив $\alpha = \alpha(c)$ и $\beta = \beta(c)$, имеем $\|c + s\,e\| = \max\big\{|\alpha + s|, |\beta + s|\big\}$, и минимум $\|c + s\,e\|$ достигается при таком s, что середина отрезка $[\alpha + s, \beta + s]$ совмещается с нулем, т.е. когда $s = -(\alpha + \beta)/2$. Таким образом, в качестве a подходит ровно один элемент, а именно, $c - e(\alpha + \beta)/2$. Для такого элемента a выполняется $\alpha(a) = (\alpha - \beta)/2$ и $\beta(a) = (\beta - \alpha)/2$. Если $s \ge 0$, то $\|a + s\,e\| = (\beta - \alpha)/2 + s$, а если $s \le 0$, то $\|a + s\,e\| = (\beta - \alpha)/2 - s$, откуда и получаем искомые формулы. □

Вернемся к доказательству леммы 6.64. В силу леммы 6.65, выберем $a \in \pi^{-1}(b)$ такой, что $\|a\| = \|b\|^{\sim}$. Тогда $\|a\| = \|b\|^{\sim} \le r\,L^{\sim}(b) \le r\,L(a) \le r$. Отсюда заключаем, что $b \in \pi(\mathcal{B}_r)$, т.е. $\pi(\mathcal{B}_r) = \pi(\mathcal{B}^L)$. □

Лемма 6.66. *Пространство $r\mathcal{B}_1 = \{a \in A : \|a\| \le r,\ L(a) \le r\}$ вполне ограничено.*

Доказательство. Действительно, $r\mathcal{B}_1 = \{r\,a : a \in \mathcal{B}_1\}$, поэтому, в силу положительной однородности полунорм, если S — конечная ε-сеть в $\mathcal{B}_1$, то $r\,S$ — конечная $r\varepsilon$-сеть в $r\mathcal{B}_1$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Так как подмножество вполне ограниченного множества само вполне ограничено, из леммы 6.66 вытекает, что $\mathcal{B}_r \subset r\mathcal{B}_1$ также вполне ограничено. Так как отображение π не увеличивает расстояния, то $\pi(\mathcal{B}_r) = \pi(\mathcal{B}^L)$ также вполне ограничено (здесь мы также воспользовались леммой 6.64). Выберем в $\pi(\mathcal{B}^L)$ конечную $\varepsilon/4$-сеть $\{b_1, \dots, b_n\}$ и пусть, в соответствии с леммой 6.65, a_i — единственный элемент в $\pi^{-1}(b_i)$, для которого $\|b_i\|^{\sim} = \|a_i\|$. Положим

$$\mathcal{O} = \Big\{\nu \in \mathcal{S}(A) : \big|(\mu - \nu)(a_j)\big| < \varepsilon/4,\ 1 \le j \le n\Big\} = \Big\{\nu \in \mathcal{S}(A) : \big|J_{a_j}(\mu - \nu)\big| < \varepsilon/4,\ 1 \le j \le n\Big\}.$$

Так как все J_{a_j} непрерывны в $*$-слабой топологии, множество $\mathcal{O}$ открыто в этой топологии. Кроме того, $\mu \in \mathcal{O}$. Таким образом, если мы покажем, что $\mathcal{O} \subset U_\varepsilon(\mu)$, то завершим доказательство теоремы. Сделаем это.

Выберем произвольное $\nu \in \mathcal{O}$. Мы должны показать, что $\rho_L(\mu, \nu) < \varepsilon$. Напомним, что $\rho_L(\mu, \nu)$ равно супремуму величин $\big|\mu(a) - \nu(a)\big|$ по всем $a \in A$, $L(a) \le 1$. С другой стороны, для каждого $s \in \mathbb{R}$ имеем $\mu(a + s\,e) - \nu(a + s\,e) = \mu(a) - \nu(a)$. Отсюда вытекает, что

$$\rho_L(\mu, \nu) = \sup\Big\{\big|\mu(a) - \nu(a)\big| : a \in A,\ L(a) \le 1,\ \|a\| = \|\pi(a)\|^{\sim}\Big\}. \tag{6.11}$$

Таким образом, достаточно проверить, что для каждого a из формулы (6.11) выполняется $\big|\mu(a) - \nu(a)\big| < 3\varepsilon/4$. Пусть a_j такой, что $\big\|\pi(a) - b_j\big\| < \varepsilon/4$. Тогда, по лемме 6.65, существует $s \in \mathbb{R}$, для которого

$$\|a - a_j - s\,e\| = \big\|\pi(a) - b_j\big\| < \varepsilon/4.$$

Так как $\|\mu\| = \|\nu\| = 1$, то

$$\big|\mu(a) - \mu(a_j + s\,e)\big| = \big|\mu(a - a_j - s\,e)\big| < \varepsilon/4$$

и аналогично $\big|\nu(a) - \nu(a_j + s\,e)\big| < \varepsilon/4$. Имеем

$$\big|\mu(a) - \nu(a)\big| \le \big|\mu(a) - \mu(a_j + s\,e)\big| + \big|\mu(a_j + s\,e) - \nu(a_j + s\,e)\big| + \big|\nu(a_j + s\,e) - \nu(a)\big| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = 3\varepsilon/4$$

поэтому $\mathcal{O} \subset U_\varepsilon(\mu)$. Доказательство закончено. □

Следствие 6.67. *Пусть на $(A, e) \in \mathcal{OUS}$ задана* Lip*-норма L, и $B \subset A$ — линейное подпространство, содержащее e. Тогда ограничение L на B также является* Lip*-нормой.*

Доказательство. При переходе к B полунорма L остается ограниченной и ее ядро по-прежнему совпадает с $\mathbb{R}\,e$, так как $e \in B$. Таким образом, $L_B := L|_B$ — липшицева полунорма.

Далее, так как L является Lip-нормой, то теорема 6.63 влечет ограниченность метрики ρ_L на $\mathcal{S}(A)$ и полную ограниченность множества $\mathcal{B}_1 = \{a \in A : L(a) \le 1,\ \|a\| \le 1\}$. Соответствующее множество

$$\mathcal{B}_1(B) = \{b \in B : L_B(b) = L(b) \le 1,\ \|b\| \le 1\}$$

содержится в $\mathcal{B}_1$, поэтому также вполне ограничено. Для завершения доказательства того, что L_B является Lip-нормой, остается проверить, в силу теоремы 6.63, что метрика ρ_{L_B} ограничена на $\mathcal{S}(B)$.

Как и выше, обозначим $\widetilde{B}$ фактор-пространство $B/(\mathbb{R}\,e)$, являющееся подпространством в $\widetilde{A} = A/(\mathbb{R}\,e)$. Напомним, что для каждого $\tilde{b} \in \widetilde{B}$ и $b \in \tilde{b}$ определены $\|\tilde{b}\|_{\widetilde{B}}^{\sim} = \inf_{s\in\mathbb{R}} \|b + s\,e\|$ и та же самая формула имеет место для $\|\tilde{b}\|_{\widetilde{A}}^{\sim}$, когда $\tilde{b}$ рассматривается как элемент из $\widetilde{A}$. Таким образом, норма на $\widetilde{B}$ является ограничением нормы из $\widetilde{A}$. Далее, если $b \in \tilde{b}$, то

$$L_{\widetilde{B}}^{\sim}(\tilde{b}) = \inf_{s\in\mathbb{R}} \{L_B(b + s\,e)\},$$

и такая же формула задает $L^{\sim}(\tilde{b})$, так что и $L_{\widetilde{B}}^{\sim}$ — ограничение $L^{\sim}$. Так как L является Lip-нормой, то, по теореме 6.63, ρ_L ограничена на $\mathcal{S}(A)$, т.е. существует $r > 0$ такое, что $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$ для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$. По следствию 6.59, эта ограниченность влечет $\|\tilde{a}\|_{\widetilde{A}}^{\sim} \le r\, L^{\sim}(\tilde{a})$ для всех $\tilde{a} \in \widetilde{A}$. Из сказанного выше вытекает, что это неравенство выполняется для всех $\tilde{b} \in \widetilde{B}$, а именно, $\|\tilde{b}\|_{\widetilde{B}}^{\sim} \le r\, L_{\widetilde{B}}^{\sim}(\tilde{b})$. Однако последнее, в силу того же следствия 6.59, влечет $\rho_{L_B}(\lambda, \mu) \le 2r$ для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(B)$, что и доказывает ограниченность метрики ρ_{L_B} на $\mathcal{S}(B)$. $\square$

6.8.3 Преобразование компактного метрического пространства в квантовое

В качестве иллюстрации покажем, как из теоремы 6.63 вытекает, что для компактного метрического пространства (X, ρ) липшицева полунорма L_ρ, определенная на $A = \mathrm{Lip}(X)$ и построенная по метрике пространства X, является Lip-нормой. Здесь

$$L_\rho(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x,y)} : x \ne y,\ x, y \in X\right\}.$$

Напомним (см. раздел 6.3), что $\mathcal{S}(A)$ состоит в точности из всех борелевских вероятностных мер на X, при этом для любых $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ имеем

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{|\lambda(f) - \mu(f)| : f \in A,\ L(f) \le 1\Big\},$$

где $\lambda(f) = \int_X f(t)\, d\lambda(t)$. Заметим, что величина $|\lambda(f) - \mu(f)|$ не меняется, если в f прибавить произвольную константу. Таким образом,

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{|\lambda(f) - \mu(f)| : f \in A,\ L(f) \le 1,\ f(x_0) = 0\Big\},$$

где $x_0 \in X$ — произвольная фиксированная точка из X. Но тогда каждая f из предыдущей формулы удовлетворяет $\|f\|_\infty \le r$, где $r = \sup_{x\in X} |x_0 x|$ конечно, так как пространство X компактно. Следовательно, $|\lambda(f)| \le r$ и $|\mu(f)| \le r$, откуда $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$, т.е. пространство $\mathcal{S}(A)$ с метрикой ρ_L ограничено.

Докажем теперь полную ограниченность множества $\mathcal{B}_1 = \{f \in A : L(f) \le 1,\ \|f\|_\infty \le 1\}$. Ограниченность по норме дает равномерную ограниченность этого семейства, а ограниченность по липшицевой полунорме — равностепенную непрерывность. Теперь полная ограниченность $\mathcal{B}_1$ следует из теоремы Арцела–Асколи (теорема 6.62).

Итак, мы получили следующий результат.

Следствие 6.68. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $A = \mathrm{Lip}(X)$ — векторное пространство вещественных липшицевых функций на X, наделенное $\sup$-нормой, и L — липшицева полунорма, построенная по метрике на X. Тогда L является Lip-нормой, т.е. (A, L) — компактное квантовое метрическое пространство. Более подробно, $\big(\mathcal{S}(A), \rho_L\big)$ — компактное метрическое пространство, топология которого совпадает со $*$-слабой топологией, индуцированной из A'.*

Определение 6.69. Компактное квантовое метрическое пространство (A, L) из следствия 6.68 будем называть ***ассоциированным*** с компактным метрическим пространством X.

В обозначениях следствия 6.68, рассмотрим отображение $\delta\colon X \to A'$, сопоставляющее каждому $x \in X$ дельта-функцию Дирака $\delta_x\colon A \to \mathbb{R}$, $\delta_x(f) = f(x)$. Так как для любых $f, g \in A$ имеем

$$\bigl|\delta_x(f) - \delta_x(g)\bigr| = \bigl|f(x) - g(x)\bigr| \le \|f - g\|_\infty,$$

то $\|\delta_x\| \le 1$, так что δ_x является непрерывным линейным функционалом, т.е. $\delta_x \in A'$. Так как

$$\bigl|\delta_x(1) - \delta_x(0)\bigr| = 1,$$

то $\|\delta_x\| = 1$. Кроме того, $\delta_x(1) = 1$, поэтому, в силу следствия 5.32, $\delta_x \in \mathcal{S}(A)$.

Далее,

$$\rho_L(\delta_x, \delta_y) = \sup\Bigl\{\bigl|\delta_x(f) - \delta_y(f)\bigr| : f \in A,\, L(f) \le 1\Bigr\} = \sup\Bigl\{\bigl|f(x) - f(y)\bigr| : f \in A,\, L(f) \le 1\Bigr\} \le |xy|,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что каждая f является 1-липшицевой. Выберем в качестве f функцию $y \mapsto |xy|$, тогда $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| = |xy|$, поэтому $\rho_L(\delta_x, \delta_y) = |xy|$. Иными словами, отображение δ изометрично вкладывает X в $\mathcal{S}(A)$.

Напомним, что, в силу предложения 6.32, множество $\mathcal{S}(A) \subset A'$ выпукло. Точка выпуклого множества называется ***экстремальной***, если она не является серединой никакого невырожденного отрезка с концами в этом выпуклом множестве.

Задача 6.70. Пусть X — компактное метрическое пространство, $A = \mathrm{Lip}(X)$ — векторное пространство вещественных липшицевых функций на X, наделенное sup-нормой, $\delta\colon X \to A'$ — отображение, сопоставляющее каждому $x \in X$ дельта-функцию Дирака $\delta_x\colon A \to \mathbb{R}$, $\delta_x(f) = f(x)$. Тогда $\delta(X)$ — множество экстремальных точек выпуклого хаусдорфова компакта $\mathcal{S}(A)$.

6.8.4 Полунепрерывность снизу липшицевых полунорм и восстановление полунормы из метрики

Для $A \in \mathcal{OUS}$, пусть L — липшицева полунорма на A, и ρ_L — соответствующая обобщенная метрика на $\mathcal{S}(A)$. Воспользуемся формулой (6.2) и получим обобщенную полунорму L_{ρ_L} на $\mathrm{Aff}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr) \subset C\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$:

$$L_{\rho_L}(f) = \sup\left\{\frac{\bigl|f(\lambda) - f(\mu)\bigr|}{\rho_L(\lambda, \mu)} : \lambda, \mu \in \mathcal{S}(A),\, \lambda \ne \mu\right\}.$$

Представление Кэдисона $\varkappa\colon A \to \mathrm{Aff}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$ позволяет рассматривать A как линейное подпространство в $\mathrm{Aff}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$ и ограничить на него L_{ρ_L}. Таким образом, L_{ρ_L} можно рассматривать как обобщенную полунорму на A. Мы приведем условие на L, которое гарантирует, что $L_{\rho_L} = L$. Это условие называется полунепрерывность снизу. Начнем со следующего общего результата.

Предложение 6.71. *В сделанных выше обозначениях, имеем $A \approx \varkappa(A) \subset \mathrm{Lip}^{\rho_L}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$, т.е. все функции $\widehat{a} = \varkappa(a)$ являются липшицевыми относительно обобщенной метрики ρ_L. Более того, $L_{\rho_L} \le L$.*

Доказательство. Выберем произвольное $a \in A$ и любые $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$, тогда, в силу предложения 6.46, имеем

$$\bigl|\widehat{a}(\lambda) - \widehat{a}(\mu)\bigr| = \bigl|\lambda(a) - \mu(a)\bigr| \le L(a)\rho_L(\lambda, \mu),$$

и так как липшицева полунорма L конечна, то тем самым мы доказали липшицевость всех функций $\widehat{a}$ относительно обобщенной метрики ρ_L, т.е. $\varkappa(A) \subset \mathrm{Lip}^{\rho_L}\bigl(\mathcal{S}(A)\bigr)$. Кроме того, у каждой такой функции $\widehat{a}$ в качестве липшицевой константы можно взять $L(a)$, поэтому

$$L_{\rho_L}(a) = L_{\rho_L}(\widehat{a}) = \sup\left\{\frac{\bigl|\widehat{a}(\lambda) - \widehat{a}(\mu)\bigr|}{\rho_L(\lambda, \mu)} : \lambda, \mu \in \mathcal{S}(A),\, \lambda \ne \mu\right\} \le \sup\left\{\frac{L(a)\rho_L(\lambda, \mu)}{\rho_L(\lambda, \mu)} : \lambda, \mu \in \mathcal{S}(A),\, \lambda \ne \mu\right\} = L(a),$$

так что $L_{\rho_L} \le L$. □

Предложение 6.72. *Пусть L и M — липшицевы полунормы на $A \in \mathcal{OUS}$, причем $M \ge L$. Тогда $\rho_M \le \rho_L$, в частности,*

(1) *если ρ_L конечна, то ρ_M — тоже;*

(2) *если ρ_L ограничена, то ρ_M — тоже;*

(3) *если ρ_L задает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$, то ρ_M — тоже.*

Доказательство. Заметим, что $\{a \in A : M(a) \le 1\} \subset \{a \in A : L(a) \le 1\}$, поэтому супремум в определении ρ_M берется по меньшему множеству, чем супремум в определении ρ_L, откуда $\rho_M \le \rho_L$. Пункты (1) и (2) очевидны. Для доказательства пункта (3) напомним, что $*$-слабая топология на $\mathcal{S}(A)$ компактна и хаусдорфова. В силу предложения 6.33, ρ_M является обобщенной метрикой, поэтому порожденная ей топология на $\mathcal{S}(A)$ — хаусдорфова. Но тогда тождественное отображение из $\mathcal{S}(A)$ в себя, рассматриваемое как отображение из пространства со $*$-слабой топологией (совпадающей с топологией, порожденной ρ_L) в пространство с топологией, заданной ρ_M — это биективное отображение из компактного пространства в хаусдорфово и, значит, это отображение — гомеоморфизм, что и доказывает пункт (3). □

Определение 6.73. Пусть V — нормированное пространство, а L — произвольная обобщенная полунорма на V. Тогда L называется ***полунепрерывной снизу***, если для любой последовательности $v_1, v_2, \ldots \in V$, сходящейся по норме к некоторому $v \in V$, выполняется

$$L(v) \le \liminf_{n\to\infty} L(v_n).$$

Замечание 6.74. Отметим, что если обобщенная полунорма L на нормированном пространстве V полунепрерывна снизу, то ограничение L на каждое линейное подпространство в V также полунепрерывно снизу.

Пример 6.75. В силу следствия 6.68, липшицева полунорма L компактного метрического пространства X, определенная на $A = \mathrm{Lip}(X)$ и построенная по метрике пространства X, является Lip-нормой. Покажем теперь, что L полунепрерывна снизу. Для этого рассмотрим произвольную последовательность $f_i \in \mathrm{Lip}(X)$, сходящуюся по sup-норме к некоторой функции $f \in \mathrm{Lip}(X)$. Мы должны показать, что $\liminf_{i\to\infty} L(f_i) \ge L(f)$. Предположим противное, т.е. $\liminf_{i\to\infty} L(f_i) < L(f)$. Последнее означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность f_{i_s} такая, что $L(f_{i_s}) \le L(f) - \varepsilon$ для всех s. Без ограничения общности будем считать, что эта подпоследовательность совпадает со всей последовательностью. По определению L, существуют такие различные $x, y \in X$, что $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| > \bigl(L(f) - \varepsilon/2\bigr)|xy|$.

Пусть i таково, что $\|f - f_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}|xy|$, тогда $\bigl|f_i(x) - f(x)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4}|xy|$ и $\bigl|f_i(y) - f(y)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4}|xy|$. Но тогда

$$\begin{aligned}\bigl(L(f) - \varepsilon/2\bigr)|xy| &< \bigl|f(x) - f(y)\bigr| \le \bigl|f(x) - f_i(x) + f_i(x) - f_i(y) + f_i(y) - f(y)\bigr| \le \\ &\le \bigl|f(x) - f_i(x)\bigr| + \bigl|f_i(x) - f_i(y)\bigr| + \bigl|f_i(y) - f(y)\bigr| \le \frac{\varepsilon}{4}|xy| + \bigl|f_i(x) - f_i(y)\bigr| + \frac{\varepsilon}{4}|xy|,\end{aligned}$$

откуда $\bigl|f_i(x) - f_i(y)\bigr| > \bigl(L(f) - \varepsilon\bigr)|xy|$, поэтому $L(f_i) > L(f) - \varepsilon$, противоречие.

Предложение 6.76. *Пусть L — обобщенная полунорма на нормированном пространстве V. Тогда L полунепрерывная снизу, если и только если множество $\{v \in V : L(v) \le 1\}$ замкнуто относительно нормы. Отметим, что множество $\{v \in V : L(v) \le 1\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты множества $B_t^L = \{v \in V : L(v) \le t\}$ для всех неотрицательных t.*

Доказательство. Предположим сначала, что обобщенная полунорма L полунепрерывна снизу. Покажем, что тогда множество B_1^L замкнуто относительно нормы. Предположим противное, тогда существует $v \in V \setminus B_1^L$ и последовательность $v_n \in B_1^L$, сходящаяся к v по норме. Так как для всех v_n выполняется $L(v_n) \le 1$, полунепрерывность снизу влечет

$$L(v) \le \liminf_{n\to\infty} L(v_n) \le 1,$$

поэтому $v \in B_1^L$, противоречие.

Обратно, пусть B_1^L замкнуто относительно нормы. Покажем, что L полунепрерывна снизу. Предположим противное, т.е. существует последовательность $v_1, v_2, \ldots$ из V, сходящаяся по норме к некоторому $v \in V$, для которой $L(v) > r := \liminf_{n\to\infty} L(v_n)$, в частности, $r < \infty$. По определению нижнего предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность в $v_{s_1}, v_{s_2}, \ldots$, для которой $L(v_{s_n}) \le r + \varepsilon$. Выберем ε так, чтобы $s := r + \varepsilon < L(v)$. Без ограничения общности будем считать, что условие $L(v_n) \le s$ выполняется для всей последовательности

v_n. Рассмотрим новую последовательность $w_n = v_n/s$, тогда $L(w_n) \le 1$ для всех n и $w_n \to w = v/s$. Так как множество B_1^L замкнуто относительно нормы, то $w \in B_1^L$, откуда $L(w) \le 1$. Следовательно,

$$L(v) = L(s\,w) = s\,L(w) \le s < L(v),$$

противоречие.

Наконец, эквивалентность замкнутости B_1^L и всего семейства B_t^L, $t > 0$ вытекает из того, что умножение на ненулевое число является гомеоморфизмом и, поэтому, сохраняет свойство множества быть замкнутым. Кроме того, $B_0^L = \cap_{t>0} B_t^L$, поэтому B_0^L замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Доказательство закончено. $\square$

Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и ρ — произвольная обобщенная метрика на $\mathcal{S}(A)$, вообще говоря, не имеющая отношение к $*$-слабой топологии на $\mathcal{S}(A)$, относительно которой определяется пространство непрерывных функций $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, наделенное sup-нормой. Обозначим L_ρ соответствующую обобщенную липшицеву полунорму на векторном пространстве $\mathbb{F}^{\mathcal{S}(A)}$ всех функций, заданных на $\mathcal{S}(A)$. Тем же символом обозначим ограничение L_ρ на $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$.

Предложение 6.77. *Во введенных выше обозначениях, обобщенная полунорма L_ρ полунепрерывна снизу. В частности, если L — липшицева полунорма на A, и $\rho = \rho_L$ — соответствующая обобщенная метрика на $\mathcal{S}(A)$, то ограничение L_ρ на образ $\varkappa(A) \subset C\big(\mathcal{S}(A)\big)$ представления Кэдисона и, значит, соответствующая обобщенная полунорма на A, также полунепрерывны снизу.*

Доказательство. Мы должны показать, что для любой последовательности $f_n \in C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, сходящейся по sup-норме к $f \in C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, выполняется $L_\rho(f) \le \liminf_{n\to\infty} L_\rho(f_n)$.

Положим $\alpha = (\lambda,\mu) \in \big(\mathcal{S}(A)\times\mathcal{S}(A)\big)\setminus\{\lambda=\mu\}$, $f \in C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, $F_\alpha(f) = \frac{|f(\lambda)-f(\mu)|}{\rho(\lambda,\mu)}$, тогда $\big\{F_\alpha(f)\big\}_\alpha$ — семейство функций на $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, непрерывных в топологии, заданной sup-нормой.

Заметим, что $L_\rho(f) = \sup_\alpha F_\alpha(f)$, и мы должны проверить неравенство

$$\sup_\alpha F_\alpha(f) \le \liminf_{n\to\infty} \sup_\alpha F_\alpha(f_n).$$

Это неравенство вытекает из следующей леммы.

Лемма 6.78. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A}$ — множество и $\{g_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство непрерывных вещественных функций на X. Положим $h(x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} g_\alpha(x)$. Тогда функция h полунепрерывна снизу, т.е. для любой последовательности $x_n \in X$, сходящейся к некоторому x, выполняется $h(x) \le \liminf_{n\to\infty} h(x_n)$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует сходящаяся к некоторому $x \in X$ последовательность x_n, для которой $h(x) > r := \liminf_{n\to\infty} h(x_n)$, в частности, $r < \infty$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $n_k \in \mathbb{N}$, для которой $h(x_{n_k}) \le r+\varepsilon$. По определению h, имеем $g_\alpha(x_{n_k}) \le h(x_{n_k}) \le r+\varepsilon$ для всех α и k. Из непрерывности функций g_α вытекает, что $g_\alpha(x) \le r+\varepsilon$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, поэтому $h(x) \le r+\varepsilon$. В силу произвольности выбора ε, имеем $h(x) \le r$, противоречие. $\square$

Доказательство предложения закончено. $\square$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится понятие поляры и соответствующая теорема о биполяре. Доказательство этих результатов мы опустим, отослав читателя к [26]. Мы приведем формулировку в интересующих нас случаях нормированных пространств. В [26] рассматривается более общая ситуация, а именно, когда векторное пространство — топологическое и локально выпуклое (топология задается семейством полунорм).

Пусть A — нормированное пространство, например $A \in \mathcal{OUS}$, а $X \subset A$ — произвольное непустое подмножество. ***Полярой*** X° множества X называется подмножество в двойственном пространстве A^*, заданное так:

$$X^\circ = \Big\{f \in A^* : \big|f(x)\big| \le 1 \text{ для всех } x \in X\Big\}.$$

Пример 6.79. Если $X = \{0\}$, то $X^\circ = A^*$. Если же $X \subset A$ — замкнутый единичный шар с центром в 0 (относительно нормы), то $X^\circ \subset A^*$ — замкнутый единичный шар с центром в 0 относительно двойственной нормы.

Аналогичным образом определяется преполяра, а именно, для непустого $F \subset A^*$ его ***преполяра*** ${}^\circ F$ — это подмножество A, заданное так:

$$^\circ F = \Big\{a \in A : \big|f(a)\big| \le 1 \text{ для всех } f \in F\Big\}.$$

Биполярой непустого множества $X \subset A$ называется множество ${}^\circ(X^\circ) \subset A$.

Определение 6.80. Непустое подмножество $X \subset A$ называется ***сбалансированным***, если для любого $x \in X$ все точки $c\,x$, $|c| \le 1$ лежат в X (если A — вещественное пространство, то $c \in [-1,1]$). В частности, каждое сбалансированное множество содержит 0.

Для $X \subset A$ пересечение всех множеств $Y \supset X$, обладающих данным набором свойств $\mathcal{P}$, называется ***$\mathcal{P}$-оболочкой*** X. Так, например, определяется ***замкнутая выпуклая сбалансированная оболочка*** X.

Теорема 6.81 (см. [26, 1.8 Bipolar Theorem, p. 127])**.** *Для непустого $X \subset A$ его биполяра ${}^\circ(X^\circ)$ является замкнутой выпуклой сбалансированной оболочкой множества X.*

Мы применим теорему 6.81 в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 6.82. *Пусть $(A,e) \in \mathcal{OUS}$ и L — липшицева полунорма, а ρ_L — соответствующая обобщенная метрика на $\mathcal{S}(A)$. Обозначим L_{ρ_L} порожденную ρ_L обобщенную полунорму на $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$ и, значит, на A (благодаря представлению Кэдисона). Тогда*

(1) $Z := \{a \in A : L_{\rho_L}(a) \le 1\}$ *является замыканием по норме множества* $X := \{a \in A : L(a) \le 1\}$;

(2) *обобщенная полунорма L_{ρ_L} — наибольшая из полунепрерывных снизу полунорм, меньших L;*

(3) $\rho_{L_{\rho_L}} = \rho_L$.

Доказательство. (1) Мы должны показать, что Z является замыканием X. Так как L — полунорма, то X — выпуклое и сбалансированное подмножество в A.

Лемма 6.83. *Пусть V — нормированное пространство (вещественное или комплексное), W — непустое подмножество V, и $\overline{W}$ — замыкание W. Тогда*

(1) *если W выпукло, то и $\overline{W}$ выпукло;*

(2) *если W сбалансировано, то и $\overline{W}$ сбалансировано.*

Таким образом, замыкание выпуклого сбалансированного множества W является замкнутой выпуклой сбалансированной оболочкой W.

Доказательство. (1) Выберем произвольные $x,y \in \overline{W}$, тогда каждая точка отрезка $[x,y]$ имеет вид $(1-t)x+t\,y$ для некоторого $t \in [0,1]$. Так как x и y лежат в замыкании W, то существуют лежащие в W последовательности $x_n \to x$ и $y_n \to y$. В силу непрерывности операций векторного пространства, имеем $(1-t)x_n+t\,y_n \to (1-t)x+t\,y$. Но $(1-t)x_n+t\,y_n \in W$, так как W — выпукло, поэтому $(1-t)x+t\,y \in \overline{W}$ и, значит, $[x,y] \subset \overline{W}$, что и доказывает выпуклость $\overline{W}$.

(2) Выберем произвольное $x \in \overline{W}$ и покажем, что для каждого $c \in \mathbb{F}$, $|c| \le 1$, все точки $c\,x$ содержатся в $\overline{W}$. Рассмотрим последовательность $x_n \in W$, сходящуюся к x. Тогда для каждого $c \in \mathbb{F}$, $|c| \le 1$, имеем $c\,x_n \in W$ и $c\,x_n \to c\,x$. Следовательно, $c\,x \in \overline{W}$ в силу замкнутости $\overline{W}$. □

Вернемся к доказательству теоремы. В силу леммы 6.83, $\bar{X}$ является замкнутой выпуклой сбалансированной оболочкой X, и, по теореме 6.81, совпадает с биполярой ${}^\circ(X^\circ)$. Таким образом, мы должны показать, что $Z = {}^\circ(X^\circ)$.

Напомним, что двойственная обобщенная полунорма L' на A' определяется так:

$$L'(f) = \sup\Big\{\big|f(a)\big| : a \in A,\, L(a) \le 1\Big\} = \sup\Big\{\big|f(a)\big| : a \in X\Big\}.$$

Пусть $Y \subset A'$ — единичный шар с центром в нуле относительно обобщенной полунормы L', т.е.

$$Y = \big\{f \in A' : L'(f) \le 1\big\} = \Big\{f \in A' : \big|f(a)\big| \le 1 \text{ для всех } a \in X\Big\} = X^\circ.$$

Таким образом, нам остается показать, что $Z = {}^\circ Y$.

По определению, L_{ρ_L} — обобщенная полунорма на $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$, а ее ограничение на $\varkappa(A)$ (которое мы отождествляем с A) задается так:

$$L_{\rho_L}(a) = \sup\left\{ \frac{\big|\lambda(a) - \mu(a)\big|}{\rho_L(\lambda, \mu)} : \lambda, \mu \in \mathcal{S}(A),\, \lambda \neq \mu \right\},$$

поэтому

$$L_{\rho_L}(a) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \big|\lambda(a) - \mu(a)\big| \le \rho_L(\lambda, \mu) \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathcal{S}(A),\;\; \lambda \neq \mu.$$

Отметим, что последнее неравенство автоматически выполняется и для $\lambda = \mu$, так что мы уберем ограничение $\lambda \neq \mu$.

По предложению 6.55, множество всех $\nu = \lambda - \mu$, где $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$, составляет шар D_2 в A'° радиуса 2 с центром в нуле (относительно двойственной нормы).

Лемма 6.84. *Для любых $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ выполняется $\rho_L(\lambda, \mu) = L'(\lambda - \mu)$.*

Доказательство. По определению,

$$L'(\lambda - \mu) = \sup\Big\{ \big|(\lambda - \mu)(a)\big| : a \in A,\, L(a) \le 1 \Big\} = \sup\Big\{ \big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in A,\, L(a) \le 1 \Big\} = \rho_L(\lambda, \mu),$$

что и требовалось. □

Таким образом, в силу леммы 6.84,

$$L_{\rho_L}(a) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \big|\nu(a)\big| \le L'(\nu) \;\; \text{для всех } \nu \in D_2.$$

Так как ρ_L является обобщенной метрикой по предложению 6.33, то $L'(\nu) = L'(\lambda - \mu) = \rho_L(\lambda, \mu) \neq 0$ для $\nu \neq 0$. Используя положительную однородность по ν в неравенстве $\big|\nu(a)\big| \le L'(\nu)$, заключаем, что оно равносильно условию

$$\big|\nu(a)\big| \le L'(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad \big|\nu(a)\big| \le 1 \;\; \text{для всех } \nu \in A'^\circ \text{ таких, что } L'(\nu) \le 1.$$

По предложению 6.57, $L'(\lambda) = \infty$ для всех $\lambda \notin A'^\circ$, поэтому предыдущее условие равносильно

$$\big|f(a)\big| \le 1 \;\; \text{для всех } f \in A' \text{ таких, что } L'(f) \le 1.$$

Итак, мы показали, что

$$Z = \big\{ a \in A : \big|f(a)\big| \le 1,\, f \in A',\, L'(f) \le 1 \big\} = \big\{ a \in A : \big|f(a)\big| \le 1,\, f \in Y \big\} = {}^\circ Y,$$

что и требовалось.

(2) Так как $X \subset Z$, то, в силу предложения 6.5, имеем $L_{\rho_L} \le L$, в частности, L_{ρ_L} — полунорма. По предложению 6.77, полунорма L_{ρ_L} полунепрерывна снизу. Пусть M — полунорма на A такая, что $L_{\rho_L} < M \le L$. Мы должны показать, что M не может быть полунепрерывной снизу. Положим $W = \{a \in A : M(a) \le 1\}$. По предложению 6.5, $X \subset W \subset Z$ и $W \neq Z$. Но тогда множество W не замкнуто в A по норме, что противоречит предложению 6.76.

(3) Напомним, что для $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{ \big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in X \Big\}, \quad \rho_{L_\rho}(\lambda, \mu) = \sup\Big\{ \big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in Z \Big\}.$$

Функции $h(a) = \big|\lambda(a) - \mu(a)\big|$ непрерывны на A в топологии, заданной нормой, так как такими являются функционалы λ и μ. Но супремумы непрерывной функции по подмножеству топологического пространства и замыканию этого подмножества равны (убедитесь), поэтому $\rho_L(\lambda, \mu) = \rho_{L_\rho}(\lambda, \mu)$, что и требовалось. □

Из теоремы 6.82 мгновенно вытекает, полунепрерывности липшицевой полунормы достаточно для ее восстановления из соответствующей обобщенной метрики.

Следствие 6.85. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и L — полунепрерывная снизу липшицева полунорма, а ρ_L — соответствующая обобщенная метрика на $\mathcal{S}(A)$. Обозначим L_{ρ_L} порожденную ρ_L обобщенную полунорму на $C\big(\mathcal{S}(A)\big)$ и, значит, на A (благодаря представлению Кэдисона). Тогда $L_{\rho_L} = L$.*

Доказательство. Так как, по теореме 6.82, L_{ρ_L} является наибольшей полунепрерывной снизу липшицевой полунормой, не превосходящей L, то, в силу предположения следствия, $L = L_{\rho_L}$. □

Приведем пример липшицевой полунормы, которая индуцирует $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$, т.е. является Lip-нормой, однако она — не полунепрерывна снизу.

Пример 6.86. Пусть $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, а $A = C^1(I)$ — векторное пространство всех непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[-1, 1]$. В качестве нормы выберем sup-норму $\|\cdot\|_\infty$. Определим теперь полунорму L так:
$$L(f) = \|f'\|_\infty + \big|f'(0)\big|.$$
Отметим, что A содержит стандартную порядковую единицу e, равную постоянной функции 1. Пусть для $f \in A$ выполняется $L(f) = 0$. Это равносильно $\|f'\|_\infty = 0$ и $f'(0) = 0$. Первое равенство дает $f' = 0$, т.е. $f = \mathrm{const}$. Второе равенство выполняется для постоянных функций. Таким образом, $L(f) = 0$ в точности на константах, т.е. L — липшицева полунорма.

Задача 6.87. Докажите, что L задает $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$.

Покажем теперь, что L не полунепрерывна снизу. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ зададим непрерывную функцию $g_n \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ так: $g_n(t) = n|t|$ при $|t| \le 1/n$, и $g_n(t) = 1$ на оставшихся t, тогда функция $f_n(t) = \int_{-1}^t g_n(s)\,ds$ принадлежит A. Легко проверить, что f_n равномерно сходится к $f(t) = t+1$, т.е. сходится по норме пространства A к $f \in A$. Имеем
$$L(f_n) = \|g_n\|_\infty + |g_n(0)| = 1 + 0 = 1, \quad L(f) = \|1\|_\infty + |1| = 2,$$
поэтому $L(f) > \liminf_{n\to\infty} L(f_n)$, так что L не полунепрерывна снизу.

6.8.5 Функционал Минковского

Для дальнейшего нам понадобится функционал Минковского. Напомним его определение и как он связан с обобщенными полунормами.

Для произвольного подмножества K векторного пространства V ***функционал Минковского*** $\varPhi := \varPhi_K : V \to [0, \infty]$***, соответствующий*** K, определяется так:
$$\varPhi(v) = \varPhi_K(v) = \inf\big\{r \in (0, \infty) : v \in r\,K\big\} = \inf\big\{r \in (0, \infty) : v/r \in K\big\}.$$
Отметим, что для вектора v может не существовать ни одного r, удовлетворяющего условию из определения $\varPhi$. В этом случае, принимая во внимание естественное соглашение $\inf\emptyset = \infty$, имеем $\varPhi(v) = \infty$. Например, если $K = \{0\}$, то $\varPhi(0) = 0$, а на каждом ненулевом векторе функционал $\varPhi$ равен ∞.

Лемма 6.88. *Функционал $\varPhi = \varPhi_K$ равен ∞ на всем V, если и только если $K = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $K = \emptyset$, тогда для любых $v \in V$ и $r \in (0, \infty)$ имеем $r\,v \notin K$, поэтому $\varPhi(v) = \inf\emptyset = \infty$. Обратно, если $\varPhi(v) = \infty$, то это означает, что для каждого $r \in (0, \infty)$ имеем $r\,v \notin K$, в частности, $v \notin K$. Таким образом, ни один вектор из V не содержится в K, поэтому $K = \emptyset$. □

Функционалы Минковского естественно возникают при изучении обобщенных полунорм.

Предложение 6.89. *Пусть L — обобщенная полунорма на векторном пространстве V и*
$$K = \big\{v \in V : L(v) \le 1\big\}.$$
Тогда функционал Минковского $\varPhi_K$ совпадает с L. В частности, $K = \big\{v \in V : \varPhi_K(v) \le 1\big\}$.

Доказательство. Выберем произвольное $v \in V$. Если $L(v) = \infty$, то для каждого $r \in (0, \infty)$ также $L(v/r) = \infty$, поэтому ни для одного такого r не выполняется $v/r \in K$ и, значит, $\varPhi(v) = \infty = L(v)$.

Пусть теперь $L(v) < \infty$. Тогда множество $\big\{r \in (0, \infty) : v/r \in K\big\}$ непусто. Выберем из него произвольное r, тогда $v/r \in K$, откуда $L(v/r) \le 1$ и, значит, $L(v) \le r$. Переходя к точной нижней грани по r, заключаем, что $L(v) \le \varPhi(v)$.

Докажем теперь, что $L(v) \ge \varPhi(v)$. Предположим противное, т.е. что для некоторого $v \in V$ выполняется $L(v) < \varPhi_K(v)$. В частности, $\varPhi_K(v) > 0$. Выберем произвольное $r \in (0, \infty)$ такое, что $L(v) < r < \varPhi(v)$, тогда $L(v/r) < 1$, поэтом $v/r \in K$ и, значит, $\varPhi(v) \le r$, противоречие, завершающее доказательство. □

Предложение 6.90. *Пусть $K_1 \subset K_2$ — подмножества векторного пространства V и Φ_i — функционал Минковского, соответствующий K_i, $i = 1, 2$. Тогда $\Phi_1 \ge \Phi_2$.*

Доказательство. Выберем произвольное $v \in V$, тогда

$$\Phi_1(v) = \inf\{r \in (0,\infty) : v \in r\,K_1\} \ge \inf\{r \in (0,\infty) : v \in r\,K_2\} = \Phi_2(v),$$

что и требовалось. □

Всюду ниже K обозначает произвольное подмножество векторного пространства V, а $\Phi = \Phi_K$ — соответствующий функционал Минковского.

Предложение 6.91. *Если $0 \in K$, то $\Phi(0) = 0$, если же $0 \notin K$, то $\Phi(0) = \infty$.*

Доказательство. Если $0 \in K$, то при каждом $r \in (0,\infty)$ выполняется $0 \in r\,K$, так что точная нижняя грань таких r равна 0, т.е. $\Phi(0) = 0$.

Если же $0 \notin K$, то ни для одного $r \in (0,\infty)$ не выполняется $0 \in r\,K$, поэтому $\Phi(0) = \infty$ как точная нижняя грань для пустого множества. □

Для произвольного $F \subset \mathbb{F}$ положим $F\,K = \{\alpha\,v : \alpha \in F,\, v \in K\}$. Нам особенно понадобится множество $(0,1]K$, которое мы обозначим K^σ. Так как $1 \in (0,1]$, то $K \subset K^\sigma$.

Лемма 6.92. *Во введенных выше обозначениях, $0 \in K$ тогда и только только тогда, когда $0 \in K^\sigma$.*

Доказательство. Если $0 \in K$, то так как $K \subset K^\sigma$, имеем $0 \in K^\sigma$. Если же $0 \notin K$, то в K^σ также нет нуля потому, что $K^\sigma = \cup_{v\in K}(0,1]\{v\}$, и все v из предыдущей формулы отличны от нуля. □

Предложение 6.93. *Имеем $\Phi = \Phi_{K^\sigma}$.*

Доказательство. Выберем произвольный $v \in V$. Пусть сначала $v = 0$. По лемме 6.92, в K и K^σ одновременно или содержится, или не содержится 0. В силу предложения 6.91, если 0 содержится в K и K^σ, то $\Phi(v) = \Phi_{K^\sigma}(v) = 0$, а если нет, то $\Phi(v) = \Phi_{K^\sigma}(v) = \infty$.

Пусть теперь $v \ne 0$. Так как $K \subset K^\sigma$, то, в силу предложения 6.90, имеем $\Phi \ge \Phi_{K^\sigma}$. Таким образом, достаточно проверить, что $\Phi(v) \le \Phi_{K^\sigma}(v)$. Предположим противное, т.е. что $\Phi(v) > \Phi_{K^\sigma}(v)$, в частности, $\Phi_{K^\sigma}(v) < \infty$. Так как $\Phi_{K^\sigma}(v)$ равно, по определению, точной нижней грани тех $r \in (0,\infty)$, для которых $v \in r\,K^\sigma$, и, в силу $\Phi_{K^\sigma}(v) < \infty$, множество таких r непусто, поэтому существует $r \in (0,\infty)$ такое, что $\Phi(v) > r$ и $v \in r\,K^\sigma$. Последнее влечет существование $w \in K^\sigma$, для которого $v = r\,w$. По определению K^σ, существуют $u \in K$ и $t \in (0,1]$ такие, что $w = t\,u$, откуда $v = r\,t\,u$. Таким образом, $v \in r\,t\,K$, поэтому $\Phi(v) \le r\,t \le r < \Phi(v)$, противоречие. □

Пример 6.94. Евклидова норма на плоскости $\mathbb{R}^2$ совпадает с функционалом Минковского Φ_K для K, равного объединению начала координат и единичной окружности с центром в нуле. Такой же функционал получится, если к K добавить любое подмножество единичного круга с центром в нуле.

Предложение 6.95. *Для каждых $v \in V$ и $t \in (0,\infty)$ выполняется $\Phi(t\,v) = t\,\Phi(v)$.*

Доказательство. Если $\Phi(v) = \infty$, то не существует $r \in (0,\infty)$ такого, что $v/r \in K$. Значит, и для любого $t \in (0,\infty)$ также не существует $r \in (0,\infty)$, для которого $t\,v/r \in K$. Следовательно, для таких t имеем $\infty = \Phi(t\,v) = t\,\infty = t\,\Phi(v)$.

Если же $\Phi(v) < \infty$, то при каждом $r \in (0,\infty)$ условие $v \in r\,K$ равносильно условию $t\,v \in t\,r\,K$, поэтому точные нижние грани r_0 тех r, для которых выполняется первое или второе условия, равны, и значит, $\Phi(v) = r_0$ и $\Phi(t\,v) = t\,r_0 = t\,\Phi(v)$, что и требовалось. □

Множество $K \subset V$ назовем ***радиальным***,[3] если для любого $v \in K$ имеем место включение $(0,1]\{v\} \subset K$. Отметим, что пустое множество K является радиальным.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 6.96. *Для любого $K \subset V$ множество $K^\sigma = (0,1]K$ — радиальное. Множество K — радиальное, если и только если $K = K^\sigma$. В частности, для любого $K \subset V$ имеем $(K^\sigma)^\sigma = K^\sigma$.*

[3] В некоторых текстах под радиальным понимают более широкое множество, добавляя начало координат.

Предложение 6.97. *Множество $K \subset V$ — радиальное, если и только если для любых вещественных $0 < t_1 \le t_2 < \infty$ выполняется $t_1 K \subset t_2 K$.*

Доказательство. Для $K = \emptyset$ предложение очевидно выполняется. Рассмотрим теперь случай $K \ne \emptyset$.

Пусть K — радиальное множество. Выберем произвольные $0 < t_1 \le t_2 < \infty$ и пусть $w \in t_1 K$, тогда $w = t_1 v$ для некоторого $v \in K$. Так как K — радиальное, то $(0,1]\{v\} \subset K$, откуда $t_i(0,1]\{v\} = (0,t_i]\{v\} \subset t_i K$, $i = 1, 2$, поэтому

$$w = t_1 v \in (0,t_1]\{v\} \subset (0,t_2]\{v\} \subset t_2 K,$$

так что $t_1 K \subset t_2 K$ в силу произвольности w.

Обратно, пусть для любых вещественных $0 < t_1 \le t_2 < \infty$ выполняется $t_1 K \subset t_2 K$. Покажем, что K — радиальное. Выберем произвольное $v \in K$, а также любое $t \in (0,1]$. Мы должны показать, что $t v \in K$. Но $t v \in t K$, а по условию, $t K \subset 1 K = K$, что и требовалось. □

Положим

$$K_d = \{v \in V : \varPhi_K(v) < 1\}, \qquad K_u = \{v \in V : \varPhi_K(v) \le 1\}.$$

Лемма 6.98. *Начало координат $0 \in V$ или одновременно принадлежит всем K, K^σ, K_d и K_u, или одновременно ни в одном из них не содержится.*

Доказательство. Так как, в силу леммы 6.92, множества K и K^σ одновременно или содержат, или не содержат 0, утверждение настоящей леммы достаточно доказать для K, K_d и K_u.

Если $0 \in K$, то, по предложению 6.91, $\varPhi(0) = 0$, поэтому 0 принадлежит K_d и K_u. Если же $0 \notin K$, то, по предложению 6.91, $\varPhi(0) = \infty$, поэтому 0 не принадлежит ни K_d, ни K_u. □

Лемма 6.99. *Множества K, K^σ, K_d и K_u или одновременно пусты, или все непусты.*

Доказательство. Пусть $K = \emptyset$, тогда $K^\sigma = (0,1]K = \emptyset$. По лемме 6.88, имеем $\varPhi \equiv \infty$, поэтому не существует $v \in V$, для которого $\varPhi(v) \le 1$, откуда $K_d = K_u = \emptyset$.

Пусть теперь $K \ne \emptyset$, тогда $K^\sigma = (0,1]K \ne \emptyset$. По лемме 6.88, существует $v \in V$ такой, что $\varPhi(v) < \infty$. По предложению 6.95, для $\varPhi(v) < r < \infty$ выполняется $\varPhi(v/r) < 1$, так что $v/r \in K_d \subset K_u$, откуда K_d и K_u непусты. □

Предложение 6.100. *Множества K^σ, K_d и K_u — радиальные.*

Доказательство. Радиальность K^σ содержится в предложении 6.96. Докажем радиальность K_d и K_u. Достаточно рассмотреть случай непустых K_d и K_u. Выберем произвольный $v \in K_d$. Тогда $\varPhi(v) < 1$ и, в силу предложения 6.95, для всех $t \in (0,1]$ выполняется $\varPhi(t v) = t\varPhi(v) < 1$, так что $(0,1]\{v\} \subset K_d$, поэтому K_d — радиальное. Аналогично для K_u. □

Предложение 6.101. *Для произвольного $K \subset V$ имеем*

(1) $K \subset K_u$;

(2) *если K — радиальное, то $K_d \subset K$;*

(3) *если K не является радиальным, то включение $K_d \subset K$ может оказаться неверным.*

Доказательство. По лемме 6.99 и в силу радиальности пустого множества, для $K = \emptyset$ пункты (1) и (2) выполняются, а в пункте (3) множество K автоматически не является пустым. Таким образом, будем сразу предполагать, что $K \ne \emptyset$.

(1) Выберем произвольное $v \in K$, тогда при $r = 1$ имеем $v \in r K$, откуда $\varPhi(v) \le 1$, т.е. $v \in K_u$ и, значит, $K \subset K_u$.

(2) Так как $K \ne \emptyset$, то, по лемме 6.99, имеем $K_d \ne \emptyset$. Пусть $v \in K_d$, тогда $\varPhi(v) < 1$, т.е. существует $0 < r < 1$, для которого $v \in r K \subset K$, где последнее включение вытекает из предложения 6.97.

(3) Рассмотрим для примера $K = \{1\} \subset \mathbb{R}$. Тогда $K_d = (0,1)$, но $(0,1) \not\subset \{1\}$. □

Предложение 6.102. *Для $K \subset V$ и $K' \subset V$ предположим, что $K_d \subset K' \subset K_u$. Тогда*

(1) *множество K' — радиальное*;

(2) $\varPhi = \varPhi_{K'}$.

Доказательство. Если $K=\emptyset$, то, по лемме 6.99, имеем $K_d=K_u=\emptyset$, откуда $K'=\emptyset=K$, поэтому K' — радиальное и $\Phi=\Phi_{K'}$. Пусть теперь $K\neq\emptyset$.

(1) Берем произвольное $v\in K'$, тогда $\Phi(v)\le 1$, так как $K'\subset K_u$. Для каждого $v'\in(0,1)\{v\}$ существует $t\in(0,1)$ такое, что $v'=t\,v$. В силу предложения 6.95, имеем $\Phi(v')=\Phi(t\,v)=t\,\Phi(v)<1$, поэтому $v'\in K_d\subset K'$. Но тогда и $(0,1]\{v\}\subset K'$, что и требовалось.

(2) Выберем произвольное $v\in V$. Пусть $v=0$. В силу леммы 6.98, множества K, K_d и K_u одновременно или содержат, или не содержат 0. Если содержат, то так как $K_d\subset K'$, множество K' также содержит 0. Если не содержат, то так как $K'\subset K_u$, то и K' не содержит 0. Тем самым, K и K' одновременно или содержат, или не содержат 0. Но это означает, в силу предложения 6.91, что значения в 0 функционалов Φ и $\Phi_{K'}$ совпадают.

Пусть теперь $v\neq 0$. Рассмотрим сначала случай $\Phi(v)=\infty$. Если для некоторого $r\in(0,\infty)$ выполняется $v/r\in K'$, то $\Phi(v/r)\le 1$, так как $K'\subset K_u$. Но тогда, в силу предложения 6.95, имеем $\Phi(v)\le r$, противоречие. Таким образом, ни для одного $r\in(0,\infty)$ не выполняется $v/r\in K'$, поэтому $\Phi_{K'}(v)=\infty=\Phi(v)$.

Пусть теперь $\Phi(v)<\infty$. Рассмотрим сначала случай $\Phi(v)=0$. По предложению 6.95, для любого $r\in(0,\infty)$ имеем $\Phi(r\,v)=r\,\Phi(v)=0$, поэтому для всех таких r выполняется $r\,v\in K_d\subset K'$, откуда

$$\Phi_{K'}(v)=\inf\bigl\{r\in(0,\infty):r\,v\in K'\bigr\}=0=\Phi(v).$$

Рассмотрим теперь оставшийся случай $0<\Phi(v)<\infty$. Положим $w=v/\Phi(v)$, тогда $\Phi(w)=1$ в силу предложения 6.95, так что $w\in K_u$ и при каждом $r\in(1,\infty)$ имеем $\Phi(w/r)<1$ в силу того же предложения 6.95, поэтому $w/r\in K_d\subset K'$, откуда

$$\Phi_{K'}(w)=\inf\bigl\{r\in(0,r):w/r\in K'\bigr\}\le 1.$$

С другой стороны, если $r<1$, то $\Phi(w/r)>1$, поэтому при всех $r<1$ имеем $w/r\notin K_u$ и, значит, $w/r\notin K'$, поэтому $\Phi_{K'}(w)\ge 1$. Таким образом, мы показали, что $\Phi_{K'}(w)=1$. В силу предложения 6.95, выполняется

$$\Phi_{K'}(v)=\Phi(v)\Phi_{K'}(w)=\Phi(v),$$

что и требовалось. □

Следствие 6.103. *Имеем $K_d\subset K^\sigma\subset K_u$.*

Доказательство. По предложению 6.93, имеем $\Phi=\Phi_{K^\sigma}$, поэтому K_d и K_u для K совпадают соответственно с $K'_d:=\bigl\{v\in V:\Phi_{K^\sigma}(v)<1\bigr\}$ и $K'_u:=\bigl\{v\in V:\Phi_{K^\sigma}(v)\le 1\bigr\}$. Так как, в силу предложения 6.96, множество K^σ — радиальное, то, из предложения 6.101 вытекает, что $K_d=K'_d\subset K^\sigma\subset K'_u=K_u$. □

Следствие 6.104. *Для любого $K\subset V$ имеем $\Phi=\Phi_K=\Phi_{K^\sigma}=\Phi_{K_d}=\Phi_{K_u}$.*

Доказательство. В силу следствия 6.103, имеем $K_d\subset K^\sigma\subset K_u$, а предложение 6.102 влечет

$$\Phi=\Phi_{K^\sigma}=\Phi_{K_d}=\Phi_{K_u},$$

что и требовалось. □

Предложение 6.105. *Если Φ_K — обобщенная полунорма, то оба множества K_d и K_u выпуклы и сбалансированы.*

Доказательство. Докажем выпуклость K_u. Выберем произвольные $v,w\in K_u$, тогда $\Phi(v)\le 1$ и $\Phi(w)\le 1$. В силу полуаддитивности и положительной однородности функции Φ, для каждого $t\in[0,1]$ имеем

$$\Phi\bigl((1-t)v+t\,w\bigr)\le(1-t)\Phi(v)+t\,\Phi(w)\le 1,$$

так что $(1-t)v+t\,w\in K_u$, поэтому K_u — выпукло.

Докажем теперь сбалансированность K_u. Пусть $v\in K_u$, тогда $\Phi(v)\le 1$. Выберем произвольное $c\in\mathbb{F}$, $|c|\le 1$. Из положительной однородности Φ вытекает, что $\Phi(c\,v)=|c|\,\Phi(v)\le 1$, откуда $c\,v\in K_u$, что и требовалось.

Аналогично доказывается выпуклость и сбалансированность K_d. □

Замечание 6.106. Для обобщенной полунормы Φ множества K и K^σ не обязаны быть ни выпуклыми, ни сбалансированными. Например, рассмотрим в качестве $K=K^\sigma$ подмножество плоскости с координатами x, y, представляющее собой открытый квадрат $\bigl\{(x,y):|x|<1,\,|y|<1\bigr\}$, к которому добавлены точки $(1,1)$ и $(-1,1)$. Это множество задает на плоскости max-норму, но при это не является ни выпуклым, ни сбалансированным.

Предложение 6.107. *Пусть $K \subset V$ — выпукло и сбалансировано, тогда Φ_K — обобщенная полунорма.*

Доказательство. Как отмечалось в определении 6.80, каждое сбалансированное множество содержит 0, поэтому $0 \in K$. Но тогда, по предложению 6.91, имеем $\Phi(0) = 0$.

Докажем положительную однородность Φ. Выберем произвольное $v \in V$ и любое $\alpha \in \mathbb{F}$. Если $\alpha = 0$, то $\Phi(\alpha v) = \Phi(0) = 0 = |\alpha|\Phi(v)$, где последнее равенство имеет место в силу соглашения $0 \cdot \infty = 0$.

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Положим $c = \alpha/|\alpha|$, тогда $|c| = 1$. По определению,

$$\Phi(v) = \inf\{r \in (0,\infty) : v \in r\,K\},$$

и так как K сбалансировано, то $v \in r\,K$, если и только если $c\,v \in r\,K$, откуда $\Phi(v) = \Phi(c\,v)$. По предложению 6.95, для каждого $t \in (0,\infty)$ имеем $\Phi(t\,v) = t\,\Phi(v)$, поэтому

$$\Phi(\alpha\,v) = \Phi\big(|\alpha|\,c\,v\big) = |\alpha|\,\Phi(c\,v) = |\alpha|\,\Phi(v),$$

что и доказывает положительную однородность Φ.

Докажем теперь субаддитивность Φ. Выберем произвольные $v, w \in V$ и покажем, что $\Phi(v+w) \le \Phi(v)+\Phi(w)$. Если $\Phi(v) = \infty$ или $\Phi(w) = \infty$, то все доказано. Пусть теперь $\Phi(v) < \infty$ и $\Phi(w) < \infty$. Тогда существуют $r_v, r_w \in (0,\infty)$, для которых $v/r_v,\ w/r_w \in K$. Так как K выпукло, то

$$\frac{v+w}{r_v+r_w} = \frac{r_v}{r_v+r_w}\frac{v}{r_v} + \frac{r_w}{r_v+r_w}\frac{w}{r_w} \in K,$$

поэтому

$$\Phi\bigg(\frac{v+w}{r_v+r_w}\bigg) \le 1.$$

В силу положительно однородности Φ, имеем $\Phi(v+w) \le r_v + r_w$. Переходя к точной нижней грани по r_v и r_w, получаем субаддитивность Φ. $\square$

Следствие 6.108. *Если одно из множеств K^σ, K_d, K_u — выпукло и сбалансировано, то Φ_K — обобщенная полунорма.*

Доказательство. Так как, по следствию 6.104, имеем $\Phi = \Phi_{K^\sigma} = \Phi_{K_d} = \Phi_{K_u}$, то в качестве K можно взять то из K^σ, K_d и K_u, которое выпукло и сбалансировано, а затем применить предложение 6.107. $\square$

Определение 6.109. Подмножество K векторного пространства V называется ***поглощающим***, если для любого $v \in V$ существует $r \in (0,\infty)$ такое, что $v \in r\,K$. В частности, каждое поглощающее подмножество содержит 0, и надмножество каждого поглощающего множества также поглощающее.

Предложение 6.110. *Множества $K \subset V$ и K^σ одновременно поглощающие или нет.*

Доказательство. Так как $K \subset K^\sigma$, а каждое надмножество поглощающего множества само поглощающее, то если K — поглощающее, то и K^σ — такое же. Пусть теперь K^σ — поглощающее, тогда для каждого $v \in V$ существует $r \in (0,\infty)$ такое, что $v/r \in K^\sigma$. По определению K^σ, существует $w \in K$ и $t \in (0,1]$ такое, что $v/r = t\,w$. Но тогда $v/(rt) = w \in K$, поэтому K — также поглощающее множество. $\square$

Лемма 6.111. *Пусть $K \subset V$, $t \in (0,\infty)$ и $K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset t\,K_1 \subset V$, тогда*

(1) *множество K — поглощающее, если и только если $t\,K$ — поглощающее*;

(2) *все множества $K_1 \ldots, K_n$ одновременно или поглощающие, или нет.*

Доказательство. (1) Пусть множество K — поглощающее, тогда для каждого $v \in V$ существует $r \in (0,\infty)$, для которого $v/t \in r\,K$, но тогда $v \in r\,(t\,K)$, так что $t\,K$ — поглощающее. Равенство $K = (1/t)(t\,K)$ завершает доказательство этого пункта.

(2) Если одно из K_i — поглощающее, то и все надмножества, в частности, $t\,K_1$ — тоже поглощающие. Из пункта (1) вытекает, что тогда и K_1 — поглощающее, поэтому все K_i такие. $\square$

Следствие 6.112. *Если одно из множеств K, K^σ, K_d и K_u — поглощающее, то и все остальные — такие же. Таким образом, или все четыре множества поглощающие, или ни одно из них поглощающим не является.*

Доказательство. В силу следствия 6.103, имеем $(1/2)K_u \subset K_d \subset K^\sigma \subset K_u$, поэтому K^σ, K_d и K_u одновременно поглощающие или нет по лемме 6.111. По предложению 6.110, множества K и K^σ одновременно поглощающие или нет. Последнее завершает доказательство. $\square$

Предложение 6.113. *Функционал Φ_K конечный, если и только если K, или K^σ, или K_d, или K_u — поглощающее множество.*

Доказательство. По определению, конечность функционала Φ равносильна тому, что для каждого $v \in V$ существует $r \in (0,\infty)$, для которого $v \in r\,K$. Но это есть в точности условие того, что K — поглощающее множество. Тем самым мы показали, что Φ конечен, если и только если множество K — поглощающее. По следствию 6.112, K, K^σ, K_d и K_u одновременно или поглощающие, или нет, что и завершает доказательство. $\square$

Определение 6.114. Назовем функционал Минковского Φ ***невырожденным***, если для любого $v \in V$, $v \ne 0$ выполняется $\Phi(v) \ne 0$.

Предложение 6.115. *Функционал Φ — невырожденный, если и только если K_d не содержит ни одного открытого луча, выходящего из начала координат.*

Доказательство. Пусть Φ невырожден, тогда для любого $v \ne 0$ имеем $\Phi(v) \ne 0$, откуда $w = 2v/\Phi(v)$, в силу предложения 6.95, удовлетворяет $\Phi(w) = 2$, поэтому $w \notin K_d$. Таким образом, открытый луч из начала координат в направлении вектора v не содержится в K_d. Так как v — произвольный вектор, получаем декларированное.

Обратно, мы покажем, что если Φ вырожденный, то некоторый открытый луч содержится в K_d. Пусть Φ — вырожденный, тогда существует $v \in V$ такое, что $\Phi(v) = 0$, но $v \ne 0$. Тогда для каждого $t \in (0,\infty)$ имеем $\Phi(t\,v) = 0$ по предложению 6.95, поэтому весь открытый луч, выходящий из начала координат в направлении v, содержится в K_d. $\square$

Аналогично лемме 6.111, доказывается следующий результат.

Лемма 6.116. *Пусть $K \subset V$, $t \in (0,\infty)$ и $K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset t\,K_1 \subset V$, тогда*

(1) *множество K содержит открытый луч, выходящий из начала координат, если и только если $t\,K$ содержит этот луч*;

(2) *все множества $K_1 \ldots, K_n$ одновременно или содержат открытый луч, выходящий из начала координат, или нет.*

Следствие 6.117. *Если одно из множеств K^σ, K_d и K_u содержит открытый луч, выходящий из начала координат, то и два остальных множества также содержат этот луч. Таким образом, или все три множества содержат такой луч, или все три не содержат.*

Доказательство. В силу следствия 6.103, имеем $(1/2)K_u \subset K_d \subset K^\sigma \subset K_u$. Остается применить лемму 6.116. $\square$

Предыдущие предложения удобно объединить в следствие.

Следствие 6.118. *Функционал Минковского Φ является*

- *обобщенной полунормой тогда и только тогда, когда или K_d, или K_u — выпуклое и сбалансированое*;
- *обобщенной нормой тогда и только тогда, когда или K_d, или K_u — выпуклое, сбалансированное и не содержит ни одного открытого луча, выходящего из начала координат*;
- *полунормой тогда и только тогда, когда или K_d, или K_u — выпуклое, сбалансированное и поглощающее*;
- *нормой тогда и только тогда, когда или K_d, или K_u — выпуклое, сбалансированное, поглощающее и не содержит ни одного открытого луча, выходящего из начала координат.*

6.8.6 Пополнение Минковского и замыкание полунорм

Предложение 6.119. *Пусть V — подпространство нормированного пространства W, $L\colon V \to [0,\infty]$ — обобщенная полунорма, $K = \big\{v \in V : L(v) \le 1\big\} \subset V \subset W$, и $\bar K$ — замыкание K в W. Обозначим Φ функционал Минковского, соответствующий $\bar K$. Тогда Φ — обобщенная полунорма.*

Доказательство. В силу предложения 6.107, достаточно показать, что множество $\bar K$ — выпуклое и сбалансированное. Однако это мгновенно вытекает из леммы 6.83. □

Для нормированного пространства V и полунормы L на V обозначим

- V^c пополнение по норме векторного пространства V;
- $\bar B^L$ замыкание в V^c множества $B^L = \big\{v \in V : L(v) \le 1\big\}$;
- $L^c\colon V^c \to [0,\infty]$ функционал Минковского для $\bar B^L$;
- $\overline{V}$ линейное подпространство в V^c, состоящее из всех $v \in V^c$, для которых $L^c(v) < \infty$;
- $\bar L$ ограничение L^c на $\overline{V}$;
- $B^{\bar L} = \{v \in \overline{V} : \bar L(v) \le 1\}$.

Из предложения 6.119 вытекает, что L^c — обобщенная полунорма, а $\bar L$ — полунорма. Пространство $\overline{V}$ с полунормой $\bar L$ назовем ***пополнением Минковского*** пары (V,L). Так как, по определению функционала Минковского, для каждого $v \in \bar B^L$ выполняется $L^c(v) \le 1 < \infty$, то $\bar B^L \subset \overline{V}$. Кроме того, шар $\bar B^L$ замкнут в V^c и, значит, замкнут в индуцированной топологии на $\overline{V}$, т.е. относительно нормы пространства $\overline{V}$. Из предложения 6.76 вытекает, что полунорма $\bar L$ полунепрерывна снизу. Так как шар $\bar B^L$ замкнут в полном пространстве V^c, то сам он является полным метрическим пространством (относительно нормы). При этом само пространство $\overline{V}$, в отличие от V^c, может быть неполным относительно нормы.

Пример 6.120. Пусть $V = \mathcal{P}\big([a,b]\big)$ — пространство всех вещественных многочленов, ограниченных на отрезок $[a,b]$, наделенное sup-нормой и стандартной липшицевой полунормой L. Тогда, по теореме Вейерштрасса, $V^c = C\big([a,b]\big)$ — пространство всех непрерывных функций на $[a,b]$, а $\overline{V} = \mathrm{Lip}\big([a,b]\big)$ — подпространство всех липшицевых функций. Последнее пространство не является полным по той же теореме Вейерштрасса. В примере 6.75 мы показали, что липшицева полунорма $\bar L$ полунепрерывна снизу, поэтому $\bar B^L = \mathrm{Lip}_1\big([a,b]\big)$ — замкнутое подмножество V^c и, значит, полное метрическое пространство.

Определение 6.121. Полунорму $\bar L$ назовем ***замыканием*** полунормы L. Полунорма L называется ***замкнутой***, если шар B^L замкнут в V^c, т.е. $B^L = \bar B^L$ и, значит, $V = \overline{V}$.

Предложение 6.122. *Полунорма L замкнута, если и только если шар B^L — полное пространство относительно нормы на V.*

Доказательство. Если полунорма L замкнута, то $B^L = \bar B^L$, а последний шар, как было отмечено выше, — полный. Обратно, если шар B^L полный, то в V^c он замкнут и, значит, $B^L = \bar B^L$. □

Замечание 6.123. Так как операция замыкания в топологии, заданной нормой, применяется к единичному шару полунормы L в разных пространствах, а замкнутость L в этих пространствах приводит к существенно разным свойствам полунормы L, соберем в данном замечании известные результаты, чтобы подчеркнуть имеющиеся отличия.

Итак, пусть V — нормированное пространство, L — полунорма на V, и $B^L = \{v \in V : L(v) \le 1\}$ — единичный шар этой полунормы. Тогда

(1) замкнутость шара B^L в V в топологии, заданной нормой пространства V, равносильна полунепрерывности снизу полунормы L (предложение 6.76);

(2) замкнутость шара B^L в V^c в топологии, заданной нормой пополнения V^c пространства V, равносильна полноте метрического пространства B^L в метрической топологии, порожденной нормой пространства V (предложение 6.122);

(3) замкнутость шара B^L в $\overline{V}$ в топологии, индуцированной V^c, равносильна его замкнутости в топологии V^c;

(4) предыдущие два свойства названы замкнутостью полунормы L;

(5) замкнутость шара B^L в V в топологии пространства V не влечет замкнутость B^L в V^c, тем самым, полунепрерывность снизу полунормы L не влечет ее замкнутость;

(6) замкнутость шара B^L в V^c или в $\overline{V}$ влечет замкнутость B^L в V, поэтому замкнутость полунормы L влечет ее полунепрерывность снизу.

Верно ли, что замыкание полунормы является продолжением исходной полунормы, т.е. ограничение замыкания на исходное пространство совпадает с исходной полунормой? В общем случае ответ отрицательный.

Пример 6.124. Пусть $A = C\big([0,1]\big)$ — пространство непрерывных функций нормой

$$\|f\| = \int_0^1 \big|f(x)\big|\,dx.$$

В качестве L возьмем $L(f) = f(0)$. Пусть $B^L = \big\{f \in A : L(f) \le 1\big\}$, тогда $1 \in B^L$ и $L(1) = 1$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим последовательность функций $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, равных c на $[1/n, 1]$ и $f_n(x) = n\,x$ на $[0, 1/n]$. Тогда $L(f_n) = 0$, т.е. $f_n \in B^L$, но $\|c - f_n\| = (1/2)(1/n)c \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $f_n \to c$. Таким образом, $\mathbb{R} \subset \bar{B}^L$, поэтому $\bar{L}(1) = 0$.

Замечание 6.125. Отметим, что в примере 6.124 единичный шар B^L полунормы L незамкнут в пространстве A, что и приводит в неравенству полунормы L и ее замыкания $\bar{L}$, ограниченного на A. Кроме того, пространство A — неполное.

Задача 6.126. Можно ли построить пример, аналогичный 6.124, но в котором пространство A — полное? А если дополнительно потребовать, чтобы L была липшицевой полунормой или Lip-нормой?

Предложение 6.127. *Пусть V — нормированное пространство и L — полунорма на V. Тогда для каждого $v \in V$ выполняется $\bar{L}(v) \le L(v)$.*

Доказательство. По предложению 6.89, полунорма L является функционалом Минковского для своего единичного шара $B^L = \{v \in V : L(v) \le 1\}$. Обозначим той же буквой L продолжение L на $\overline{V}$, а именно, это новое L будем считать функционалом Минковского для $B^L \subset \overline{V}$. Так как $B^L \subset \bar{B}^L$, а $\bar{L}$ — функционал Минковского для $\bar{B}^L$, то, в силу предложения 6.90, имеем $\bar{L}(v) \le L(v)$ для всех $v \in \overline{V}$, в частности, это имеет место и для всех $v \in V$. □

Тем не менее, если добавить условие полунепрерывности снизу, то ситуация исправится.

Предложение 6.128. *Пусть V — нормированное пространство и L — полунепрерывная снизу полунорма на V. Тогда $\bar{L}$ является продолжением L, т.е. для каждого $v \in V$ выполняется $\bar{L}(v) = L(v)$.*

Доказательство. Пусть L_1 обозначает ограничение полунормы $\bar{L}$ на V. Мы должны показать, что $L_1 = L$. Положим $B_1 = \big\{v \in V : L_1(v) \le 1\big\}$. В силу предложения 6.89, достаточно показать, что $B_1 = B^L = \{v \in V : L(v) \le 1\}$. В силу предложения 6.127, для каждого $v \in B^L$ выполняется $\bar{L}(v) \le L(v) \le 1$, поэтому $v \in B_1$, так что, в силу произвольности v, имеем $B_L \subset B_1$.

Докажем обратное включение. Пусть $v \in B_1$, тогда существует последовательность $v_i \in B^L$, сходящаяся по норме к v. Так как L полунепрерывна снизу, имеем

$$L(v) \le \liminf_{i\to\infty} L(v_i) \le 1,$$

поэтому $v \in B^L$ и, значит, $B_1 \subset B^L$. □

Даже если полунорма L является Lip-нормой, возможна ситуация, при которой $\bar{L}$ не является продолжением L.

Пример 6.129. Рассмотрим пример 6.86. Напомним конструкцию из этого примера. Пусть $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$, а $A = C^1(I)$ — векторное пространство всех непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[-1,1]$. В качестве нормы выберем sup-норму $\|\cdot\|_\infty$, а полунорму L определим так:

$$L(f) = \|f'\|_\infty + \big|f'(0)\big|.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ зададим непрерывную функцию $g_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ так: $g_n(t) = n|t|$ при $|t| \le 1/n$, и $g_n(t) = 1$ на оставшихся t, тогда функция $f_n(t) = \int_{-1}^t g_n(s)\,ds$ принадлежит A. Последовательность f_n сходится к $f(t) = t+1 \in A$ по норме пространства A, а $L(f_n) = 1$ и $L(f) = 2$. Это означает, что $f \in \bar{B}^L$, так что $\bar{L}(f) \le 1$, но $L(f) = 2$, поэтому $\bar{L}(f) \ne L(f)$.

Верно ли, что замыкание липшицевой полунормы также липшицево? В общем случае, ответ отрицательный.

Замечание 6.130. Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ — алгебра вещественных многочленов, ограниченных на отрезок $[0,2]$, наделенная sup-нормой. Определим $L\colon A \to [0,\infty]$, положив

$$L(f) = \sup\left\{\frac{\big|f(x) - f(y)\big|}{|x-y|} : x \ne y,\ x, y \in [0,1]\right\}.$$

Обратите внимание, что супремум в предыдущей формуле берется не по всему отрезку $[0,2]$, а по его подотрезку $[0,1]$. Покажем, что L является липшицевой полунормой. Действительно, каждый многочлен имеет на отрезке $[0,1]$ ограниченную производную, а это означает, что каждый многочлен — липшицева функция. Кроме того, равенство $L(f) = 0$ равносильно тому, что многочлен f постоянен на отрезке $[0,1]$ и, значит, на всем $[0,2]$. Таким образом, ядро L состоит из постоянных функций.

По теореме Вейерштрасса, $\bar{A}$ состоит из всех липшицевых функций на $[0,2]$. Однако каждая непрерывная функция, постоянная на $[0,1]$, входит в ядро $\bar{L}$, поэтому размерность ядра больше 1.

Пусть V — нормированное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а V^c — его пополнение. Пусть $f \in V^*$ — произвольный непрерывный линейный функционал на V. По теореме Хана–Банаха 1.11, существует продолжение $\bar{f}$ функционала f на все V^c без увеличения нормы. Так как функционал f ограниченный, то и $\bar{f}$ — такой же и, значит, непрерывный, т.е. $\bar{f} \in (V^c)^*$. С другой стороны, так как каждая точка из V^c является пределом некоторой последовательности точек из V, функционал $\bar{f}$ определен однозначно (по непрерывности). Таким образом, определено отображение $f \mapsto \bar{f}$, являющееся изоморфизмом пространств V^* и $(V^c)^*$. Так как норма при этом сохраняется, этот изоморфизм является изометрией.

Пусть теперь $(A,e) \in \mathcal{OUS}$ и A^c — пополнение этого пространства. Если $f \in \mathcal{S}(A)$, то соответствующий функционал $\bar{f} \in (A^c)'$ имеет ту же норму 1 и, являясь продолжением f, удовлетворяет $\bar{f}(e) = f(e) = 1$. В силу следствия 5.32, функционал $\bar{f}$ — состояние, т.е. $\bar{f} \in \mathcal{S}(A^c)$. Обратно, для каждого состояния $\bar{g} \in \mathcal{S}(A^c)$ его ограничение $\bar{g}|_A$ на A имеет единичную норму (так как A всюду плотно в A^c) и удовлетворяет $\bar{g}|_A(e) = \bar{g}(e) = 1$ (так как $e \in A$), поэтому, в силу того же следствия 5.32, $\bar{g}|_A$ также является состоянием, т.е. $\bar{g}|_A \in \mathcal{S}(A)$.

Предложение 6.131. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$ и L — липшицева полунорма на A. Обозначим $\bar{A}$ пополнение Минковского пары (A,L), и пусть $\bar{L}$ — замыкание полунормы L. Тогда для любых $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ и соответствующих им $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathcal{S}(\bar{A})$ выполняется $\rho_{\bar{L}}(\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \rho_L(\lambda,\mu)$.*

Доказательство. По определению пополнения Минковского, единичный шар $B^{\bar{L}} \subset \bar{A}$ для полунормы $\bar{L}$ является замыканием в $\bar{A}$ по норме единичного шара $B^L \subset A \subset \bar{A}$ для L, т.е. $B^{\bar{L}} = \bar{B}^L$. В частности, это означает, что супремум непрерывной на $\bar{A}$ функции по шару $B^{\bar{L}}$ и по его части B^L совпадают. Кроме того, в силу сказанного выше, $\lambda = \bar{\lambda}|_A$ и $\mu = \bar{\mu}|_A$. Тогда

$$\rho_{\bar{L}}(\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \sup\Big\{\big|\bar{\lambda}(a) - \bar{\mu}(a)\big| : a \in B^{\bar{L}}\Big\} = \sup\Big\{\big|\bar{\lambda}(a) - \bar{\mu}(a)\big| : a \in B^L\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{\big|\bar{\lambda}|_A(a) - \bar{\mu}|_A(a)\big| : a \in B^L\Big\} = \sup\Big\{\big|\lambda(a) - \mu(a)\big| : a \in B^L\Big\} = \rho_L(\lambda,\mu),$$

что и требовалось. □

6.9 Радиус квантового метрического пространства

Пусть $(A,L) \in \mathcal{CQ}$, т.е. L — это Lip-норма. Аналогично формуле (6.8), зададим на A' двойственную обобщенную полунорму

$$L'(\lambda) = \sup\Big\{\big|\lambda(a)\big| : a \in A,\ L(a) \le 1\Big\}. \tag{6.12}$$

По лемме 6.84, имеем $\rho_L(\lambda,\mu)=L'(\lambda-\mu)$ для любых $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$.

Рассуждения, аналогичные проделанным в замечании 6.45, показывают, что если $\lambda(e)\ne 0$, то $L'(\lambda)=\infty$, так как в качестве $a\in A$, $L(a)\le 1$, можно выбирать всевозможные re, $r\in\mathbb{R}$. Таким образом, конечным может быть лишь ограничение L' на A'°. Это ограничение мы также обозначим L'. Ясно, что для каждого $\nu\in A'$ и любых $\lambda,\mu\in\nu+\mathcal{S}(A)$ имеем $\lambda-\mu\in A'^\circ$ и $\rho_L(\lambda,\mu)=L'(\lambda-\mu)$.

Предложение 6.132. *Обобщенная полунорма L' на A'° является нормой, ограниченной на шаре $D_2\subset A'^\circ$ из предложения* 6.55.

Доказательство. Докажем сначала положительную определенность L'. Пусть $\lambda\in A'^\circ$ такой, что $L'(\lambda)=0$. Это означает, что для каждого $a\in A$, $L(a)\le 1$, выполняется $\lambda(a)=0$. По определению L, для каждого $a\notin\mathbb{R}e$, имеем $L(a)\ne 0$, поэтому, из однородности функционала λ вытекает, что $\lambda(a)=0$ для всех $a\notin\mathbb{R}e$. Но так как $\lambda\in A'^\circ$, то $\lambda(re)=0$ для всех $r\in\mathbb{R}$. Таким образом, $\lambda(a)=0$ при всех $a\in A$, откуда $\lambda=0$.

Покажем, что L' — норма, т.е. что L' конечна. Так как Lip-норма L, по определению, индуцирует $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A)$, то $\mathcal{S}(A)$ — компакт в топологии, заданной метрикой ρ_L, следовательно, это метрическое пространство ограничено. Так как для любых $\lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)$ имеем $\rho_L(\lambda,\mu)=L'(\lambda-\mu)$, а шар $D_2\subset A'^\circ$ из предложения 6.55 составлен и всех таких разностей $\lambda-\mu$, то L' ограничена на шаре D_2 и, значит, ограничена на всем A'°. □

Пусть $\|\cdot\|'$ обозначает ограничение на A'° двойственной нормы из A', заданной порядковой нормой на A.

Следствие 6.133. *Существует константа $r\ge 0$, для которой $L'\le r\,\|\cdot\|'$.*

Доказательство. По предложению 6.132, величина $r:=(1/2)\sup_{\lambda\in D_2}L'(\lambda)$ конечна. Покажем, что это r удовлетворяет условию следствия. Выберем произвольное $\mu\in A'$. Если $\mu=0$, то $L'(\mu)=0\le r\|\mu\|'=0$. Если же $\mu\ne 0$, то положим $\lambda=2\mu/\|\mu\|'$, тогда $\lambda\in D_2$, поэтому

$$L'(\mu)=\frac{\|\mu\|'}{2}L'(\lambda)\le\frac{\|\mu\|'}{2}(2r)=r\|\mu\|',$$

что и требовалось. □

Наименьшая константа r из следствия 6.133 называется ***радиусом компактного квантового метрического пространства*** (A,L) и обозначается $\operatorname{rad}(A,L)$ или, если понятно, о какой полунорме L идет речь, то $\operatorname{rad}(A)$. Из следствия 6.59 заключаем:

Следствие 6.134. *Пусть $(A,L)\in\mathcal{CQ}$, тогда величина*

$$\begin{aligned}\operatorname{rad}(A,L)&=\min\bigl\{r\in\mathbb{R}:\rho_L(\lambda,\mu)\le 2r,\ \lambda,\mu\in\mathcal{S}(A)\bigr\}=\\&=\min\bigl\{r\in\mathbb{R}:L'(\lambda)\le r\|\lambda\|',\ \lambda\in A'^\circ\bigr\}=\\&=\min\bigl\{r\in\mathbb{R}:\|b\|^\sim\le r\,L^\sim(b),\ b\in\widetilde{A}\bigr\}\end{aligned}$$

конечна. В частности, пространство состояний каждого компактного квантового метрического пространства ограничено, и $2r=\operatorname{diam}\mathcal{S}(A)$

Тема 7

Квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа

План. Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа, соответствия, искажения соответствий между метрическими пространствами, вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа через искажения соответствий, морфизмы, свойства морфизмов, пример несохранения полунепрерывности снизу Lip-нормы при сюръективных морфизмах, сохранение замкнутости Lip-нормы при сюръективных морфизмах, транзитивность морфизмов, прямая сумма упорядоченных пространств с архимедовыми порядковыми единицами, квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа.

Мы начнем с напоминания того, что такое расстояние Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа в случае обычных метрических пространств, подробности см. в [2].

Пусть X — метрическое пространство, $U_r(x) \subset X$ — ***открытый шар с центром в*** $x \in X$ ***и радиусом*** $r > 0$, а для непустого $A \subset X$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$ и назовем ***открытой*** r***-окрестностью*** A. Для непустых $A, B \subset X$ ***расстояние Хаусдорфа*** $d_H(A,B)$ ***между*** A ***и*** B определяется так:

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r \in [0,\infty] : A \subset U_r(B),\, B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Эквивалентное определение:

$$d_H(A,B) = \max\bigl\{\sup_{a\in A} |aB|,\, \sup_{b\in B} |Ab|\bigr\},$$

где для $x \in X$ и непустого $C \subset X$ полагаем $|xC| = |Cx| = \inf\bigl\{|xc| : c \in C\bigr\}$.

Легко видеть, что расстояние Хаусдорфа неотрицательно, $d_H(A,A) = 0$ для каждого непустого $A \subset X$, симметрично и для него выполняется неравенство треугольника. Тем не менее, если $X = \mathbb{R}$, то $d_H\bigl((0,1),[0,1]\bigr) = 0$ и $d_H\bigl(0,\mathbb{R}\bigr) = \infty$. Таким образом, d_H — обобщенная полуметрика. Тем не менее, если $\mathcal{H}(X)$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X, то d_H на $\mathcal{H}(X)$ — метрика (конечна и положительно определенна).

Пусть теперь X и Y — непустые метрические пространства. На $X \sqcup Y$ рассмотрим всевозможные метрики, продолжающие метрики с X и Y. Множество таких метрик обозначим $\mathcal{D}(X \sqcup Y)$. Тогда ***расстояние Громова–Хаусдорфа*** $d_{GH}(X,Y)$ ***между*** X ***и*** Y определяется так:

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{d_H(X,Y) : d \in \mathcal{D}(X \sqcup Y)\bigr\},$$

где X и Y рассматриваются как подмножества в $X \sqcup Y$, а d_H вычисляется в метрическом пространстве $(X \sqcup Y, d)$. Расстояние Громова–Хаусдорфа также является обобщенной полуметрикой, однако оно определено на собственном классе всех метрических пространств. Отметим также, что для изометричных X и Y имеем $d_{GH}(X,Y) = 0$, поэтому в этой теории метрические пространства обычно рассматриваются с точностью до изометрии. Кроме того, если $\mathcal{M}$ — это семейство всех непустых компактных метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии), то d_{GH} на $\mathcal{M}$ — метрика, причем пространство $\mathcal{M}$ — полное сепарабельное (польское), а метрика d_{GH} — строго внутренняя (каждая пара точек соединяется (кратчайшей) кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами). Кроме того, известен естественный критерий Громова предкомпактности подмножества в $\mathcal{M}$.

Замечание 7.1. Имеются и другие эквивалентные определения расстояния Громова–Хаусдорфа. Так, вместо пространств $(X \sqcup Y, d)$ можно рассматривать всевозможные метрические пространства Z, в которые X

и Y изометрично вкладываются, и минимизировать d_H между образами таких вложений (по всем Z и всем вложениям).

Еще одно определение использует идею соответствий между X и Y: ***соответствием*** называется произвольное сюръективное многозначное отображение. Обозначим $\mathcal{R}(X,Y)$ множество всех соответствий между X и Y. Для каждого $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ определим его ***искажение*** $\operatorname{dis} R$ так:

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big| : x_1, x_2 \in X,\, y_1 \in R(x_1),\, y_2 \in R(x_2)\Big\}.$$

Тогда

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Из последнего определения ясно, что расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет «степень похожести» метрических пространств: чем меньше искажение соответствия, чем более сходными являются пространства. Наша задача — определить аналог этого расстояния в случае квантовых метрических пространств. Конечно, можно было бы просто рассматривать расстояние Громова–Хаусдорфа между пространствами состояний. Как мы выясняли, в интересующем нас случае компактных квантовых пространств пространства состояний — это элементы из $\mathcal{M}$. Однако такой подход, позволяющий изометрично вкладывать пространства состояний в метрические пространства, не являющиеся квантовыми, является грубым, так как приводит к потере информации.

В работе Риффеля используется более деликатная конструкция, связанная с попыткой учесть «квантовость» при сравнении пространств состояний, и в результате возникает новое расстояние. Тем не менее, как оказывается, многие из перечисленных выше свойств пространства $\mathcal{M}$ удается сохранить, включая критерий Громова предкомпактности. Перейдем к деталям.

7.1 Морфизмы

Пусть теперь $A, B \in \mathcal{OUS}$. ***Морфизмом*** $\pi\colon A \to B$ называется унитальное положительное линейное отображение.

Предложение 7.2. *Произвольный морфизм π имеет единичную норму и, в частности, непрерывен.*

Доказательство. Напомним, что для каждого $a \in A$ его норма определяется так:

$$\|a\| = \inf\{r \in \mathbb{R} : -r\, e_A \le a \le r\, e_A\},$$

где e_A — порядковая единица в A. Тогда $\|a\| \le 1$ равносильно $-e_A \le a \le e_A$. Так как π — унитальный положительный функционал, а каждый положительный функционал сохраняет порядок, то

$$-e_B = -\pi(e_A) \le \pi(a) \le \pi(e_A) = e_B,$$

откуда $\|\pi(a)\| \le 1$ и, значит, $\|\pi\| \le 1$. Но $\pi(e_A) = e_B$ и $\|e_A\| = \|e_B\| = 1$, откуда $\|\pi\| = 1$, что и требовалось. $\square$

Предложение 7.3. *Двойственное отображение $\pi'\colon B' \to A'$ также имеет норму 1 и $\pi'(B'^\circ) \subset A'^\circ$.*

Доказательство. По определению, если $\lambda \in B'$, то $\pi'(\lambda) = \lambda \circ \pi$. Обозначим B_1^A и B_1^B соответствующие единичные шары в A и B относительно норм этих пространств с центрами в 0. Так как $\|\pi\| = 1$, то $\pi(B_1^A) \subset B_1^B$. Для каждого $\lambda \in B'$ условие $\|\lambda\| \le 1$ равносильно $\lambda(B_1^B) \subset [-1,1]$, поэтому при $\|\lambda\| \le 1$ выполняется $(\lambda \circ \pi)(B_1^A) \subset \lambda(B_1^B) \subset [-1,1]$, откуда $\big\|\pi'(\lambda)\big\| \le 1$. Выберем теперь в качестве λ состояние, тогда $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda(e_B) = 1$, поэтому $\pi'(\lambda)(e_A) = \lambda(e_B) = 1$ и, значит, $\big\|\pi'(\lambda)\big\| = 1$, так что $\|\pi'\| = 1$.

Пусть теперь $\lambda \in B'^\circ$, т.е. $\lambda(e_B) = 0$. Но тогда $\pi'(\lambda)(e_A) = \lambda\big(\pi(e_A)\big) = \lambda(e_B) = 0$, откуда $\pi'(\lambda) \in A'^\circ$. $\square$

Предложение 7.4. *Двойственное отображение $\pi'\colon B' \to A'$ переводит $\mathcal{S}(B)$ в $\mathcal{S}(A)$, а ограничение*

$$S(\pi)\colon \mathcal{S}(B) \to \mathcal{S}(A)$$

отображения π' — непрерывное аффинное отображение (переводит отрезки в отрезки), так что $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$ — выпуклое подмножество в $\mathcal{S}(A)$. Кроме того, $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$ замкнуто в $*$-слабой топологии на $\mathcal{S}(A)$.

Доказательство. По предложению 7.3, $\|\pi'\| = 1$, поэтому для каждого состояния $\lambda \in \mathcal{S}(B)$ выполняется $\big\|\pi'(\lambda)\big\| \le 1$. С другой стороны, как мы отмечали в доказательстве того же предложения 7.3, $\pi'(\lambda)(e_A) = 1$, поэтому $\big\|\pi'(\lambda)\big\| = 1 = \pi'(\lambda)(e_A)$. В силу следствия 5.31, функционал $\pi'(\lambda)$ положительный, и так как его норма равна 1, является состоянием. Непрерывность отображения π' вытекает из того, что его норма конечна, аффинность $S(\pi)$ следует из линейности отображения $\pi'\colon B' \to A'$, в частности, выпуклость каждого пространства состояния (предложение 6.32) и аффинность $S(\pi)$ влечет выпуклость $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big) = \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$. Кроме того, так как $\mathcal{S}(B)$ компактно в $*$-слабой топологии (предложение 6.32), то его непрерывный образ $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$ также компактен. Но $*$-слабая топология хаусдорфова (теорема 1.31), поэтому множество $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$ замкнуто как компакт в хаусдорфовом пространстве $S(A)$. □

Предложение 7.5. *Для $A, B \in \mathcal{OUS}$, морфизма $\pi\colon A \to B$ и липшицевой полунормы L предположим, что $\mathcal{S}(A)$ ограничено относительно ρ_L, скажем, $\rho_L(\lambda, \mu) \le 2r$ для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{S}(A)$ (например, $(A, L) \in \mathcal{CQ}$, а $r = \operatorname{rad} A$), тогда для каждого $a \in A$ выполняется*

$$\|a\| \le \big\|\pi(a)\big\| + 2r\,L(a).$$

Доказательство. В силу следствия 6.41,

$$\|a\| = \sup_{\lambda \in \mathcal{S}(A)} \big|\lambda(a)\big|.$$

Таким образом, достаточно показать, что для каждого $\lambda \in \mathcal{S}(A)$ выполняется

$$\big|\lambda(a)\big| \le \big\|\pi(a)\big\| + 2r\,L(a).$$

Выберем произвольное $\mu \in \mathcal{S}(B)$. В силу предложения 7.4, $\pi'(\mu) \in \mathcal{S}(A)$, так что $\rho_L\big(\lambda, \pi'(\mu)\big) \le 2r$ по условию. Далее,

$$\big|\lambda(a)\big| \le \big|\lambda(a) - \pi'(\mu)(a)\big| + \big|\pi'(\mu)(a)\big|.$$

По лемме 6.53, условие $\rho_L\big(\lambda, \pi'(\mu)\big) \le 2r$ равносильно $\big|\lambda(a) - \pi'(\mu)(a)\big| \le 2r\,L(a)$ для всех $a \in A$. Кроме того, по определению двойственной нормы, имеем

$$\big|\pi'(\mu)(a)\big| = \Big|\mu\big(\pi(a)\big)\Big| \le \|\mu\|\,\big\|\pi(a)\big\| = \big\|\pi(a)\big\|.$$

Следовательно,

$$\big|\lambda(a)\big| \le 2r\,L(a) + \big\|\pi(a)\big\|,$$

что и требовалось. □

Предложение 7.6. *Пусть $A, B \in \mathcal{OUS}$ и $\pi\colon A \to B$ — сюръективный морфизм. Тогда отображение $\pi'\colon B' \to A'$, а вместе с ним и $S(\pi)\colon \mathcal{S}(B) \to \mathcal{S}(A)$, — инъективны.*

Доказательство. Выберем произвольные $f, g \in B'$, $f \ne g$, тогда существует $b \in B$ такое, что $f(b) \ne g(b)$. Так как π сюръективно, то существует $a \in A$, для которого $\pi(a) = b$. Но тогда

$$\pi'(f)(a) = f\big(\pi(a)\big) = f(b) \ne g(b) = g\big(\pi(a)\big) = \pi'(g)(a),$$

поэтому $\pi'(f) \ne \pi'(g)$, что и доказывает инъективность π'. □

Предложение 7.7. *Пусть $A, B \in \mathcal{OUS}$ и $\pi\colon A \to B$ — сюръективный морфизм. Пусть L_A — липшицева полунорма на A, а L_B — соответствующая фактор-полунорма (см. определение 6.7). Тогда*

(1) *ограничение отображения $\pi'\colon B' \to A'$ на пространство (B'°, L'_B) изометрично отображает его в пространство (A'°, L'_A);*

(2) *отображения $S(\pi)$ изометрично отображает обобщенное метрическое пространство $\big(\mathcal{S}(B), \rho_{L_B}\big)$ в обобщенное метрическое пространство $\big(\mathcal{S}(A), \rho_{L_A}\big)$;*

(3) *если L_A является Lip-нормой, то L_B — тоже.*

Доказательство. (1) Выберем произвольное $\lambda \in B'^{\circ}$. Тогда, по определению фактор-полунормы, для любого $a \in A$ выполняется $L_B\big(\pi(a)\big) \le L_A(a)$. Пусть теперь $L_A(a) \le 1$, тогда $L_B\big(\pi(a)\big) \le 1$, откуда, по определению двойственной полунормы,

$$\big|\pi'(\lambda)(a)\big| = \Big|\lambda\big(\pi(a)\big)\Big| \le L'_B(\lambda).$$

В силу произвольности $a \in A$ заключаем, что $L'_A\big(\pi'(\lambda)\big) \le L'_B(\lambda)$.

Докажем теперь обратное неравенство. Выберем произвольное $\delta > 0$, а также любое $b \in B$, для которого $L_B(b) \le 1$. Так как π сюръективно, то $\pi^{-1}(b) \ne \emptyset$. С другой стороны, снова по определению двойственной полунормы, существует $a \in \pi^{-1}(b)$, для которого $L_A(a) \le (1+\delta)L_B(b)$, откуда $L_A\big(a/(1+\delta)\big) \le L_B(b) \le 1$. По определению фактор-полунормы, имеем

$$L'_A\big(\pi'(\lambda)\big) \ge \left|\pi'(\lambda)\Big(\frac{a}{1+\delta}\Big)\right| = \left|(\lambda\circ\pi)\Big(\frac{a}{1+\delta}\Big)\right| = \frac{\big|\lambda(b)\big|}{1+\delta}.$$

Переходя к супремуму в правой части верхнего неравенства по всем b, для которых $L_B(b) \le 1$, получаем

$$L'_A\big(\pi'(\lambda)\big) \ge \frac{L'_B(\lambda)}{1+\delta}.$$

В силу произвольности δ получаем, что $L'_A\big(\pi'(\lambda)\big) \ge L'_B(\lambda)$, откуда, учитывая полученное выше обратное неравенство, выводим $L'_A\big(\pi'(\lambda)\big) = L'_B(\lambda)$, значит, отображение π' изометрично.

(2) Это мгновенно вытекает из предыдущего пункта и леммы 6.84.

(3) Пусть теперь L_A является Lip-нормой. По предложению 7.4, $S(\pi)$ — непрерывное отображение, и так как $S(\pi)$ инъективно по предложению 7.6, $\mathcal{S}(B)$ — компакт, а $\mathcal{S}(A)$ — хаусдорфово пространство (все это — в $*$-слабой топологии), то $S(\pi)$ является гомеоморфизмом между $\mathcal{S}(B)$ и его образом $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$. Так как L_A это Lip-норма, то $*$-слабая топология на $\mathcal{S}(A)$ задается метрикой ρ_{L_A}. Заметим, что гомеоморфизм $S(\pi)$ является, как было показано в пункте (1), еще и изометрией с образом. Это означает, что $S(\pi)$ устанавливает биекцию между $*$-слабыми топологиями, а также между метрическими топологиями на $\mathcal{S}(B)$ и $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$. Но так как L_A является Lip-нормой, то на $S(A)$ и, значит, на его подмножестве $S(\pi)\big(\mathcal{S}(B)\big)$ эти топологии совпадают. Значит, также совпадают $*$-слабая и метрическая топологии на $\mathcal{S}(B)$, поэтому L_B тоже является Lip-нормой. □

Выясним, какие свойства пространства наследуются при сюръективных морфизмах. Оказывается, полунепрерывность снизу может не наследоваться даже из Lip-нормы, т.е. из компактного квантового метрического пространства. Тем не менее, замкнутость наследуется (см. ниже предложение 7.10). Приведем пример, демонстрирующий ненаследуемость полунепрерывности снизу.

Пример 7.8. Положим $Z = [0,3] \subset \mathbb{R}$ и пусть L — липшицева полунорма на $\mathrm{Lip}(Z)$, соответствует стандартному расстоянию на Z. В силу следствия 6.68, полунорма L является Lip-нормой.

Обозначим $h\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ кусочно линейную функцию, график которой является ломаной на $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ и $(3,-1)$. Ясно, что $L(h) = 2$. Рассмотрим линейное подпространство $A \subset \mathrm{Lip}(Z)$, состоящее из всех функций, являющихся линейными комбинациями полиномиальных функций и функции h. Так как это подпространство содержит постоянную функцию 1, являющуюся в $\mathrm{Lip}(Z)$ порядковой единицей, ограничение L на A также представляет собой Lip-норму в силу следствия 6.67. В примере 6.75 мы показали, что L на $\mathrm{Lip}(Z)$ полунепрерывна снизу. В силу замечания 6.74, ограничение L на A также полунепрерывно снизу.

Обозначим B пространство функций, полученных ограничением функций из A на отрезок $[0,2]$, и пусть $\pi\colon A \to B$ — соответствующее отображение ограничения. Обозначим L_B соответствующую фактор-норму. Покажем, что L_B не является полунепрерывной снизу.

Положим $g = \pi(h)$. Заметим, что $\pi^{-1}(g) = \{h\}$, так как если $\alpha p + a\,h = \beta q + b\,h$ на $[0,2]$, где p, q — полиномы, а $\alpha,\beta,a,b \in \mathbb{R}$, то $\alpha = \beta$ и $a = b$, так как h на $[0,2]$ не является полиномом. Отсюда вытекает, что $L_B(g) = L_A(h) = 2$.

Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть f_n — непрерывная функция на Z, равная

- 1 на $[1,3]$,
- 0 на $[0, 1-1/n]$, и
- линейная на $[1-1/n, 1]$.

Ясно, что $\|f_n\|_\infty = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Вейерштрасса, существует полином q_n на Z такой, что $\|f_n - q_n\| < 1/(2n)$. Пусть p_n — первообразная от q_n, для которой $p_n(0) = 0$, т.е. $p_n(t) = \int_0^t q_n(s)\,ds$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.9. *Пусть $f(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$ и L — липшицева полунорма на* $\mathrm{Lip}\big([a,b]\big)$*, порожденная стандартной функцией расстояния. Тогда $L(f) = \|f'\|_\infty$.*

Доказательство. По теореме Лагранжа, для любых $x, y \in [a,b]$, $x < y$, существует $t \in (x,y)$ такое, что $f(y) - f(x) = f'(t)(y-x)$, откуда $\big|f(y) - f(x)\big| = \big|f'(t)\big|(y-x)$, поэтому $L(f) = \sup_{t\in T}|f'(t)|$, где T состоит из всех t, выбранных для всех $a \le x < y \le b$. Выберем произвольное $t \in [a,b]$ и пусть $a \le x_n \le t \le y_n \le b$, $x_n < y_n$, такие, что $x_n \to t$ и $y_n \to t$. Тогда, по теореме Вейерштрасса, существует $t_n \in (x_n, y_n)$, для которого $\big|f(y_n) - f(x_n)\big| = \big|f'(t_n)\big|(y_n - x_n)$, так что $t_n \in T$. Но тогда $\big|f'(t_n)\big| \to \big|f'(t)\big|$, поэтому

$$L(f) = \sup_{t\in T}|f'(t)| = \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| = \big\|f'\big\|_\infty,$$

что и требовалось. □

Из леммы 7.9 вытекает, что

$$L(p_n) = \|p_n'\|_\infty = \|q_n\|_\infty \le \|f_n\|_\infty + \|f_n - q_n\|_\infty \le 1 + \frac{1}{2n}.$$

Для каждого $t \in [0,1]$ имеем

$$\big|p_n(t) - h(t)\big| = \left|\int_0^t q_n(s)\,ds\right| \le \int_0^1 \big|q_n(s)\big|\,ds \le \int_0^1 \big|q_n(s) - f_n(s) + f_n(s)\big|\,ds \le$$
$$\le \int_0^1 \big|q_n(s) - f_n(s)\big|\,ds + \int_0^1 \big|f_n(s)\big|\,ds \le \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Для каждого $t \in [1,2]$ имеем

$$\big|p_n(t) - h(t)\big| = \left|\int_0^t q_n(s)\,ds - h(t)\right| \le \left|\int_0^1 q_n(s)\,ds\right| + \left|\int_1^t q_n(s)\,ds - (t-1)\right| \le \frac{1}{n} + \left|\int_1^t q_n(s)\,ds - \int_1^t ds\right| =$$
$$\frac{1}{n} + \left|\int_1^t \big(q_n(s) - f_n(s) + f_n(s) - 1\big)\,ds\right| \le \frac{1}{n} + \int_1^2 \big|q_n(s) - f_n(s)\big|\,ds + \int_1^2 \big|f_n(s) - 1\big|\,ds \le \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n}.$$

Таким образом, мы показали, что $\pi(p_n)$ сходится в g по sup-норме. Но

$$L_B\big(\pi(p_n)\big) \le L(p_n) \le 1 + \frac{1}{2n},$$

поэтому $\liminf_{n\to\infty} L(p_n) \le 1 < 2 = L_B(g)$, так что полунорма L_B не является полунепрерывной снизу.

Предложение 7.10. *Пусть $A, B \in \mathcal{OUS}$, $\pi\colon A \to B$ — сюръективный морфизм, и L_A — замкнутая* (*в частности, полунепрерывная снизу*) Lip-*норма на A. Тогда фактор-полунорма L_B, являющаяся* Lip-*нормой по предложению* 7.7, *также замкнута* (*в частности, полунепрерывна снизу*).

Доказательство. Пусть $\bar B$ — пополнение Минковского пары (B, L_B) и $\bar L_B$ — замыкание полунормы L_B. Напомним, что $\bar L_B$ является функционалом Минковского для замыкания $\bar B^{L_B}$ по норме пространства $\bar B$ единичного шара $B^{L_B} = \{b \in B : L_B(b) \le 1\}$. Мы должны показать, что шар B^{L_B} замкнут в $\bar B$, т.е. $B^{L_B} = \bar B^{L_B}$.

Выберем произвольный $b_* \in \bar B^{L_B}$. По определению $\bar B^L$, существует последовательность $b_n \in B^{L_B}$ такая, что $b_n \to b_*$ по норме пространства $\bar B$. Тогда числовые последовательности $L_B(b_n)$ и $\|b_n\|$ ограничены: $L_B(b_n) \le 1$ и $\|b_n\| \le k$.

Так как морфизм π сюръективный, то $\pi^{-1}(b_n) \ne \emptyset$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем некоторое $\delta > 0$ и выберем такие $a_n \in \pi^{-1}(b_n)$, что $L_A(a_n) \le L_B(b_n) + \delta \le 1 + \delta$. Так как L_A является Lip-нормой, то, в силу следствия 6.134, пространство состояний $\mathcal{S}(A)$ ограничено. Если $2r$ обозначает диаметр $\mathcal{S}(A)$, то, в силу предложения 7.5, имеем

$$\|a_n\| \le \|b_n\| + 2r\,L_A(a_n) \le k + 2r\,(1+\delta),$$

поэтому числовая последовательность $\|a_n\|$ также ограничена. Так как L_A является Lip-нормой, то, по теореме 6.63, для каждого $t>0$ множество

$$\{a\in A: L_A(a)\le t,\ \|a\|\le t\}$$

и, значит, также каждое его подмножество, вполне ограничено. Отсюда вытекает, что и множество $\{a_n\}$ вполне ограничено, а, значит, содержит фундаментальную подпоследовательность a_{n_s}. Так как полунорма L_A замкнута, то шар B^{L_A}, а вместе с ним и шар $t\,B^{L_A}$ для каждого $t>0$, — полный по предложению 6.122. Поэтому a_{n_s} сходится в некоторому $a_*\in t\,B^{L_A}$. В силу предложения 7.2, отображение π непрерывно, поэтому

$$\pi(a_*)=\pi\big(\lim_{s\to\infty}a_{n_s}\big)=\lim_{s\to\infty}\pi(a_{n_s})=\lim_{s\to\infty}b_{n_s}=b_*,$$

поэтому $b_*\in B$. В силу полунепрерывности снизу полунормы L_A (см. замечание 6.123) и определению фактор-полунормы, имеем

$$L_B(b_*)\le L_A(a_*)\le\liminf_{s\to\infty}L_A(a_{n_s})\le 1+\delta.$$

Так как $\delta>0$ можно выбрать любым, то $L_B(b_*)\le 1$, поэтому $b_*\in B^{L_B}$, что и завершает доказательство. □

В предложении 7.7 мы показали, что для $A,B\in\mathcal{OUS}$, заданной на A липшицевой полунормы L_A, сюръективного морфизма $\pi\colon A\to B$ и соответствующей π и L_A фактор-полунормы L_B, отображение π индуцирует изометричное отображение $S(\pi)\colon S(B)\to S(A)$ пространств состояний, наделенных обобщенными метриками ρ_{L_B} и ρ_{L_A} соответственно. По предложению 7.4, множество $S(\pi)\big(S(B)\big)$ — выпуклое и замкнутое подмножество $S(A)$ (по отношению к $*$-слабой топологии). Покажем и обратное, т.е. что каждое непустое замкнутое выпуклое подмножество $S(A)$ является образом пространства состояний некоторого $B\in\mathcal{OUS}$ при отображении, индуцированном некоторым сюръективным морфизмом.

Предложение 7.11. *Пусть $A\in\mathcal{OUS}$ и $K\subset\mathcal{S}(A)$ — непустое выпуклое замкнутое в $*$-слабой топологии подмножество и $\varkappa\colon A\to\operatorname{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ — представление Кэдисона, т.е. для каждого $a\in A$ отображение $\varkappa(a)\colon\mathcal{S}(A)\to\mathbb{R}$, $\varkappa(a)(\lambda)=\lambda(a)$ — аффинное. Положим $\bar\pi(a)=\varkappa(a)|_K\colon K\to\mathbb{R}$, так что $\bar\pi\colon A\to\operatorname{Aff}(K)$, и пусть $B=\bar\pi(A)$ наделено стандартной структурой упорядоченного пространства с архимедовой порядковой единицей. Пусть $\pi\colon A\to B$ — соответствующее ограничение отображения $\bar\pi$. Тогда π — сюръективный морфизм, и $\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)=K$.*

Доказательство. Покажем сначала, что π — сюръективный морфизм. В силу предложения 6.38, представление Кэдисона — унитальный порядковый изоморфизм. С другой стороны, отображение ограничения на K, заданное на $\operatorname{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$, сохраняет линейные комбинации, естественный порядок и переводит функцию, равную 1, в функцию, равную 1. Кроме того, для каждого $f\in\operatorname{Aff}\big(\mathcal{S}(A)\big)$ имеем $f|_K\in\operatorname{Aff}(K)$ в силу выпуклости K. Следовательно, композиция отображения $\varkappa$ и отображения ограничения на K, т.е. отображение $\bar\pi$, является унитальным положительным (сохраняющим порядок) линейным отображением из A в $\operatorname{Aff}(K)$. Таким образом, $\bar\pi\colon A\to\operatorname{Aff}(K)$ — морфизм, а его ограничение $\pi\colon A\to B$ — сюръективный морфизм.

Далее, покажем, что $K\subset\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$. Отметим, что $\mathcal{S}(B)\subset B'$ состоит из всех положительных линейных функционалов $b'\colon B\to\mathbb{R}$, для которых $b'(1)=1$. Напомним, что B состоит из ограничений $\pi(a)=\varkappa(a)|_K$ по всем $a\in A$, поэтому для каждого $\lambda\in K$ определено отображение $b'_\lambda\colon\pi(a)\mapsto\varkappa(a)(\lambda)$. Иными словами, отображение b'_λ вычисляет значение всех элементов из B на $\lambda\in K$.

Покажем, что $b'_\lambda\in\mathcal{S}(B)$. Докажем сначала линейность b'_λ. Если $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ и $a_1,a_2\in A$, то

$$\begin{aligned}b'_\lambda\big(\alpha_1\pi(a_1)+\alpha_2\pi(a_2)\big)&=b'_\lambda\big(\pi(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)\big)=\varkappa(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)(\lambda)=\lambda(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)=\\&=\alpha_1\lambda(a_1)+\alpha_2\lambda(a_2)=\alpha_1\varkappa(a_1)(\lambda)+\alpha_2\varkappa(a_2)(\lambda)=\alpha_1b'_\lambda\big(\pi(a_1)\big)+\alpha_2b'_\lambda\big(\pi(a_2)\big).\end{aligned}$$

Далее, b'_λ положительный, так как сохраняет порядок: действительно, если $\pi(a_1)<\pi(a_2)$, то, так как π сохраняет порядок, $a_1<a_2$, откуда $\lambda(a_1)<\lambda(a_2)$ в силу положительности λ, поэтому

$$b'_\lambda\big(\pi(a_1)\big)=\varkappa(a_1)(\lambda)=\lambda(a_1)<\lambda(a_2)=\varkappa(a_2)(\lambda)=b'_\lambda\big(\pi(a_2)\big).$$

(в случае равенства $\pi(a_1)=\pi(a_2)$ доказывать нечего). Наконец, покажем, что $b'_\lambda(1)=1$. Напомним, что $1\in B$ равна $\pi(1)$, поэтому

$$b'_\lambda(1)=b'_\lambda\big(\pi(1)\big)=\varkappa(1)(\lambda)=\lambda(1)=1,$$

где последнее равенство выполняется, так как $\lambda \in \mathcal{S}(A)$. Итак, мы проверили, что $b'_\lambda \in \mathcal{S}(B)$.

По определению отображение $\pi'\colon B' \to A'$, имеем

$$\pi'(b'_\lambda)(a) = b'_\lambda\big(\pi(a)\big) = \varkappa(a)(\lambda) = \lambda(a),$$

т.е. $\pi'(b'_\lambda) = \lambda$, что и доказывает включение $K \subset \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$.

Докажем теперь обратное включение $K \supset \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$. По предложению 7.4, имеем $\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big) \subset \mathcal{S}(A)$. Таким образом, достаточно показать, что если $\lambda \in \mathcal{S}(A) \setminus K$, то λ не лежит в $\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$. Для этого нам понадобится один из многочисленных вариантов теоремы Хана–Банаха об отделимости, см. например [27]. Напомним, что топологическое векторное пространство называется ***локально выпуклым***, если можно выбрать базис окрестностей нуля так, чтобы все входящие в него множества были выпуклыми сбалансированными.

Задача 7.12. Докажите, что $*$-слабая топология является локально выпуклой.

Лемма 7.13 (теорема Хана–Банаха об отделимости)**.** *Пусть X и Y — непустые выпуклые непересекающиеся подмножества топологического векторного пространства V, причем V — локально выпукло, X — компактно, а Y — замкнуто. Тогда X и Y строго отделимы, т.е. существует непрерывный линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{R}$ и $s, t \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x) < s < t < f(y)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Мы применим лемму 7.13 к случаю $V = A'$ со $*$-слабой топологией, $X = \{\lambda\}$ и $Y = K$. Так как на A' рассматривается $*$-слабая топология, то все непрерывные линейные функционалы — это, в точности, функционалы $J_a\colon A' \to \mathbb{R}$, $J_a(f) = f(a)$. Таким образом, в лемме 7.13 (нам достаточно более слабой ее версии), существует $t \in \mathbb{R}$, для которого $\lambda(a) < t \le \mu(a)$ для всех $\mu \in K$. Заменим a на $a - t\,1$, тогда для такого нового a имеем $\lambda(a) < 0 \le \mu(a)$ для всех $\mu \in K$. Следовательно, для любого $\mu \in K$ выполняется $\varkappa(a)(\mu) = \mu(a) \ge 0$, т.е. $\varkappa(a) \ge 0$.

Предположим, что для некоторого $\nu \in \mathcal{S}(B)$ верно $\pi'(\nu) = \lambda$. Тогда

$$\lambda(a) = \pi'(\nu)(a) = \nu\big(\pi(a)\big) = \varkappa(a)(\nu) \ge 0,$$

где неравенство вытекает из $\varkappa(a) \ge 0$ и $\nu \in \mathcal{S}(B)$. Полученное противоречие влечет $K \supset \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$ и, значит, $K = \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$. $\square$

Докажем следующее свойство транзитивности морфизмов.

Предложение 7.14. *Пусть $A, B, C \in \mathcal{OUS}$, а $\pi_1\colon A \to B$ и $\pi_2\colon B \to C$ — сюръективные морфизмы. Положим $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$, так что $\pi\colon A \to C$ — тоже сюръективный морфизм. Пусть L — липшицева полунорма на A, а L_B и L_C — ее фактор-полунормы на B и C соответственно. Пусть L_C^B — фактор-полунорма для L_B при морфизме π_2. Тогда $L_C^B = L_C$.*

Доказательство. Пусть $c \in C$ и $a \in \pi^{-1}(c)$, так что $\pi_2\big(\pi_1(a)\big) = c$ и, поэтому,

$$L_C^B(c) = \inf\big\{L_B(b) : b \in \pi_2^{-1}(c)\big\} \le L_B\big(\pi_1(a)\big) = \inf\Big\{L(a_1) : a_1 \in \pi_1^{-1}\big(\pi_1(a)\big)\Big\} \le L(a).$$

Переходя в предыдущей формуле к инфимуму по $a \in \pi^{-1}(c)$ и учитывая, что $L_C(c) = \inf\big\{L(a) : a \in \pi^{-1}(c)\big\}$, получаем $L_C^B \le L_C$.

Докажем обратное неравенство. Так как $L_C^B(c) = \inf\big\{L_B(b) : b \in \pi_2^{-1}(c)\big\}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $b \in \pi_2^{-1}(c)$, для которого $L_B(b) \le L_C^B(c) + \varepsilon$. По аналогичным соображениям, существует $a \in \pi_1^{-1}(b)$, для которого $L(a) \le L_B(b) + \varepsilon$. Таким образом, $a \in \pi^{-1}(c)$ и $L(a) \le L_C^B(c) + 2\varepsilon$. Снова переходя в предыдущей формуле к инфимуму по $a \in \pi^{-1}(c)$ и вспоминая, то $L_C(c) = \inf\big\{L(a) : a \in \pi^{-1}(c)\big\}$, заключаем $L_C(c) \le L_C^B(c) + 2\varepsilon$ для всех $c \in C$. Так как ε выбрано произвольным, имеем $L_C \le L_C^B$, откуда, учитывая доказанное выше, получаем $L_C = L_C^B$. $\square$

Предложение 7.15. *Пусть $(A_1, e_1), \dots, (A_n, e_n) \in \mathcal{OUS}$. Определим на $A = \oplus_{i=1}^n A_i$ частичный порядок так: $(a_1, \dots, a_n) \le (b_1, \dots, b_n)$, если и только если $a_i \le b_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда*

(1) *$e := (e_1, \dots, e_n)$ — архимедова порядковая единица в A, т.е. $(A, e) \in \mathcal{OUS}$; в частности, порядковая полунорма на A является нормой;*

(2) *если отождествить каждое A_i с его образом в A при вложении $a_i \mapsto (0,\dots,a_i,\dots,0)$, то*

$$\big\|(a_1,\dots,a_n)\big\| = \max\big\{\|a_1\|,\dots,\|a_n\|\big\},$$

в частности, ограничение порядковой нормы пространства A на каждое A_i совпадает с исходной нормой, т.е. вложения $a_i \mapsto (0,\dots,a_i,\dots,0)$ изометричны;

(3) *естественные проекции $\pi_i\colon A \to A_i$, $\pi_i\colon (a_1,\dots,a_n) \mapsto a_i$ — сюръективные морфизмы;*

(4) *двойственные отображения $\pi_i'\colon A_i' \to A'$ инъективно отображают $\mathcal{S}(A_i)$ в $\mathcal{S}(A)$.*

Доказательство. (1) По определению порядковой единицы, для каждого $(a_1,\dots,a_n) \in A$ существуют положительные вещественные числа r_i такие, что $a_i \le r_i e_i$. Положим $r = \max(r_1,\dots,r_n)$, тогда, в силу леммы 5.6, имеем $(a_1,\dots,a_n) \le r(e_1,\dots,e_n) = r\,e$, так что e — порядковая единица.

Далее, так как порядковые единицы e_i архимедовы, то для каждого $(a_1,\dots,a_n) \in A$ такого, что $(a_1,\dots,a_n)+r\,e \ge 0$ для каждого $r>0$ выполняется $a_i \ge 0$ при всех i, откуда $(a_1,\dots,a_n) \ge 0$ и, значит, порядковая единица e — архимедова. В силу предложения 5.25, соответствующая порядковая полунорма на A является нормой.

(2) По определению порядковой нормы, для каждого $(a_1,\dots,a_n) \in A$ имеем

$$\big\|(a_1,\dots,a_n)\big\| = \inf\big\{r \in \mathbb{R} : -r\,e \le (a_1,\dots,a_n) \le r\,e\big\}$$

и аналогично для норм на всех A_i. Но тогда

$$\begin{aligned}\big\|(a_1,\dots,a_n)\big\| &= \inf\big\{r \in \mathbb{R} : -r\,e \le (a_1,\dots,a_n) \le r\,e\big\} = \\ &= \max\big\{\inf\{r \in \mathbb{R} : -r\,e_1 \le a_1 \le r\,e_1\},\dots,\inf\{r \in \mathbb{R} : -r\,e_n \le a_n \le r\,e_n\}\big\} = \max\big\{\|a_1\|,\dots,\|a_n\|\big\},\end{aligned}$$

что и требовалось.

(3) Каждая проекция π_i сохраняет порядок и переводит порядковую единицу в порядковую единицу, тем самым является унитальным положительным сюръективным линейным отображением и, значит, сюръективным морфизмом.

(4) Это составляет содержание предложения 7.6. □

Пространство $A = \oplus_{i=1}^n A_i \in \mathcal{OUS}$ с частичным порядком и порядковой единицей, определенными в предложении 7.15, будем называть ***прямой суммой пространств*** $A_i \in \mathcal{OUS}$.

7.2 Определение квантового расстояния Громова–Хаусдорфа

Для $(A,L_A),(B,L_B) \in \mathcal{CQ}$ вместо дизъюнктного объединения, которое мы рассматривали в случае обычных метрических пространств,

- рассмотрим прямую сумму $A \oplus B \in \mathcal{OUS}$ с архимедовой порядковой единицей (e_A,e_B), где ее компоненты — архимедовы порядковые единицы соответственно в A и B (предложение 7.15);
- в силу предложения 7.15, порядковая норма на $A \oplus B$ равна $\big\|(a,b)\big\| = \max\big\{\|a\|,\|b\|\big\}$;
- в силу предложения 7.15, каждая проекция $\pi_A\colon A\oplus B \to A$ и $\pi_B\colon A \oplus B \to B$ является сюръективным морфизмом;
- рассмотрим на $A \oplus B$ всевозможные Lip-нормы L, образы которых при проекциях $\pi_A\colon A\oplus B \to A$ и $\pi_B\colon A \oplus B \to B$ совпадают с L_A и L_B соответственно;
- множество Lip-норм из предыдущего пункта обозначим $\mathcal{M}(L_A,L_B)$;
- в силу предложения 7.7, пространства состояний $\big(S(A),\rho_{L_A}\big)$ и $\big(S(B),\rho_{L_B}\big)$ изометрично вкладываются в $\big(S(A\oplus B),\rho_L\big)$ с помощью $\pi_A'\colon A' \to (A\oplus B)'$ и $\pi_B'\colon B' \to (A \oplus B)'$, и мы, для удобства, будем обозначать образы $S(A)$ и $S(B)$ в $S(A\oplus B)$ теми же символами;
- так как L является Lip-нормой, то, в силу предложения 6.49, расстояние ρ_L на $\mathcal{S}(A\oplus B)$ — (конечная) метрика, и мы можем посчитать расстояние Хаусдорфа $d_H^L\big(S(A),S(B)\big)$ относительно метрики ρ_L.

Квантовым расстояние Громова–Хаусдорфа называется величина

$$d^q_{GH}(A,B)=\inf\bigl\{d^L_H\bigl(S(A),S(B)\bigr):L\in\mathcal{M}(L_A,L_B)\bigr\}.$$

Ясно, что мы получили неотрицательную симметричную функцию, принимающую лишь конечные значения (так как пространства состояний компактны). Позже мы покажем, что d^q_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника и равно нулю в точности между изометрично изоморфными (A,L_A) и (B,L_B). Тем самым, на компактных квантовых метрических пространствах, рассматриваемых с точностью до изометричного изоморфизма, d^q_{GH} является метрикой. После этого мы докажем, что эта метрика полна.

Прежде чем доказывать неравенство треугольника для квантового расстояния Громова–Хаусдорфа, приведем ряд вспомогательных результатом.

Предложение 7.16. *Пусть V — произвольное векторное пространство, $\{X_i\}_{i=1}^m$ — конечный набор выпуклых подмножеств V, и $X=\cup_{i=1}^m X_i$. Тогда*

$$\operatorname{conv}X=\Bigl\{\sum_{i=1}^m\alpha_ix_i:x_i\in X_i,\ \alpha_i\ge0,\sum_{i=1}^n\alpha_i=1\Bigr\},$$

где $\operatorname{conv}X$ *— выпуклая оболочка X.*

Доказательство. Положим

$$A=\Bigl\{\sum_{i=1}^m\alpha_ix_i:x_i\in X_i,\ \alpha_i\ge0,\sum_{i=1}^n\alpha_i=1\Bigr\}.$$

Очевидно, $X\subset A\subset\operatorname{conv}X$. Поэтому достаточно проверить, что множество A выпукло. Пусть $x=\sum_{i=1}^m\alpha_ix_i$ и $y=\sum_{i=1}^m\beta_iy_i$ — точки из A. Тогда для каждого $t\in[0,1]$ имеем

$$(1-t)x+t\,y=\sum_{i=1}^m\bigl((1-t)\alpha_ix_i+t\beta_iy_i\bigr).$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^m\bigl((1-t)\alpha_i+t\beta_i\bigr)=1$, и, для удобства, переобозначим коэффициенты так: $(1-t)\alpha_i=\gamma_i$ и $t\beta_i=\delta_i$. Тогда $\gamma_i\ge0$, $\delta_i\ge0$, $\sum_i(\gamma_i+\delta_i)=1$, и

$$(1-t)x+t\,y=\sum_{i=1}^m(\gamma_ix_i+\delta_iy_i).$$

Отметим, что если для некоторого i выполняется $\gamma_i=\delta_i=0$, то в выпуклой линейной комбинации точки из X_i не участвуют, поэтому без ограничения общности можно сразу считать, что $\gamma_i+\delta_i>0$ для всех i. Но тогда

$$(1-t)x+t\,y=\sum_{i=1}^m(\gamma_i+\delta_i)\frac{\gamma_ix_i+\delta_iy_i}{\gamma_i+\delta_i},$$

при этом $z_i:=\frac{\gamma_ix_i+\delta_iy_i}{\gamma_i+\delta_i}\in X_i$ в силу выпуклости X_i, поэтому $(1-t)x+t\,y$ принадлежит A. Таким образом, множество A выпукло, что и требовалось. □

Обобщенная метрика ρ, определенная на выпуклом подмножестве K векторного пространства V, называется ***выпуклой вниз***, если для любых $x,y,z\in K$ и любого $t\in[0,1]$ выполняется

$$\rho\bigl(x,(1-t)y+t\,z\bigr)\le(1-t)\rho(x,y)+t\,\rho(x,z),$$

то есть для каждого $x\in K$ функция $f_x\colon K\to\mathbb{R}$, определенная так: $f_x(y)=\rho(x,y)$, выпукла вниз на K.

Предложение 7.17. *Пусть $A\in\mathcal{OUS}$, $\mathcal{S}(A)$ — пространство состояний, L — липшицева полунорма на A, и ρ_L — соответствующая обобщенная метрика на $\mathcal{S}(A)$. Тогда обобщенная метрика ρ_L выпукла вниз.*

Доказательство. Действительно, в силу замечания 6.56, имеем $\rho_L(\xi,\eta)=L'(\xi-\eta)$ для всех $\xi,\eta\in\mathcal{S}(A)$, поэтому для любых $\lambda,\mu,\nu\in\mathcal{S}(A)$ имеем

$$\rho_L\bigl(\nu,(1-t)\lambda+t\,\mu\bigr)=L'\bigl((1-t)\lambda+t\,\mu-\nu\bigr)=L'\bigl((1-t)(\lambda-\nu)+t(\mu-\nu)\bigr)\le$$
$$\le(1-t)L'(\lambda-\nu)+t\,L'(\mu-\nu)=(1-t)\rho_L(\nu,\lambda)+t\,\rho_L(\nu,\mu),$$

что и требовалось. □

Предложение 7.18. *Пусть K — выпуклое подмножество векторного пространства V и ρ — обобщенная метрика на K, выпуклая вниз. Предположим, что $\{X_i\}_{i=1}^m$ — конечное семейство выпуклых подмножеств K. Положим $d = \max \operatorname{diam}(X_i \cup X_j)$. Тогда для $X = \operatorname{conv}\left(\cup_{i=1}^m X_i\right) \subset K$ имеем $\operatorname{diam} X = d$.*

Доказательство. Достаточно показать, что ρ-расстояние между любыми точками из X не превосходит d. Случай $m = 1$ тривиален. Пусть $m = 2$. По предложению 7.16, все точки из X имеют вид $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где оба α_i неотрицательны, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, и $x_i \in X_i$. Мы должны показать, что для любых таких точек $x := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ и $y := \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$ выполняется $\rho(x, y) \le d$. Так как ρ выпукла вниз, имеем:

$$\rho(x, y) \le \beta_1 \rho(x, y_1) + \beta_2 \rho(x, y_2) \le \alpha_1 \beta_1 \rho(x_1, y_1) + \alpha_2 \beta_1 \rho(x_2, y_1) + \alpha_1 \beta_2 \rho(x_1, y_2) + \alpha_2 \beta_2 \rho(x_2, y_2),$$

где $\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j = 1$. Так как каждое расстояние $\rho(x_i, y_i)$ не больше d, получаем требуемое.

Проведем теперь индукцию по числу m. Предположим, что для $m-1$ утверждение доказано. Заметим, что в силу предложения 7.16, каждая точка из X представима в виде $\alpha x_m + \beta y$, где $x_m \in X_m$, а $y \in Y := \operatorname{conv}\left(\cup_{i=1}^{m-1} X_i\right)$. По предположению индукции, $\operatorname{diam} Y \le d$. Кроме того, по предложению 7.16, $y = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i$, поэтому

$$\rho(x_m, y) = \rho\Big(x_m, \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i\Big) \le \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \rho(x_m, x_i) \le d.$$

Остается применить уже доказанное утверждение для $m = 2$. □

Следующий классический результат мы приведем без доказательства. Напомним, что точка выпуклого множества называется ***экстремальной***, если она не является серединой никакого невырожденного отрезка с концами в этом выпуклом множестве.

Теорема 7.19 (Крейн–Мильман [28]). *Пусть V — локально выпуклое топологическое векторное пространство, K — выпуклое компактное подмножество V, а E — множество всех экстремальных точек из K. Тогда K совпадает с замыканием выпуклой оболочкой множества E.*

Из задач 7.12, 6.70 и теоремы 7.19 вытекает следующий результат.

Следствие 7.20. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $A = \operatorname{Lip}(X)$ — векторное пространство вещественных липшицевых функций на X, наделенное sup-нормой, $\delta\colon X \to A'$ — отображение, сопоставляющее каждому $x \in X$ дельта-функцию Дирака $\delta_x\colon A \to \mathbb{R}$, $\delta_x(f) = f(x)$. Тогда $\mathcal{S}(A) = \operatorname{conv} \delta(X)$.*

Предложение 7.21. *Пусть $(A_1, e_1), \dots, (A_n, e_n) \in \mathcal{OUS}$, $A = \oplus_{i=1}^n A_i$ — прямая сумма A_i, $\pi_i\colon A \to A_i$ — естественные проекции, и $\pi_i'\colon A_i' \to A'$ — двойственные отображения. По предложению 7.15, каждое π_i' инъективно отображает $\mathcal{S}(A_i)$ в $\mathcal{S}(A)$, т.е. является вложением. Образы этих вложений будем обозначать теми же символами. Тогда $\mathcal{S}(A)$ — выпуклая оболочка объединения множеств $\mathcal{S}(A_i)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_i \in \mathcal{S}(A_i)$, тогда соответствующие им элементы из $\mathcal{S}(A)$ — это $\pi_i'(\lambda_i) = \lambda_i \circ \pi_i$. Пусть для $a := (a_1, \dots, a_n)$, $b := (b_1, \dots, b_1) \in A$ выполняется $a \le b$. По определению этого частичного порядка, имеем $a_i \le b_i$ для всех i, поэтому $a_i = \pi_i(a) \le \pi_i(b) = a_i$ и, значит, в силу положительности λ_i, заключаем

$$(\lambda_i \circ \pi_i)(a) = \lambda_i(a_i) \ge \lambda_i(b_i) = (\lambda \circ \pi_i)(b)$$

Таким образом, все $\lambda_i \circ \pi_i$ — положительны и, значит, любая их неотрицательная линейная комбинация также положительна.

Так как $e := (e_1, \dots, e_n)$ — порядковая единица в A и $(\lambda_i \circ \pi_i)(e) = \lambda_i(e_i) = 1$, то каждая выпуклая линейная комбинация $\lambda_i \circ \pi_i$ переводит e в 1. Иными словами, мы показали, что всевозможные выпуклые линейные комбинации элементов из $\mathcal{S}(A_1), \dots, \mathcal{S}(A_n)$ лежат в $\mathcal{S}(A)$.

Обратно, выберем произвольный $\xi \in \mathcal{S}(A)$, т.е. $\xi\colon A \to \mathbb{R}$ — положительный унитальный линейный функционал. Положим $\xi_i(a_1, \dots, a_n) = \xi(0 \dots, a_i, \dots, 0)$, тогда $\xi_i\colon A \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал (сохраняет порядок). В частности, так как $(0, \dots, e_i, \dots, 0) \ge 0$, то $\xi_i(0, \dots, e_i, \dots, 0) \ge 0$.

Рассмотрим отображение $\iota_i\colon A_i \to A$, $\iota_i(a_i) = (0, \dots, a_i, \dots, 0)$. Тогда линейный функционал $\lambda_i' := (\xi \circ \iota_i)\colon A_i \to \mathbb{R}$ — положительный, при этом

$$\lambda_i'(a_i) = \xi(0, \dots, a_i, \dots, 0) = \xi_i(a_1, \dots, a_n) = (\lambda_i' \circ \pi_i)(a_1, \dots, a_n),$$

в частности, $\xi_i = \lambda_i' \circ \pi_i$.

Лемма 7.22. *Пусть* $(V, e) \in \mathcal{OUS}$ *и* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *— положительный линейный функционал, для которого* $f(e) = 0$. *Тогда* $f \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда существует $v \in V$, для которого $f(v) \neq 0$ и, значит, одно из чисел $f(v)$, $f(-v)$ положительно. Без ограничения общности будем считать, что $f(v) > 0$. По определению порядковой единицы, для каждого v существует $r \in (0, \infty)$, для которого $v \le r\,e$, но тогда, в силу положительности f и предложения 5.9, имеем $f(v) \le r\,f(e) = 0$, противоречие. □

Подправим λ'_i так, чтобы получились состояния. Положим $\alpha_i = \lambda'_i(e_i)$. В силу леммы 7.22, если $\alpha_i = 0$, то $\lambda'_i \equiv 0$ и, значит, $\xi_i \equiv 0$. В этом случае положим $\lambda_i = 0$, тогда $\xi_i = \alpha_i\,\lambda_i \circ \pi_i$. Если же $\alpha_i \neq 0$, то $\alpha_i > 0$, и мы положим $\lambda_i = \lambda'_i/\alpha_i$, тогда $\lambda_i(e_i) = 1$, поэтому $\lambda_i \in \mathcal{S}(A_i)$, и $\lambda_i \circ \pi_i$ — соответствующий элемент $\pi'_i\big(\mathcal{S}(A_i)\big) \subset \mathcal{S}(A)$. При этом $\xi_i = \alpha_i\,\lambda_i \circ \pi_i$. Имеем

$$\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n = \alpha_1\,\lambda_1 \circ \pi_1 + \cdots + \alpha_n\,\lambda_n \circ \pi_n.$$

Так как $(e_1, \ldots, e_n)$ — порядковая единица в A, то

$$1 = \xi(e_1, \ldots, e_n) = \xi(e_1, \ldots, 0) + \cdots + \xi(0, \ldots, e_n) = \xi_1(e_1, \ldots, e_n) + \cdots + \xi_n(e_1, \ldots, e_n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

таким образом, ξ является выпуклой линейной комбинацией $\lambda_i \circ \pi_i \in \pi'_i\big(\mathcal{S}(A_i)\big)$. Доказательство предложения закончено. □

Теорема 7.23 (Неравенство треугольника)**.** *Для любых* $(A, L_A), (B, L_B), (C, L_C) \in \mathcal{CQ}$ *выполняется неравенство треугольника*

$$d^q_{GH}(A, C) \le d^q_{GH}(A, B) + d^q_{GH}(B, C).$$

Доказательство. По определению квантового расстояния Громова–Хаусдорфа, для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $L_{AB} \in \mathcal{M}(L_A, L_B)$ и $L_{BC} \in \mathcal{M}(L_B, L_C)$ такие, что

$$d_H^{\rho_{L_{AB}}}\big(S(A), S(B)\big) \le d^q_{GH}(A, B) + \varepsilon \qquad \text{и} \qquad d_H^{\rho_{L_{BC}}}\big(S(B), S(C)\big) \le d^q_{GH}(B, C) + \varepsilon.$$

Иногда в дальнейшем нам будет удобно вместо $\max(a, b)$ писать $a \vee b$.

Лемма 7.24. *Во введенных выше обозначениях, определим функцию* $L\colon A \oplus B \oplus C \to [0, \infty)$ *так:*

$$L(a, b, c) = L_{AB}(a, b) \vee L_{BC}(b, c),$$

тогда L является Lip-*нормой, которая индуцирует L_{AB}, L_{BC}, L_A, L_B и L_C с помощью соответствующих проекций.*

Доказательство. Отметим сначала, что предложение 7.14 гарантирует независимость индуцирования L_A, L_B и L_C от выбора источника, т.е. неважно, откуда индуцировать: из L, или L_{AB}, или L_{BC}. В дальнейшем мы этим будем пользоваться, не обговаривая каждый раз.

Докажем сначала, что L индуцирует все вышеперечисленные полунормы. Начнем с L_{AB}. Мы должны проверить, что

$$L_{AB}(a, b) = \inf\big\{L(a, b, c) : c \in C\big\}.$$

По определению L, для каждого $(a, b, c) \in A \oplus B \oplus C$ имеем $L(a, b, c) \ge L_{AB}(a, b)$, поэтому нам достаточно показать, что для любых $(a, b) \in A \oplus B$ и $\delta > 0$ существует $c \in C$ такое, что $L(a, b, c) \le L_{AB}(a, b) + \delta$. Докажем это. Так как L_{BC} индуцирует L_B, то, по определению фактор-полунормы, существует $c \in C$ такое, что $L_{BC}(b, c) \le L_B(b) + \delta$. Далее, так как L_{AB} тоже индуцирует L_B, то $L_B(b) \le L_{AB}(a, b)$, откуда $L_{BC}(b, c) \le L_{AB}(a, b) + \delta$, поэтому, для выбранных $c \in C$ и $\delta > 0$, имеем

$$L(a, b, c) = L_{AB}(a, b) \vee L_{BC}(b, c) \le L_{AB}(a, b) + \delta,$$

что и требовалось. Таким образом, мы показали, что L индуцирует L_{AB} и, аналогично, L_{BC}. Далее, L_A, L_B и L_C индуцируются из соответствующих L_{AB} и L_{BC} по определению последних. Применяя предложение 7.14 заключаем, что L_A, L_B и L_C индуцируются из L.

Покажем теперь, что L является Lip-нормой. Проверим сначала, что L — липшицева полунорма. Пусть $L(a, b, c) = 0$, тогда $L_{AB}(a, b) = 0$ и $L_{BC}(b, c) = 0$. По условию, L_{AB} и L_{BC} — липшицевы полунормы, поэтому $(a, b) = r\,e_{A \oplus B} = r\,(e_A, e_B)$ и $(b, c) = s\,e_{BC} = s\,(e_B, e_C)$, где e_{AB}, e_{BC}, e_A, e_B и e_C — соответствующие порядковые единицы. Но тогда $r\,e_B = s\,e_C$, поэтому $r = s$, откуда $(a, b, c) = r(e_A, e_B, e_C)$. Осталось заметить, что на каждой такой тройке функция L зануляется по определению L.

Остается доказать, что ρ_L индуцирует $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A \oplus B \oplus C)$. Для этого мы воспользуемся теоремой 6.63. Покажем сначала, что диаметр пространства $\mathcal{S}(A\oplus B\oplus C)$ конечен. Пусть d_{AB} и d_{BC} обозначают диаметры $\mathcal{S}(A\oplus B)$ и $\mathcal{S}(B\oplus C)$ по отношению к $\rho_{L_{AB}}$ и $\rho_{L_{BC}}$ соответственно. Так как L_{AB} и L_{BC} — это Lip-нормы, то d_{AB} и d_{BC} конечны по теореме 6.63.

Если $X = \oplus_i X_i$, то каноническую проекцию из X на X_i будем обозначать $\pi(X, X_i)$. Заметим, что

$$\pi(A \oplus B \oplus C, A) = \pi(A \oplus B, A) \circ \pi(A \oplus B \oplus C, A \oplus B),$$

поэтому $\pi(A \oplus B \oplus C, A)' = \pi(A \oplus B \oplus C, A \oplus B)' \circ \pi(A \oplus B, A)'$. Иными словами, образ $\mathcal{S}(A)$ в $\mathcal{S}(A \oplus B \oplus C)$ совпадает с образом его образа $\mathcal{S}(A) \subset \mathcal{S}(A\oplus B)$ при $\pi(A\oplus B\oplus C, A\oplus B)'$. Аналогичные рассуждения для $\mathcal{S}(B)$ и $\mathcal{S}(C)$.

Возьмем произвольные $\lambda \in \mathcal{S}(A) \subset \mathcal{S}(A \oplus B \oplus C)$ и $\nu \in \mathcal{S}(C) \subset \mathcal{S}(A \oplus B \oplus C)$, тогда для каждого $\mu \in \mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(A \oplus B \oplus C)$ выполняется

$$\rho_L(\lambda, \nu) \le \rho_L(\lambda, \mu) + \rho_L(\mu, \nu) = \rho_{L_{AB}}(\lambda, \mu) + \rho_{L_{BC}}(\mu, \nu) \le d_{AB} + d_{BC} < \infty,$$

где равенство вытекает из предложения 7.7, в соответствии с которым ограничения отображений

$$\pi(A \oplus B \oplus C, A \oplus B)' \;\text{ и }\; \pi(A \oplus B \oplus C, B \oplus C)'$$

на $\mathcal{S}(A\oplus B)$ и $\mathcal{S}(B\oplus C)$ соответственно являются изометриями с образом. Поэтому $\operatorname{diam}\big(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(C)\big) \le d_{AB} + d_{BC}$. Кроме того, из последнего замечания также следует, что $\operatorname{diam}\big(\mathcal{S}(A)\cup\mathcal{S}(B)\big) \le d_{AB}$ и $\operatorname{diam}\big(\mathcal{S}(B)\cup\mathcal{S}(C)\big) \le d_{BC}$. Так как $\mathcal{S}(A\oplus B\oplus C)$ равно выпуклой оболочке своих подмножеств $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}(B)$ и $\mathcal{S}(C)$ по предложению 7.21, а расстояние ρ_L выпукло вниз в силу предложения 7.17, то $\operatorname{diam}\mathcal{S}(A\oplus B\oplus C) \le d_{AB}+d_{BC}$ по предложению 7.18, т.е. множество $\mathcal{S}(A \oplus B \oplus C)$ ограничено.

Покажем теперь, что множество

$$B_1 := \Big\{(a, b, c) \in A \oplus B \oplus C : L(a, b, c) \le 1,\ \big\|(a, b, c)\big\| \le 1\Big\}$$

вполне ограничено. Выберем произвольное $(a, b, c) \in B_1$. Так как L_{AB} является фактор-полунормой для L при проекции $\pi(A\oplus B\oplus C, A\oplus B)$, то $L_{AB}(a, b) \le L(a, b, c) \le 1$. По аналогичным соображениям, с учетом доказанного выше, $L_C(c) \le L(a, b, c) \le 1$. В силу предложения 7.15, имеем

$$\big\|(a, b, c)\big\| = \big\|(a, b)\big\| \vee \|c\| \le 1,$$

откуда $\big\|(a, b)\big\| \le 1$ и $\|c\| \le 1$. Следовательно, $B_1 \subset B_1^{AB} \times B_!^C$, где

$$B_1^{AB} = \Big\{(a, b) \in A \oplus B : L_{AB}(a, b) \le 1,\ \big\|(a, b)\big\| \le 1\Big\} \;\text{ и }\; B_1^C = \big\{c \in C : L_C(c) \le 1,\ \|c\| \le 1\big\}.$$

Но два последних множества вполне ограничены в силу теоремы 6.63. Доказательство леммы закончено. □

Предложение 7.7 гарантирует, что фактор-полунорма L_{AC}, индуцированная из L, является Lip-нормой, а лемма 7.24 утверждает, что L_{AC} индуцирует L_A и L_C. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 7.25. *Пусть L_{AC} — полунорма, индуцированная из L на $A \oplus C$. Тогда L_{AC} является* Lip*-нормой и индуцирует L_A и L_C, т.е. $L_{AC} \in \mathcal{M}(L_A, L_C)$.*

Вернемся к доказательству теоремы. По лемме 7.24 и предложению 7.7, ограничение ρ_L на $A\oplus B \subset A\oplus B\oplus C$ совпадает с $\rho_{L_{AB}}$, и, аналогично, для $\rho_{L_{BC}}$ и $\rho_{L_{AC}}$. Напомним, что для выбранного $\varepsilon > 0$ мы нашли L_{AB} и L_{BC} такие, что

$$d_H^{\rho_{L_{AB}}}\big(S(A), S(B)\big) \le d^q_{GH}(A, B) + \varepsilon \qquad \text{и} \qquad d_H^{\rho_{L_{BC}}}\big(S(B), S(C)\big) \le d^q_{GH}(B, C) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$d_H^{\rho_L}\big(S(A), S(B)\big) \le d^q_{GH}(A, B) + \varepsilon \qquad \text{и} \qquad d_H^{\rho_L}\big(S(B), S(C)\big) \le d^q_{GH}(B, C) + \varepsilon,$$

поэтому, учитывая также, что $L_{AC} \in \mathcal{M}(L_A, L_C)$ по лемме 7.25, получаем

$$\begin{aligned} d^q_{GH}(A, C) \le d_H^{\rho_{L_{AC}}}\big(S(A), S(C)\big) = d_H^{\rho_L}\big(S(A), S(C)\big) \le \\ \le d_H^{\rho_L}\big(S(A), S(B)\big) + d_H^{\rho_L}\big(S(B), S(C)\big) \le d^q_{GH}(A, B) + d^q_{GH}(B, C) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε, получаем требуемое. □

Покажем, как связаны расстояние Громова–Хаусдорфа между компактными метрическими пространствами и квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа между ассоциированными с ними в смысле определения 6.69 компактными квантовыми метрическими пространствами (отметим, что эти расстояния могут отличаться).

Предложение 7.26. *Пусть (X_i,ρ_i) — компактные метрические пространства, и (A_i,L_i) — ассоциированные с ними компактные квантовые метрические пространства, $i=1,2$. Тогда*

$$d^q_{GH}(A_1,A_2)\le d_{GH}(X_1,X_2).$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{D}(X_1,X_2)$ множество всех метрик на $X_1\times X_2$, продолжающих метрики пространств X_i. Выберем произвольное $\rho\in\mathcal{D}(X_1,X_2)$ и заметим, что топология, порожденная ρ на $X_1\sqcup X_2$, совпадает с топологией дизъюнктного объединения компактных метрических пространств X_1 и X_2, а потому пространство $(X_1\sqcup X_2,\rho)$ компактно. Положим $A_i=\mathrm{Lip}(X_i)$, $A=A_1\oplus A_2$, и пусть L_i — это Lip-норма на A_i, соответствующая метрике пространства X_i, то есть

$$L_i(f)=\sup\Big\{\frac{\big|f(x)-f(y)\big|}{\rho_i(x,y)}:x\ne y,\,x,y\in X_i\Big\},\qquad f\in A_i=\mathrm{Lip}(X_I).$$

Лемма 7.27. *Во введенных выше обозначениях, $A=\mathrm{Lip}(X_1\sqcup X_2)$.*

Доказательство. Каждая липшицева функция $f\colon X_1\sqcup X_2\to\mathbb{R}$ однозначно порождает пару $(f_1,f_2)\in A$, в которой $f_i=f|_{X_i}$ очевидно является липшицевой. Тем самым, $\mathrm{Lip}(X_1\sqcup X_2)\subset A$.

Обратно, для $f_i\in A_i$ положим $f=(f_1,f_2)$. Мы должны проверить, что $f\colon X_1\sqcup X_2\to\mathbb{R}$ — липшицева функция. Условие Липшица выполняется с очевидностью для x и y, одновременно лежащих в одном из X_i, при этом $\big|f(x)-f(y)\big|\le\max\big\{L_1(f_1),L_2(f_2)\big\}|xy|$.

Пусть теперь $x\in X_1$, а $y\in X_2$. Так как X_1 и X_2 — непересекающиеся компактные подмножества $X_1\sqcup X_2$, то

$$d:=\inf\big\{|x_1x_2|:x_1\in X_1,\,x_2\in X_2\big\}>0,$$

причем $d\le|xy|$. Так как пространство $(X_1\sqcup X_2,\rho)$ компактно, то f принимает на $X_1\sqcup X_2$ минимальное m и максимальное M значения. Отсюда следует, что

$$\big|f(x)-f(y)\big|\le|M|+|m|=\frac{|M|+|m|}{d}d\le\frac{|M|+|m|}{d}|xy|,$$

что и завершает доказательство включения $A\subset\mathrm{Lip}(X_1\sqcup X_2)$, а вместе с ним и искомого равенства. Лемма доказана. □

Пусть L_ρ — это Lip-норма на A, построенная по метрике ρ, а ρ_{L_ρ} — соответствующая метрика на $S(A_1\oplus A_2)$. Рассмотрим естественную проекцию $\pi_i\colon A=A_1\oplus A_2\to A_i$ и пусть M_i — фактор-полунорма, полученная из L_ρ.

Лемма 7.28. *Во введенных выше обозначениях, $M_i=L_i$.*

Доказательство. По определению,

$$M_i(f_i)=\inf\big\{L_\rho(f):f\in\pi_i^{-1}(f_i)\big\}=\inf\big\{L_\rho(f):f|_{X_i}=f_i\big\}\le L_i(f_i).$$

С другой стороны, по теореме 6.15 (теорема Макшейна–Уитни о продолжении липшицевой функции), прообраз $\pi_i^{-1}(f_i)$ функции f_i содержит ее продолжение на все A с той же нормой, поэтому равенство достигается, что и требовалось. □

В силу предложения 7.7, двойственное отображение π_i' изометрично вкладывает пространство $\big(\mathcal{S}(A_i),\rho_{M_i}\big)$ в пространство $\big(\mathcal{S}(A_1\oplus A_2),\rho_{L_\rho}\big)$. По лемме 7.28, $\rho_{M_i}=\rho_{L_i}$, так что $\mathcal{S}(A_i)$ с метриками ρ_{L_i} можно рассматривать как подмножества в $\mathcal{S}(A_1\oplus A_2)$. По задаче 6.70, пространство X_i можно рассматривать как экстремальное подмножество в $\mathcal{S}(A_i)$ и, значит, как подмножество в $\mathcal{S}(A_1\oplus A_2)$.

Покажем, что

$$d_H^{\rho_{L_\rho}}\big(\mathcal{S}(A_1),\mathcal{S}(A_1)\big)\le d_H^\rho(X_1,X_2).$$

Действительно, положим $d=d_H^\rho(X_1,X_2)$. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ и любых $a_1\in\mathcal{S}(A_1)$ и $a_2\in\mathcal{S}(A_2)$ существуют $b_1\in\mathcal{S}(A_1)$ и $b_2\in\mathcal{S}(A_2)$ такие, что $\rho_{L_\rho}(a_1,b_2)<d+\varepsilon$ и $\rho_{L_\rho}(a_2,b_1)<d+\varepsilon$. Докажем выполнение первого условия (второе доказывается аналогично). Так как, по теореме 7.19, множество $\mathcal{S}(A_1)$ равно

замыканию выпуклой оболочки множества X_1, то существует a_1' такое, что $\rho_{L_\rho}(a_1, a_1') < \varepsilon/2$ и a_1' представимо в виде выпуклой комбинации $\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$ элементов $e_i \in X_1$. Так как $d_H^\rho(X_1, X_2) = d$, для каждого e_i существует $f_i \in X_2$ такой, что $\rho(e_i, f_i) < d + \varepsilon/2$. Положим $b_2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i \in \mathcal{S}(A_2)$. По лемме 6.84, имеем

$$\rho_{L_\rho}(a_1', b_2) = \rho_{L_\rho}\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i\right) = L_\rho'\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i\right) \le \sum_{i=1}^p \alpha_i L_\rho'(e_i - f_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho(e_i, f_i) < d + \varepsilon/2.$$

Но тогда, по неравенству треугольника, $\rho_{L_\rho}(a_1, b_2) < d + \varepsilon$. Таким образом, мы показали, что

$$d_{GH}^q(A_1, A_2) = \inf\bigl\{d_H^L\bigl(S(A_1), S(A_2)\bigr) : L \in \mathcal{M}(L_{A_1}, L_{A_2})\bigr\} \le \inf\bigl\{d_H^{L_\rho}\bigl(S(A_1), S(A_2)\bigr) : \rho \in \mathcal{D}(X_1, X_2)\bigr\} \le$$
$$\le \inf\bigl\{d_H^\rho(X_1, X_2) : \rho \in \mathcal{D}(X_1, X_2)\bigr\} = d_{GH}(X_1, X_2),$$

что и требовалось. □

Отметим, что причина того, почему квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа между квантовыми компактными метрическими пространствами, ассоциированными с метрическими компактами X_1 и X_2, может оказаться меньше стандартного расстояния Громова–Хаусдорфа между X_1 и X_2, состоит в том, что мы минимизируем по более широкому классу метрик, чем метрики, порожденные продолжением метрик X_1 и X_2 на $X_1 \sqcup X_2$. А именно, берутся метрики, порожденные всевозможными Lip-нормами из $\mathcal{M}(L_1, L_2)$, но такая Lip-норма не обязательно порождена метрикой из $\mathcal{D}(X_1, X_2)$. Отметим, что если бы инфимум брался только по Lip-нормам вида L_ρ, $\rho \in \mathcal{D}(X_1, X_2)$, то имело бы место равенство, так как имеет место следующий результат.

Предложение 7.29. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — компактные метрические пространства, (A_1, L_1) и (A_2, L_2) — ассоциированные с ними компактные квантовые метрические пространства. Пусть $\rho \in \mathcal{D}(X_1, X_2)$ — продолжение метрик пространств X_i на $X_1 \sqcup X_2$, а L_ρ — это* Lip*-норма на $A_1 \oplus A_2$, порожденная ρ. Тогда*

$$d_{GH}(X_1, X_2) \le d_H^{\rho_{L_\rho}}\bigl(\mathcal{S}(A_1), \mathcal{S}(A_2)\bigr).$$

Доказательство. Положим $d = d_{GH}(X_1, X_2)$, тогда для каждого $\rho \in \mathcal{D}(X_1, X_2)$ имеем $d_H^\rho(X_1, X_2) \ge d$. Так как X_i — компакты, а расстояние от точки до подмножества метрического пространства — непрерывная функция, существуют $p \in X_1$ и $q \in X_2$, для которых $\rho(p, X_2) = \sup_{x_1 \in X_1} \rho(x_1, X_2)$ и $\rho(q, X_1) = \sup_{x_2 \in X_2} \rho(x_2, X_1)$. Также существуют $y_1 \in X_1$ и $y_2 \in X_2$, для которых $\rho(p, y_2) = \rho(p, X_2)$ и $\rho(q, y_1) = \rho(q, X_1)$. По определению расстояния Хаусдорфа, одно из расстояний $\rho(p, y_2)$ и $\rho(q, y_1)$ должно равняться $d_H^\rho(X_1, X_2)$ и, значит, быть не меньше d. Пусть для определенности $\rho(p, y_2) \ge d$. Таким образом, для всех $z_2 \in X_2$ выполняется $\rho(p, z_2) \ge d$.

Определим $h\colon X_1 \sqcup X_2 \to \mathbb{R}$, положив $h(x) = \rho(p, x)$, тогда h — это 1-липшицева функция, причем $\bigl|h(x) - h(p)\bigr| = \rho(p, x)$, поэтому $L_\rho(h) = 1$. (Отметим, что для общих Lip-норм последнее равенство может не иметь места). Выберем произвольное $\lambda \in \mathcal{S}(A_2) \subset A_2'$ и пусть $\pi_2\colon A_1 \oplus A_2 \to A_2$ — каноническая проекция, а $\pi_2'\colon A_2' \to (A_1 \oplus A_2)'$ — двойственное отображение. Тогда для каждого $(f, g) \in A_1 \oplus A_2$ имеем $\pi_2'(\lambda)(f, g) = (\lambda \circ \pi_2)(f, g) = \lambda(g)$. Напомним, что в рассматриваемом случае λ — вероятностная мера, а $\lambda(g)$ — интеграл Лебега от g по мере λ. Пусть δ_p — мера Дирака, тогда $\delta_p \in \mathcal{S}(A_1)$. Имеем

$$\rho_{L_\rho}(\delta_p, \lambda) \ge \bigl|(\delta_p - \lambda)(h)\bigr| = \lambda(h) = \int_{X_2} h|_{X_2}(x)\, d\lambda(x) = \int_{X_2} \rho(p, x)\, d\lambda(x) \ge d,$$

поэтому $d_H^{\rho_{L_\rho}}\bigl(\mathcal{S}(A_1), \mathcal{S}(A_2)\bigr) \ge d$, что и требовалось. □

7.3 Мосты

Мосты являются важной технической конструкцией, позволяющей эффективно работать с квантовым расстояние Громова–Хаусдорфа.

7.3.1 Общая конструкция моста

Начнем с определения.

Определение 7.30. Для (A, L_A), $(B, L_B) \in \mathcal{CQ}$ с порядковыми единицами e_A и e_B соответственно ***мостом*** между ними называется полунорма N на $A \oplus B$, обладающая следующими свойствами:

- N непрерывна относительно соответствующей порядковой нормы на $A \oplus B$, см. предложение 7.15;
- $N(e_A, e_B) = 0$, но $N(e_A, 0) > 0$ (и, так как
$$0 < N(e_A, 0) = N\big[(e_A, e_B) + (0, -e_B)\big] \le N(e_A, e_B) + N(0, e_B) = N(0, e_B),$$
то также $N(0, e_B) > 0$);
- для любого $a \in A$ и любого $\delta > 0$ существует $b \in B$ такое, что
$$L_B(b) \vee N(a, b) \le L_A(a) + \delta$$
и для любого $b \in B$ и любого $\delta > 0$ существует $a \in A$ такое, что
$$L_A(a) \vee N(a, b) \le L_B(b) + \delta.$$

Нам понадобятся следующие технические результаты.

Лемма 7.31. *Пусть на векторном пространстве V задано две полунормы L_1 и L_2. Тогда функция L, заданная формулой $L(v) = L_1(v) \vee L_2(v)$, также является полунормой.*

Доказательство. То, что $L(0) = 0$ и L положительно однородна проверяется мгновенно. Покажем, что L субаддитивна. Имеем
$$L(x+y) = L_1(x+y) \vee L_2(x+y) \le \big(L_1(x) + L_1(y)\big) \vee \big(L_2(x) + L_2(y)\big) \le \big(L_1(x) \vee L_2(x)\big) + \big(L_1(y) \vee L_2(y)\big),$$
где первое неравенство имеет место в силу полуаддитивности полунорм L_1 и L_2, а второе – так как мы складываем максимум первых слагаемых предыдущего выражения с максимумом вторых. Лемма доказана. □

Лемма 7.32. *Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — векторные пространства с полунормами $L_1 \ldots, L_n$. Рассмотрим на $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ функцию*
$$L(v_1, \ldots, v_n) = \Big\|\big(L_1(v_1), \ldots, L_n(v_n)\big)\Big\|_\infty = L_1(v_1) \vee \cdots \vee L_n(v_n).$$
Тогда L — полунорма.

Доказательство. То, что $L(0) = 0$ и L положительно однородна проверяется мгновенно. Покажем, что L субаддитивна. Имеем
$$L(v_1 + v_1', \ldots, v_n + v_n') = L_1(v_1 + v_1') \vee \cdots \vee L_n(v_n + v_n').$$
Далее, для каждого i имеем
$$L_i(v_i + v_i') \le L_i(v_i) + L_i(v_i') \le L(v_1, \ldots, v_n) + L(v_1', \ldots, v_n'),$$
откуда $L(v_1, \ldots, v_n) = \max_i L_i(v_i + v_i') \le L(v_1, \ldots, v_n) + L(v_1', \ldots, v_n')$, что и требовалось. □

Покажем, что в лемме 7.32 нельзя, вообще говоря, заменить max-норму на произвольную, даже если все полунормы L_i являются нормами.

Пример 7.33. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на плоскости $\mathbb{R}^2$, у которой единичный круг — это «узкий» центрально симметричный параллелограмм с вершинами $(2,2)$, $(-2/7, 2/7)$, $(-2,-2)$, $(2/7, -2/7)$. Заметим, что стороны этого параллелограмма пересекают координатные оси в точках $(\pm 1/2, 0)$ и $(0, \pm 1/2)$). Тогда $\big\|(2,2)\big\| = 1$, $\big\|(1,1)\big\| = 1/2$, $\big\|(0,\pm 1)\big\| = \big\|(\pm 1, 0)\big\| = 2$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ функцию $L(x,y) = \Big\|\big(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\big)\Big\|$, где $x, y \in \mathbb{R}^2$. Покажем, что L не является даже полунормой, а именно, что L не субаддитивна.

Пусть $x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (1, 0)$, $y_1 = (1, 0)$, $y_2 = (0, 1)$, тогда
$$L(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = L\big((0,0), (1,1)\big) = \big\|(0,1)\big\| = 2.$$
С другой стороны,
$$L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2) = L\big((-1,0), (1,0)\big) + L\big((1,0), (1,0)\big) = \big\|(1,1)\big\| + \big\|(1,1)\big\| = 1.$$
Таким образом, $L(x_1 + x_2, y_1 + y_2) > L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2)$, так что L не является субаддитивной.

Теорема 7.34. *Пусть N — мост между $(A, L_A) \in \mathcal{CQ}$ и $(B, L_B) \in \mathcal{CQ}$. Определим $L\colon A \oplus B \to [0, \infty)$ по формуле*

$$L(a, b) = L_A(a) \vee L_B(b) \vee N(a, b).$$

Тогда L является Lip*-нормой и индуцирует L_A и L_B, то есть $L \in \mathcal{M}(L_A, L_B)$. Если L_A и L_B полунепрерывны снизу, то L — тоже полунепрерывна снизу.*

Доказательство. То, что L — полунорма вытекает из лемм 7.32 и 7.31. Далее, $L(e_A, e_B) = L_A(e_A) \vee L_B(e_B) \vee N(e_A, e_B) = 0$, откуда $L(\alpha e_A, \alpha e_B) = 0$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть теперь $(a, b) \notin (e_A, e_B)\mathbb{R}$. Если $a \ne \alpha e_A$, то $L_A(a) > 0$, так как L_A — липшицева полунорма, поэтому $L(a, b) > 0$. Аналогично, если $b \ne \alpha e_B$, то $L(a, b) > 0$. Предположим теперь, что $a = \alpha e_A$ и $b = \beta e_B$. Так как $\big(0, (\beta - \alpha)e_B\big) = (\alpha e_A, \beta e_B) + (-\alpha e_A, -\alpha e_B)$, поэтому

$$0 < L\big(0, (\beta - \alpha)e_B\big) \le L(\alpha e_A, \beta e_B) + L\big(\alpha e_A, \alpha e_B\big) = L(\alpha e_A, \beta e_B),$$

то есть $L(\alpha e_A, \beta e_B) > 0$, так что $\ker L = (e_A, e_B)\mathbb{R}$, т.е. L — липшицева полунорма.

Покажем, что L индуцирует L_A и L_B. Проверим это для L_A, так как случай L_B проверяется аналогично. Мы должны показать, что для любого $a \in A$ выполняется $L_A(a) = \inf_{b \in B} L(a, b)$. По определению L, имеем $L(a, b) \ge L_A(a)$ для любого b, поэтому осталось показать, что $\inf_b L(a, b) \le L_A(a)$. Выберем произвольное $\delta > 0$, тогда, по определению N, существует $b \in B$, для которого $L_B(b) \vee N(a, b) \le L_A(a) + \delta$, но тогда

$$L(a, b) = L_A(a) \vee L_B(b) \vee N(a, b) \le L_A(a) \vee \big(L_A(a) + \delta\big) = L_A(a) + \delta.$$

В силу произвольности $\delta > 0$, получаем требуемое.

Проверим теперь, что L является Lip-нормой, т.е. что L индуцирует $*$-слабую топологию на $\mathcal{S}(A \oplus B)$. Для этого мы воспользуемся теоремой 6.63. Начнем с доказательства того, что $\mathcal{S}(A \oplus B)$ имеет конечный радиус.

Нам понадобится величина $\gamma := 1/N(e_A, 0)$, которую мы назовем ***зазором*** N.

Лемма 7.35. *Для любых $\lambda \in \mathcal{S}(A) \subset \mathcal{S}(A \oplus B)$ и $\mu \in \mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(A \oplus B)$ выполняется $\rho_L(\lambda, \mu) \ge \gamma$.*

Доказательство. Так как N — полунорма, то $N(\gamma\, e_A, 0) = 1$, откуда $L(\gamma\, e_A, 0) = L_A(\gamma\, e_A) \vee L_B(0) \vee N(\gamma\, e_A, 0) = N(\gamma\, e_A, 0) = 1$, поэтому

$$\rho_L(\lambda, \mu) = \sup\Big\{\big|\lambda(a, b) - \mu(a, b)\big| : (a, b) \in A \oplus B,\ L(a, b) \le 1\Big\} \ge \big|\lambda(\gamma e_A, 0) - \mu(\gamma e_A, 0)\big| = \lambda(\gamma e_A, 0) = \gamma\, \lambda(e_A) = \gamma.$$

□

Напомним, что через $A^\sim$ мы обозначили фактор пространство $A/\mathbb{R}e$, а через $L^\sim$ и $\|\cdot\|^\sim$ — фактор полунормы, полученные из липшицевой полунормы и порядковой нормы соответственно.

Выберем произвольный $(a, b) \in A \oplus B$ и положим

$$\alpha(a) = \sup\{r \in \mathbb{R} : r e_A \le a\}, \quad \beta(a) = \inf\{r \in \mathbb{R} : a \le r e_A\} \ \text{ и } \ m_a = \frac{\alpha(a) + \beta(a)}{2},$$

тогда, в силу леммы 6.65, имеем

$$\|a\|^\sim = \|a - m_a e_A\| = \frac{\beta(a) - \alpha(a)}{2}.$$

Аналогично определяет m_b. Выберем произвольное $t \in \mathbb{R}$, тогда, в силу леммы 6.65,

$$\begin{aligned} \big\|(a, b) - t(e_A, e_B)\big\| &= \big\|(a - m_a e_A + m_a e_A - t\, e_A,\ b - m_b e_B + m_b e_B - t\, e_B)\big\| = \\ &= \big\|(a - m_a e_A,\ b - m_b e_B) + (m_a e_A - t\, e_A,\ m_b e_B - t\, e_B)\big\| \le \\ &\le \big\|(a - m_a e_A,\ b - m_b e_B)\big\| + \big\|(m_a e_A - t\, e_A,\ m_b e_B - t\, e_B)\big\| = \|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim + |m_a - t| \vee |m_b - t|, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из свойств прямой суммы, см. предложение 7.15. Заметим, что минимум выражения $|m_a - t| \vee |m_b - t|$ достигается при t, совпадающем с серединой отрезка с концами m_a и m_b, т.е. при $t = (m_a + m_b)/2$, и, значит, этот минимум равен $|m_a - m_b|/2$. Таким образом, при этом t имеем

$$\big\|(a, b)\big\|^\sim \le \big\|(a, b) - t(e_A, e_B)\big\| \le \|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim + \frac{|m_a - m_b|}{2}.$$

Оценим теперь $|m_a - m_b|$. Так как N — полунорма, и $N(\gamma\, e_A, 0) = 1$, то $\gamma N\big((m_a - m_b)e_A, 0\big) = |m_a - m_b|$. Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 7.36. *Пусть L — полунорма на векторном пространстве V, причем для некоторого v_0 имеем $L(v_0) = 0$, тогда для любого $v \in V$ выполняется $L(v) = L(v + v_0)$.*

Доказательство. Действительно, $L(v) = L(v + v_0 - v_0) \le L(v + v_0) + L(v_0) = L(v + v_0)$. Обратно, $L(v + v_0) \le L(v) + L(v_0) = L(v)$, что и требовалось. □

Из леммы 7.36 и свойств N вытекает, что

$$N\big((m_a - m_b)e_A, 0\big) = N\big((m_a - m_b)e_A + m_b e_A,\, m_b e_B\big) = N(m_a e_A, m_b e_B).$$

Далее,

$$N(m_a e_A, m_b e_B) = N(m_a e_A - a + a,\, m_b e_B - b + b) \le N(a, b) + N(a - m_a e_A,\, b - m_b e_B) \le$$
$$\le L(a, b) + \|N\| \cdot \big\|(a - m_a e_A,\, b - m_b e_B)\big\| = L(a, b) + \|N\| \cdot \big(\|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim\big),$$

где второе неравенство имеет место по определению полунормы L, а последнее равенство снова следует из леммы 6.65. Собирая все вместе, получаем

$$\big\|(a, b)\big\|^\sim \le \|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim + \frac{|m_a - m_b|}{2} \le \|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim + \frac{1}{2}\gamma N\big((m_a - m_b)e_A, 0\big) =$$
$$= \|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim + \frac{\gamma}{2} L(a, b) + \frac{\gamma}{2}\|N\| \cdot \big(\|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim\big) = \left(1 + \frac{\gamma\|N\|}{2}\right)\|a\|^\sim \vee \|b\|^\sim + \frac{\gamma}{2} L(a, b).$$

Пусть r_A и r_B обозначают радиусы компактных квантовых метрических пространств (A, L_A) и (B, L_B) соответственно. В силу следствия 6.133, они конечны. По следствию 6.59, имеем

$$\|a\|^\sim \le r_A\, L^\sim(a) \le r_A\, L(a) \le r_A\, L(a, b),$$

и аналогично $\|b\|^\sim \le r_B\, L(a, b)$, поэтому

$$\big\|(a, b)\big\|^\sim \le \left(\left(1 + \frac{\gamma\|N\|}{2}\right) r_A \vee r_B + \frac{\gamma}{2}\right) L(a, b).$$

Из определения радиуса вытекает, что

$$\operatorname{rad}(A \oplus B, L) \le \left(1 + \frac{\gamma\|N\|}{2}\right) r_A \vee r_B + \frac{\gamma}{2},$$

так что этот радиус конечен.

Покажем теперь, что второе условие теоремы 6.63 также выполнено. Положим

$$\mathcal{B}_1^A = \big\{a \in A : L_A(a) \le 1,\ \|a\| \le 1\big\},$$
$$\mathcal{B}_1^B = \big\{b \in B : L_B(b) \le 1,\ \|b\| \le 1\big\},$$
$$\mathcal{B}_1 = \Big\{(a, b) \in A \oplus B : L(a, b) \le 1,\ \big\|(a, b)\big\| \le 1\Big\}.$$

В силу определений, для каждого $(a, b) \in \mathcal{B}_1$ имеем $L_A(a) \le L(a, b) \le 1$ и $\|a\| \le \big\|(a, b)\big\| \le 1$, поэтому$a \in \mathcal{B}_1^A$ и, аналогично, $b \in \mathcal{B}_1^B$. Следовательно, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1^A \times \mathcal{B}_1^B$. Так как L_A и L_B являются Lip-нормами, то, в силу теоремы 6.63, оба пространства $\mathcal{B}_1^A$ и $\mathcal{B}_1^B$ вполне ограничены. Но тогда и $\mathcal{B}_1$ вполне ограничено. Таким образом, оба условия теоремы 6.63 выполняются для L, так что и L является Lip-нормой.

Нам осталось показать, что если L_A и L_B полунепрерывны снизу, то L также полунепрерывна снизу. Для этого рассмотрим последовательность $\big\{(a_n, b_n)\big\} \in A \oplus B$, сходящуюся к некоторому $(a, b) \in A \oplus B$. Последнее означает, что $\|a - a_n\| \vee \|b - b_n\| \to 0$, но тогда $\|a - a_n\| \to 0$ и $\|b - b_n\| \to 0$, поэтому $a_n \to a$ и $b_n \to b$. В силу полунепрерывности снизу полунорм L_A и L_B, заключаем, что $L_A(a) \le \liminf_{n\to\infty} L_A(a_n)$ и $L_B(b) \le \liminf_{n\to\infty} L_B(b_n)$. Так как N по определению непрерывно на $A \oplus B$ относительно нормы, то $N(a_n, b_n) \to N(a, b)$. Итак,

$$L(a, b) = L_A(a) \vee L_B(b) \vee N(a, b) \le \big(\liminf_{n\to\infty} L_A(a_n)\big) \vee \big(\liminf_{n\to\infty} L_B(b_n)\big) \vee \big(\liminf_{n\to\infty} N(a_n, b_n)\big) \le$$
$$\le \liminf_{n\to\infty}\big(L_A(a_n) \vee L_B(b_n) \vee N(a_n, b_n)\big) = \liminf_{n\to\infty} L(a_n, b_n),$$

что и требовалось. □

7.3.2 Первые примеры построения и использования мостов

Покажем теперь как работают определенные выше мосты.

Конструкция 7.37. Пусть (A, L_A) и (B, L_B) — компактные квантовые метрические пространства, e_A и e_B — их порядковые единицы. Фиксируем произвольные состояния $\mu_0 \in \mathcal{S}(A)$ и $\nu_0 \in \mathcal{S}(B)$ и произвольное положительное число $\gamma > 0$. Положим

$$N(a,b) = \frac{1}{\gamma}\big|\mu_0(a) - \nu_0(b)\big|.$$

Лемма 7.38. *В сделанных обозначениях N — мост. Если L — полунорма, построенная по этому мосту на $A \oplus B$, и $(a,b) \in A \oplus B$, $L(a,b) \le 1$, то $\big|\mu_0(a) - \nu_0(b)\big| \le \gamma$.*

Доказательство. Покажем сначала, что N — мост. Очевидно, $N(0,0) = 0$, $N\big(\lambda(a,b)\big) = |\lambda| N(a,b)$, а субаддитивность вытекает из линейности μ_0 и ν_0 и субаддитивности модуля, поэтому N — полунорма. Далее, состояния — ограниченные и, значит, непрерывные линейные функционалы, поэтому N — непрерывна. Кроме того, $\mu_0(e_A) = \nu_0(e_B) = 1$, поэтому $N(e_A, e_B) = 0$, но $N(e_A, 0) = \big|\mu_0(e_A) - \nu_0(0)\big| = 1$, аналогично $N(0, e_B) = 1$. Остается проверить третье свойство. Для этого для любого $a \in A$ выберем $b = \mu_0(a) e_B$. Тогда

$$L_B(b) \vee N(a,b) = L_B\big(\mu_0(a)e_B\big) \vee N\big(a, \mu_0(a)e_B\big) = 0 \vee \frac{1}{\gamma}\Big|\mu_0(a) - \nu_0\big(\mu_0(a)e_B\big)\Big| = 0 \vee 0 = 0 \le L_A(a),$$

так как $\nu_0(e_B) = 1$. Аналогично для произвольного $b \in B$ нужно выбрать $a = \nu_0(b) e_A$.

Итак, N — мост, тогда L корректно определенная полунорма, причем $N(a,b) \le L(a,b)$. Поэтому, если $L(a,b) \le 1$, то $\frac{1}{\gamma}\big|\mu_0(a) - \nu_0(b)\big| = N(a,b) \le 1$, откуда вытекает требуемое неравенство. □

Утверждение 7.39. *Пусть (A, L_A) (B, L_B) — произвольные компактные квантовые метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}^q(A,B) \le \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B,$$

где через $\operatorname{diam} A$ и $\operatorname{diam} B$ обозначены диаметры $\operatorname{diam} \mathcal{S}(A)$ и $\operatorname{diam} \mathcal{S}(B)$ соответствующих пространств состояний.

Доказательство. Воспользуемся конструкцией 7.37, фиксируем произвольные $\mu_0 \in \mathcal{S}(A)$, $\nu_0 \in \mathcal{S}(B)$ и $\gamma > 0$, построим мост N и соответствующую полунорму L. Тогда для произвольных состояний $\mu \in \mathcal{S}(A) \subset \mathcal{S}(A \oplus B)$ и $\nu \in \mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(A \oplus B)$ и для произвольного $(a,b) \in A \oplus B$, $L(a,b) \le 1$ имеем:

$$\big|\mu(a,b) - \nu(a,b)\big| = \big|\mu(a) - \nu(b)\big| \le \big|\mu(a) - \mu_0(a)\big| + \big|\mu_0(a) - \nu_0(b)\big| + \big|\nu_0(b) - \nu(b)\big| \le \rho_{L_A}(\mu, \mu_0) + \gamma + \rho_{L_B}(\nu, \nu_0),$$

где последнее неравенство вытекает из леммы 7.38 и определения расстояния ρ_{L_A} и ρ_{L_B}. Так как γ — произвольное положительное число, а $\rho_L(\mu,\nu) = \sup\big|\mu(a,b) - \nu(a,b)\big|$, где точная верхняя грань берется по $(a,b) \in A \oplus B$, $L(a,b) \le 1$, заключаем, что

$$\rho_L(\mu,\nu) \le \rho_{L_A}(\mu,\mu_0) + \rho_{L_B}(\nu,\nu_0).$$

Теперь требуемое неравенство следует из произвольности $\mu \in \mathcal{S}(A)$ и $\nu \in \mathcal{S}(B)$. □

Пример 7.40. Заметим, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычной нормой $\|\cdot\|$ и $e = 1$ представляет собой компактное квантовое метрическое пространство. Пространство состояний $\mathcal{S}(R)$ в этом случае состоит из одной точки, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{1\}$.

Напомним, что выше был определен радиус $\operatorname{rad}(A, L)$ компактного метрического пространства как наименьшее $r \in \mathbb{R}$, для которого выполнено неравенство $\|a\|^\sim \le r L_A(a)$, и показано, см. следствие 6.134, что $2 \operatorname{rad} A = \operatorname{diam} \mathcal{S}(A)$.

Утверждение 7.41. *Пусть (A, L_A) — произвольное компактное квантовое метрическое пространство. Тогда*

$$d_{GH}^q(A, \mathbb{R}) = \operatorname{rad} A.$$

Доказательство. Действительно, как отмечалось в примере 7.40, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ состоит из одной точки, поэтому расстояние Хаусдорфа от точки до $\mathcal{S}(A)$ в метрике ρ_L, $L \in \mathcal{M}(A, \mathbb{R})$, не может быть меньше половины диаметра в этой метрике, то есть в метрике ρ_{L_A}, поэтому $d_{GH}^q(A, \mathbb{R}) \ge \operatorname{rad} A$.

Для доказательства обратного неравенства построим мост так:

$$N(a,b)=\frac{1}{r}\sup\Big\{\big|\mu(a)-b\big| : \mu\in\mathcal{S}(A)\Big\},$$

где $r=\operatorname{rad}A$. То, что N — непрерывная полунорма, равная нулю на (e_A,e_B) и не равная нулю на $(e_A,0)$ и $(0,e_B)$ проверяется точно так же как в доказательстве леммы 7.38. Проверим третье свойство. Для $b\in\mathbb{R}$ достаточно взять $a=be_A$. Пусть теперь фиксирован произвольный $a\in A$. Как в доказательстве леммы 7.35 определим величину $m_a\in\mathbb{R}$, для которой $\|a\|^\sim=\|a-m_ae_A\|$, и положим $b=m_a$. Тогда для любого состояния $\mu\in\mathcal{S}(A)$ имеем

$$\big|\mu(a)-b\big|=\big|\mu(a)-m_a\big|=\big|\mu(a-m_ae_A)\big|\le\|a\|^\sim,$$

где неравенство имеет место так как $\|\mu\|\le 1$. Поэтому $N(a,m_a)\le 1/r|a\|^\sim\le L_A(a)$ в силу следствия 6.134, что и требовалось.

Итак, N — мост. Оценим расстояние Хаусдорфа между $\mathcal{S}(A)\subset\mathcal{S}(A\oplus B)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R})=\{\eta\}\subset\mathcal{S}(A\oplus B)$ в соответствующей метрике ρ_L. Для произвольного $(a,b)\in A\oplus\mathbb{R}$, $L(a,b)\le 1$ и произвольного $\mu\in\mathcal{S}(A)$ имеем:

$$\big|\mu(a,b)-\eta(a,b)\big|=\big|\mu(a)-b\big|\le r\,N(a,b)\le r\,L(a,b)\le r,$$

откуда $\rho_L(\mu,\eta)\le r$, и, значит, $d_H^{\rho_L}\big(\mathcal{S}(A),\mathcal{S}(\mathbb{R})\big)\le r$. Утверждение доказано. □

Пример 7.42. Пусть (A,L_A) — произвольное компактное квантовое метрическое пространство. Покажем, что на $A\oplus A$ можно ввести такую Lip-норму L, что расстояние Хаусдорфа между слагаемыми, то есть между двумя экземплярами одного и того же $(A,L_A)\in\mathcal{CQ}$, будет равно заданному $\varepsilon>0$. Для этого построим мост

$$N(a,b)=\frac{1}{\varepsilon}\|a-b\|.$$

Упражнение 7.43. Проверьте, что N — мост на $A\oplus A$.

Пусть L — Lip-норма, порожденная мостом N. Тогда из условия $L(a,b)\le 1$ следует, что $N(a,b)\le 1$, то есть $\|a-b\|\le\varepsilon$. Поэтому, если $\mu=\mu_1\in\mathcal{S}(A)\subset\mathcal{S}(A\oplus A)$ соответствует первому слагаемому, то выберем для него $\mu_2=\mu$ как элемент второго слагаемого и получим, что

$$\big|\mu_1(a,b)-\mu_2(a,b)\big|=\big|\mu(a)-\mu(b)\big|=\big|\mu(a-b)\big|\le\|a-b\|\le\varepsilon,$$

поэтому $\rho_L(\mu_1,\mu_2)\le\varepsilon$. Поменяв местами μ_1 и μ_2, заключаем, что расстояние Хаусдорфа $d_H^{\rho_L}$ между экземплярами $\mathcal{S}(A)$ не превосходит ε. Но $N(e_A,0)=\|e_A\|/\varepsilon$, поэтому зазор $\gamma=1/N(e_A,0)$ равен ε, и обратное неравенство следует из леммы 7.35.

7.3.3 Подмножества и мосты

Напомним, что каждый сюръективный морфизм $\pi\colon A\to B$, $A,B\in\mathcal{OUS}$, порождает вложение $\pi'\colon\mathcal{S}(B)\to\mathcal{S}(A)$, и, тем самым, позволяет рассматривать $\mathcal{S}(B)$ как выпуклое замкнутое подмножество в $\mathcal{S}(A)$. Покажем, что, при правильном понимании, верно и обратное.

А именно, пусть $K\subset\mathcal{S}(A)$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства состояний. Как и выше, обозначим через $\operatorname{Aff}(K)$ пространство непрерывных аффинных функций на K. Элементы из A будем рассматривать как непрерывные аффинные функции на $\mathcal{S}(A)$, а именно $a(\mu)=\mu(a)$, $a\in A$, $\mu\in\mathcal{S}(A)$. Каждую такую функцию можно ограничить на K, в результате получится элемент из $\operatorname{Aff}(K)$. Обозначим через $\pi\colon A\to\operatorname{Aff}(K)$ отображение ограничения, а через B — его образ, то есть пространство всех таких ограничений. Очевидно, $e_A(\mu)=1$, ограничение e_A на K также равно единице, и является порядковой единицей в B, поэтому $B\subset\operatorname{Aff}(K)$ наследует структуру упорядоченного линейного пространства с архимедовой порядковой единицей. Таким образом, $\pi\colon A\to B$ — сюръективный морфизм, и, тем самым, определено вложение $\pi'\colon\mathcal{S}(B)\to\mathcal{S}(A)$.

Лемма 7.44. *В сделанных обозначениях,* $\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)=K$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный $\mu\in K$. Это линейный функционал на A, его ограничение $\mu|_B$ — состояние на B. Имеем: $\pi'\big(\mu|_B\big)(a)=\mu|_B\big(\pi(a)\big)=\mu(a)$, то есть $\pi'\big(\mu_B\big)=\mu$, поэтому $K\subset\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$.

Обратно, пусть $\mu\in\mathcal{S}(A)\setminus K$. Так как K выпукло, то, по теореме Хана–Банаха, оно отделимо от точки μ линейным функционалом, то есть существует $a\in A$ и $t\in\mathbb{R}$, такие, что $\mu(a)<t\le\nu(a)$ для любого $\nu\in K$.

Заменяя a на $a - t\,e_A$, можем сразу предполагать, что $\mu(a) < 0 \le \nu(a)$, то есть $\pi(a)(\nu) \ge 0$ для любого $\nu \in K$, поэтому $\pi(a)$ — положительный элемент в B. Предположим, что $\mu = \pi'(\eta)$ для некоторого $\eta \in \mathcal{S}(B)$. Тогда

$$\mu(a) = \pi'(\eta)(a) = \eta\big(\pi(a)\big) \ge 0,$$

где последнее неравенство выполнено, так как η — состояние, а $\pi(a)$ — положительный элемент. Полученное противоречие показывает, что $\mu \notin \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$, поэтому имеет место искомое равенство. □

Замечание 7.45. Если K_1 и K_2 — замкнутые подмножества в $\mathcal{S}(A)$, $K_1 \not\supset K_2$, то из теоремы Хана–Банаха следует, что найдется $a \in A$, неотрицательный на K_1 и строго положительный по крайней мере в одной точке из K_2. В частности, пусть $K \subset \mathcal{S}(A)$ — замкнутое выпуклое подмножество, порождающее все A'. Тогда $\pi\colon A \to B$ — биекция, но, если $K \ne \mathcal{S}(A)$, то эта биекция не будет изоморфизмом $\mathcal{OUS}$-пространств, так как π^{-1} не будет положительным отображением.

Для фиксированного $A \in \mathcal{OUS}$ рассмотрим пары (π, B), где $B \in \mathcal{OUS}$, и $\pi\colon A \to B$ — сюръективный морфизм. Будем рассматривать такие пары с точностью до естественной эквивалентности: $(\pi_1, B_1) \sim (\pi_2, B_2)$, если существует $\varphi\colon B_1 \to B_2$ — изоморфизм $\mathcal{OUS}$-пространств, такой, что $\pi_2 = \varphi \circ \pi_1$. Соответствующие классы эквивалентности будем называть ***факторами пространства*** A.

Утверждение 7.46. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$. Описанная выше конструкция задает взаимно-однозначное соответствие между факторами пространства A и замкнутыми выпуклыми подмножествами пространства $\mathcal{S}(A)$.*

Замечание 7.47. M. Rieffel предлагает называть факторы пространства A «квантовыми замкнутыми подмножествами» пространства $\mathcal{S}(A)$. Расстояние Хаусдорфа $d_H^{\rho_L}$ превращает семейство замкнутых квантовых подмножеств в компактное метрическое пространство.

Замечание 7.48. Выше было показано, что на каждом факторе определена фактор-полунорма, см. определение 6.7.

Утверждение 7.49. *Пусть $(A, L_A) \in \mathcal{CQ}$, и K_1 и K_2 — замкнутые выпуклые подмножества пространства состояний $\mathcal{S}(A)$, а (π_i, B_i) — соответствующие факторы с фактор-полунормами L_i, $i = 1, 2$. Тогда*

$$d_{GH}^q(B_1, B_2) \le d_H^{\rho_{L_A}}(K_1, K_2).$$

Доказательство. Заметим сразу, что неравенство может быть строгим, например, если $K_1 \ne K_2$ — разные одноточечные подмножества.

Для каждого $\varepsilon > 0$ построим мост N на $A \oplus A$ как в примере 7.42. Будем рассматривать K_i как $K_i \times \{0\} \subset \mathcal{S}(A \oplus A)$, и пусть $K_i' = \{0\} \times K_i \subset \mathcal{S}(A \oplus A)$, $i = 1, 2$. Обозначим через K выпуклую оболочку множества $K_1 \cup K_2'$, и пусть $\pi\colon A \oplus A \to \mathrm{Aff}(K)$ — отображение ограничения как в лемме 7.44, а $C = \pi(A \oplus A) \subset \mathrm{Aff}(K)$, то есть соответствующий подмножеству K фактор. По лемме 7.44, пространство состояний $\mathcal{S}(C)$ отождествляется с K. Так как K_1 и K_2' — не пересекаются, и $K = K_1 \times K_2'$, каждая аффинная функция на K раскладывается в комбинацию выпуклых функций на K_1 и K_2', поэтому C можно отождествить с $B_1 \oplus B_2$.

Пусть M — Lip-норма на $A \oplus A$, порожденная мостом N, и L — соответствующая фактор-полунорма на C. По предложению 7.7, метрика ρ_L совпадает с ограничением ρ_M на K.

Далее, $\mathcal{S}(B_i) \subset \mathcal{S}(C)$, $i = 1, 2$, и эти вложения совпадают с вложениями $K_1 \subset K$ и $K_2' \subset K$ соответственно, поэтому $d_{GH}^q(B_1, B_2) \le d_H^{\rho_L}(K_1, K_2')$. Далее, из оценок, приведенных в примере 7.42 следует, что $d_H^{\rho_M}(K_2, K_2') \le \varepsilon$. Кроме того, ρ_M совпадает ρ_{L_A} на $\mathcal{S}(A)$, поэтому $d_H^{\rho_M}(K_1, K_2) = d_H^{\rho_{L_A}}(K_1, K_2)$. Тогда, по неравенству треугольника,

$$d_H^{\rho_M}(K_1, K_2') \le d_H^{\rho_M}(K_1, K_2) + d_H^{\rho_M}(K_2, K_2') \le d_H^{\rho_{L_A}}(K_1, K_2) + \varepsilon,$$

и, собирая вместе полученные оценки, получаем

$$d_{GH}^q(B_1, B_2) \le d_H^{\rho_L}(K_1, K_2') = d_H^{\rho_M}(K_1, K_2') \le d_H^{\rho_{L_A}}(K_1, K_2) + \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε вытекает требуемое. □

7.3.4 Замкнутые полунормы и пространства

В разделе 6.8.6 для нормированного пространства V с полунормой L было определено пополнение Минковского и замыкание $\bar{L}$ полунормы L. Напомним, что полунорма называется ***замкнутой***, если шар B^L замкнут в пополнении V^c относительно нормы. В этом случае $\bar{L} = L$, и подпространство $\overline{V} \subset V^c$, состоящее из векторов, на которых функционал Минковского для B^L принимает конечные значения, совпадает с V. Пара $(\overline{V}, \bar{L})$ называется ***замыканием*** пространства (V, L).

В соответствии с предложением 6.128, если L полунепрерывна снизу, то ее замыкание $\bar{L}$ является продолжением L. В частности, каждая полунепрерывная снизу полунорма продолжается до замкнутой.

Утверждение 7.50. *Пусть $(A, L) \in \mathcal{CQ}$. Если полунорма L замкнута, то A соответствует подпространству в $\mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big)$, состоящему из всех аффинных функций на $\mathcal{S}(A)$, являющихся липшицевыми относительно ρ_L. Обратно, если L полунепрерывна, и любая аффинная функция на $\mathcal{S}(A)$, являющаяся липшицевой относительно ρ_L, соответствует некоторому элементу из a, то L замкнута.*

Доказательство. Пусть как и выше $B^L = \big\{a \in A : L(a) \leq 1\big\}$. Его элементы можно рассматривать как функции из пространства $\mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big) \in \mathcal{OUS}$. Так как вся прямая $\mathbb{R}\,e$ содержится в B^L, поляра $(B^L)^\circ$, в свою очередь, содержится в $A'^\circ = \big\{\lambda \in A' : \lambda(e) = 0\big\}$. Поэтому

$$(B^L)^\circ = \Big\{\lambda \in A'^\circ : \big|\lambda(a)\big| \leq 1 \text{ для всех } a, \text{ таких, что } L(a) \leq 1\Big\},$$

то есть представляет собой шар в A'° в двойственной полунорме L'. Тогда биполяра

$$^\circ(B^L)^\circ = \Big\{b \in \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big) : \big|b(\lambda)\big| \leq 1 \text{ для всех } \lambda, \text{ таких, что } L'(\lambda) \leq 1\Big\},$$

то есть $^\circ(B^L)^\circ = \Big\{b : \big|\lambda(b)\big| \leq L'(\lambda) \text{ для всех } \lambda \in D_2 \subset A'^c\Big\}$, где $D_2 = \big\{\lambda \in A'^\circ : \|\lambda\|' \leq 2\big\}$. Шар D_2 был описан в предложении 6.55, а менно, показано, что $D_2 = \big\{\mu - \nu : \mu,\, \nu \in \mathcal{S}(A)\big\}$, причем $L'(\mu - \nu) = \rho_L(\mu, \nu)$ по лемме 6.84. Таким образом,

$$^\circ(B^L)^\circ = \Big\{b \in \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big) : \big|\mu(b) - \nu(b)\big| \leq \rho_L(\mu, \nu) \text{ для всех } \mu,\, \nu \in \mathcal{S}(A)\Big\},$$

то есть, другими словами, биполяра состоит из всех b, таких, что $L_{\rho_L}(b) \leq 1$. Далее, сам шар B^L —выпуклый и сбалансированный, поэтому по теореме 6.81 о биполяре, биполяра $^\circ(B^L)^\circ$ совпадает с замыканием шара B^L по норме. Но этот шар замкнут по предположению. Таким образом, $B^L = \Big\{b \in \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big) : L_{\rho_L}(b) \leq 1\Big\}$, откуда все пространство $A \subset \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big)$ состоит из липшицевых относительно ρ_L аффинных функций.

Обратно, пусть $A \subset \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big)$ состоит из липшицевых относительно ρ_L (и, следовательно, непрерывных) аффинных функций. По теореме 6.82 множество $\Big\{a \in \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big) : L_{\rho_L}(a) \leq 1\Big\}$ замкнуто относительно нормы, а полунепрерывность L влечет равенство $L = L_{\rho_L}$. Поэтому B^L замкнут по норме, что и означает замкнутость нормы. □

7.3.5 Определение изометрии

Пусть (A, L_A), $(B, L_B) \in \mathcal{OUS}$. Напомним, см. предложение 7.7, что каждый сюръективный морфизм $\varphi\colon A \to B$ порождает изометрию $\varphi' : \mathcal{S}(B) \to \mathcal{S}(A)$, которая действует так: $\varphi'(\nu) = \nu \circ \varphi$. В частности, φ' является аффинным отображением. Оказывается, для пространств с замкнутыми нормами верно и обратное.

Теорема 7.51. *Пусть (A, L_A) и (B, L_B) — компактные квантовые метрические пространства с замкнутыми полунормами. Для каждого сюръективного аффинного отображения $\alpha\colon \mathcal{S}(B) \to \mathcal{S}(A)$, являющегося изометрией для метрик ρ_{L_B} и ρ_{L_A}, существует единственный сюръективный морфизм $\varphi\colon A \to B$ такой, что $\varphi' = \alpha$, то есть $L_B \circ \varphi = L_A$ и $\alpha(\nu) = \nu \circ \varphi$.*

Доказательство. Действительно, композиция с α задает отображение $\varphi\colon \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big) \to \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(B)\big)$, а именно, $f \mapsto \alpha \circ f$, для $f \in \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big)$. Так как α — изометрия, это отображение переводит липшицевы функции в липшицевы. По предположению, полунормы L_A и L_B замкнуты, поэтому $A \subset \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(A)\big)$ и $B \subset \mathrm{Aff}\,\big(\mathcal{S}(B)\big)$ — это подпространства липшицевых функций, поэтому $\varphi\colon A \to B$. Далее, так как α изометрия, то есть $\rho_{L_A} = \rho_{L_B} \circ \alpha$, отображение φ сохраняет соответствующие Lip-нормы $L_{\rho_{L_A}}$ и $L_{\rho_{L_B}}$, которые, в силу замкнутости L_A и L_B, совпадают с последними. Таким образом, $L_B \circ \varphi = L_A$, что и требовалось. □

Итак, пусть $(A, L_A) \in \mathcal{CQ}$, обозначим через L^s_A наибольшую среди полунепрерывных полунорм, не превосходящих L_A, и пусть (A^c, L^c_A) — замыкание (A, L^s_A).

Определение 7.52. Пусть $(A, L_A), (B, L_B) \in \mathcal{CQ}$. ***Изометрией из*** A ***в*** B называется морфизм $\varphi\colon A^c \to B^c$ такой, что $L^c_B \circ \varphi = L^c_A$.

Из теоремы 7.51 немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 7.53. *Изометрии $(A, L_A) \to (B, L_B)$ компактных квантовых метрических пространств находятся в естественном взаимно однозначно соответствии с аффинными изометриями соответствующих пространств состояний $\big(\mathcal{S}(B), \rho_{L_B}\big) \to \big(\mathcal{S}(A), \rho_{L_A}\big)$*

7.3.6 Нулевое расстояние

Цель данного раздела — показать, что квантовое расстояние равно нулю на изометричных пространствах и только на них

Лемма 7.54. *Если существует изометрия ψ компактных квантовых метрических пространств (A, L_A) и (B, L_B), то $d^q_{GH}(A, B) = 0$.*

Доказательство. Действительно, в этом случае рассмотрим морфизм $\psi\colon A^c \to B^c$, $L^c_B \circ \varphi = L^c_A$, и построим мост $N(a, b) = \gamma^{-1}\big\|\psi(a) - b\big\|$ на $A^c \oplus B^c$, где $g > 0$ (проверьте, что это — мост). Пусть L — порожденная этим мостом Lip-норма на $A^c \oplus B^c$, тогда для произвольного $\nu \in \mathcal{S}(B^c)$ и $\mu = \psi'(\nu) \in \mathcal{S}(A^c)$ и произвольных $(a, b) \in A^c \oplus B^c$, $L(a, b) \le 1$, имеем:

$$\big|\mu(a, b) - \nu(a, b)\big| = \big|\mu(a) - \nu(b)\big| = \big|\nu(\psi(a)) - \nu(b)\big| = \big|\nu(\psi(a) - b)\big| \le \gamma$$

поэтому $\rho^L(\mu, \nu) \le \gamma$. Аналогично, для произвольного $\mu \in \mathcal{S}(A^c)$ найдется $\nu \in \mathcal{S}(B^c)$, такой, что $\psi'(\nu) = \mu$, поэтому $d^{\rho_L}_H\big(\mathcal{S}(A^c), \mathcal{S}(B^c)\big) \le \gamma$, откуда, в силу произвольности γ вытекает требуемое. $\square$

Пусть $(A, L_A) \in \mathcal{CQ}$. Как и выше, обозначим через L^s_A наибольшую среди полунепрерывных полунорм, не превосходящих L_A, и через (A^c, L^c_A) — замыкание (A, L^s_A).

Лемма 7.55. *В сделанных обозначениях,*

$$d^q_{GH}\big((A, L^s), (A, L)\big) = 0, \qquad d^q_{GH}\big((A^c, L^c), (A, L)\big) = 0.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Рассмотрим функцию $N(a, b) = \gamma^{-1}\|a - b\|$ на $A \oplus A$ и проверим, что это мост. Первые два свойства (непрерывность и значения на единицах очевидно выполнены), проверим третье. Пусть $A_1 = (A, L) \subset A \oplus A$ и $A_2 = (A, L^s) \subset A \oplus A$. Если $a \in A_1$, то в качестве b возьмем такое же $a \in A_2$. Получим

$$\max\big\{L^s(b), N(a, b)\big\} = \max\big\{L^s(a), N(a, a)\big\} = L^s(a) \le L(a)$$

по определению L^s. Пусть теперь $b \in A_2$. Шар $\big\{x \in A : L^s(x) \le 1\big\}$ является замыканием шара $\big\{x \in A : L(x) \le 1\big\}$ в A по норме (проверьте!), поэтому существует последовательность $\{a_n\} \subset A$, сходящаяся к b по норме и такая, что $L(a_n) \le L^s(b)$ (эта последовательность лежит в соответствующем L-шаре). Поэтому найдется $a_n \in A_1$, такой, что $N(a_n, b) = \gamma^{-1}\|a_n - b_n\| \le L^s(b)$. Таким образом,

$$\max\big\{L_(a_n), N(a_n, b)\big\} \le L^s(b),$$

поэтому N — мост.

Пусть $M = \max\{L, L^s, N\}$ — соответствующая Lip-норма. Уже привычные рассуждения показывают, что $d^{\rho_M}_H$-расстояние между $\mathcal{S}(A_1)$ и $\mathcal{S}(A_2)$ не превосходит γ. Действительно, для произвольного $\mu \in \mathcal{S}(A_1)$ выберем $\nu = \mu \in \mathcal{S}(A_2)$. Тогда для произвольного $(a, b) \in A \oplus A$, $L(a, b) \le 1$, имеем:

$$\big|\mu(a, b) - \nu(a, b)\big| = \big|\mu(a) - \mu(b)\big| = \big|\mu(a - b)\big| \le \gamma,$$

поэтому $\rho^L(\mu, \nu) \le \gamma$, откуда и вытекает требуемое.

Равенство для случая (A^c, L^c) доказывается аналогично (нужно воспользоваться тем, что L^c-шар представляет собой замыкание L-шара по норме в $\bar{A}$, а в определении моста взять норму в A^c). $\square$

7.3.6.1 Схема доказательства для обычного расстояния Громова–Хаусдорфа

Пусть даны два компактных метрических пространства (X, ρ_X) и (X, ρ_Y). Рассмотрим их дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ и семейство допустимых полуметрик $\mathcal{D}(X \sqcup Y)$ на нем. На прямом произведении $(X \sqcup Y)^2$ рассмотрим обобщенную метрику, равную максимуму расстояний на компонентах $X \times X$, $X \times Y$, $Y \times X$ и $Y \times Y$, и бесконечности между компонентами.

Лемма 7.56. *Семейство полуметрик $\mathcal{D}(X \sqcup Y)$ равностепенно непрерывно на $(X \sqcup Y)^2$ и замкнуто в $C\big((X \sqcup Y)^2\big)$ относительно* sup*-нормы.*

Лемма 7.57. *Пусть $\sigma \in \mathcal{D}(X \sqcup Y)$. Для каждого $x \in X$ существует не более одного $y \in Y$, для которого $\sigma(x, y) = 0$.*

Доказательство. Действительно, если $\sigma(x, y) = \sigma(x, y') = 0$, то $\sigma(y, y') \le \sigma(y, x) + \sigma(x, y') = 0$, откуда $\rho_Y(y, y') = \sigma(y, y') = 0$, поэтому $y = y'$, что и требовалось. ☐

Фиксируем $\sigma \in \mathcal{D}(X \sqcup Y)$ и профакторизуем $(X \sqcup Y, \sigma)$ по отношению эквивалентности $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x, y) = 0$. Обозначим факторпространство через $X \cup_\sigma Y$, а метрику, порожденную на нем полуметрикой σ обозначим ρ_σ. Метрическое пространство $X \cup_\sigma Y$ компактно. Далее, естественные вложения $i_X \colon X \to X \cup_\sigma Y$ и $i_Y \colon Y \to X \cup_\sigma Y$, переводящие x и, соответственно y, в их класс эквивалентности, являются изометричными вложениями, причем $X \cup_\sigma Y = i_X(X) \cup i_Y(Y)$.

Обратно, если (Z, ρ) — компактное метрическое пространство, и $j_X \colon X \to Z$, $j_Y \colon Y \to Z$ — изометричные вложения, такие, что $Z = j_X(X) \cup j_Y(Y)$, то на $X \sqcup Y$ можно построить полуметрику σ так, чтобы существовала изометрия $X \cup_\sigma Y$ на Z. Таким образом, существует естественная биекция между семейством метрик $\mathcal{D}(X \sqcup Y)$ и наборами (Z, ρ, j_X, j_Y), где $j_X \colon X \to Z$, $j_Y \colon Y \to Z$ — изометричные вложения компактных метрических пространств X и Y в компактное метрическое пространство Z, такие, что $j_X(X) \cup j_Y(Y) = Z$. При этой биекции метрике $\sigma \in \mathcal{D}(X \sqcup Y)$ соответствует класс $(X \cup_\sigma Y, \rho_\sigma, i_X, i_Y)$.

Утверждение 7.58. *Пусть (X, ρ_X) и (X, ρ_Y) — компактные метрические пространства, $d_{GH}(X, Y) = d$. Тогда существует компактное метрическое пространство (Z, ρ) и изометричные вложения $j_X \colon X \to Z$, $j_Y \colon Y \to Z$, такие, что $Z = j_X(X) \cup j_Y(Y)$ и $d_H^\rho\big(j_X(X), j_Y(Y)\big) = d$.*

Доказательство. По определению расстояния Громова–Хаусдорфа существует последовательность метрик $\rho_n \in \mathcal{D}(X \sqcup Y)$, такая, что $d_H^{\rho_n}(X, Y) \le d + 1/n$. Эта последовательность, очевидно, равномерно ограничена, поскольку $\rho_n(x, y) \le \operatorname{diam} X + \operatorname{diam} Y + d + 1$, и равностепенно непрерывна (лемма 7.56), поэтому по теореме типа Арцела–Асколи эта последовательность содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что ρ_n — это такая подпоследовательность, и $\sigma \in \mathcal{D}(X \sqcup Y)$ — ее предел. Положим $Z = X \cup_\sigma Y$, $\rho = \rho_\sigma$, и $j_X = i_X$, $j_Y = i_Y$ — соответствующие вложения. Остается показать, что $d_H^\rho\big(j_X(X), j_Y(Y)\big) = d$. Для этого нужно воспользоваться компактностью X и Y и свойствами $\sigma \in \mathcal{D}(X, Y)$. ☐

Следствие 7.59. *Если расстояние Громова–Хаусдорфа между компактными метрическими пространствами равно нулю, то эти пространства изометричны.*

Доказательство. В обозначениях предыдущего утверждения, если $d = 0$, то $d_H^\rho\big(j_X(X), j_Y(Y)\big) = 0$. Так как оба множества $j_X(X)$ и $j_Y(Y)$ — замкнутые подмножества компакта Z, то $j_X(X) = j_Y(Y)$. Так как j_X и j_Y — изометричные, а значит инъективные, вложения, то $j_X^{-1} \circ j_Y \colon Y \to Y$ — искомая изометрия. ☐

Теорема 7.60. *Если квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа между квантовыми компактными метрическими пространствами равно нулю, то эти пространства изометричны.*

Доказательство. Пусть (A, L_A) и (B, L_B) — квантовые компактные метрические пространства, $d_{GH}^q(A, B) = 0$. Тогда существует $\{L_n\} \subset \mathcal{M}(L_A, L_B)$ — последовательность Lip-норм на $A \oplus B$, индуцирующих L_A и L_B, такая, что

$$d_H^{\rho_n}\big(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B)\big) < \frac{1}{n},$$

где $\rho_n = \rho_{L_n}$ — метрика на $\mathcal{S}(A \oplus B)$, порожденная L_n. Будучи ограничена на $\mathcal{S}(A)$, соответственно на $\mathcal{S}(B)$, метрика ρ_n индуцирует метрики $\rho_A = \rho_{L_A}$ и $\rho_B = \rho_{L_B}$, поэтому, если рассматривать ρ_n на $\mathcal{S}(A) \sqcup \mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(A \oplus B)$, то $\rho_n \in \mathcal{D}\big(\mathcal{S}(A) \sqcup \mathcal{S}(B)\big)$. Как и в доказательстве утверждения 7.58, найдется подпоследовательность $\{\rho_n\}$, равномерно сходящаяся к полуметрике $\sigma \in \mathcal{D}\big(\mathcal{S}(A) \sqcup \mathcal{S}(B)\big)$. Полуметрика σ определяет изометрию $\alpha \colon \mathcal{S}(A) \to$

$\mathcal{S}(B)$ по правилу $\big(\mu, \alpha(\mu)\big) = 0$. В соответствии с теоремой 7.51, чтобы показать, что α порождает изометрию $B^c \to A^c$, достаточно показать, что α — аффинное отображение.

Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{S}(A)$, $t \in [0,1]$. Так как $\rho_n \to \sigma$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N, такое, что для всех $n > N$ выполнено $\|\sigma - \rho_n\| < \varepsilon/2$. Поэтому, для $n \geq N$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\sigma\big(t\mu_1 + (1-t)\mu_2, t\alpha(\mu_1) + (1-t)\alpha(\mu_2)\big) \leq \rho_n\big(t\mu_1 + (1-t)\mu_2, t\alpha(\mu_1) + (1-t)\alpha(\mu_2)\big) + \varepsilon/2 = \\
&\quad = L'_n\big(t(\mu_1 - \alpha(\mu_1)) + (1-t)(\mu_2 - \alpha(\mu_2))\big) + \varepsilon/2 \leq t\, L'_n\big(\mu_1 - \alpha(\mu_1)\big) + (1-t)L'_n\big(\mu_2 - \alpha(\mu_2)\big) + \varepsilon/2 = \\
&= t\,\rho_n\big(\mu_1, \alpha(\mu_1)\big) + (1-t)\rho_n\big(\mu_2, \alpha(\mu_2)\big) + \varepsilon/2 \leq t\Big(\sigma\big(\mu_1, \alpha(\mu_1)\big) + \varepsilon/2\Big) + (1-t)\Big(\sigma\big(\mu_2, \alpha(\mu_2)\big) + \varepsilon/2\Big) + \varepsilon/2 = \\
&\qquad = t(0 + \varepsilon/2) + (1-t)(0 + \varepsilon/2) + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности ε получаем, что $\alpha\big(t\mu_1 + (1-t)\mu_2\big) = t\alpha(\mu_1) + (1-t)\alpha(\mu_2)$, что и требовалось. □

7.4 Полнота

Хорошо известно, что классическая метрика Громова–Хаусдорфа полна на пространстве Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$ компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. В данном разделе мы разберем аналогичный результат для компактных квантовых метрических пространств. Как и в классическом случае, мы покажем, что проверка полноты сводится к полноте метрики Хаусдорфа, для чего рассматриваемое семейство пространств вкладывается в одно компактное квантовое метрическое пространство.

7.4.1 Последовательности $\mathcal{OUS}$

Пусть сначала $\{A_j\}$ — последовательность вещественных упорядоченных векторных пространств с архимедовой порядковой единицей. Обозначим через $\prod A_j$ их прямое произведение, а через $\prod^b A_j$ — его подмножество, состоящее из последовательностей $\{a_j\}$, $a_j \in A_j$, таких, что числовая последовательность $\big\{\|a_j\|\big\}$ ограничена. Очевидно $e = \{e_j\} \in \prod^b A_j$. Скажем, что последовательность $\{a_j\}$ неотрицательна, если $a_j \geq 0$ для всех j. Тем самым, на $\prod^b A_j$ задано отношение порядка.

Лемма 7.61. *В сделанных обозначениях, $\prod^b A_j \in \mathcal{OUS}$ с архимедовой порядковой единицей e.*

Обозначим через $\oplus A_j$ подпространство в $\prod^b A_j$, состоящее из финитных последовательностей, то есть таких, что лишь конечное число элементов отлично от нуля. Отметим, что $\oplus A_j \notin \mathcal{OUS}$ и оно не содержит e. Рассмотрим подпространство $C \subset \prod^b A_j$, содержащее и $\oplus A_j$, и e. По определению, $C \in \mathcal{OUS}$. Далее, определены естественные проекции $\prod^b A_j \to A_j$, которые порождают проекции $C \to A_j$. Последние, в свою очередь, порождают вложения $\mathcal{S}(A_j) \to \mathcal{S}(C)$. В дальнейшем, там где это необходимо, будем рассматривать $\mathcal{S}(A_j)$ как подмножество $\mathcal{S}(C)$.

Положим $Z_0 = \cup \mathcal{S}(A_j) \subset \mathcal{S}(C)$, и пусть $Z = \operatorname{conv} Z_0$.

Лемма 7.62. *Пусть $A \in \mathcal{OUS}$, и $Q \subset \mathcal{S}(A)$, такое, что если для некоторого $a \in A$ неравенство $\mu(a) \geq 0$ выполнено для всех $\mu \in Q$, то $a \geq 0$. Тогда замыкание $\operatorname{conv} Q$ совпадает с $\mathcal{S}(A)$ (замыкание берется в $\star$-слабой топологии.*

Заметим, что $c \in C \subset \prod A_j$ положителен, если и только если $\mu(c) \geq 0$ для всех $\mu \in Z_0$. Поэтому к Z_0 применима лемма 7.62.

Следствие 7.63. *Замыкание Z совпадает с $\mathcal{S}(C)$.*

Для каждого натурального n положим $B_n = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$. Мы знаем, что $B_n \in \mathcal{OUS}$, далее, $A_j \subset B_j \subset B_n \subset C$ для всех $j \leq n$, поэтому определены проекции $C \to B_n \to B_j \to A_j$ и, как следствие, определены вложения $\mathcal{S}(A_j) \subset \mathcal{S}(B_j) \subset \mathcal{S}(B_n) \subset \mathcal{S}(C)$. Более того, в силу предложения 7.21, $\mathcal{S}(B_n) = \operatorname{conv}\big(\cup_{j=1}^n \mathcal{S}(A_j)\big)$, поэтому

$$Z = \operatorname{conv} Z_0 = \operatorname{conv}\big(\cup_j \mathcal{S}(A_j)\big) = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{S}(B_n)$$

как расширяющееся объединение.

7.4.2 Последовательности $\mathcal{CQ}$

Пусть теперь $\{(A_i, L_i))\}$ — последовательность компактных квантовых метрических пространств, и пусть, кроме того, на каждом $A_j \oplus A_{j+1}$, $j \geq 0$, задана Lip-норма $M_j \in \mathcal{M}(L_j, L_{j+1})$. Определим на прямом произведении $\prod A_j$ функцию L так:

$$L(\{a_j\}) = \sup_j \{M_j(a_j, a_{j+1})\}.$$

По определению, $L(e) = 0$. Положим $C_M = \{\{a_j\} \in \prod^b A_j : L(\{a_j\}) < \infty\}$.

Лемма 7.64. *В сделанных обозначениях, $C_M \in \mathcal{OUS}$ — подпространство в $\prod^b A_j$, содержащее $\oplus A_j$ и e, функция L — полунорма на C_M, равная нулю в точности на $\mathbb{R}\, e$.*

Поэтому C_M удовлетворяет свойствам подпространств C из предыдущего раздела, но полунорма L, вообще говоря, не порождает L_j и не является Lip-нормой.

Определим полунорму J_n на B_n так:

$$J_n(\{a_j\}) = \max\{M_j(a_j, a_{j+1}) : 1 \leq j \leq n-1\}.$$

Следующая лемма является аналогом леммы 7.24.

Лемма 7.65. *В сделанных обозначениях, J_n является Lip-нормой на B_n. При естественных проекциях $B_n \to A_m$, $m \leq n$, а также при проекциях $B_n \to A_m \oplus A_{m+1}$ и $B_n \to B_m$, $m \leq n-1$, эта Lip-норма J_n индуцирует, соответственно, Lip-нормы L_m, M_m и J_m.*

Обозначим через $\pi_n \colon \prod A_j \to B_n$ естественную проекцию.

Лемма 7.66. *Для любых $b \in B_n$ и $\varepsilon > 0$ существует такой $c \in \prod A_j$, что $\pi_n(c) = b$ и $L(c) \leq J_n(b) + \varepsilon$.*

Доказательство. Построим b_k, $k \geq n$, по индукции так. Положим $b_n = b$. Пусть b_k построен. Так как J_{k+1} индуцирует J_k при естественной проекции, то существует $b_{k+1} \in B_{k+1}$, такой, что $\pi_k(b_{k+1}) = b_k$ и $J_{k+1}(b_{k+1}) < J_k(b_k) + \varepsilon/2^k$. Поэтому, для каждого $k > n$ выполнено $J_k(b_k) < J_n(b) + \varepsilon$. В качестве c возьмем единственный элемент $\prod A_j$, такой, что $\pi_k(c) = b_k$ для любого $k \geq n$. Тогда $L(c) \leq J_n(b) + \varepsilon$, что и требовалось. □

Отметим, что последовательность c, построенная выше, вообще говоря, не обязана быть ограниченной. Поэтому пока рано говорить, что L индуцирует J_n. Нужны дополнительные предположения.

Лемма 7.67. *Для любых m и n, $m < n$, имеет место неравенство*

$$\left|\mathcal{S}(B_m), \mathcal{S}(B_n)\right|_{\rho_{J_n}} \leq \sum_{j=m}^{n-1} \left|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\right|_{\rho_{M_j}}$$

Доказательство. Фиксируем i такое, что $m < i \leq n$. Пусть $\mu_j \in \mathcal{S}(A_j)$, $\mu_{j+1} \in \mathcal{S}(A_{j+1})$, тогда

$$\rho_{J_n}(\mu_j, \mu_{j+1}) = \sup\Big\{\left|\mu_j(a) - \mu_{j+1}(a)\right| : a = \{a_i\} \in B_n, \quad J_n(a) \leq 1\Big\} \leq$$
$$\leq \sup\Big\{\left|\mu_j(a_j) - \mu(a_{j+1})\right| : a = \{a_i\} \in B_n, \quad M_j(a_j, a_{j+1}) \leq 1\Big\} = \rho_{M_j}(\mu_j, \mu_{j+1}),$$

поэтому можно построить последовательность $\mu_{i-1}, \ldots, \mu_m$, где $\mu_k \in \mathcal{S}(A_k)$, такую, что

$$\rho_{J_n}(\mu_j, \mu_{j+1}) \leq \left|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\right|_{\rho_{M_j}},$$

для j, $m \leq j \leq i-1$, откуда

$$\rho_{J_n}(\mu_m, \mu_i) \leq \sum_{j=m}^{i-1} \rho_{J_n}(\mu_j, \mu_{j+1}) \leq \sum_{j=m}^{i-1} \left|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\right|_{\rho_{M_j}},$$

и значит

$$\left|\mathcal{S}(B_n), \mathcal{S}(A_i)\right|_{\rho_{J_n}} \leq \sum_{j=m}^{i-1} \left|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\right|_{\rho_{M_j}}.$$

Но $\mathcal{S}(B_m) = \operatorname{conv}\Big(\cup_{k=1}^{n-1}\mathcal{S}(A_k)\Big)$, метрика ρ_{J_n} выпукла вниз, поэтому

$$\big|\mathcal{S}(B_m),\mathcal{S}(B_n)\big|_{\rho_{J_n}} \le \sum_{j=m}^{n-1}\big|\mathcal{S}(A_j),\mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}},$$

что и требовалось. $\square$

Так как для каждого $A \subset X$, $\operatorname{diam} X \le \operatorname{diam} A + 2d_H(X,A)$, положив $m = 1$ в лемме 7.67, получим следующую оценку.

Следствие 7.68. *В сделанных обозначениях, для любого n выполнена оценка*

$$\operatorname{diam}(B_n,J_n) \le \operatorname{diam}(A_1,L_1) + 2\sum_{j=1}^{n-1}\big|\mathcal{S}(A_j),\mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}},$$

Таким образом, если $\sum_{j=1}^{\infty}\big|\mathcal{S}(A_j),\mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}} < \infty$, то существует такая константа $\varDelta$, что $\operatorname{diam}(B_n,J_n) < \varDelta$ для любого n.

Лемма 7.69. *Пусть $\{a_j\} \in \prod A_j$, и пусть $L\big(\{a_j\}\big) < \infty$. Если существует константа $\varDelta$, такая, что $\operatorname{diam}(B_n,J_n) < \varDelta$ для любого n, то $\{a_j\} \in \prod^b A_j$, то есть $\sup_j\|a_j\| < \infty$, и, поэтому $\{a_j\} \in C_M$. Более того, для любого $c \in C_M$ имеем*

$$\|c\|^\sim \le (\varDelta/2)L(c).$$

Доказательство. Положим $h = L\big(\{a_j\}\big)$ и $b_n = (a_1,\dots,a_n)$ для каждого n. Тогда, очевидно, $J_n(b_n) \le h$. По следствию 6.59, имеем: $\|b_n\| \le (\varDelta/2)J_n(b_n) \le (\varDelta/2)h$. Положим $e_n = e_{B_n}$. Тогда для каждого n найдется $t \in \mathbb{R}$, для которого $\|b_n - te_n\| \le (\varDelta/2)h$. Положим $G_n = \big\{t : \|b_n - t\,e_n\| \le (\varDelta/2)h\big\}$. Ясно, что $G_n \subset \mathbb{R}$ — не пустое, замкнутое ограниченное и, значит, компактное подмножество. Кроме того, $G_{n+1} \subset G_n$. Поэтому, из соображений компактности, существует $t_0 \in \cap G_n$. Для такого t_0 неравенство $\|a_j - t_0\,e_j\| \le (\varDelta/2)h$ выполнено для всех j, откуда $\|a_j\| \le t_0 + (\varDelta/2)h$ для всех j. Таким образом, $c = \{a_j\} \in C_M$, и $\|c\|^\sim \le (\varDelta/2)L(c)$. Лемма доказана. $\square$

Утверждение 7.70. *Предположим, что существует константа $\varDelta$, такая, что* $\operatorname{diam}(B_k,J_k) < \varDelta$ *для любого k. Тогда для любого $b_n \in B_n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $c \in C_M$, такое, что $\pi_n(c) = b_n$ и $L(c) \le J_n(b_n) + \varepsilon$. Поэтому проекция $\pi_n\colon (C_M,L) \to B_n$ порождает J_n, то есть естественное вложение $\mathcal{S}(B_n) \subset \mathcal{S}(C_M)$ — это изометрия для метрик ρ_{J_n} и ρ_L соответственно.*

Доказательство. По лемме 7.66 искомое c может быть построено в $\prod A_j$, но по лемме 7.69 это c лежит в C_M. Очевидное неравенство $J_n\big(\pi_n(c)\big) \le L(c)$, справедливое для любого $c \in \prod A_j$, вместе с неравенством $L(c) \le J_n(b_n) + \varepsilon$, выполненным для построенного в лемме 7.66 $c \in C_M$ и любого ε, влекут равенство $J_n(\pi_n(c)) = L(c)$, из которого и следует, что L порождает J_n, а значит и изометричность вложения. $\square$

Напомним, что выше мы определили $Z = \operatorname{conv}\Big(\cup\mathcal{S}(A_j)\Big) = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{S}(B_n) \subset \mathcal{S}(C_M)$ и выяснили, что замыкание Z совпадает с $\mathcal{S}(C_M)$.

Лемма 7.71. *Предположим, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\big|\mathcal{S}(A_j),\mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}} < \infty.$$

Тогда метрическое пространство (Z,ρ_L) вполне ограниченно.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется m, для которого будет справедлива оценка

$$\sum_{j=m}^{\infty}\big|\mathcal{S}(A_j),\mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}} < \varepsilon.$$

Тогда, по лемме 7.67, для всех n, $n \ge m$ выполнено

$$\big|\mathcal{S}(B_m),\mathcal{S}(B_n)\big|_{\rho_L} \le \varepsilon,$$

откуда $\mathcal{S}(B_m)$ плотно в $\mathcal{S}(B_n)$ для любого n, $n \geq m$, а значит плотно и в Z. Но пространство состояний $\mathcal{S}(B_n)$ компактно в топологии, индуцированной ρ_L, так как $\rho_L = \rho_{J_n}$ на B_n, а J_n является Lip-нормой на B_n. Поэтому $\mathcal{S}(B_n)$ вполне ограничено в ρ_L, и конечная ε-сеть в $\mathcal{S}(B_n)$ будет конечной 2ε-сетью в Z. □

Теорема 7.72. *Пусть $\{(A_j, L_j)\}$ — последовательность компактных квантовых метрических пространств, и пусть M_j — некоторая* Lip*-норма на $A_j \oplus A_{j+1}$, индуцирующая, соответственно, L_j и L_{j+1} для каждого j. Если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}} < \infty,$$

то определенная выше полунорма L является Lip*-нормой на C_M.*

Доказательство. Обозначим через $\widehat{Z}$ пополнение пространства Z в метрике ρ_L, продолжение метрики ρ_L на $\widehat{Z}$ будем обозначать также через ρ_L. В предположениях леммы 7.71 пространство $\widehat{Z}$ компактно (так как замкнуто и вполне ограничено). Каждый элемент $c \in C_M$ можно рассматривать как линейную непрерывную, а, значит, липшицеву функцию на $Z \subset \mathcal{S}(C_M)$, поэтому определено продолжение $\widehat{c}$ этой функции на $\widehat{Z}$, являющееся липшицевой функцией на $\widehat{Z}$. При этом, если $c \geq 0$ в C_M, то $\widehat{c} \geq 0$ как функция. Кроме того, $\widehat{e} = 1$ — тождественная единица. Таким образом, C_M можно рассматривать как линейное упорядоченное вещественное векторное пространство непрерывных функций на $\widehat{Z}$, то есть $C_M \subset C(\widehat{Z})$ изометрично изоморфно вложено. Каждому $x \in \widehat{Z}$ сопоставим $\mu_x \in \mathcal{S}(C_M)$, который действует так: $\mu_x(f) = f(x)$, $f \in C_M \subset C(Z)$. Полученное отображение $\widehat{Z} \to \mathcal{S}(C_M)$ непрерывно, как отображение из $\widehat{Z}$ с ρ_L-метрической топологией в $\mathcal{S}(C_M)$ со $\star$-слабой топологией. При этом на $Z \subset \widehat{Z}$ отображение тождественно, Z всюду плотно в $\widehat{Z}$, само $\widehat{Z}$ компактно, поэтому его образ замкнут в $\mathcal{S}(C_M)$ и, в силу следствия 7.63, этот образ совпадает с $\mathcal{S}(C_M)$.

Проверим теперь, что построенное отображение $x \mapsto \mu_x$ инъективно. Действительно, пусть $x, y \in \widehat{Z}$, $x \neq y$, и положим $d = \rho_L(x,y)$. Найдем в Z такие η и ν, что $\rho_L(\eta, x) < d/4$ и $\rho_L(\nu, y) < d/4$. Тогда $\rho_L(\eta,\nu) > d/2$, поэтому найдется $c \in C_M$, такой, что $L(c) \leq 1$ и $\big|\eta(c) - \nu(c)\big| > d/2$. Но $L_{\rho_L}(\widehat{c}) \leq 1$, поэтому $\big|\widehat{c}(x) - \widehat{c}(\eta)\big| \leq d/4$ и $\big|\widehat{c}(y) - \widehat{c}(\nu)\big| \leq d/4$. Учитывая, что $\eta(c) = \widehat{c}(\eta)$ и $\nu(c) = \widehat{c}(\nu)$, заключаем, что $\big|\widehat{c}(x) - \widehat{c}(y)\big| = \big|\mu_x(\widehat{c}) - \mu_y(\widehat{c})\big| > 0$, то есть $\mu_x \neq \mu_y$. Таким образом, $x \mapsto \mu_x$ — биективное непрерывное отображение $\widehat{Z} \to \mathcal{S}(C_M)$ компакта $\widehat{Z}$, а значит — гомеоморфизм, откуда метрическая ρ_L-топология согласована со $\star$-слабой топологией. Поэтому L является Lip-нормой на $\mathcal{S}(C_M)$. □

Следствие 7.73. *В предположениях теоремы* 7.72*, последовательность $\{(A_j, L_j)\}$ компактных квантовых метрических пространств сходится по метрике d^q_{GH} к некоторому компактному квантовому метрическому пространству.*

Доказательство. Действительно, так как L порождает J_n на B_n и M_j на каждом $A_j \oplus A_{j+1}$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_L} < \infty,$$

поэтому последовательность $\{(\mathcal{S}(A_j)\}$ является фундаментальной в метрике Хаусдорфа $d_H^{\rho_L}$ на $\mathcal{S}(C_M)$. Пространство выпуклых компактных подмножеств компакта $\mathcal{S}(C_M)$ полно в метрике Хаусдорфа, поэтому существует предельный выпуклый компакт $K \subset \mathcal{S}(C_M)$.

Напомним, что в разделе 7.3.3 мы для выпуклого замкнутого подмножества $K \subset \mathcal{S}(A)$, $A \in \mathcal{OUS}$, рассматривали пространство $\mathrm{Aff}(K)$ непрерывных аффинных функций на нем. Тогда элементы $a \in A$ можно рассматривать как функции на $\mathcal{S}(A)$ и возникает отображение ограничения $\pi\colon A \to \mathrm{Aff}(K)$. Тогда $B = \pi(A) \in \mathcal{OUS}$ и $\pi'\colon \mathcal{S}(B) \to \mathcal{S}(A)$, причем $\pi'\big(\mathcal{S}(B)\big) = K$. Подпространство B вместе с сюръективным морфизмом π называлось фактором.

Так вот, обозначим через $D = \pi(C_M)$ соответствующий фактор, и через L_D — фактор-полунорму, порожденную L, которая является Lip-нормой по предложению 7.7. В соответствии с утверждением 7.49, имеем:

$$d^q_{GH}(A_j, D) \leq d_H^{\rho_L}\big(\mathcal{S}(A_j, K\big),$$

откуда и получается сходимость по метрике d^q_{GH}. □

Теорема 7.74. *Пространство компактных квантовых метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии), снабженное квантовым расстоянием Громова–Хаусдорфа, является полным.*

Доказательство. Пусть $\{(A_j, L_j)\}$ — фундаментальная последовательность. Переходя, если нужно, к подпоследовательности можно предполагать, что

$$\sum_j d^q_{GH}\big(A_j, A_{j+1}\big) < \infty.$$

Для каждого j выберем $M_j \in \mathcal{M}(L_j, L_{j+1})$, для которой

$$\big|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}} < d^q_{GH}\big(A_j, A_{j+1}\big) + \frac{1}{2^j}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|\mathcal{S}(A_j), \mathcal{S}(A_{j+1})\big|_{\rho_{M_j}} < \infty,$$

и последовательность $\{(A_j, L_j)\}$ сходится по следствию 7.73. Теорема доказана. □

7.5 Конечная аппроксимация и компактность

Следующий результат представляет собой аналог теоремы о существовании конечной ε-сети в произвольном метрическом компакте.

Теорема 7.75. *Пусть (A, L) — квантовое компактное метрическое пространство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное квантовое метрическое пространство (B, L_B), такое, что $d^q_{GH}(A, B) < \varepsilon$ и B — конечномерно. В качестве такого B можно выбрать фактор пространства A (напомним, это аналог подмножества). Также можно выбрать в качестве B пространство функций $C(X)$ на некотором конечном множестве X.*

Доказательство. Так как $\big(\mathcal{S}(A), \rho_L\big)$ компактно, то в нем существует конечная ε-сеть, которую мы обозначим через F, и пусть $K = \operatorname{conv} F$. Тогда в качестве B можно взять соответствующий фактор (то есть образ A в $\operatorname{Aff} K$ при отображении ограничения) с фактор полунормой L_B. Тогда $K = \pi'\big(\mathcal{S}(B)\big)$, и

$$d^q_{GH}(A, B) \le d^{\rho_L}_H\big(\mathcal{S}(A), K\big) < \varepsilon.$$

Отметим, что B конечномерно, так как значения функций из $\operatorname{Aff} K$ определяются их значениями на конечном множестве F. что и требовалось.

Если A бесконечномерно, то малым шевелением можно сделать F линейно независимым подмножеством, тогда K — симплекс, а B изоморфно $C(F)$. □

Напомним критерий предкомпактности Громова для подмножеств пространства Громова–Хаусдорфа. Пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство. Обозначим через $\operatorname{cov}_X(\varepsilon)$ наименьшее число шаров радиуса ε, необходимое для того, чтобы покрыть ими пространство X.

Теорема 7.76. *Семейство $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- *существует константа Δ, такая, что $\operatorname{diam} X \le \Delta$ для любого $X \in \mathcal{C}$ (диаметры ограничены в совокупности), и*
- *существует функция $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{N}$, такая, что $\operatorname{cov}_X(\varepsilon) \le g(\varepsilon)$ для любого $X \in \mathcal{C}$ и любого $\varepsilon > 0$.*

Для того, чтобы сформулировать аналог критерия Громова для метрического пространства $\mathcal{Q}$ компактных квантовых пространств с метрикой d^q_{GH}, нам понадобится следующие определения.

Пусть $(A, L) \in \mathcal{CQ}$ и $\varepsilon > 0$.

- Через $\operatorname{fin}_L(\varepsilon)$ обозначим наименьшее натуральное n, для которого существует $(B, L_B) \in \mathcal{CQ}$, такое, что $d^q_{GH}(A, B) < \varepsilon$ и размерность $\dim B$ пространства B не превосходит n.
- Через $\operatorname{cov}_L(\varepsilon)$ обозначим наименьшее натуральное n, для которого существует $(B, L_B) \in \mathcal{CQ}$ и сюръективный морфизм $\pi\colon A \to B$, такие, что L индуцирует L_B, $d^{\rho_L}_H\big(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B)\big) < \varepsilon$ и размерность $\dim B$ пространства B не превосходит n.

Имеет место следующие оценки:

$$\operatorname{fin}_L(\varepsilon) \le \operatorname{cov}_L(\varepsilon) \le \operatorname{cov}_{\mathcal{S}(A)}(\varepsilon).$$

Теорема 7.77. *Если $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- *существует константа Δ, такая, что* $\operatorname{diam}(A, L) \le \Delta$ *для любого* $(A, L) \in \mathcal{C}$ *(диаметры ограничены в совокупности), и*
- *существует функция* $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{N}$*, такая, что* $\operatorname{cov}_{\mathcal{S}(A)}(\varepsilon) \le g(\varepsilon)$ *для любого* $(A, L) \in \mathcal{C}$ *и любого* $\varepsilon > 0$.

Обратно, если

- *существует константа Δ, такая, что* $\operatorname{diam}(A, L) \le \Delta$ *для любого* $(A, L) \in \mathcal{C}$ *(диаметры ограничены в совокупности), и*
- *существует функция* $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{N}$*, такая, что* $\operatorname{fin}_L(\varepsilon) \le g(\varepsilon)$ *для любого* $(A, L) \in \mathcal{C}$ *и любого* $\varepsilon > 0$,

то $\mathcal{C}$ вполне ограничено в $\mathcal{Q}$.

Упражнение 7.78. Рассмотрим два метрических пространства (Y, ρ_Y) и (Z, ρ_Z), где $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $|y_1y_2| = |y_2y_3| = 1$, $|y_1y_3| = 2$, а $Z = \{z_1, z_2\}$, $|z_1, z_2| = 3$. Ассоциированные квантовые компактные метрические пространства — это $\big(C(Y), L_{\rho_Y}\big)$ и $\big(C(Z), L_{\rho_Z}\big)$, соответственно. Покажите, что

$$d_{GH}(Y, Z) = 1, \qquad \text{но} \qquad d^q_{GH}\big[\big(C(Y), L_{\rho_Y}\big), \big(C(Z), L_{\rho_Z}\big)\big] = \frac{1}{2}.$$

Литература

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[4] Rieffel M.A. *Compact Quantum Metric Spaces*, arXiv:math/0308207 [math.OA].

[5] Rieffel M.A. *Metrics on states from actions of compact groups.* Doc. Math., 1998, v. 3, 215–229, см. также arXiv:math/9807084 [math.OA].

[6] Rieffel M.A. *Metrics on state spaces*, Doc. Math., 1999, v. 4, pp. 559—600, см. также arXiv:math/9906151 [math.OA].

[7] Rieffel M.A. *Gromov—Hausdorff distance for quantum metric spaces.* Mem. Amer. Math. Soc., 2004, v. 168, pp. 1—65, см. также arXiv:math/0011063 [math.OA].

[8] Kerr D. *Matricial quantum Gromov-Hausdorff distance.* J. Funct. Anal., 2003, v. 205, no. 1, pp. 132-–167, см. также arXiv:math/0207282 [math.OA].

[9] Kerr D., Li H. *On Gromov–Hausdorff convergence of operator metric spaces.* J. Oper. Theory, 2009, v. 1, no. 1, 83—109, см. также arXiv:math/0411157 [math.OA].

[10] Wu W. *Non-commutative metrics on state spaces*, J Ramanujan Math. Soc., 2005, v. 20, no. 3, pp. 215-–214, см. также arXiv:math/0411475 [math.OA].

[11] Wu W. *Non-commutative metric topology on matrix state spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 2006, v. 134, no. 2, pp. 443–453, см. также arXiv:math/0410587 [math.OA].

[12] Wu W. *Quantized Gromov-Hausdorff distance.* J. Funct. Anal. 2006, v. 238, no. 1, pp. 58-–98, см. также arXiv:math/0503344 [math.OA].

[13] Paulsen V., Tomforde M. *Vector spaces with an order unit.* ArXiv:0712.2613 [math.OA].

[14] Putnam I.F. *Lecture Notes on C^*-algebras.* `https://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf`

[15] Kesavan S. *Functional Analysis*, Hindustan Book Agency, 2009.

[16] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов.* Факториал, 1997.

[17] Pedersen G. K. *C*-algebras and their automorphism groups.* London: Academic Press, 1979.

[18] Kadison R.V. *A representation theory for commutative topological algebra.* Mem. Amer. Math. Soc., no. 7, 1951.

[19] Богачев В.И. *Слабая сходимость мер*, Ижевский институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2016.

[20] Богачев В.И. *Основы теории меры*, Том 1, РХД, М. – 2003.

[21] Богачев В.И. *Основы теории меры*, Том 2, РХД, М. – 2003.

[22] Rudin W. *Real and complex analysis*, (third edition), McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[23] Latrémolière, F. *The quantum Gromov–Hausdorff propinquity.* Trans. Amer. Math. Soc., 2016, v. 368, N 1, 365–411.

[24] Dudley R.M. *Real analysis and probability.* CRC Press, 2018.

[25] Alfsen E.M. *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1971.

[26] Conway J.B. *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer-Verlag, 1985.

[27] `https://en.wikipedia.org/wiki/Hahn-Banach_theorem`

[28] Krein M., Milman D. *On extreme points of regular convex sets*, Studia Mathematica, 1940, v. 9, pp. 133–138.