Расстояние Громова-Хаусдорфа и алгебраическая топология

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

5 марта 2025 г.
20:17:12

Введение

Знаменитое расстояние Громова–Хаусдорфа [21, 22] измеряет степень неизометричности метрических пространств: у изометричных пространств расстояние равно нулю, и чем более “непохожи” пространства друг на друга, тем это расстояние больше. Задача вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между конечными метрическими пространствами является NP-трудной [47, 52], и к настоящему времени известно лишь небольшое число конкретных значений. Наиболее хорошо изучен случай пространств с одним ненулевым расстоянием [20, 36, 37] (мы называем такие пространства метрическими симплексами), и здесь хватает геометрических и комбинаторных методов. Однако уже для вычисления расстояния между стандартными сферами [41] разных размерностей такой подход к успеху не приводит. В последние годы были разработаны методы, позволяющие находить расстояния Громова–Хаусдорфа с использованием традиционных инвариантов алгебраической топологии, а именно фундаментальных групп [18, 44] и гомологий [18, 50, 1, 2]. Впрочем, для стягиваемых пространств был предложен оригинальный метод ультраметризации [12, 41, 48]: данное метрическое пространство каноническим образом заменяется на ультраметрическое, а расстояние Громова–Хаусдорфа между исходной парой пространств оценивается снизу расстоянием между полученными ультраметрическими пространствами (верхние оценки обычно получаются из геометрических соображений). Преимущество этого метода состоит в том, что стягиваемое пространство превращается в точку, а, скажем, вершины правильного многоугольника, правильного многогранника или точки кубической решетки — в метрический симплекс.

В наших лекциях мы приведем все определения и предварительные результаты, необходимые для понимания основной части курса. Мы начнем с краткого обзора геометрической теории расстояния Громова–Хаусдорфа (глава 1), в частности, обсудим известные результаты о расстояниях до симплексов и некоторые приложения этой теории, например, к изучению минимальных остовных деревьев, вычислению хроматических чисел и чисел покрытия графов, решению проблемы Борсука о разбиении ограниченного метрического пространства на части меньшего диаметра (глава 2). Затем мы сформулируем и докажем теорему об ультраметризации, а также приведем многочисленные следствия из нее (глава 3). Далее мы определим фундаментальную группу пунктированного топологического пространства и обсудим, как можно использовать эти группы для вычисления расстояния между окружностью и другими пространствами (глава 4). Следующим шагом будет изложение основ симплициальной теории гомологий и ее связи с сингулярными гомологиями (глава 5). Мы покажем, как по подмножеству метрического пространства можно построить классические симплициальные комплексы Чеха и Веториса–Рипса, сформулируем и докажем теоремы, которые позволяют оценить снизу расстояние Громова–Хаусдорфа через известные группы гомологий многообразия (поверхности) с использованием этих комплексов (глава 6). Дальнейшие лекции основаны на теоремах типа Борсука–Улама, которые описывают свойства непрерывных отображений сфер, а также шаров в сферы (глава 7). Мы расскажем о разных вариантах этих теорем, приведем их подробные доказательства, и применим полученные результаты для оценки и вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа (глава 8). В конце курса мы расскажем о вычислении расстояния Громова–Хаусдорфа между отрезком и окружностью, которое основано на нетривиальных оценках, не использующих методы алгебраической топологии (глава 9).

Для понимания данного курса требуется начальное представление об общей топологии [4] и алгебре коммутативных групп [50]. Все остальное мы будем подробно разъяснять, давая столько деталей, сколько требуется слушателям для комфортного восприятия. Считаем, что наши лекции будут доступны даже студентам первого курса, а интересны эти лекции могут быть как старшекурсникам, так и аспирантам.

Тема 1

Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Мы начнем с обсуждения общих результатов, связанных с расстоянием Громова–Хаусдорфа. Более подробно с этой теорией можно познакомиться в классической монографии [11]. В этой теории расстояние далеко не всегда является метрикой, так как может быть бесконечным, а также равным нулю между разными точками. Мы будем придерживаться следующей терминологии. ***Ориентированным расстоянием*** мы будем называть каждое отображение $\rho\colon X\times X\to[0,\infty]$ такое, что $\rho(x,x)=0$ для каждого $x\in X$. Если дополнительно ρ симметрично, т.е. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для всех $x,y,\in X$, то отображение ρ назовем просто ***расстоянием***.

В приводимых ниже определениях ρ — расстояние. Если дополнительно

- $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ для всех $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника),

то ρ называется ***обобщенной псевдометрикой*** (иногда вместо термина "псевдометрика" используют "полуметрика").

Если еще

- $\rho(x,y)>0$ при $x\ne y$ (положительная определенность),

то ρ называется ***обобщенной метрикой***.

Наконец, если

- $\rho(x,y)<\infty$ для всех $x,y\in X$,

то слово "обобщенный" опускают. Иногда, кроме того, добавляют слово "конечная", например, конечная метрика или конечная псевдометрика.

Множество X, вместе с введенной функцией ρ, называют таким ***пространством***, как называется сама функция ρ. Например, если ρ — метрика, то X — ***метрическое пространство***, а если ρ — обобщенная псевдометрика, то X — ***обобщенное псевдометрическое пространство***.

Кроме того, мы будем иметь дело со всеми метрическими пространствами, которых столько же, сколько и всех множеств. Действительно, на каждом множестве можно ввести функцию расстояния, равную 1 между каждой парой различных точек. Тем самым, если мы хотим рассматривать всю совокупность метрических пространств, то сталкиваемся с известными парадоксами теории множеств. Чтобы избежать эти противоречия, мы обычно пользуемся вариантом теории множеств, называемым в честь фон Неймана, Бернайса и Гёделя [56]. Здесь множества заменяются на объекты, называемые ***классами***, причем классы бывают двух типов. Если класс является элементом некоторого другого класса, то он называется ***множеством***, а если нет — то ***собственным классом***. Так снимается парадокс "множества всех множеств", так как теперь совокупность всех множеств относится к другому типу объектов, т.е. является собственным классом. С классами можно почти всегда работать как с обычными множествами, в частности, для них определено декартово произведение, отображение, так что на классе можно, например, определить и обобщенную псевдометрику (расстояние Громова–Хаусдорфа именно ей и является). Но на собственных классах нельзя определить топологию. Действительно, по определению топологии на множестве X само множество является элементом топологии, так что на собственные классы такое определение не переносится. В [31, 32] мы предложили, как можно обойти эту трудность и определить аналог топологии. Впрочем, в настоящих лекциях нам это не понадобится.

1.1 Определение расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $|xy|$. Пусть теперь $x \in X$, а $r > 0$ и $s \ge 0$ — вещественные числа. Через $U_r(x) = \big\{y \in X : |xy| < r\big\}$ и $B_s(x) = \big\{y \in X : |xy| \le s\big\}$ обозначим соответственно ***открытый*** и ***замкнутый шары*** с центром в точке x и радиусами r и s. Если A и B — непустые подмножества X, то положим $|xA| = |Ax| = \inf\big\{|xa| : a \in A\big\}$ и $|AB| = |BA| = \inf\big\{|ab| : a \in A,\, b \in B\big\}$. Далее, определим ***открытую r-окрестность*** и ***замкнутую s-окрестность множества*** A, положив соответственно

$$U_r(A) = \big\{x \in X : |xA| < r\big\} \ \text{ и } \ B_s(A) = \big\{x \in X : |xA| \le s\big\}.$$

Определение 1.1. Для непустых подмножеств A и B метрического пространства X ***ориентированным расстоянием Хаусдорфа от A до B*** называется величина

$$\overrightarrow{d_H}(A,\, B) = \sup_{a\in A} |aB| = \inf\big\{r > 0 : A \subset U_r(B)\big\} = \inf\big\{s \ge 0 : A \subset B_s(B)\big\}.$$

Расстоянием Хаусдорфа между непустыми A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \max\big\{\overrightarrow{d_H}(A,\, B),\, \overrightarrow{d_H}(B,\, A)\big\} = \max\big\{\sup_{a\in A} |aB|,\, \sup_{b\in B} |Ab|\big\} =$$
$$= \inf\big\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } U_r(A) \supset B\big\} = \inf\big\{s \ge 0 : A \subset B_s(B) \text{ и } B_s(A) \supset B\big\}.$$

Задача 1.2. Докажите эквивалентность приведенных выше разных определений (ориентированного) расстояния Хаусдорфа.

Ориентированное расстояние Хаусдорфа нам будет удобно ***доопределить для пустого множества*** A, положив $\overrightarrow{d_H}(\emptyset,\, B) = 0$.

Расстояние Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой, т.е. удовлетворяет неравенству треугольника [11]. При этом оно может быть бесконечным, как в случае прямой $\mathbb{R}$ и любой ее точки, а также равняться нулю между разными подмножествами, например, между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$. Тем не менее, при некоторых ограничения расстояние Хаусдорфа превращается в метрику.

Напомним ряд конструкций и понятий метрической геометрии и топологии [4, 11].

- Для метрического пространства X величина $\operatorname{diam} X = \sup_{x,y\in X} |xy|$ называется ***диаметром*** пространства X.
- Метрическое пространство X называется ***ограниченным***, если $\operatorname{diam} X < \infty$.
- Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ в метрическом пространстве называется ***фундаментальной***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для каждых $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \ge n$ выполняется $|x_p x_q| < \varepsilon$.
- Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ в метрическом пространстве называется ***сходящейся к точке*** x, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n \ge N$ выполняется $|x_n x| < \varepsilon$.
- Метрическое пространство называется ***полным***, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится.
- Для $\varepsilon > 0$ подмножество Y метрического пространства X называется ***ε-сетью***, если для каждой точки $x \in X$ существует $y \in Y$ такая, что $|xy| < \varepsilon$.
- Метрическое пространство X называется ***вполне ограниченным***, если для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть. Свойство пространства быть вполне ограниченным называется ***полной ограниченностью***.
- Семейство $\{X_\alpha\}$ подмножеств подмножеств множества X называется ***покрытием*** X, если $X = \cup_\alpha X_\alpha$. Подсемейство в покрытии, само являющееся покрытием, называется ***подпокрытием***. Покрытие топологического пространства открытыми множествами называется ***открытым***.
- Топологическое пространство называется ***компактным***, если в любом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие.

Хорошо известно [4], что *метрическое пространство компактно, если и только если оно полное и вполне ограниченное.* Более того, компактность метрического пространства равносильна следующему свойству: *в каждой последовательности содержится сходящаяся подпоследовательность* (это свойство называется ***секвенциальной компактностью***).

Метрическое пространство называется ***ограниченно компактным***, если все замкнутые шары в нем компактны. Последнее эквивалентно тому, что подмножество такого пространства компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено.

Теорема 1.3 ([11])**.** *На множестве $\mathcal{H}(X)$, состоящем из всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства X, расстояние Хаусдорфа является метрикой. При этом X и $\mathcal{H}(X)$ одновременно обладают или нет следующими свойствами: полнотой, полной ограниченностью, компактностью, ограниченной компактностью.*

Задача 1.4. Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства X. Покажите, что $d_H(A,B) = 0$, если и только если замыкания $\bar{A}$ и $\bar{B}$ этих подмножеств совпадают, где ***замыканием*** $\bar{Y}$ подмножества Y топологического пространства X называется наименьшее замкнутое множество в X, содержащее Y, или, что эквивалентно, — пересечение всех замкнутых подмножеств в X, содержащих Y.

Если X и Y — изометричные метрические пространства, то этот факт будем обозначать $X \approx Y$.

Определение 1.5. ***Расстоянием Громова–Хаусдорфа*** между непустыми метрическими пространствами X и Y называется величина

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{d_H(X',Y') : X',Y' \subset Z,\ X' \approx X,\ Y' \approx Y\bigr\},$$

где точная нижняя грань берется по всем метрическим пространствам Z и всем изометричным вложениям пространств X и Y в Z.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 1.6 ([11])**.** *Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой, равной нулю на каждой паре изометричных пространств.*

В дальнейшем через $\mathcal{GH}$ будем обозначать собственный класс (в смысле теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя), состоящий их всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии и наделенный расстоянием Громова–Хаусдорфа. Собственный класс $\mathcal{GH}$ мы называем ***классом Громова–Хаусдорфа***. Подкласс в $\mathcal{GH}$, состоящий из всех ограниченных метрических пространств, обозначим $\mathcal{B}$, а подкласс в $\mathcal{B}$ из всех компактных метрических пространств — через $\mathcal{M}$. Класс $\mathcal{M}$ является множеством и называется ***пространством Громова–Хаусдорфа***.

Теорема 1.7 ([11])**.** *Ограничение на $\mathcal{M}$ расстояния Громова–Хаусдорфа является метрикой, т.е. оно положительно определено и конечно. В частности, если расстояние Громова–Хаусдорфа между непустыми компактными метрическими пространствами равно нулю, то эти пространства изометричны.*

Напомним, что метрическое пространство называется ***сепарабельным***, если оно содержит не более чем счетное всюду плотное подмножество. Напомним также, что ***длиной кривой*** $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве X называется супремум величин $\sum_{i=1}^{n}\bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr|$, который вычисляется по всевозможным разбиениям $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$. Отметим, что кривая может иметь бесконечную длину. Кривые конечной длины называются ***спрямляемыми***. Инфимум длин всех кривых, соединяющих данную пару точек метрического пространства, называется ***внутренним расстоянием между этими точками*** (если точки не соединяются ни одной кривой, то внутреннее расстояние между ними положим равным бесконечности). Легко видеть, что внутреннее расстояние удовлетворяет неравенству треугольника и положительно определено, поэтому является обобщенной метрикой. Если исходная метрика совпадает с внутренней, то она также называется ***внутренней***. Из неравенства треугольника вытекает, что *длина каждой кривой не меньше расстояния между ее концевыми точками*. Метрика называется ***строго внутренней***, а метрическое пространство — ***геодезическим***, если каждая пара точек соединяется кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.

Теорема 1.8 ([11])**.** *Пространство Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$ имеет мощность континуум и является полным, сепарабельным, геодезическим метрическим пространством, в котором каждый замкнутый шар ненулевого радиуса некомпактный.*

Замечание 1.9. Понятия полноты и внутренней метрики непосредственно переносятся как на обобщенные псевдометрические пространства, так и на собственные классы, наделенные расстоянием. Имеет место следующий результат.

Теорема 1.10 ([10, 6])**.** *Класс Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}$ является полным, а расстояние Громова–Хаусдорфа на нем — внутренней обобщенной псевдометрикой.*

1.2 Соответствия

Напомним, что ***отношением*** между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Частным случаем отношения является график функции $f\colon X\to Y$, который мы, как правило, будет обозначать тем же символом f. Если σ — отношение между X и Y, то определено обратное отношение $\sigma^{-1}=\big\{(y,x):(x,y)\in\sigma\big\}$ между Y и X. В этом смысле для функции $f\colon X\to Y$, даже не являющейся биекцией, мы будем писать f^{-1}, понимая при этом обратное отношение. Обозначим $\mathcal{P}_0(X\times Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y.

Определение 1.11. Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ и $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ назовем ***искажением*** $\operatorname{dis}\sigma$ ***отношения*** σ величину

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big|:(x,y),\,(x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Отношение $R\subset X\times Y$ между множествами X и Y, являющееся сюръективным многозначным отображением, называется ***соответствием***. Как и для отображений, для соответствия $R\subset X\times Y$, $x\in X$ и $y\in Y$ определены ***образ*** $R(x)=\big\{y\in Y:(x,y)\in R\big\}$ и ***прообраз*** $R^{-1}(y)=\big\{x\in X:(x,y)\in R\big\}$. Множество всех соответствий между X и Y обозначим $\mathcal{R}(X,Y)$. Хорошо известен следующий результат.

Теорема 1.12 ([11])**.** *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ выполняется*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Часто, особенно при работе с компактными метрическими пространствами, бывает более удобно иметь дело с ***замкнутыми соответствиями*** $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, т.е. с соответствиями $R\subset X\times Y$, являющимися замкнутыми подмножествами в $X\times Y$. Легко видеть, что для каждого соответствия R выполняется $\operatorname{dis}R=\operatorname{dis}\bar R$, где $\bar R$ — замыкание R. Пусть $\mathcal{R}_c(X,Y)$ обозначает множество замкнутых соответствий между X и Y. Из сказанного только что немедленно заключаем.

Теорема 1.13. *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ выполняется*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}_c(X,Y)\big\}.$$

Частный случай соответствия можно построить по любой паре отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$, положив $R_{f,g}=f\cup g^{-1}$, где, напомним, g^{-1} обозначает отношение, обратное к отношению g. С другой стороны, в каждом соответствии $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ можно выделить подсоответствие $R_{f,g}$, если в качестве отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$ выбрать такие, что $f\subset R$ и $g\subset R^{-1}$. Легко видеть, что искажение каждого подсоответствия не превосходит искажения соответствия, в частности, $\operatorname{dis}R_{f,g}\le\operatorname{dis}R$. Чтобы вычислить искажение соответствия $R_{f,g}$, нам понадобится ***коискажение*** $\operatorname{codis}(f,g)$, определяемое следующим образом:

$$\operatorname{codis}(f,g)=\sup_{x\in X,\,y\in Y}\Big|\big|x\,g(y)\big|-\big|f(x)\,y\big|\Big|.$$

Предложение 1.14. *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$, соответствия $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ и произвольных двух отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$ таких, что $f\subset R$ и $g\subset R^{-1}$, выполняется*

$$\operatorname{dis}R_{f,g}=\max\big\{\operatorname{dis}f,\,\operatorname{dis}g,\,\operatorname{codis}(f,g)\big\}\le\operatorname{dis}R.$$

Из предложения 1.14 и теоремы 1.12 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 1.15. *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ выполняется*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf_{\substack{f\colon X\to Y\\ g\colon Y\to X}}\max\big\{\operatorname{dis}f,\,\operatorname{dis}g,\,\operatorname{codis}(f,g)\big\}.$$

1.2.1 Неприводимые соответствия

Для решения конкретных задач оказывается полезным рассматривать не все соответствия, а лишь минимальные по включению. Такие соответствия мы называем ***неприводимыми***. Следующий результат показывает, что неприводимые соответствия всегда существуют и их “достаточно много”.

Теорема 1.16 ([34])**.** *Пусть X и Y — произвольные непустые множества, тогда для каждого $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ существует неприводимое соответствие $R_0 \in \mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $R_0 \subset R$.*

Выясним, как выглядит неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$.

Предложение 1.17. *Пусть $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ — неприводимое соответствие между непустыми множествами X и Y. Тогда*

- *если $\#R(x) > 1$ и $y \in R(x)$, то $R^{-1}(y) = \{x\}$;*
- *если $\#R^{-1}(y) > 1$ и $x \in R^{-1}(y)$, то $R(x) = \{y\}$;*
- *если $x \ne x'$, то или $R(x) \cap R(x') = \emptyset$, или же $R(x) = R(x') = \{y\}$ для некоторого $y \in Y$;*
- *если $y \ne y'$, то или $R^{-1}(y) \cap R^{-1}(y') = \emptyset$, или же $R^{-1}(y) = R^{-1}(y') = \{x\}$ для некоторого $x \in X$.*

Из предложения 1.17 вытекает, что покрытия $D_Y = \cup_{x\in X}\big\{R(x)\big\}$ и $D_X = \cup_{y\in Y}\big\{R^{-1}(y)\big\}$ являются разбиениями. При этом, между элементами этих разбиений соответствие R порождает следующую биекцию: элементы $X' \in D_X$ и $Y' \in D_Y$ соответствуют друг другу, если и только если для некоторых $x \in X'$ и $y \in Y'$ (и, значит, для любых таких x и y) выполняется $(x,y) \in R$. Эта биекция позволяет параметризовать оба разбиения одним и тем же множеством I, положив $D_X = \{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $D_Y = \{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$, где X_α и Y_α соответствуют друг другу. В терминах таких разбиений соответствие R удобно записывается, а именно, $R = \sqcup_{\alpha\in I} X_\alpha \times Y_\alpha$. Более того, для каждого α выполняется $\min\{\#X_\alpha,\, \#Y_\alpha\} = 1$.

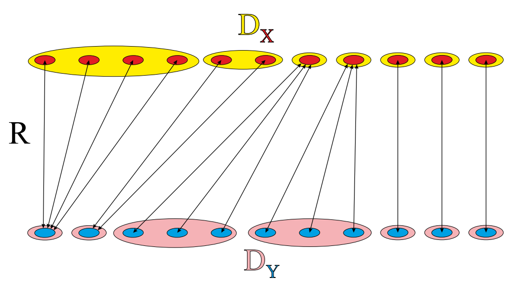

Рис. 1.1: Неприводимое соответствие R: биекция между разбиениями D_X и D_Y.

Обозначим $\mathcal{R}^0(X,Y)$ множество всех неприводимых соответствий между X и Y. Из сказанного выше вытекает следующий результат.

Теорема 1.18 ([34])**.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}^0(X,Y)\big\}.$$

1.3 Основные элементарные свойства расстояния Громова–Хаусдорфа

Пусть $n \ge 1$ — произвольный кардинал. Через Δ_n обозначим метрическое пространство, в котором все ненулевые расстояния равны 1. Отметим, что Δ_1 — одноточечное пространство. Для $X \in \mathcal{GH}$ и $\lambda > 0$ обозначим λX метрическое пространство, полученное из X умножением всех расстояний на λ. Если X — ограниченное пространство, то определим также λX для $\lambda = 0$, положив $0 \cdot X = \Delta_1$. Напомним, что для метрического пространства X его ***диаметр*** определяется так: $\operatorname{diam} X = \sup\big\{|xy| : x, y \in X\big\}$.

В следующем предложении собраны основные хорошо известные элементарные свойства расстояния Громова–Хаусдорфа.

Предложение 1.19 ([11]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется*

(1) *если $\varepsilon > 0$ и $Y \subset X$ — произвольная ε-сеть, то $d_{GH}(X,Y) \le \varepsilon$;*

(2) $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;

(3) $2d_{GH}(X,Y) \le \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$;

(4) *если диаметр X или Y конечен, то $\bigl|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\bigr| \le 2d_{GH}(X,Y)$;*

(5) *если диаметр X конечен, то для любых $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$, откуда мгновенно вытекает, что кривая $\gamma(t) := t\,X$ является кратчайшей между любыми своими точками, причем длина такого отрезка кривой равна расстоянию между его концами;*

(6) *для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d_{GH}(X,Y)$, а если пространства X и Y ограничены, то равенство имеет место и для $\lambda = 0$.*

На рис. 1.2 изображена схема собственного класса Громова–Хаусдорфа.

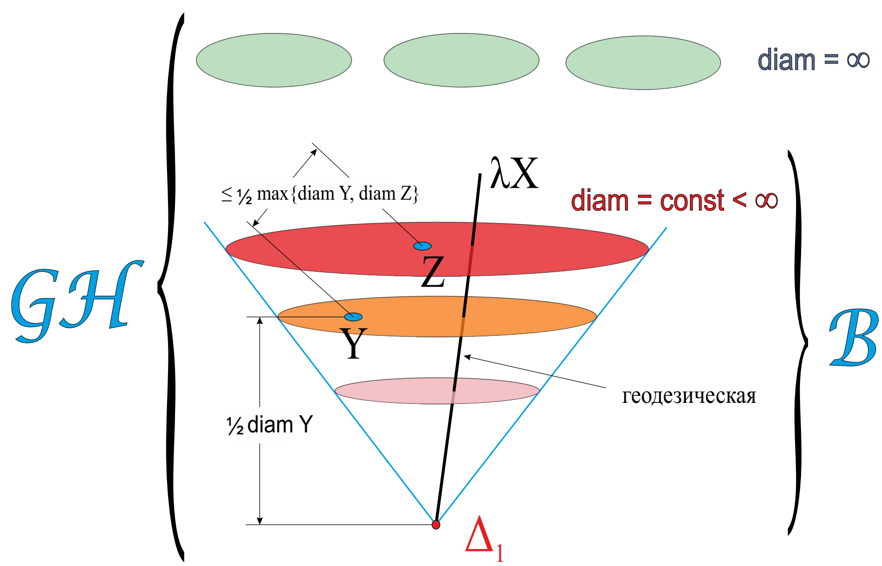

Рис. 1.2: Класс Громова–Хаусдорфа, общий вид.

Замечание 1.20. Покажем, как доказываются некоторые утверждения из предложения 1.19 с использованием теоремы 1.12.

(2) В этом случае между Δ_1 и X имеется единственное соответствие, а именно, $R = \Delta_1 \times X$. Если $\Delta_1 = \{p\}$, то $\operatorname{dis} R = \sup_{x,x' \in X} \bigl||pp| - |xx'|\bigr| = \operatorname{diam} X$, что и требовалось.

(3) По определению расстояния Громова–Хаусдорфа, для любого $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ выполняется $2d_{GH}(X,Y) \le \operatorname{dis} R$. Выберем в качестве R соответствие $X \times Y$. Легко видеть, что $\operatorname{dis} R = \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$, что и требовалось.

Мы рекомендуем слушателям доказать остальные пункты предложения самим.

Расстояние Громова–Хаусдорфа естественно переносится на псевдометрические пространства. А именно, если X — такое пространства, то введем на нем отношение эквивалентности “нулевых расстояний”, назначив эквивалентными каждую пару точек на нулевом расстоянии. Тогда фактор-пространство естественно превращается в метрическое: если $[x]$ и $[y]$ — классы этой эквивалентности, содержащие x и y, то полагаем $\bigl|[x][y]\bigr| = |xy|$. Из неравенства треугольника вытекает, что это определение не зависит от выбора представителей классов, а также что полученное расстояние положительно определено и, значит, является метрикой (симметричность и неравенство треугольника очевидны). Так вот, ***расстоянием Громова–Хаусдорфа между псевдометрическими пространствами*** назовем это расстояние между их факторами по нулевым расстояниям.

Впрочем, вместо факторизации можно было бы в определениях 1.1 и 1.5 заметить все метрические пространства на псевдометрические. В частности, если дословно применить формулу из теоремы 1.12 к псевдометрическим пространствам, а затем к соответствующим факторам этих пространств по нулевым расстояниям, то в результате получим одно и то же число (убедитесь в этом).

Тема 2

Расстояния до симплексов

Здесь мы обсудим результаты из [20, 29, 33, 35, 36, 37, 54], и некоторые из них докажем.

2.1 Расстояние Громова–Хаусдорфа между симплексами

Доказательства следующего результата получается оценкой снизу на расстояние Громова–Хаусдорфа из предложения 1.19 и построением соответствия, искажение которого дает такую же оценку, но сверху.

Предложение 2.1. *Пусть $\varDelta$ и $\varDelta'$ — симплексы мощности p и q соответственно. Положим $\lambda = \operatorname{diam}\varDelta$ и $\mu = \operatorname{diam}\varDelta'$, тогда*

$$2d_{GH}(\varDelta,\varDelta') = \begin{cases} |\lambda-\mu| & \text{при } p=q,\\ \max\{\lambda,\mu-\lambda\} & \text{при } p>q,\\ \max\{\mu,\lambda-\mu\} & \text{при } p<q. \end{cases}$$

В частности, если $p\ne q$, то $2d_{GH}(\varDelta,\varDelta')\ge\min\{\lambda,\mu\}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда один из симплексов $\varDelta$ и $\varDelta'$ — одноточечный, так что его диаметр равен нулю. Если $p=q=1$, то $\lambda=\mu=0$, откуда $2d_{GH}(\varDelta,\varDelta')=0=|\lambda-\mu|$. Если $p=1<q$, то $\lambda=0$ и предложение 1.19 влечет $2d_{GH}(\varDelta,\varDelta')=\mu=\max\{\mu,\lambda-\mu\}$. Случай $p>q=1$ вытекает из симметричности расстояния Громова–Хаусдорфа.

Пусть теперь $p\ge2$ и $q\ge2$. По предложению 1.19 имеем $2d_{GH}(\varDelta,\varDelta')\ge|\lambda-\mu|$.

Если $p=q\ge2$ и в качестве $R\in\mathcal{R}(\varDelta,\varDelta')$ выбрана биекция, то $\operatorname{dis}R=|\lambda-\mu|$, откуда $2d_{GH}(\varDelta,\varDelta')\le|\lambda-\mu|$ и, значит, имеет место декларируемое равенство.

Если $p>q$ и $R\in\mathcal{R}(\varDelta,\varDelta')$ — произвольное соответствие, то существует $y\in\varDelta'$ такое, что $\#R^{-1}(y)>1$, то тогда для различных $x_1,x_2\in R^{-1}(y)$ имеем $\bigl||x_1x_2|-|yy|\bigr|=\lambda$, поэтому $\operatorname{dis}R\ge\lambda$. Учитывая сказанное выше, имеем $\operatorname{dis}R\ge\max\bigl\{\lambda,|\mu-\lambda|\bigr\}$. С другой стороны, если $\varDelta=\{x_1,\dots,x_p\}$ и $\varDelta'=\{y_1,\dots,y_q\}$, то для

$$R=\bigl\{(x_1,y_1),\dots,(x_{q-1},y_{q-1}),(x_q,y_q),(x_{q+1},y_q),\dots,(x_p,y_q)\bigr\}$$

имеем $\operatorname{dis}R=\max\bigl\{\lambda,|\mu-\lambda|\bigr\}$, откуда $2d_{GH}(\varDelta,\varDelta')=\max\bigl\{\lambda,|\mu-\lambda|\bigr\}$. Для завершения разбора этого случая достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2.2. *Для любых $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\mu\ge0$ выполняется*

$$\max\bigl\{\lambda,|\mu-\lambda|\bigr\}=\max\{\lambda,\mu-\lambda\}.$$

Доказательство. Если $\mu\ge\lambda$, то $|\mu-\lambda|=\mu-\lambda$, так что равенство имеет место.

Пусть теперь $\mu\le\lambda$. Тогда $0\le|\mu-\lambda|=\lambda-\mu\le\lambda$, так как $\mu\ge0$. Следовательно, $\max\bigl\{\lambda,|\mu-\lambda|\bigr\}=\lambda$. Кроме того, мы также получили $\lambda\ge0$, и учитывая, что $\mu-\lambda\le0$, заключаем $\max\{\lambda,\mu-\lambda\}=\lambda$, поэтому равенство тоже имеет место. □

Случай $p<q$ вытекает из симметричности расстояния Громова–Хаусдорфа. □

Замечание 2.3. Если Δ — не одноточечный симплекс, то $\lambda := \operatorname{diam}\Delta > 0$, $p := \#\Delta \ge 2$, тогда $\Delta = \lambda\Delta_p$. Если же симплекс одноточечный, то его можно представить в виде $0 \cdot \Delta_p$ для любого $p \ge 1$, а также в виде $\lambda\Delta_1$ для любого $\lambda \ge 0$. Это приводит к тому, что обозначения $\lambda\Delta_p$ не всегда удобны, например, в их терминах предложение 2.1 будет выглядеть более громоздко.

Опишем теперь результаты вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа от симплексов до различных метрических пространств.

2.2 Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов

Начнем со случая, когда мощность пространства меньше мощности симплекса.

Теорема 2.4 (симплексы большей мощности)**.** *Для метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ и симплекса Δ такого, что $\#\Delta > \#X$ и $\lambda := \operatorname{diam}\Delta$ выполняется*

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Рассуждения почти дословно повторяют разбор случая $p > q$ из предложения 2.1. □

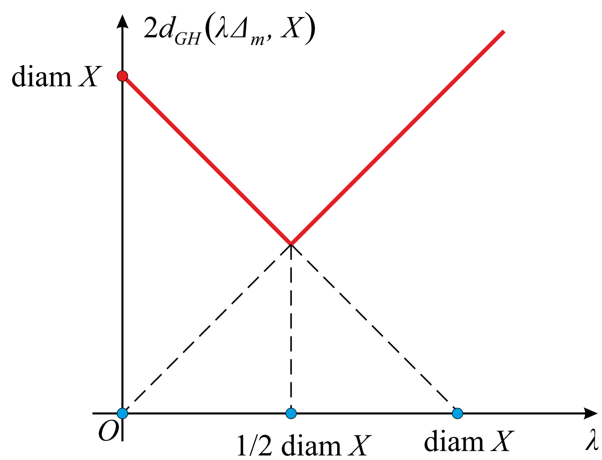

Рис. 2.1: Зависимость расстояния $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$ от λ при $m > \#X$.

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой мощность симплекса не превосходит мощности пространства. Нам понадобятся дополнительные построения.

Для кардинального числа $2 \le m \le \#X$ через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим множество всевозможных разбиений пространства X на m непустых подмножеств. Для $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, где $\#I = m$, положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i, \quad \alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i, j \in I,\ i \ne j\bigr\}.$$

Через $\mathcal{R}_1^0(X,Y)$ обозначим множество всех неприводимых соответствий $R \in \mathcal{R}^0(X,Y)$ таких, что порожденные ими разбиения D_X пространства X состоят из одноточечных подмножеств. Ясно, что $\mathcal{R}_1^0(X,Y) \ne \emptyset$, если и только если $\#X \le \#Y$.

Лемма 2.5. *Для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$ и симплекса Δ такого, что $2 \le m := \#\Delta \le \#X$ выполняется*

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \inf_{R\in\mathcal{R}_1^0(\Delta,X)} \operatorname{dis} R.$$

Лемма 2.6. *Для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$, симплекса Δ такого, что $2 \le \#\Delta \le \#X$, $\lambda := \operatorname{diam}\Delta$, произвольного $R \in \mathcal{R}_1^0(\Delta, X)$ и порожденного R разбиения D_X пространства X выполняется*

$$\operatorname{dis} R = \max\bigl\{\operatorname{diam} D_X,\ \lambda - \alpha(D_X),\ \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 2.7 (симплексы не больше мощности). *Для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$, симплекса Δ такого, что $2 \le m := \#\Delta \le \#X$ и $\lambda = \operatorname{diam}\Delta$ выполняется*

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\bigl\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Приведем ряд важных частных случаев.

Для произвольного метрического пространства X, $2 \le m \le \#X$, положим

$$\alpha_m(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \alpha(D) \quad\text{и}\quad d_m(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D.$$

Следствие 2.8. *Пусть $X \in \mathcal{B}$ — произвольное ограниченное метрическое пространство и Δ — симплекс такой, что $2 \le m := \#\Delta \le \#X$ и $\lambda := \operatorname{diam}\Delta$. Предположим, что $\alpha_m(X) = 0$, тогда*

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \max\bigl\{d_m(X),\ \lambda,\ \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Доказательство. Так как $\alpha_m(X) = 0$, то для каждого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\alpha(D) = 0$, откуда, по теореме 2.7,

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\bigl\{\operatorname{diam} D,\ \lambda,\ \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\} = \max\Bigl\{\inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D,\ \lambda,\ \operatorname{diam} X - \lambda\Bigr\} =$$
$$= \max\bigl\{d_m(X),\ \lambda,\ \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\},$$

что и требовалось. □

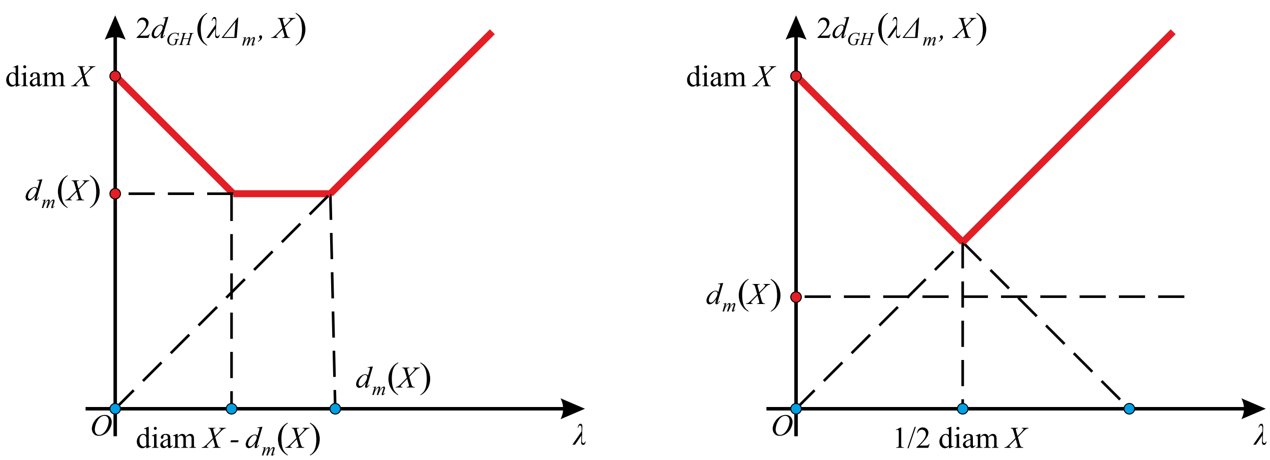

Рис. 2.2: Зависимость $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$ от λ, случай $2 \le m \le \#X$ и $\alpha_m(X) = 0$.

Следствие 2.9. *Пусть $X \in \mathcal{B}$ — произвольное ограниченное метрическое пространство и Δ — симплекс такой, что $2 \le m := \#\Delta \le \#X$ и $\lambda := \operatorname{diam}\Delta$. Предположим, что $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, тогда*

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X,\ \lambda - \alpha_m(X)\bigr\}.$$

Доказательство. Так как $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, то $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$ для всех $D \in \mathcal{D}_m(X)$, откуда, по теореме 2.7,

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\bigl\{\operatorname{diam} X,\ \lambda - \alpha(D),\ \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\} = \max\Bigl\{\operatorname{diam} X,\ \lambda - \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \alpha(D)\Bigr\} =$$
$$= \max\bigl\{\operatorname{diam} X,\ \lambda - \alpha_m(X)\bigr\},$$

что и требовалось. □

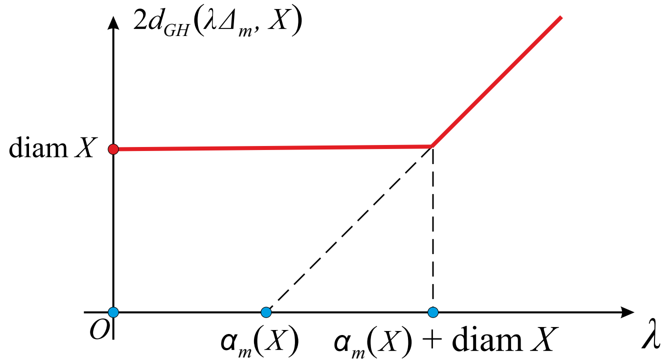

Рис. 2.3: Зависимость $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$ от λ, случай $2 \le m \le \#X$ и $d_m(X) = \operatorname{diam} X$.

Для произвольного метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ положим

$$s(X) = \inf\bigl\{|xy| : x, y \in X,\ x \ne y\bigr\}.$$

Следствие 2.10. *Пусть X — непустое конечное метрическое пространство и Δ — симплекс, $\lambda = \operatorname{diam}\Delta$. Предположим, что $2 \le \#\Delta = \#X$, тогда*

$$2d_{GH}(\Delta, X) = \max\bigl\{\lambda - s(X), \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Доказательство. Положим $m = \#D = \#X$. Так как $\mathcal{D}_m(X)$ состоит из одного разбиения D, а именно, разбиения на одноточечные подмножества, то $\operatorname{diam} D = 0$, $\alpha(D) = s(X)$, и остается применить теорему 2.7. □

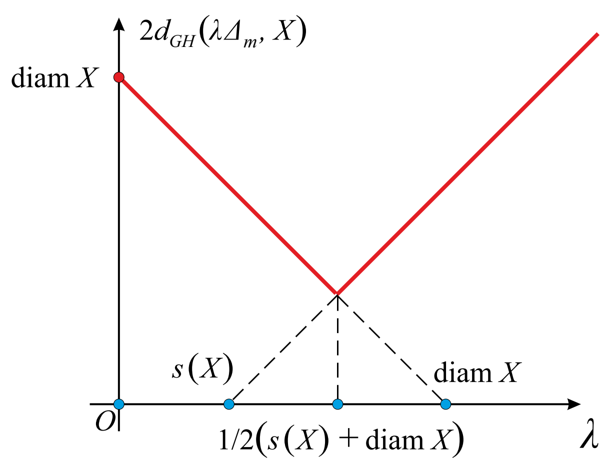

Рис. 2.4: Зависимость $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$ от λ, случай $2 \le m = \#X < \infty$.

Замечание 2.11. Рассмотренные выше частные случаи характерны тем, что $\alpha_m(X)$ и $d_m(X)$ принимают “критические” значения. В общей ситуации графики могут быть существенно сложнее, и до сих пор полного ответа в задаче отыскания расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов нет. Некоторые нетривиальные продвижения можно найти в [20, 29, 33]. Приведем иллюстрацию из статьи [33]. Здесь X — четырехточечное пространство с вершинами $\{1, 2, 3, 4\}$ и расстояниями $a_{12} = a$, $a_{13} = b$, $a_{14} = d$, $a_{23} = c$, $a_{24} = e$, $a_{34} = f$, причем $a < e < b < c < f < d$. На рисунке 2.5 приведен график зависимости $2d_{GH}(\lambda\Delta_2, X)$ от λ для $a = 3$, $e = 3.5$, $b = 4$, $c = 5$, $f = 6$, $d = 6.5$.

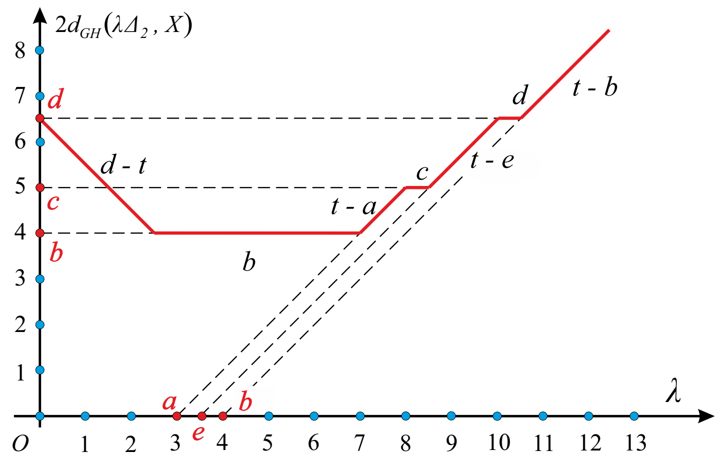

Рис. 2.5: Зависимость $2d_{GH}(\lambda\Delta_2, X)$ от λ, случай четырехточечного пространства X.

2.3 Минимальные остовные деревья

Пусть X — непустое конечное метрическое пространство и $G = (X, E)$ — произвольный простой граф с множеством вершин X и множеством ребер E. Для удобства рёбра $e = \{x, y\} \subset X$ будем обозначать $xy = yx$. Для каждого ребра $e = xy$ такого графа G определена ***длина*** $|e|$ как расстояние $|xy|$ между вершинами x и y. Сумма длин всех ребер графа G называется ***длиной графа*** G и обозначается $|G|$. Если в графе G нет ребер, то полагаем $|G| = 0$.

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{T}(X) = \{T_i\}$ всех деревьев $T_i = (X, E_i)$, тогда величина

$$\operatorname{mst}(X) := \min_{T_i \in \mathcal{T}(X)} |T_i|$$

называется ***длиной минимального остовного дерева на*** X, а дерево $T \in \mathcal{T}(X)$, для которого $|T| = \operatorname{mst}(X)$, — ***минимальным остовным деревом на*** X. Заметим, что минимальное остовное дерево существует всегда, хотя может быть не единственным. Множество всех минимальных остовных деревьев на X обозначим $\operatorname{MST}(X)$.

Для $n = \#X$ и $T \in \operatorname{MST}(X)$ через $\sigma(T) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ обозначим вектор длин ребер дерева T, упорядоченных по убыванию. Хорошо известен следующий результат, см. например [17].

Предложение 2.12. *Для любых $T, T' \in \operatorname{MST}(X)$ имеем $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

Таким образом, величина $\sigma(T)$ зависит лишь от метрического пространства X, а не от конкретного минимального остовного дерева на X. В силу этого мы обозначим $\sigma(T)$ через $\sigma(X)$ и назовем полученную величину mst-***спектром метрического пространства*** X. Также нам понадобится ***расширенный*** mst-***спектр*** $\bar\sigma$ ***пространства*** X, полученный из $\sigma(X) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ добавлением в конец компоненты $\sigma_n = 0$.

Лемма 2.13. *Пусть X — конечное метрическое пространство, $\#X \ge 2$, и $T = (X, E)$ — некоторое минимальное остовное дерево. Для каждой пары различных вершин $x, y \in X$ обозначим $\gamma_{x,y} = \gamma_{y,x}$ единственный путь в дереве T, соединяющий x и y. Тогда для каждого ребра e пути $\gamma_{x,y}$ имеем $|e| \le |xy|$.*

Доказательство. Если это не так, то замена ребра e на более короткое ребро xy приведет к новому остовному дереву T', более короткому, чем дерево T, что противоречит минимальности последнего. □

Лемма 2.14. *Пусть X — конечное метрическое пространство, состоящее из $n \ge 2$ точек, $T = (X, E)$ — некоторое минимальное остовное дерево, $T_i = (X_i, E_i)$, $i = 1, 2$ — связные компоненты леса, полученного выбрасыванием ребра $e \in E$ из дерева T. Тогда $|X_1X_2| = |e|$.*

Доказательство. Выберем произвольные не смежные в T вершины $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, и пусть γ — путь в T, соединяющий x_1 с x_2. Ясно, что γ содержит ребро e и, по лемме 2.13, длины ребер пути γ, в частности, длина ребра e не превосходят $|x_1x_2|$, поэтому $|X_1X_2| = |e|$, что и требовалось. □

Лемма 2.15 ([54]). *Пусть X — конечное метрическое пространство, состоящее из $n \ge 2$ точек, и $\sigma(X) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ — его* mst-*спектр. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $2 \le m \le n$ и любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\alpha(D) \le \sigma_{m-1}$. Более того, если $T = (X, E)$ — некоторое минимальное остовное дерево, $T_i = (X_i, E_i)$ — связные компоненты леса, полученного из T выбрасыванием ребер, имеющих длины $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$, а $D = \{X_i\} \in \mathcal{D}_m(X)$ — соответствующее разбиение, то $\alpha(D) = \sigma_{m-1}$. Тем самым, $\alpha_m(X) = \sigma_{m-1}$.*

Доказательство. Пусть $D = \{X_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{D}_m(X)$ — произвольное разбиение X. Построим граф G, вершины которого — это множества X_i, а вершины X_i и X_j, $i \ne j$ соединены ребром, если и только если существует ребро $e_{ij} \in E$, одна вершина которого лежит в X_i, а другая — в X_j. Так как $\{X_i\}_{i=1}^m$ — разбиение X, то все ребра e_{ij} различны. В силу связности дерева T граф G также связный, поэтому в нем имеется не менее $(m-1)$-ого различного ребра. Выберем из ребер e_{ij} произвольным образом $(m-1)$-о ребро $e_1, \dots, e_{m-1}$, тогда $\alpha(D) \le \min |e_i| \le \sigma_{m-1}$.

С другой стороны, если $D = \{X_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{D}_m(X)$ выбрано так, что $T_i = (X_i, E_i)$ — связные компоненты леса, полученного из T выбрасыванием ребер длин $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$, то $\alpha(D) = \sigma_{m-1}$ в силу леммы 2.14. Следовательно, $\alpha_m(X) = \max_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \alpha(D) = \sigma_{m-1}$. □

Лемма 2.16. *Пусть X — конечное метрическое пространство, состоящее из $n \ge 2$ точек, и $\bar\sigma(X) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$ — его расширенный* mst-*спектр. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $2 \le m \le n$ и $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\operatorname{diam} D \ge \sigma_m$, в частности, $d_m(X) \ge \sigma_m$.*

Доказательство. Если $m = n$, то D — разбиение на одноточечные подмножества, поэтому $\operatorname{diam} D = 0 \ge \sigma_n = 0$ и $d_n(X) = 0 \ge \sigma_n = 0$.

Пусть теперь $m < n$ и $D = \{X_i\}_{i=1}^m$. Выберем произвольное минимальное остовное дерево $T = (X, E)$ и обозначим $T_i = (V_i, E_i)$ наименьшее поддерево в T, множество вершин которого содержит X_i. Ясно, что или T_i одноточечное, или же T_i равно объединению путей в T, соединяющих всевозможные пары различных точек из X_i. По лемме 2.13 расстояние между любыми $x, y \in X_i$ не меньше, чем длины всех ребер пути в T, соединяющем x и y, поэтому $\operatorname{diam} X_i \ge \max_{e \in E_i} |e|$ (если $E_i = \emptyset$, то полагаем $\max_{e \in E_i} |e| = 0$).

Построим граф T' с вершинами T_i, соединив ребрами каждую пару различных T_i и T_j, если и только если $V_i \cap V_j \ne \emptyset$. Связные компоненты графа T' обозначим T'_p. Для каждого k рассмотрим объединение деревьев T_i, являющихся вершинами из T'_p. Каждое такое объединение является поддеревом в T. Множество полученных поддеревьев в T, которые мы обозначим $\bar T_p = (\bar X_p, \bar E_p)$, состоит не более чем из m элементов. Так как $\cup_i X_i = X$, то $\cup_i V_i = X$ и, значит, $X = \sqcup_p \bar X_p$.

Построим граф $\bar T$, вершины которого — деревья $\bar T_p$, и разные вершины $\bar T_p$ и $\bar T_q$ соединим ребром, если некоторые вершины деревьев $\bar T_p$ и $\bar T_q$ соединены ребром e_{pq} дерева T. Ясно, что в результате мы получим дерево с не более чем m вершинами и, значит, с не более чем $(m-1)$-им ребром. Кроме того, $\sqcup_p \bar E_p \cup \{e_{pq}\} = E$, поэтому самое длинное ребро e, которое входит в $\sqcup_p \bar E_p$, имеет длину не меньше σ_m. Следовательно, существует дерево $\bar T_p$, которое содержит e. Если $\bar T_p = T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_r}$, то для некоторого $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$ имеем $e \in E_i$. Как было отмечено выше, существует путь γ в T, содержащий e и соединяющий некоторые $x, y \in X_i$. Снова по лемме 2.13 имеем $|e| \le |xy|$, поэтому $\operatorname{diam} X_i \ge |e| \ge \sigma_m$, откуда и $\operatorname{diam} D \ge \sigma_m$, что и завершает доказательство леммы. □

Теорема 2.17 ([54]). *Пусть X — конечное метрическое пространство, $n = \#X \ge 2$, $\bar\sigma(X) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$ — его расширенный* mst-*спектр и $\lambda \ge 0$ — вещественное число. Тогда для всех $2 \le m \le n$ выполняется*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \ge \max\bigl\{\sigma_m, \lambda - \sigma_{m-1}, \sigma_1 - \lambda\bigr\}.$$

При этом, если $\lambda \ge 2 \operatorname{diam} X$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \lambda - \sigma_{m-1},$$

что позволяет вычислить mst-*спектр через расстояние Громова–Хаусдорфа от пространства X до соответствующих симплексов.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.7, в соответствии с которой

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \max\bigl\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

По леммам 2.15 и 2.16 имеем $\alpha(D) \le \sigma_{m-1}$ и $\operatorname{diam} D \ge \sigma_m$ для всех $D \in \mathcal{D}_m(X)$, поэтому $\lambda - \alpha(D) \ge \lambda - \sigma_{m-1}$. Кроме того, $\operatorname{diam} X \ge \sigma_1$, так что $\operatorname{diam} X - \lambda \ge \sigma_1 - \lambda$. Из полученных неравенств получается первое утверждение теоремы.

Далее, если $\lambda \ge 2\operatorname{diam} X$, то

$$\operatorname{diam} X - \lambda \le -\operatorname{diam} X < 0 \le \lambda - \alpha(D) \quad \text{и} \quad \operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} X \le \operatorname{diam} X + \operatorname{diam} X - \alpha(D) \le \lambda - \alpha(D),$$

поэтому

$$2d_{GH}(\lambda\varDelta_m, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\big(\lambda - \alpha(D)\big) = \lambda - \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\alpha(D) = \lambda - \alpha_m(X) = \lambda - \sigma_{m-1}(X),$$

где последнее равенство вытекает из леммы 2.15. □

2.4 Число кликового покрытия графа

В статье [36] была найдена связь между расстояниями Громова–Хаусдорфа от конечного метрических пространств с двумя ненулевыми расстояниями до симплексов и числами кликового покрытия графов. Напомним соответствующие определения.

Кликой в произвольном простом графе $G=(V,E)$ называется каждый его подграф, в котором всякие две вершины соединены ребром. Отметим, что каждый одновершинный подграф по определению является кликой. Ясно, что семейство вершин всех клик покрывает V. Если $\{V_i\}$ — покрытие V множествами вершин некоторых клик, то такое $\{V_i\}$ называется ***кликовым покрытием***. Наименьшая мощность кликовых покрытий множества V называется ***числом кликового покрытия графа*** G. Это число мы обозначим $\theta(G)$.

Теорема 2.18 ([36]). *Пусть $G=(V,E)$ — произвольный конечный простой граф. Выберем любые $0<a<b\le 2a$ и введем на V метрику, положив все расстояния между смежными в G вершинами равными a, а все остальные расстояния равными b. Тогда*

- *$\theta(G)$ равно наименьшему из $m\in\mathbb{N}$, для которых $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)<b$;*
- *$\theta(G)$ равно наименьшему из $m\in\mathbb{N}$, $m\le\#V$, для которых $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)<b$;*
- *если n — или наибольшее из чисел $m\in\mathbb{N}$, для которых $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)=b$, или 0, если таких чисел m нет, то $\theta(G)=n+1$.*

Доказательство. По теореме 2.7, для $1\le m\le\#V$ имеем

$$2d_{GH}(a\varDelta_m, V) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(V)}\max\big\{\operatorname{diam} D,\, a-\alpha(D),\, \operatorname{diam} V - a\big\}.$$

Так как $a-\alpha(D)$ и $\operatorname{diam} V - a$ меньше b, то условие $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)=b$ равносильно $\operatorname{diam} D = b$ для всех $D\in\mathcal{D}_m(V)$. Но последнее условие означает, что в каждом разбиении D имеется элемент, содержащий точки на расстоянии b, т.е. несмежные вершины графа G. Таким образом, ни одно разбиение $D\in\mathcal{D}_m(V)$ не является кликовым покрытием. С другой стороны, если $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)<b$, то для некоторого $D\in\mathcal{D}_m(V)$ выполняется $\operatorname{diam} D<b$, поэтому $\operatorname{diam} D = a$. Но последнее равносильно тому, что в каждом элементе разбиения D все расстояния равны a, т.е. все вершины графа G в таком элементе смежны, откуда D — кликовое покрытие. Итак, мы показали, что для $1\le m\le\#V$ выполняется $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)<b$, если и только если граф G имеет кликовое покрытия мощности m. Например, для $m=\#V$ мы можем применить следствие 2.10 и получить

$$2d_{GH}(a\varDelta_m, V) = \max\big\{a-s(V),\, \operatorname{diam} V - a\big\} < b,$$

где $s(V)$ — наименьшее расстояние между различными точками из V (это естественно, так как одноточечное разбиение множества V всегда является кликовым покрытием). Заметим также, что для $m>\#V$, в силу теоремы 2.4 имеем

$$2d_{GH}(a\varDelta_m, V) = \max\{a, \operatorname{diam} V - a\} < b.$$

Значит $\theta(G)$ равно наименьшему из $m\in\mathbb{N}$ (а также наименьшему из $m\in\mathbb{N}$, $m\le\#V$), для которых $2d_{GH}(a\varDelta_m, V)<b$. Таким образом, мы доказали первые два пункта теоремы.

Чтобы доказать третий пункт заметим, что если имеется кликовое покрытие из $m<\#V$ элементов, то для любого $k\in\mathbb{N}$, $m<k\le\#V$ также имеется k-элементное кликовое покрытие. Рассмотрим два случая.

(1) Граф G полный, так что $\theta(G)=1$ и нет ни одного $m\in\mathbb{N}$, $m\le\#V$, для которого не существует m-элементного кликового покрытия. В этой ситуации мы положили по определению $n=0$ и, значит, $\theta(G)=1=n+1$.

(2) Граф G не полный, так что $\theta(G) \geq 2$. Это означает, что имеются такие $m \in \mathbb{N}$, $m \leq \#V$, для которых нет m-элементного кликового покрытия, например $m = 1$. Как мы уже отмечали, для $m = \#V$ кликовое покрытие существует, так что теперь $1 \leq n < \#V$, и для всех $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ не существует k-элементных кликовых покрытий, а для всех $k \in \mathbb{N}$, $n + 1 \leq k \leq \#V$ такие покрытия есть. Значит $\theta(G) = n + 1$.

$\square$

Литература

[1] Adams H., Frick F., Majhi S., McBride N. *Hausdorff vs Gromov–Hausdorff distances*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2309.16648 [math.MG].

[2] Adams H., Majhi S., Manin F., Virk Z., Zava N. *Lower-bounding the Gromov–Hausdorff distance in metric graphs*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2411.09182.

[3] Alexandroff P.S. *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung*. Mathematische Annalen, 1928, v. 98, N 1, pp. 617–635.

[4] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.

[5] Wikipedia: Arzelà–Ascoli theorem

[6] Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V., Tuzhilin A.A. *Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers*, 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2202.07337v1 [math.MG].

[7] Bollobas B. *The art of mathematics: Coffee time in Memphis*, Cambridge University Press, 2006.

[8] Borsuk K. *On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes*. Fundamenta Mathematicae, 1948, v. 35, N 1, pp. 217–234.

[9] Гипотеза Борсука (википедия)

[10] Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance*, 2020, arXiv:2009.00458v1 [math.MG].

[11] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[12] Carlsson G.E., Memoli F. *Characterization, stability and convergence of hierarchical clustering methods*, J. Mach. Learn. Res., 2010, vol. 11, pp. 1425–1470.

[13] Chazal F., de Silva V., Oudot S. *Persistence stability for geometric complexes*. Geometriae Dedicata, 2014, v. 174, pp. 193–214.

[14] Chowdhury S., Memoli F. *Explicit geodesics in Gromov-Hausdorff space*, Electronic Research Announcements, 2018, vol. 25, pp. 48–59.

[15] Dubins L., Schwarz G. *Equidiscontinuity of Borsuk-Ulam functions*, Pacific Journal of Mathematics, 1981, vol. 95, N 1, pp. 51–59.

[16] Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators*, v. 1, Wiley-Interscience (1958).

[17] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И., *Л*екции по теории графов, М.: УРСС, 2019.

[18] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии*. - М., Наука, 1989.

[19] Freund R.M., Todd M.J. *A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma*. J. Combinatorial Theory, Ser. A, 1981, v. 30, pp. 321–325.

[20] Grigor'ev D.S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance to Simplexes*, 2019, ArXiv e-prints, arXiv:1906.09644v1 [math.MG].

[21] Gromov M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.

[22] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[23] Hadwiger H. *Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.* Commentarii Mathematici Helvetici, 1946, v. 19.

[24] Hadwiger H. *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.* Commentarii Mathematici Helvetici, 1945, v. 18, N 1, pp. 73–75.

[25] Harrison M., Jeffs R.A. *Quantitative upper bounds on the Gromov–Hausdorff distance between spheres*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2309.11237v3 [math.MG].

[26] Hatcher A. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[27] Hausmann J.C. *Mod Two Homology and Cohomology.* Universitext. Springer International Publishing, 2015.

[28] Hausmann J.C.. *On the Vietoris–Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces.* Annals of Mathematics Studies, 1995, v. 138, pp. 175–188.

[29] Ivanov A.O., Lychagina E.S., Tuzhilin A.A. *Metric Space Recognition by Gromov–Hausdorff Distances to Simplexes*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2412.18949v1 [math.MG].

[30] Ivanov A.O., Mikhailov I.N., Tuzhilin A.A. *Gromov-Hausdorff Geometry of Metric Trees*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2412.18888v1 [math.MG].

[31] Ivanov A.O., Tsvetnikov R.A., Tuzhilin A.A. *Path Connectivity of Spheres in the Gromov-Hausdorff Class*, 2021, ArXiv e-prints, arXiv:2111.06709 [math.MG].

[32] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Лекции по геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа*, 2021.

[33] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655v1 [math.MG].

[34] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116v1 [math.MG].

[35] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Solution to Generalized Borsuk Problem in Terms of the Gromov–Hausdorff Distances to Simplexes.* 2019, ArXiv e-prints, arXiv:1906.10574 [math.MG].

[36] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *The Gromov–Hausdorff Distance between Simplexes and Two-Distance Spaces*, 2019, ArXiv e-prints, arXiv:1907.09942v1 [math.MG].

[37] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Distances between Simplexes and Ultrametric Spaces*, 2019, ArXiv e-prints, arXiv:1907.03828v1 [math.MG].

[38] Jenrich T. *A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture*, 2014, ArXiv e-prints, arXiv:1308.0206v6 [math.MG].

[39] Ji Y., Tuzhilin A.A. *Gromov-Hausdorff Distance Between Segment and Circle*, 2021, ArXiv e-prints, arXiv:2101.05762 [math.MG].

[40] Kahn J., Kalai G. *A counterexample to Borsuk's conjecture.* Bull. Amer. Math. Soc., 1993, v. 29, N 1, 60–62.

[41] Lim S., Memoli F., Smith Z. *The Gromov–Hausdorff distance between spheres.* Geometry & Topology, 2023, v. 27, N 9, pp. 3733–3800.

[42] Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. *Топологические методы в вариационных задачах.* М.: Исследовательский институт математики и механики при I МГУ, 1930.

[43] StackExchange: The Lusternik–Schnirelmann Theorem For Open and Closed Sets

[44] Martin S.R. *Gromov-Hausdorff distances from simply connected geodesic spaces to the circle*, 2024, ArXiv e-prints, arXiv:2404.05153v2 [math.MG].

[45] Martin S.R. *Some novel constructions of Gromov-Hausdorff-optimal correspondences between spheres*, 2025, ArXiv e-prints, arXiv:2409.02248v2 [math.MG].

[46] Matoušek J. *Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Springer Science & Business Media, 2003.

[47] Memoli F., Smith Z.T. *Embedding-projection correspondences for the estimation of the Gromov-Hausdorff distance*, 2024, arXiv preprint arXiv:2407.03295 [math.MG].

[48] Mikhailov I.N. *Ultrametric spaces and clouds*, ArXiv e-prints, arXiv:2501.19346v1 [math.MG].

[49] Munkholm H.J. *A Borsuk-Ulam theorem for maps from a sphere to a compact topological manifold*, Illinois Journal of Mathematics, 1969, vol.13, N 1, pp. 116–124.

[50] Munkres J.R. *Elements of Algebraic Topology*, Westview Press, 1996.

[51] Райгородский А.М. *Вокруг гипотезы Борсука.* Геометрия и механика, СМФН, 23, РУДН, М., 2007, 147–164; Journal of Mathematical Sciences, 2008, v. 154, N 4, 604–623.

[52] Schmiedl F. *Computational aspects of the Gromov–Hausdorff distance and its application in non-rigid shape matching.* Discrete and Computational Geometry, 2017, v. 57, N 4, pp. 854–880.

[53] Talipov T. Gromov-Hausdorff distance between vertex sets of regular polygons inscribed in a given circle, 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2210.09971v1 [math.MG].

[54] Tuzhilin A.A. *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance*, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1605.01566v1 [math.MG].

[55] Virk Z. *Rips complexes as nerves and a functorial Dowker-nerve diagram.* Mediterranean Journal of Mathematics, 2021, v. 18, N 2, pp. 1–24.

[56] Von Neumann–Bernays–Gödel set theory (wikipedia)