Геометрия квантового расстояния Громова–Хаусдорфа, часть II

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

21 декабря 2023 г.
16:17:51

Оглавление

Тема 4

Функциональное исчисление C^*-алгебр. Положительные элементы.

План. Функциональное исчисление в $a \in A$ — канонический изометричный изоморфизм $\varphi\colon C(\sigma(a)) \to C^*(1,a) \subset A$. Положительные элементы, квадратные корни, квадраты и модули. Линейная оболочка унитарных элементов. Частичный порядок на эрмитовых элементах. Аппроксимативная единица, ее существование, свойства. Положительные функционалы, их свойства. Состояния алгебры. Разложение Жордана. ГНС-конструкция. Представление Гельфанда–Наймарка. Матричные C^*-алгебры.

Продолжим развивать теорию C^*-алгебр, в частности, докажем многочисленные следствия из теоремы Гельфанда 3.48.

4.1 Функциональные исчисления

Начнем со следующего тривиального замечания. Пусть $\theta\colon \Omega \to \Omega'$ — непрерывное отображение компактных хаусдорфовых топологических пространств, тогда оно индуцирует ***транспонированное*** отображение

$$\theta^t\colon C(\Omega') \to \mathbb{C}(\Omega), \quad f \mapsto f \circ \theta,$$

которое, очевидно, является унитальным $*$-гомоморфизмом. Если при этом θ — гомеоморфизм, то θ^t — это унитальный $*$-изоморфизм.

Приведем еще одно наблюдение, мгновенно вытекающее из теоремы 3.44, примененной к $*$-изоморфизму C^*-алгебр.

Следствие 4.1. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — произвольный $*$-изоморфизм C^*-алгебр. Тогда φ — изометрия.*

С помощью следствия 4.1 мы докажем следующую полезную теорему.

Теорема 4.2. *Пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A и $z\colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$ — включение. Тогда существует единственный унитальный C^*-гомоморфизм $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to A$ такой, то $\varphi(z) = a$. Кроме того, $\operatorname{im}\varphi = C^*(a,1) \subset A$, а ограничение $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to C^*(a,1)$ — изометричный унитальный $*$-изоморфизм.*

Доказательство. Положим $B = C^*(a,1)$, тогда, по предложению 3.49, алгебра B — унитальная коммутативная C^*-подалгебра в A. Пусть $\varGamma\colon B \to C\big(\Omega(B)\big)$— представление Гельфанда. По теореме 3.48, отображение $\varGamma$ — унитальный изометричный $*$-изоморфизм. Как и выше, положим $\widehat{a} = \varGamma(a)\colon \Omega(B) \to \mathbb{C}$. По теореме 2.78, $\operatorname{im}\widehat{a} = \sigma(a)$ и отображение $\widehat{a}\colon \Omega(B) \to \sigma(a)$ — гомеоморфизм, поэтому, как было отмечено выше, транспонированное отображение $\widehat{a}^t\colon C\big(\sigma(a)\big) \to C\big(\Omega(B)\big)$ — это унитальный $*$-изоморфизмом, причем, в силу следствия 4.1, — изометричный. Положим $\psi = (\widehat{a}^t)^{-1} \circ \varGamma\colon B \to C\big(\sigma(a)\big)$, тогда ψ — также изометричный унитальный $*$-изоморфизм, так что в качестве φ можно взять композицию ψ^{-1} и включения $B \to A$. Заметим, что $\widehat{a}^t(z) = \widehat{a}$, так как z — тождественное вложение, поэтому $\varphi(z) = \varGamma^{-1}\big(\widehat{a}^t(z)\big) = \varGamma^{-1}(\widehat{a}) = a$.

По теореме 2.14 Вейерштрасса–Стоуна, унитальная C^*-подалгебра в $C\big(\sigma(a)\big)$, порожденная 1 и z, совпадает с $C\big(\sigma(a)\big)$ (так как z разделяет точки в $\sigma(a)$). Отсюда вытекает, что унитальный $*$-гомоморфизм из $C\big(\sigma(a)\big)$ в A, переводящий z в a, определен однозначно, что доказывает однозначную определенность построенного φ. Наконец, $\operatorname{im}\varphi = C^*\big(\varphi(z), 1\big) = C^*(a,1)$. $\square$

Итак, пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры, а $z\colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$ — включение. По теореме 4.2, существует и единственен унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi\colon C\bigl(\sigma(a)\bigr) \to A$, для которого $\varphi(z) = a$. Этот гомоморфизм называется ***функциональным исчислением на*** a. Иногда удобно обозначать этот гомоморфизм через φ_a.

Иными словами, для каждой функции $f \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ определен элемент $\varphi_a(f)$ алгебры A, который мы будем также обозначать $f(a)$. Так как $\operatorname{im}\varphi = C^*(a,1)$, то применимо предложение 3.49, из которого следует, что каждый элемент $f(a)$ — нормальный.

Если $p \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ — многочлен вида $\sum \lambda_{k,l} z^k \bar{z}^l$, то $p(a) = \varphi(p) = \sum \lambda_{k,l} a^k (a^*)^l$ (т.е. $p(a)$, как и в общем случае $f(a)$, зависит в действительности не только от a, но и от a^*). Отметим, что семейство всех таких многочленов p удовлетворяет условиям теоремы 2.14 Вейерштрасса–Стоуна, поэтому это семейство всюду плотно в $C\bigl(\sigma(a)\bigr)$, так что для каждой функции $f \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ существует последовательность многочленов $p_n \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$, сходящаяся к f и, значит, $p_n(a) \to f(a)$ при $n \to \infty$.

Продемонстрируем, как работает функциональное исчисление, усилив с помощью него теорему 3.45.

Следствие 4.3. *Пусть $a \in A$ — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A. Тогда a эрмитов, если и только если $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $B = C^*(a,1)$, тогда C^*-алгебра B изометрично унитально $*$-изоморфна C^*-алгебре $C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ в силу теоремы 4.2 (как и в доказательстве теоремы 4.2 положим $\psi = (\widehat{a}^t)^{-1} \circ \varGamma$ — соответствующий изоморфизм). Тогда $\psi\colon a \mapsto z$, где через z обозначена тождественная функция, принимающая в точке z значение z. Элемент a — эрмитов, если и только если $\psi(a) \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ эрмитов, т.е. если элемент z равен своему сопряженному, что эквивалентно тому, что z принимает лишь вещественные значения. Последнее равносильно вещественности области определения функции z, то есть вещественности спектра, что и завершает доказательство. $\square$

Предложение 4.4. *Пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A и $\varphi\colon C\bigl(\sigma(a)\bigr) \to A$ — функциональное исчисление на a. Положим $B = \operatorname{im}\varphi = C^*(1,a) \subset A$ и выберем произвольный $f \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ и любой характер $\tau \in \varOmega(B)$. Тогда $f\bigl(\tau(a)\bigr) = \tau\bigl(f(a)\bigr)$, где через $f(a)$ в правой части равенства обозначен элемент $\varphi(f) \in A$.*

Доказательство. Рассмотрим два отображения: $f \mapsto f\bigl(\tau(a)\bigr)$ и $f \mapsto \tau\bigl(\varphi(f)\bigr) = \tau\bigl(f(a)\bigr)$, действующие из $C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ в $\mathbb{C}$. Оба этих отображения являются унитарными $*$-гомоморфизмами, переводящими элементы 1 и z алгебры $C\bigl(\sigma(a)\bigr)$ соответственно в 1 и $\tau(a)$ из $\mathbb{C}$. Действительно,

$$1 \mapsto 1(\tau(a)) = 1, \qquad 1 \mapsto \tau\bigl(\varphi(1)\bigr) = \tau(1) = 1,$$

и

$$z \mapsto z(\tau(a)) = \tau(a), \qquad z \mapsto \tau\bigl(\varphi(z)\bigr) = \tau(a),$$

где последнее равенство следует из доказанного в теореме 4.2 соотношения $\varphi(z) = a$. Таким образом, наши два отображения совпадают на образующих 1 и z алгебры $C^*(1,z) = C\bigl(\sigma(a)\bigr)$, значит, эти отображения совпадают на всей алгебре $C\bigl(\sigma(a)\bigr)$, что и требовалось. $\square$

Теорема 4.5 (Об отображении спектров)**.** *Пусть a — нормальный элемент унитальной C^*-алгебры A и $f \in C\bigl(\sigma(a)\bigr)$. Тогда $\sigma\bigl(\varphi(f)\bigr) = \sigma\bigl(f(a)\bigr) = f\bigl(\sigma(a)\bigr)$. Кроме того, если $g \in C\bigl(\sigma\bigl(f(a)\bigr)\bigr)$, то $(g \circ f)(a) = g\bigl(f(a)\bigr)$ в A.*

Доказательство. Положим $B = C^*(1,a)$ — коммутативная банахова алгебра, изоморфная $C\bigl(\sigma(a)\bigr)$. В силу теоремы 2.61, справедливо

$$\sigma\bigl(f(a)\bigr) = \Bigl\{\tau\bigl(f(a)\bigr) : \tau \in \varOmega(B)\Bigr\}$$

(отметим, что здесь $f(a) = \varphi(f) \in B$). По предложению 4.4, имеем $\tau\bigl(f(a)\bigr) = f\bigl(\tau(a)\bigr)$, откуда

$$\sigma\bigl(f(a)\bigr) = \Bigl\{f\bigl(\tau(a)\bigr) : \tau \in \varOmega(B)\Bigr\} = f\Bigl(\bigl\{\tau(a) : \tau \in \varOmega(B)\bigr\}\Bigr) = f\bigl(\sigma(a)\bigr),$$

где последнее равенство снова вытекает из теоремы 2.61.

Далее, положим $C = C^*\bigl(f(a),1\bigr)$. Так как $f(a) \in C^*(a,1)$, заключаем, что $C \subset B$, и для любого характера $\tau \in \varOmega(B)$ его ограничение τ_C на C является характером на C, т.е. $\tau_C \in \varOmega(C)$. Заметим, что, в силу первого утверждения, область определения функции g, равная $\sigma\bigl(f(a)\bigr)$, совпадает со множеством значений функции f, равным $f(\sigma(a))$. Таким образом, корректно определена композиция $g\circ f\colon \sigma(a)\to\mathbb{C}$, здесь $g\circ f\in C\big(\sigma(a)\big)$. Тогда $\varphi\big(g\circ f\big)=(g\circ f)(a)\in B$ и, по предложению 4.4, примененному сначала к $g\circ f$, затем к f и, наконец, к g, для всех $\tau\in\Omega(B)$ имеем:

$$\tau\big((g\circ f)(a)\big)=(g\circ f)\big(\tau(a)\big)=g\Big(f\big(\tau(a)\big)\Big)=g\Big(\tau\big(f(a)\big)\Big)=g\Big(\tau_C\big(f(a)\big)\Big)=\tau_C\Big(g\big(f(a)\big)\Big)=\tau\Big(g\big(f(a)\big)\Big),$$

где в последних двух равенствах $g\big(f(a)\big)=\varphi_{f(a)}(g)\in C$ — образ g при функциональном исчислении $\varphi_{f(a)}$ для $f(a)$. Представление Гельфанда для алгебры B является изоморфизмом, что гарантирует представимость элемента $g\big(f(a)\big)\in C\subset B$ в виде $h(a)$ для некоторой функции $h\in C\big(\sigma(a)\big)$, и тогда, по предложению 4.4, примененному к h, для всех $\tau\in\Omega(B)$ выполняется

$$(g\circ f)\big(\tau(a)\big)=\tau\big((g\circ f)(a)\big)=\tau\Big(g\big(f(a)\big)\Big)=\tau\big(h(a)\big)=h\big(\tau(a)\big).$$

По теореме 2.61 множество $\big\{\tau(a):\tau\in\Omega(B)\big\}$ равно $\sigma(a)$, т.е. равно всей области определения функций $(g\circ f)$ и h, поэтому $h=(g\circ f)$ и, значит, $(g\circ f)(a)=h(a)=g\big(f(a)\big)$, где последнее равенство — это определение функции h, что и требовалось. □

4.2 Положительные элементы в C^*-алгебрах

В этом разделе на семействе эрмитовых элементов C^*-алгебры мы введем естественный частичный порядок, в частности, в этом семействе мы выделим подсемейство положительных элементов. Будет показано, что из каждого положительного элемента можно извлечь положительный квадратный корень, а также, что все элементы вида a^*a положительны.

Пример 4.6. Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $A=C_0(X)$ и $A_{sa}\subset A$ — множество всех самосопряженных (эрмитовых) элементов. Подпространство A_{sa} состоит из всех вещественнозначных функций $f\in A$. На A_{sa} имеется естественный частичный порядок: $f\geq g$, если и только если $f(x)\geq g(x)$ для всех $x\in X$. В частности, ***положительный*** $f\in A_{sa}$ — тот, для которого $f\geq 0$. Легко видеть, что f положителен, если и только если существует $g\in A$ такое, что $f=g\bar{g}$ (такой g определен неоднозначно). Но для положительного f однозначно определен неотрицательный квадратный корень $x\mapsto\sqrt{f(x)}$.

Лемма 4.7. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $A=C_0(X)$, и $f=\bar{f}\in A_{sa}$. Тогда f положителен, если и только если для некоторого $t\in\mathbb{R}$, $t\geq\|f\|$ выполняется $\|f-t\|\leq t$.*

Доказательство. Действительно, если нашлось такое t, то оно неотрицательно, поэтому, если $f(x)<0$ для некоторого $x\in X$, то $|f(x)-t|>t$, так что $\|f-t\|>t$. Обратно, для $f\geq 0$ и $t\geq\|f\|$ имеем $-t\leq f(x)-t\leq 0$ при всех $x\in X$, откуда $\|f-t\|\leq t$. □

Перенесем конструкцию примера 4.6 на произвольную C^*-алгебру A. Элемент $a\in A$ назовем ***положительным***, если он эрмитов и $\sigma(a)\subset\mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ обозначает множество всех неотрицательных вещественных чисел. Положительность элемента $a\in A$ будем обозначать $a\geq 0$, а множество всех положительных элементов в A — через A^+. Отметим, что $A^+\subset A_{sa}$ по определению.

Проверим, что данное определение согласовано с примером 4.6. Как мы уже отмечали, самосопряженность $f\in C_0(X)$ равносильна вещественности функции f. Кроме того, в разделе 2.2 мы видели, что для $f\in\mathcal{B}(S)$, где S — произвольное множество, выполняется $\sigma(f)=\overline{f(S)}$. Так как $C_0(X)\subset\mathcal{B}(X)$, имеем то же самое утверждение. Поэтому для $f\in C_0(X)$ условие $\sigma(f)\subset\mathbb{R}_+$ равносильно тому, что $f(x)\geq 0$ для всех $x\in X$, так что данное нами определение положительных элементов произвольной C^*-алгебры согласуется с примером 4.6.

Предложение 4.8. *Пусть a — положительный обратимый элемент унитальной C^*-алгебры, тогда a^{-1} — также положительный.*

Доказательство. В силу следствия 3.8, элемент a^{-1} — эрмитов. Так как $a\geq 0$, то $\sigma(a)\subset\mathbb{R}_+$. По предложению 2.31, обратимость a влечет $0\notin\sigma(a)$. Наконец, в силу того же следствия, $\sigma(a^{-1})=1/\sigma(a)$, поэтому $\sigma(a^{-1})\subset(0,+\infty)$ и, значит, $a^{-1}\geq 0$. □

Теорема 4.9. *Для произвольной C^*-алгебры и любого $a\in A^+$ существует единственный $b\in A^+$, для которого $b^2=a$. Более того, a и b коммутируют.*

Доказательство. Рассмотрим подалгебру $C^*(a)$ в алгебре A, порожденную элементом a. Так как $a = a^*$, эта подалгебра состоит из всевозможных многочленов от a с нулевым свободным членом, поэтому коммутативна. По теореме 3.48, алгебра $C^*(a)$ отождествляется с C^*-алгеброй $C_0(\Omega)$ с помощью представления Гельфанда Γ, где Ω — пространство характеров алгебры $C^*(a)$. При этом $a \mapsto \widehat{a}$ и

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega\} = \widehat{a}(\Omega) \subset \mathbb{R}_+.$$

Поэтому, в соответсвии с примером 4.6, определен $\sqrt{\widehat{a}}$. Положим $b = \Gamma^{-1}\big(\sqrt{\widehat{a}}\big)$. То, что a и b коммутируют, вытекает из коммутативности алгебры $C^*(a) \simeq C_0(\Omega)$.

Наконец, пусть существует еще один элемент $c \in A^+$, такой, что $c^2 = a$. Тогда c коммутирует с a так как $ca = c^3 = ac$. Но тогда c коммутирует и с $b \in C^*(a)$, поскольку b — предел последовательности многочленов от a. Рассмотрим коммутативную алгебру $C^*(b, c) \supset C^*(a)$ и рассмотрим представление Гельфанда Γ для нее. Но тогда $\Gamma(b)$ и $\Gamma(c)$ — положительные квадратные корни из $\Gamma(a)$, поэтому они совпадают и, значит, $b = c$. □

Для положительного $a \in A$ тот единственный элемент b, для которого $a = b^2$, будем обозначать через $a^{1/2}$.

Предложение 4.10. *Пусть A — некоторая C^*-алгебра и $c \in A$ — эрмитов элемент. Тогда $c^2 \in A^+$.*

Доказательство. По теореме 3.45, имеет $\sigma(c) \subset \mathbb{R}$. С другой стороны, в силу замечания 2.47, множество $\sigma(c)$ непусто. Так как спектр элемента алгебры по определению является спектром унитализации этой алгебры, применима теорема 2.32, в силу которой $\sigma(c^2) = \big(\sigma(c)\big)^2 \subset \mathbb{R}_+$, так что c^2 — положительный элемент. □

Конструкция 4.11. Пусть a — эрмитов элемент C^*-алгебры A. В силу предложения 4.10, $a^2 \in A^+$. По теореме 4.9, из a^2 можно извлечь корень. Этот корень мы обозначим $|a|$. Кроме того, положим $a^+ = \frac{1}{2}\big(|a| + a\big)$ и $a^- = \frac{1}{2}\big(|a| - a\big)$, так что $a = a^+ - a^-$.

Отождествим теперь алгебру $B := C^*(a)$ и $C_0\big(\Omega(B)\big)$ с помощью представления Гельфанда, $a \mapsto \widehat{a}$. Тогда элементу $|a|$ соответствует неотрицательная функция, равная $|\widehat{a}|$. Далее, $\widehat{a^\pm} = \frac{1}{2}\big(|\widehat{a}| \pm \widehat{a}\big)$ — тоже неотрицательные вещественные функции на $\Omega(B)$. Так как, в силу теоремы 2.73, образы этих функций, с точностью до 0, совпадают со спектром соответствующего элемента, заключаем, что элементы $|a|$ и $a^\pm$ — положительные. Кроме того, для каждого характера $\tau \in \Omega(B)$ имеем $|\widehat{a}|(\tau) = \pm\widehat{a}(\tau)$, откуда $a^+a^- = 0$. Это разложения оказывается полезным при решении различных задач.

Предложение 4.12. *Пусть a — эрмитов элемент C^*-алгебры A, и $a = a^+ - a^-$ — построенное в конструкции 4.11 разложение элемента a на положительные элементы $a^\pm$. Тогда если $\|a\| \le 1$, то $\|a^\pm\| \le 1$.*

Доказательство. Напомним, что $a^+ = \big(|a|+a\big)/2$ и $a^- = \big(|a|-a\big)/2$. Так как $|a|^2 = a^2$ по определению элемента $|a|$, то

$$\big\||a|^2\big\| = \big\||a|\,|a|\big\| = \big\||a|\,|a|^*\big\| = \big\||a|\big\|^2 \qquad \text{и} \qquad \big\||a|^2\big\| = \|a^2\| = \|a\,a^*\| = \|a\|^2 \le 1,$$

откуда $\big\||a|\big\| \le 1$. Следовательно,

$$\|a^\pm\| = \frac{1}{2}\big\||a| \pm a\big\| \le \frac{1}{2}\Big(\big\||a|\big\| + \|a\|\Big) \le 1,$$

что и требовалось. □

Замечание 4.13. Пусть a — эрмитов элемент в унитальной C^*-алгебре A, $\|a\| \le 1$, тогда $a^2 \in A^+$ по предложению 4.10. По предложению 2.29, $\sigma(1-a^2) = 1-\sigma(a^2)$. Далее, так как A — банахова алгебра, из свойства субмультипликативности умножения заключаем, что $\|a^2\| \le \|a\|^2 \le 1$. Наконец, по следствию 2.49, $r(a^2) \le \|a^2\| \le 1$, откуда, учитывая, что $a^2 \in A^+$, получаем $\sigma(a^2) \subset [0, 1]$. Таким образом, $\sigma(1 - a^2) = 1 - \sigma(a^2) \subset [0, 1]$, откуда $1 - a^2 \in A^+$.

По теореме 4.9, из $1 - a^2$ можно извлечь квадратный корень, т.е. единственным образом определен элемент $\sqrt{1 - a^2}$. Положим

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2}, \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}.$$

Заметим, что

$$u\,u^* = \big(a + i\sqrt{1 - a^2}\big)\big(a - i\sqrt{1 - a^2}\big) = a^2 + (1 - a^2) = 1,$$

и, аналогично, $v\,v^* = 1$, т.е. u и v — унитарные элементы. Мы воспользовались тем, что a и $\sqrt{1 - a^2}$ эрмитовы. Ясно также, что $a = (u+v)/2$. Таким образом, мы показали, что каждый эрмитов элемент a, $\|a\| \le 1$, представим в виде линейной комбинации унитарных элементов. С другой стороны, в силу предложения 3.2, каждый элемент $*$-алгебры представим в виде линейной комбинации эрмитовых. Тем самым, мы доказали следующий результат

Предложение 4.14. *Каждая унитальная C^*-алгебра является линейной оболочкой множества своих унитарных элементов.*

Лемма 4.15. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — эрмитов элемент. Тогда если для некоторого $t \in \mathbb{R}$, $t \geq \|a\|$, выполнено неравенство $\|a - t\| \leq t$, то $a \geq 0$. Обратно, если $a \geq 0$ и $\|a\| \leq t$, $t \in \mathbb{R}$, то $\|a - t\| \leq t$. В частности, если $\big\|a - \|a\|\big\| \leq \|a\|$, то $a \geq 0$, и, обратно, если $a \geq 0$, то $\big\|a - \|a\|\big\| \leq \|a\|$.*

Доказательство. Пусть B — это C^*-подалгебра в A, порожденная 1 и a. Так как элемент a — эрмитов, то подалгебра B коммутативна. По теореме 4.2, существует изометричный $*$-изоморфизм $\varphi\colon C\big(\sigma(a)\big) \to B$. Остается воспользоваться леммой 4.7. □

Следствие 4.16. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, тогда A^+ замкнуто в A.*

Доказательство. В силу предложения 3.17, множество A_{sa} всех эрмитовых элементов замкнуто в A. Покажем, что это же верно и для $A^+ \subset A_{sa}$. Пусть $a_n \in A^+$ — последовательность, сходящаяся к некоторой точке $a \in A$. Мы покажем, что $a \in A^+$, чем и завершим доказательство. Так как A_{sa} замкнуто в A, то $a \in A_{sa}$. Последовательность $\|a_n\|$ ограничена, поэтому существует $t \in \mathbb{R}$ такое, что $\|a_n\| \leq t$ при всех n. Так как $a_n \geq 0$, то, в силу леммы 4.15, имеем $\|a_n - t\| \leq t$ при всех n. Так как $\|a_n - t\| \to \|a - t\|$ при $n \to \infty$, то $\|a - t\| \leq t$. Тогда, снова по лемме 4.15, $a \geq 0$, т.е. $a \in A^+$, что и требовалось. □

Лемма 4.17. *Пусть a и b — положительные элементы C^*-алгебры A, тогда их сумма $a + b$ тоже положительна.*

Доказательство. Так как унитализация неунитальной C^*-алгебры сохраняется эрмитовость элементов, а спектры элементов неунитальной алгебры определяются именно как спектры в унитализации, то, без ограничения общности, сразу будем считать, что алгебра A унитальна. Из леммы 4.15 вытекает, что

$$\big\|a - \|a\|\big\| \leq \|a\| \qquad \text{и} \qquad \big\|b - \|b\|\big\| \leq \|b\|,$$

откуда

$$\Big\|a + b - \big(\|a\| + \|b\|\big)\Big\| = \big\|a + b - \|a\| - \|b\|\big\| \leq \big\|a - \|a\|\big\| + \big\|b - \|b\|\big\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Снова по лемме 4.15 имеем $a + b \geq 0$. □

Теорема 4.18. *Пусть a — произвольный элемент C^*-алгебры A, тогда a^*a положителен.*

Доказательство. Напомним, что как a^*a, так и $a\,a^*$ — эрмитовы элементы. Таким образом, наша задача — показать, что $\sigma(a^*a) \subset \mathbb{R}_+$. Начнем со следующей леммы.

Лемма 4.19. *Пусть $-a\,a^* \in A^+$, тогда $a = 0$.*

Доказательство. По предложению 2.29, выполняется $\sigma(-a\,a^*) \cup \{0\} = \sigma(-a^*a) \cup \{0\}$, следовательно, $-a^*a \in A^+$. Поэтому $\sigma(-a^*a) \subset \mathbb{R}_+$, а $\sigma(a^*a) = -\sigma(-a^*a) \subset -\mathbb{R}_+$. Воспользовавшись предложением 3.2, представим a в виде $b + ic$, где $b, c \in A_{sa}$. Тогда

$$a^*a + a\,a^* = (b - ic)(b + ic) + (b + ic)(b - ic) = 2b^2 + 2c^2.$$

По предложению 4.10, элементы $2b^2$ и $2c^2$ положительны, а, по лемме 4.17, элемент $a^*a = 2b^2 + 2c^2 + (-a\,a^*)$ тоже положительный. Итак, $\sigma(a^*a) \subset \mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \{0\}$, следовательно, $r(a^*a) = 0$. С другой стороны, по теореме 3.25 и определению C^*-алгебры, $r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, поэтому $\|a\| = 0$ и, значит, $a = 0$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Положим $b = a^*a$, тогда, в силу конструкции 4.11, элемент b представим в виде $b^+ - b^-$, где $b^\pm$ — положительные элементы, для которых $b^-b^+ = b^+b^- = 0$. Мы покажем, что $b^- = 0$, откуда и будет следовать положительность a^*a. Для этого положим $c = ab^-$, тогда

$$-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3.$$

Снова вспоминаем, что спектр элемента C^*-алгебры равен его спектру в унитализации этой алгебры. Поэтому применима теорема 2.32, в силу которой $\sigma\big((b^-)^3\big) = \big(\sigma(b^-)\big)^3 \subset \mathbb{R}_+$. Но тогда $-c^*c \in A^+$, откуда, в силу леммы 4.19, получаем $c = 0$, так что $(b^-)^3 = -c^*c = 0$. По следствию 3.27, имеем $b^- = 0$, что и требовалось. □

4.3 Частичный порядок на эрмитовых элементах C^*-алгебры

Для C^*-алгебры A, зададим на A_{sa} бинарное отношение так: положим $a \le b$, если и только если $b - a \in A^+$.

Предложение 4.20. *Определенное только что отношение на эрмитовых элементах C^*-алгебры A является частичным порядком.*

Доказательство. Так как $a - a = 0$ и, по следствию 3.26, эрмитов элемент равен нулю, если и только если его спектр нулевой, имеет место рефлексивность. Более того, из того же следствия вытекает, что если элемент не равен нулю, то его спектр содержит не нулевые значения, поэтому, если такой элемент a положителен, то элемент $-a$, в силу предложения 2.29, положительным не является. Отсюда вытекает, что введенное отношение антисимметрично. Наконец, если a, b, $c \in A_{sa}$ и $a \le b$ и $b \le c$, то $c-a = (c-b)+(b-a) \in A^+$ в силу леммы 4.17, откуда следует транзитивность. Доказательство закончено. $\square$

Следующее утверждение доказывается тривиально (с использованием предложения 2.29).

Предложение 4.21. *Введенный выше порядок на A_{sa} удовлетворяет следующим свойствам*:

- *он инвариантен относительно сдвигов: для любых $a, b, c \in A_{sa}$ условие $a \le b$ эквивалентно $a + c \le b + c$*;
- *он инвариантен относительно умножения на положительные вещественные числа*: *для любых $a, b \in A_{sa}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ условие $a \le b$ влечет $t\,a \le t\,b$, а если $t > 0$, то оба этих условия эквивалентны*;
- *наконец, умножение на отрицательные вещественные числа обращают порядок: для любых $a, b \in A_{sa}$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \le 0$, условие $a \le b$ влечет $t\,a \ge t\,b$, а если $t < 0$, то оба этих условия эквивалентны.*

Предложение 4.22. *Пусть a — обратимый положительный элемент унитальной C^*-алгебры, тогда все элементы a, a^{-1}, $a^{1/2}$ и $a^{-1/2} := (a^{-1})^{1/2}$ коммутируют друг с другом, и $a^{1/2}a^{-1/2} = a^{-1/2}a^{1/2} = 1$.*

Доказательство. Пусть B — унитальная C^* подалгебра в A, порожденная 1, a и a^{-1}. Так как все образующие коммутируют, то алгебра B коммутативна. По теореме 3.48, представление Гельфанда Γ в этом случае представляет собой изометричный унитальный $*$-изоморфизм алгебра $\Gamma\colon B \to C(\Omega)$, где Ω — пространство характеров алгебры B (оно компактно, так как B унитальна). Положительность и обратимость a означает, что функция $\Gamma(a) = \widehat{a}$ всюду положительна, так как $\sigma(a) = \operatorname{im}\Gamma(a)$ по теореме 2.73. Кроме того, $\Gamma(a^{-1}) = 1/\Gamma(a)$ так как обратный элемент переходит в обратный при гомоморфизме. Далее, $\Gamma(a^{1/2}) = \sqrt{\Gamma(a)} \in C(\Omega)$ в силу конструкции, описанной в доказательстве теоремы 4.9, где корень элемента алгебры определяется с помощью перехода к алгебре функций. Аналогично $\Gamma(a^{-1/2}) = \sqrt{\Gamma(a^{-1})} = 1/\sqrt{\Gamma(a)} \in C(\Omega)$. Так как $C(\Omega)$ коммутативна, а B изоморфна $C(\Omega)$, то и все элементы a, a^{-1}, $a^{1/2}$ и $a^{-1/2}$ коммутируют друг с другом. Наконец, $\Gamma(a^{1/2})\Gamma(a^{-1/2}) = \sqrt{\Gamma(a)}\Big(1/\sqrt{\Gamma(a)}\Big) = 1$ и, точно так же, $\Gamma(a^{-1/2})\Gamma(a^{1/2}) = \Big(1/\sqrt{\Gamma(a)}\Big)\sqrt{\Gamma(a)} = 1$, поэтому, так как изоморфизм Γ унитальный, $a^{1/2}a^{-1/2} = a^{-1/2}a^{1/2} = 1$. $\square$

Конструкция 4.23. Обобщим конструкцию 4.11, определив для ***произвольного*** элемента a из C^*-алгебры A элемент $|a|$ так: $|a| = (a^*a)^{1/2}$ (это определение корректно так как элемент a^*a положителен в силу теоремы 4.18). Отметим, что если $a \in A_{sa}$, то $|a| = (a^*a)^{1/2} = (a^2)^{1/2}$, поэтому приведенное определение $|a|$ действительно является обобщением соответствующего определения из конструкции 4.11.

Приведем ряд элементарных фактов о множестве A^+.

Теорема 4.24. *Для C^*-алгебры A справедливы следующие утверждения*:

(1) *множество A^+ совпадает с множеством $\{a^*a : a \in A\}$*;

(2) *если $a, b \in A_{sa}$ и $c \in A$, то неравенство $a \le b$ влечет $c^*a\,c \le c^*b\,c$*;

(3) *если для $a, b \in A_{sa}$ выполняется $0 \le a \le b$, то $\|a\| \le \|b\|$*;

(4) *если A унитальна, $a \in A_{sa}$, и $a \ge 1$, то элемент a обратим и $0 \le a^{-1} \le 1$*;

(5) *если A унитальна и a, $b \in A$, $0 \le a \le b$, — ее положительные обратимые элементы, то $0 \le b^{-1} \le a^{-1}$.*

Доказательство. (1) По теореме 4.18, для всех $a \in A$ выполняется $a^*a \in A^+$. С другой стороны, по теореме 4.9, для каждого $a \in A^+$ существует $b \in A^+$ такой, что $a = b^2 = b^*b$, где последнее равенство следует из $b \in A^+ \subset A_{sa}$.

(2) Пусть $a \leq b$, то есть $b - a \in A^+$, тогда, в силу пункта (1), выполняется $b - a = d^*d$. С другой стороны, $c^*a\,c$ и $c^*b\,c$ — эрмитовы, и

$$c^*b\,c - c^*a\,c = c^*(b-a)c = c^*d^*dc = (dc)^*(dc) \geq 0,$$

где последнее неравенство снова вытекает из пункта (1).

(3) В силу следствия 2.49 и того, что $b \in A^+$, имеем $0 \leq \sigma(b) \leq r(b) \leq \|b\|$, поэтому, в силу предложения 2.29, имеем $\sigma\big(\|b\|\,1 - b\big) \geq 0$, поэтому $\|b\|\,1 - b \in A^+$ и, значит, $b \leq \|b\|\,1$. Из транзитивности частичного порядка вытекает, что $a \leq b \leq \|b\|\,1$. Последнее означает, что $\sigma\big(\|b\|\,1 - a\big) \geq 0$, так что $r(a) \leq \|b\|$. Так как a — эрмитов, то по теореме 3.25, $\|a\| = r(a) \leq \|b\|$, что и требовалось.

(4) Для произвольного $a \in A_{sa}$ такого, что $a \geq 1$, в силу предложения 2.29 имеем $\sigma(a-1) = \sigma(a) - 1 \geq 0$, поэтому $\sigma(a) \geq 1$. По предложению 2.31, элемент a обратим (так как $0 \notin \sigma(a)$). По тому же предложению, $\sigma(a^{-1}) = 1/\sigma(a)$, откуда $0 < \sigma(a^{-1}) \leq 1$. Снова по предложению 2.29, $\sigma(1 - a^{-1}) = 1 - \sigma(a^{-1}) \geq 0$, откуда $a^{-1} \leq 1$.

(5) В силу следствия 3.8, элементы a^{-1} и b^{-1} также являются эрмитовыми, поэтому для них определен введенный порядок. По предложению 4.8, оба a^{-1} и b^{-1} — положительные. По теореме 4.9, существуют и единственны положительные $a^{-1/2}$ и $a^{1/2}$ такие, что $(a^{-1/2})^2 = a^{-1}$ и $(a^{1/2})^2 = a$ соответственно. По предложению 4.22, элементы a, a^{-1}, $a^{1/2}$ и $a^{-1/2} := (a^{-1})^{1/2}$ коммутируют друг с другом, и $a^{1/2}a^{-1/2} = a^{-1/2}a^{1/2} = 1$, поэтому, в частности, $1 = a^{-1/2}a\,a^{-1/2}$. Так как $a \leq b$, то, в силу пункта (2), $a^{-1/2}a\,a^{-1/2} \leq a^{-1/2}b\,a^{-1/2}$, поэтому $1 \leq a^{-1/2}b\,a^{-1/2}$, откуда, в силу пункта (4), имеем

$$\big(a^{-1/2}b\,a^{-1/2}\big)^{-1} = a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \leq 1.$$

Следовательно, сопрягая полученное неравенство с $a^{-1/2}$ и снова используя пункт (2) и предложение 4.22, получаем

$$b^{-1} = a^{-1/2}(a^{1/2}b^{-1}a^{1/2})a^{-1/2} \leq a^{-1/2}1\,a^{-1/2} = a^{-1},$$

что и требовалось. □

Задача 4.25. Покажите, что если $a \in A^+$, то $\|a^2\| = \|a\|^2$ и $\|a^{1/2}\| = \|a\|^{1/2}$.

Теорема 4.26. *Пусть a и b — положительные элементы C^*-алгебры A, причем $a \leq b$. Тогда $a^{1/2} \leq b^{1/2}$.*

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что алгебра A унитальна.

Выберем произвольное вещественное $t > 0$ и положим $a_t = a + t\,1$ и $b_t = b + t\,1$, тогда $a_t \leq b_t$ и, по лемме 4.17, $a_t, b_t \in A^+$. Так как $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$ и $\sigma(b) \subset \mathbb{R}_+$, то, по предложению 2.29, $\sigma(a_t) = t + \sigma(a) > 0$ и $\sigma(b_t) = t + \sigma(b) > 0$, поэтому a_t и b_t — обратимы в силу предложения 2.29.

Лемма 4.27. *Имеем $\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}\| \leq 1$.*

Доказательство. Так как A — это C^*-алгебра, имеем

$$\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}\|^2 = \big\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}(a_t^{1/2}b_t^{-1/2})^*\big\| = \big\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}b_t^{-1/2}a_t^{1/2}\big\| = \|a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2}\|.$$

С другой стороны, по теореме 4.24, имеем $b_t^{-1} \leq a_t^{-1}$. Но тогда, по той же самой теореме,

$$a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2} \leq a_t^{1/2}a_t^{-1}a_t^{1/2} = 1,$$

где последнее равенство вытекает из предложения 4.22. Так как $b_t^{-1} \geq 0$, то, по теореме 4.24, $a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2} \geq 0$, и снова по этой теореме, $\|a_t^{1/2}b_t^{-1}a_t^{1/2}\| \leq \|1\| = 1$. Итак, собирая доказанные неравенства, заключаем, что $\|a_t^{1/2}b_t^{-1/2}\|^2 \leq 1$, откуда и вытекает требуемое. □

В силу лемм 4.27 и 2.36, $\sigma(a_t^{1/2}b_t^{-1/2})$ лежит в отрезке $[-1, 1]$. Далее,

$$\sigma(a_t^{1/2}b_t^{-1/2}) \setminus \{0\} = \sigma(a_t^{1/2}b_t^{-1/4}b_t^{-1/4}) \setminus \{0\} = \sigma(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \setminus \{0\},$$

где последнее равенство имеет место по предложению 2.29, поэтому $r(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \leq 1$. Элемент $b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}$ — эрмитов, поэтому, в силу теоремы 3.25, имеем

$$\|b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}\| = r(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \leq 1.$$

Но тогда, так как $\sigma(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \subset \mathbb{R}$, по предложению 2.29,

$$\sigma(1 - b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) = 1 - \sigma(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}) \geq 0,$$

поэтому $1 - b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4} \geq 0$, то есть $b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4} \leq 1$. Используя теорему 4.24, сопрягаем последнее неравенство с $b^{1/4}$. Имеем:

$$b_t^{1/4}\,1\,b_t^{1/4} \geq b_t^{1/4}\big(b_t^{-1/4}a_t^{1/2}b_t^{-1/4}\big)b_t^{1/4} = \big(b_t^{1/4}b_t^{-1/4}\big)a_t^{1/2}\big(b_t^{-1/4}b_t^{1/4}\big) = a_t^{1/2},$$

откуда $b_t^{1/2} \geq a_t^{1/2}$. Теорема 3.48, примененная к $C^*(a,1)$ и $C^*(b,1)$, показывает, что $(a+t\,1)^{1/2} \to a^{1/2}$ и $(b+t\,1)^{1/2} \to b^{1/2}$ при $t \to 0+$ (так как представление Гельфанда $\varGamma$ является изометрией). Итак,

$$b^{1/2} - a^{1/2} = \lim_{t\to 0+}(b+t\,1)^{1/2} - \lim_{t\to 0+}(a+t\,1)^{1/2} = \lim_{t\to 0+}\big((b+t\,1)^{1/2} - (a+t\,1)^{1/2}\big) \geq 0,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что при всех $t > 0$ имеем $(b+t\,1)^{1/2} - (a+t\,1)^{1/2} \geq 0$, а множество A^+ замкнуто в силу следствия 4.16. Доказательство закончено. □

Следствие 4.28. *Если $a \in A^+$, $a \leq 1$, то $a^{1/2} \leq 1$.*

Замечание 4.29. Если в теореме заменить неравенство $a^{1/2} \leq b^{1/2}$ на $a^2 \leq b^2$, то теорема перестанет быть верной. В качестве примера рассмотрим C^*-алгебру $M_2(\mathbb{C})$, состоящую из всех комплексных матриц размера 2×2 со стандартной инволюцией $A^* = \bar{A}^T$. Положим

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как p и q — вещественные матрицы, то они эрмитовы. Далее, спектр $a \in M_2(\mathbb{C})$ — это множество собственных значений матрицы a, поэтому $\sigma(q) = \{0,1\} \subset \mathbb{R}_+$ и, значит, q положителен. Аналогично, $\sigma(p) = \{0,1\}$, и p тоже положителен. Кроме того, из положительности q следует, что $p \leq p + q$. Посмотрим теперь на квадраты p и $p + q$. Имеем $p^2 = p$, $q^2 = q$, и $(p+q)^2 = p + q + pq + qp$, поэтому

$$(p+q)^2 - p^2 = q + pq + qp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель полученной матрицы отрицательный, поэтому спектр не может быть неотрицательным. Таким образом, элемент $(p+q)^2 - p^2$ не является положительным.

В [16] показано, что справедливость импликации $0 \leq a \leq b \;\Rightarrow\; a^2 \leq b^2$ имеет место только в коммутативных C^*-алгебрах.

4.4 Аппроксимативная единица

Если C^*-алгебра A не унитальна, то ее можно вложить в ее унитализацию. Однако такой прием не всегда позволяет решать возникающие задачи. Например, так не удается показать, что замкнутые идеалы сопряжены. Тем не менее, имеется другой прием “моделирования единицы”, который и называется аппроксимативной единицей.

Направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$, состоящая из положительных элементов замкнутого единичного шара C^*-алгебры A, такая, что для каждого $a \in A$ выполняется $a = \lim_\lambda u_\lambda a$, называется ***аппроксимативной единицей*** алгебры A.

Замечание 4.30. Если $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ — аппроксимативная единица. По определению, для любого $a \in A$ выполнено $a^* = \lim_\lambda u_\lambda a^*$, поэтому

$$a = (a^*)^* = \big(\lim_\lambda u_\lambda a^*\big)^* = \lim_\lambda (u_\lambda a^*)^* = \lim_\lambda a\,u_\lambda^* = \lim_\lambda a\,u_\lambda,$$

где третье равенство вытекает из изометричности, а, значит, и непрерывности, сопряжения, а последняя из того, все элементы u_λ — эрмитовы. Отсюда вытекает, что условие $a = \lim_\lambda u_\lambda a$ в определении аппроксимативной единицы можно заменить на условие $a = \lim_\lambda a\,u_\lambda$.

Покажем теперь, что в качестве направленного множества $\varLambda$ можно выбрать семейство всех положительных $a \in A$, для которых $\|a\| < 1$. Частичный порядок на этом множестве мы уже определили.

Предложение 4.31. *Семейство Λ всех положительных элементов $a \in A$ из C^*-алгебры, для которых $\|a\| < 1$, с порядком, индуцированным из A_{sa}, является направленным.*

Доказательство. Выберем произвольные $a, b \in \Lambda$ и покажем, что существует общая мажоранта, то есть такое $c \in \Lambda$, для которого $a \le c$ и $b \le c$. Вложим A в унитализацию $\widetilde{A}$ и будем проводить доказательство в $\widetilde{A}$.

Заметим, что если $a \in A^+$, то элемент $a + 1$ обратим в $\widetilde{A}$, так как $\sigma(a) \ge 0$, и верно равенство $a(1+a)^{-1} = 1 - (1+a)^{-1}$ (для его проверки достаточно записать левую часть в виде $(1+a-1)(1+a)^{-1}$ и раскрыть скобки).

Лемма 4.32. *Если a, $b \in A^+$ и $a \le b$, то $a(1+a)^{-1} \le b(1+b)^{-1}$.*

Доказательство. Действительно, из $0 \le a \le b$ следует, что $1+a \le 1+b$ (предложение 4.21), откуда $(1+b)^{-1} \le (1+a)^{-1}$ (теорема 4.24). Поэтому $1-(1+a)^{-1} \le 1-(1+b)^{-1}$, то есть $a(1+a)^{-1} \le b(1+b)^{-1}$, что и требовалось. □

Лемма 4.33. *Если $a \in A^+$, то $a(1+a)^{-1} \in \Lambda$ и $a(1-a)^{-1} \in A^+$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим представление Гельфанда Γ алгебры $B = C^*(1, a)$. Так как функция $\Gamma(a) \in C\big(\Omega(B)\big)$ принимает только неотрицательные значения, множество значений функции $f \in C\big(\Omega(B)\big)$, $f = \Gamma\big(a(1+a)^{-1}\big) = \Gamma(a)/\big(1+\Gamma(a)\big)$, лежит в отрезке $[0,1]$, поэтому $\|f\| \le 1$, и, значит, $a(1+a)^{-1} \in \Lambda$. Аналогично, $g = \Gamma\big(a(1-a)^{-1}\big)$ принимает положительные значения, так как $\operatorname{im}\Gamma(a) \subset [0,1]$. □

Итак, пусть $a, b \in \Lambda$. Положим $a' = a(1-a)^{-1}$, $b' = b(1-b)^{-1}$ и $c = (a'+b')(1+a'+b')^{-1}$. По лемме 4.33 элементы a' и b' положительны, поэтому $a'+b' \in A^+$ и, снова по лемме 4.33, получаем, что $c \in \Lambda$. Наконец, так как $a' \le a'+b'$, то из леммы 4.32 вытекает, что $a'(1+a')^{-1} \le c$, но, снова используя представление Гельфанда легко проверить, что $a'(1+a')^{-1} = a$, поэтому, окончательно, $a \le c$. Точно так же проверяется, что $b \le c$. Таким образом, c — искомая общая мажоранта. □

Теорема 4.34. *Каждая C^*-алгебра содержит аппроксимативную единицу. А именно, в качестве такой единицы можно взять направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $u_\lambda = \lambda$ и $\Lambda = \{\lambda \in A^+ : \|\lambda\| < 1\}$.*

Доказательство. В силу предложения 4.31 семейство $\Lambda = \{\lambda \in A^+ : \|\lambda\| < 1\}$, снабженное отношением порядка, индуцированным из A_{sa}, является направленностью. Поэтому остается проверить, что $a = \lim_\Lambda \lambda a$ для любого $a \in A$. Так как линейная оболочка множества Λ совпадает со всей алгеброй A, достаточно проверить это равенство для случая $a \in \Lambda$.

Фиксируем произвольные $a \in \Lambda$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим представление Гельфанда $\Gamma\colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$, где, как обычно, Ω — пространство характеров алгебры $C^*(a)$. Пусть $f = \Gamma(a)$. Заметим, что так как $a \in \Lambda$, то $\operatorname{im} f \subset [0,1]$. Напомним, см. теорему 2.63, что $\Omega \cup \{0\}$ — компактное хаусдорфово топологическое пространство в $*$-слабой топологии. Поэтому подмножество $K = f^{-1}\big([\varepsilon, +\infty)\big) = \big\{\tau \in \Omega : f(\tau) \ge \varepsilon\big\}$ замкнуто и компактно в Ω. По лемма Урысона существует непрерывная функция $g\colon \Omega \to [0,1]$ с компактным носителем, равная 1 на K. Выберем число δ так, чтобы $0 < \delta < 1$ и $1 - \delta < \varepsilon$. Тогда $\|f - \delta\, g\, f\| = \|(1 - \delta\, g)f\| \le \varepsilon$. Действительно, если $\tau \in K$, то $\big|f(\tau) - \delta\, g(\tau) f(\tau)\big| = \big|(1-\delta)f(\tau)\big| \le 1 - \delta < \varepsilon$ так как $\|f\| \le 1$, а если $\tau \notin K$, то $\big|f(\tau) - \delta\, g(\tau) f(\tau)\big| \le \big|1 - \delta\, g(\tau)\big|\varepsilon \le \varepsilon$ так как $\|g\| \le 1$.

Положим $\lambda_0 = \Gamma^{-1}(\delta\, g)$. Отметим, что $\lambda_0 \in C^*(a)$, поэтому коммутирует с a. Кроме того, $\lambda_0 \in \Lambda$, и $\|a - \lambda_0 a\| \le \varepsilon$ так как Γ сохраняет норму. Возьмем произвольное $\lambda \ge \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда $1 - \lambda \le 1 - \lambda_0$ и $a(1-\lambda)a \le a(1-\lambda_0)a$.

Далее,

$$\|a - \lambda a\|^2 = \big\|(1-\lambda)^{1/2}(1-\lambda)^{1/2}a\big\|^2 \le \big\|(1-\lambda)^{1/2}a\big\|^2,$$

так как $\|1 - \lambda\| \le 1$. Напомним определяющее тождество C^*-алгебры: $\|x\|^2 = \|x^* x\|$, и возьмем $x = (1-\lambda)^{1/2}a$. Так как элементы a и $1 - \lambda$ — эрмитовы, имеем:

$$\big\|(1-\lambda)^{1/2}a\big\|^2 = \big\|\big((1-\lambda)^{1/2}a\big)^*(1-\lambda)^{1/2}a\big\| = \big\|a(1-\lambda)a\big\| \le \big\|a(1-\lambda_0)a\big\| \le \big\|(1-\lambda_0)a\big\| \le \varepsilon.$$

Таким образом, $\|a - \lambda a\|^2 \le \varepsilon$, откуда следует, что $\lim_\Lambda \lambda a = a$, что и требовалось. □

Аппроксимативная единица $\Lambda = \{\lambda \in A^+ : \|\lambda\| < 1\}$ называется ***канонической аппроксимативной единицей*** алгебры A.

Приведем несколько примеров использования аппроксимативной единицы.

Утверждение 4.35. *Если L — замкнутый левый идеал в C^*-алгебре A, то существует направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, состоящая из положительных элементов и лежащая в замкнутом единичном шаре в L, такая, что $a = \lim_\lambda au_\lambda$ для всех $a \in L$.*

Доказательство. Положим $B = L\cap L^*$. Заметим, что B является C^*-алгеброй. Действительно, $AL \subset L$ так как L — левый идеал, откуда $L^*A^* = L^*A \subset L^*$, поэтому $L\cap L^*$ — подалгебра, замкнутая относительно сопряжения. Далее, по теореме 4.34, алгебра B имеет каноническую аппроксимативную единицу $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где Λ — единичный шар в B^+. Далее, пусть $a \in L$. Тогда $a^*a \in B$, поэтому $\lim_\lambda \big(a^*a(1-u_\lambda)\big) = 0$ по определению аппроксимативной единицы. Тогда

$$\lim_\lambda \big\|a(1-u_\lambda)\big\|^2 = \lim_\lambda \big\|(1-u_\lambda)^*a^*a(1-u_\lambda)\big\| = \lim_\lambda \big\|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\big\| \le \lim_\lambda \big\|a^*a(1-u_\lambda)\big\| = 0,$$

где неравенство выполнено, так как $\|u_\lambda\| \le 1$, откуда $\lim_\lambda a(1-u_\lambda) = 0$, что и требовалось. □

Утверждение 4.36. *Пусть I — замкнутый идеал в C^*-алгебре A. Тогда I самосопряжен и, значит, является C^*-подалгеброй. Если $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — аппроксимативная единица в I, то для каждого $a \in A$ имеет место соотношение*

$$\|a+I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$$

Доказательство. По утверждению 4.35 существует направленность $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, состоящая из положительных элементов и лежащая в единичном шаре в I, такая, что $b = \lim_\lambda bu_\lambda$ для всех $b \in I$. Поэтому $b^* = \lim_\lambda u_\lambda^* b^* = \lim_\lambda u_\lambda b^*$, и, так как все u_λ принадлежат I, а значит и $u_\lambda b^* \in I$ так как I — идеал, заключаем, используя замкнутость I, что $b^* \in I$, то есть I самосопряжен.

Пусть $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольная аппроксимативная единица в I, и $a \in A$ — произвольный элемент. Напомним, что $\|a+I\| = \inf\big\{\|a+a'\| : a' \in I\big\}$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $b \in I$, что $\|a+b\| < \|a+I\|+\varepsilon/2$. Так как $b = \lim_\lambda u_\lambda b$ по определению аппроксимативной единицы, то существует такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $\|b-u_\lambda b\| \le \varepsilon/2$ для всех $\lambda \ge \lambda_0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\| = \big\|(1-u_\lambda)a + (1-u_\lambda)b - (1-u_\lambda)b\big\| \le \big\|(1-u_\lambda)(a+b)\big\| + \|b - u_\lambda b\| \le \\ \le \|a+b\| + \|b-u_\lambda b\| \le \|a+I\| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2,\end{aligned}$$

где первое неравенство выполнено, так как $\|u_\lambda\| \le 1$ по определению аппроксимативной единицы. С другой стороны, $\|a+I\| \le \|a-u_\lambda a\|$, так как $u_\lambda a \in I$, поэтому $\lim_\lambda \|a-u_\lambda a\| = \|a+I\|$. Наконец, $\|a^*+I\| = \lim_\lambda \|a^* - u_\lambda a^*\| = \lim_\lambda \big\|(a^*-u_\lambda a^*)^*\big\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$, откуда, так как $\|a+I\| = \|a^*+I\|$, заключаем, что

$$\|a+I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|.$$

Утверждение доказано. □

Лемма 4.37. *Пусть I — замкнутый идеал в C^*-алгебре A, и J — замкнутый идеал в I. Тогда J также идеал в A.*

Доказательство. Так как I, а вслед за ним и J являются C^*-алгебрами, то достаточно проверить, что ab и ba принадлежат J для всех $a \in A$ и всех $b \in J^+$ (напомним, что C^*-алгебра является линейной оболочкой своих положительных элементов). Проверим это.

Так как $b \in J^+$, определен элемент $b^{1/2} \in J^+ \subset I$. Тогда $ab = (ab^{1/2})b^{1/2}$, и $ab^{1/2} \in I$ так как I — идеал в A, а тогда $ab = (ab^{1/2})b^{1/2} \in J$, так как J — идеал в I. Так как a — произвольный, то $a^*b \in J$, но тогда $(a^*b)^* = ba \in J$, так как J самосопряжен. Лемма доказана. □

Теорема 4.38. *Пусть I — замкнутый идеал в C^*-алгебре A. Тогда фактор алгебра A/I является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Нужно проверить определяющее равенство C^*-алгебры, причем, по лемме 3.29, достаточно проверить неравенство $\|x\|^2 \le \|x^*x\|$. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица в I. Рассмотрим произвольные $a \in A$ и $b \in I$. Тогда, применяя утверждение 4.36, имеем:

$$\begin{aligned}\|a+I\|^2 = \lim_\lambda \|a-u_\lambda a\|^2 = \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\| = \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)(a^*a+b-b)(1-u_\lambda)\| \le \\ \le \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)(a^*a+b)(1-u_\lambda)\| + \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \le \|a^*a+b\| + \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)b\| = \|a^*a+b\|,\end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено, так как $\|1-u_\lambda\| \le 1$, а последнее равенство — так как $\lim_\lambda (b-u_\lambda b) = 0$. Но тогда, так как b — произвольный элемент из I, заключаем, что $\|a+I\|^2 \le \|a^*a+I\| = \big\|(a^*+I)(a+I)\big\|$, что и требовалось. □

4.5 Положительные линейные функционалы на C^*-алгебрах

Теорема Гельфанда описывает коммутативные C^*-алгебры в терминах характеров, которые фактически являются ***одномерными представлениями***. В некоммутативном случае таких представлений не достаточно и приходится рассматривать представления произвольных размерностей. Для описания таких представлений удобно пользоваться положительными линейными функционалами, так что мы начнем с элементов теории таких функционалов.

Пусть $\varphi\colon A \to B$ линейное отображение C^*-алгебр. Отображение φ называется ***положительным***, если $\varphi(A^+) \subset B^+$.

Предложение 4.39. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — положительное линейное отображение C^*-алгебр. Тогда*

(1) $\varphi(A_{sa}) \subset B_{sa}$, *и*

(2) $\varphi\colon A_{sa} \to B_{sa}$ — *неубывающее отображение.*

Доказательство. (1) Пусть $a \in A_{sa}$. Воспользуемся конструкцией 4.11 и представим эрмитов элемент a в виде $a = a^+ - a^-$, где $a^\pm$ — положительные элементы. Так как φ — линейное отображение, то $\varphi(a) = \varphi(a^+) - \varphi(a^-)$. Так как отображение φ положительно, то $\varphi(a^\pm) \in B^+ \subset B_{sa}$. Так как, в силу предложения 3.1, B_{sa} — вещественное векторное подпространство в B, Заключаем, что $\varphi(a) \in B_{sa}$, что и требовалось.

(2) Пусть $a, b \in A_{sa}$ такие, что $a \le b$, тогда $b - a \in A^+$. Как мы только что показали, $\varphi(a), \varphi(b) \in B_{sa}$. Далее, так как φ — положительное линейное отображение, то $\varphi(b-a) = \varphi(b) - \varphi(a) \in B^+$, поэтому $\varphi(a) \le \varphi(b)$ и, значит, отображение φ неубывающее. □

Предложение 4.40. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — произвольный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр, тогда φ — положительное линейное отображение.*

Доказательство. Так как, в силу предложения 3.43, каждый такой φ однозначно продолжается до унитального $*$-гомоморфизма унитализаций $\widetilde{A}$ в $\widetilde{B}$, будем сразу считать, что алгебры A, B и гомоморфизм φ — унитальны.

Пусть $a \in A_{sa}$, тогда $a = a^*$, и, так как φ является $*$-гомоморфизмом, то $\varphi(a^*) = \big(\varphi(a)\big)^* = \varphi(a)$, откуда $\varphi(a) \in B_{sa}$.

Далее, по предложению 2.29, для каждого $a \in A$ выполнено включение $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \sigma(a)$, поэтому, если $a \in A^+$, т.е. a — эрмитов и $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$, то, как мы показали выше, $\varphi(a)$ — тоже эрмитов и $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \mathbb{R}_+$, т.е. $\varphi(a) \in B^+$. Последнее и означает положительность φ. □

Пример 4.41. Для $A = M_n(\mathbb{C})$ рассмотрим линейный функционал — ***след*** матрицы $a = (a_{pq}) \in A$: $\mathrm{tr}(a) = \sum_{p=1}^n a_{pp}$. Тогда tr — положительный функционал. Действительно, A^+ состоит из эрмитовых матриц с положительным спектром, т.е. $\sigma(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Так как $\mathrm{tr}(a) = \sum_{p=1}^n \lambda_p$, то $\mathrm{tr}(a) \ge 0$. Осталось заметить, что $\mathbb{C}^+ = \mathbb{R}^+$, поэтому $\mathrm{tr}(A^+) \subset \mathbb{C}^+$.

Замечание 4.42. Как мы показали в примере 4.41, след комплексной матрицы является положительным линейным функционалом. Ясно, что функционал tr — ненулевой. Оказывается, если от линейного (не обязательно положительного) функционала потребовать еще и сохранения произведения, а также сопряжения, т.е. чтобы функционал был $*$-гомоморфизмом из $M_n(\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}$, то для $n > 1$ никаких $*$-гомоморфизмов, кроме нулевого, найти не удастся. Действительно, пусть $\varphi\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ — произвольный $*$-гомоморфизм. Обозначим $e_{pq} \in M_n(\mathbb{C})$ матрицу, в которой единственный ненулевой элемент расположен в позиции (p,q) и равен 1. Отметим, что $e_{pq}^2 = 0$ при $p \ne q$, и $e_{pp} = e_{pq}e_{qp}$ при всех q. Тогда при $p \ne q$ имеем $\varphi(e_{pq}e_{pq}) = \varphi(e_{pq})^2 = \varphi(0) = 0$, откуда $\varphi(e_{pq}) = 0$. Далее, так как $n > 1$, то для каждого p существует $q \ne p$. Выберем такое q, тогда $\varphi(e_{pp}) = \varphi(e_{pq}e_{qp}) = \varphi(e_{pq})\varphi(e_{qp}) = 0$. Осталось заметить, что для любой матрицы $a = (a_{pq})$ имеем $a = \sum_{p,q} a_{pq}e_{pq}$, откуда $\varphi(a) = \sum_{p,q} a_{pq}\varphi(e_{pq}) = 0$.

Пусть A — некоторая C^*-алгебра, и τ — положительный функционал на ней. Определим функцию $f_\tau\colon A \times A \to \mathbb{C}$ так: $f_\tau(a,b) = \tau(b^*a)$.

Лемма 4.43. *В сделанных обозначениях, функция f_τ является положительной полуторалинейной формой на A.*

Доказательство. Действительно, для z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ и a_1, a_2, b_1, $b_2 \in A$ имеем:

$$f_\tau(z_1a_1 + z_2a_2, b) = \tau\big(b^*(z_1a_1 + z_2a_2)\big) = z_1\tau(b^*a_1) + z_2\tau(b^*a_2) = z_1 f_\tau(a_1, b) + z_2 f_\tau(a_2, b),$$

и
$$f_\tau(a, z_1b_1 + z_2b_2) = \tau\big((z_1b_1 + z_2b_2)^*a\big) = \bar z_1\tau(b_1^*a_1) + \bar z_2\tau(b_2^*a) = \bar z_1 f_\tau(a, b_1) + \bar z_2 f_\tau(a, b_2).$$
Кроме того, $f_\tau(a, a) = \tau(a^*a) \in \mathbb{R}_+$, так как $a^*a \in A^+$ по теореме 4.18. Таким образом, f_τ — положительная полуторалинейная форма, что и требовалось. □

Напомним необходимые факты про полуторалинейные формы.

Утверждение 4.44. *Пусть $\beta\colon A \times A \to \mathbb{C}$ — полуторалинейная форма на $*$-алгебре A. Тогда*

(1) *Имеет место так называемое* **полярное разложение***:*
$$4\beta(a, b) = \beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b) + i\beta(a + ib, a + ib) - i\beta(a - ib, a - ib).$$

(2) *Если $\beta(a, a) \in \mathbb{R}$ для любого a, то*
$$4\operatorname{Re}\beta(a, b) = \beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b), \qquad 4\operatorname{Im}\beta(a, b) = \beta(a + ib, a + ib) - \beta(a - ib, a - ib),$$
и $\overline{\beta(a, b)} = \beta(b, a)$ для любых $a\, b \in A$.

(3) *Имеет место неравенство Шварца: $\big|\beta(x, y)\big|^2 \le \beta(x, x)\beta(y, y)$.*

(4) *Если $\beta(a, a) \in \mathbb{R}_+$ для любого a, то функция $h(a) = \sqrt{\beta(a, a)}$ задает полунорму на A.*

Доказательство. Действительно,
$$\begin{aligned}\beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b) + i\beta(a + ib, a + ib) - i\beta(a - ib, a - ib) =\\ = \big(\beta(a, a) + \beta(a, b) + \beta(b, a) + \beta(b, b)\big) - \big(\beta(a, a) - \beta(a, b) - \beta(b, a) + \beta(b, b)\big) +\\ + i\big(\beta(a, a) - i\beta(a, b) + i\beta(b, a) + \beta(b, b)\big) - i\big(\beta(a, a) + i\beta(a, b) - i\beta(b, a) + \beta(b, b)\big) = 4\beta(a, b).\end{aligned}$$
Поэтому, если $\beta(a, a) \in \mathbb{R}$ для любого a, то значения формы β, стоящие в правой части формулы полярного разложения, вещественны, поэтому
$$4\operatorname{Re}\beta(a, b) = \beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b), \qquad 4\operatorname{Im}\beta(a, b) = \beta(a + ib, a + ib) - \beta(a - ib, a - ib).$$
Далее,
$$\begin{aligned}4\beta(b, a) = \beta(b + a, b + a) - \beta(b - a, b - a) + i\beta(b + ia, b + ia) - i\beta(b - ia, b - ia) =\\ = \beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b) + ii\bar i\beta(b/i + a, b/i + a) - ii\bar i\beta(b/i - a, b/i - a) =\\ = \beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b) + i\beta(-ib + a, -ib + a) - i\beta(-ib - a, -ib - a) =\\ = \beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b) + i\beta(a - ib, a - ib) - i\beta(a + ib, a + ib) =\\ = \big(\beta(a + b, a + b) - \beta(a - b, a - b)\big) - i\big(\beta(a + ib, a + ib) - \beta(a - ib, a - ib)\big) = 4\overline{\beta(a, b)},\end{aligned}$$
что и требовалось.

Далее,
$$0 \le \beta(x - \lambda y, x - \lambda y) = \beta(x, x) - \lambda\beta(y, x) - \bar\lambda\beta(x, y) + |\lambda|^2\beta(y, y).$$
Подставим $\lambda = \beta(x, y)/\beta(y, y)$. Получим:
$$\begin{aligned}0 \le \beta(x, x) - \beta(x, y)\beta(y, x)/\beta(y, y) - \overline{\beta(x, y)}\beta(x, y)/b(y, y) + \big|\beta(x, y)\big|^2\beta(y, y)/\beta(y, y) =\\ = \beta(x, x) - \big|\beta(x, y)\big|^2\beta(y, y)/\beta(y, y),\end{aligned}$$
откуда $\big|\beta(x, y)\big|^2 \le \beta(x, x)\beta(y, y)$.

Наконец, $h(\lambda a) = \sqrt{\beta(\lambda a, \lambda a)} = \sqrt{|\lambda|^2\beta(a, a)} = |\lambda|\sqrt{\beta(a, a)} = |\lambda|h(a)$. Неравенство Шварца в этих обозначениях имеет вид $\big|\beta(x, y)\big| \le h(x)h(y)$. Имеем:
$$\begin{aligned}h(x + y)^2 = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(y, x) + \beta(x, y) + \beta(y, y) = \beta(x, x) + b(y, y) + 2\operatorname{Re}\beta(x, y) \le\\ \le h(x)^2 + h(y)^2 + 2\big|\beta(x, y)\big| \le h(x)^2 + h(y)^2 + 2h(x)h(y) = \big(h(x) + h(y)\big).\end{aligned}$$
Таким образом, функция h положительно однородна и удовлетворяет неравенству треугольника. □

Свойства полуторалинейной формы можно переформулировать так.

Следствие 4.45. *В сделанных обозначениях,*

$$\overline{\tau(a^*b)} = \tau(b^*a), \qquad \text{и} \qquad \big|\tau(b^*a)\big| \le \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2},$$

а функция $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ является полунормой на A.

Предложение 4.46. *Пусть A — произвольная C^*-алгебра, $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ — линейный функционал (не обязательно непрерывный), $B_1(0) \subset A$ — замкнутый единичный шар с центром в нуле, M — неотрицательное вещественное число. Предположим, что для любого $a \in B_1(0) \cap A^+$ выполняется $\big|\tau(a)\big| \le M$, тогда $\|\tau\| \le 4M$, так что τ ограничен и, значит, непрерывен.*

Доказательство. Пусть сначала $a \in A_{sa} \cap B_1(0)$. Тогда существуют $a^+, a^- \in A^+$ такие, что $a = a^+ - a^-$ (см. конструкцию 4.11). По предложению 4.12, $\|a^\pm\| \le 1$, так что $a^\pm \in B_1(0) \cap A^+$, поэтому

$$\big|\tau(a)\big| = \big|\tau(a^+ - a^-)\big| = \big|\tau(a^+) - \tau(a^-)\big| \le \big|\tau(a^+)\big| + \big|\tau(a^-)\big| \le 2M.$$

Пусть теперь a — произвольный элемент из $B_1(0)$. По предложению 3.2, $a = b + ic$ для некоторых $b, c \in A_{sa}$. По предложению 3.16, имеем $\|b\| \le \|a\| \le 1$ и $\|c\| \le \|a\| \le 1$. Но тогда

$$\big|\tau(a)\big| = \big|\tau(b) + i\tau(c)\big| \le \big|\tau(b)\big| + \big|\tau(c)\big| \le 4M.$$

Осталось воспользоваться тем, что доказанное неравенство имеет место для любого $a \in B_1(0)$. □

Теорема 4.47. *Пусть $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A, тогда τ ограничен и, значит, непрерывен.*

Доказательство. Предположим, что τ неограничен. В силу предложения 4.46, функционал τ неограничен также на множестве S всех положительных элементов единичной нормы (иначе он ограничен в шаре). Это означает, что в S существует последовательность a_n, для которой $\tau(a_n) \ge 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n/2^n$, и пусть $s_k = \sum_{n=1}^k a_n/2^n$ — его частичная сумма. Тогда для $p < q$

$$\|s_p - s_q\| \le \sum_{n=p}^q \|a_n\|/2^n = \sum_{n=p}^q 1/2^n = 1/2^{p-1} - 1/2^q,$$

поэтому последовательность s_k фундаментальна и, значит, она сходится к $a := \sum_{n=1}^\infty a_n/2^n$. По лемме 4.17, каждый элемент s_k положительный. По следствию 4.16, элемент a также положительный. Так как $\tau(a_n/2^n) \ge 1$, то $\tau(s_k) = \sum_{n=1}^k \tau(a_n/2^n) \ge k$. Однако, аналогично показанному выше, $a - s_k = \sum_{n=k+1}^\infty a_n/2^n$ — положительный элемент, поэтому $s_k \le a$. Так как функционал τ положительный, то $\tau(a - s_k) = \tau(a) - \tau(s_k)$ положительно, поэтому $\tau(a) \ge \tau(s_k) \ge k$. Так как k можно выбрать сколь угодно большим, приходим к противоречию, т.е. τ должен быть ограниченным. □

Лемма 4.48. *Пусть $u \in A^+$, $\|u\| \le 1$. Тогда $u \le 1$, $u^2 \le u$, и $\|u^2\| \le 1$.*

Доказательство. Действительно, u — эрмитов, $r(u) = \|u\| \le 1$, и u — положителен, поэтому $\sigma(u) \in [0,1]$. Поэтому $\sigma(1-u) \subset \mathbb{R}_+$, откуда $u \le 1$. Далее, неравенство $u^2 \le u$ получается из предыдущего сопряжением с $u^{1/2}$. Наконец, $u^2 \le u \le 1$, поэтому $\|u^2\| \le 1$, что и требовалось. □

Утверждение 4.49. *Пусть $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A, тогда для всех $a \in A$ выполняется*

(1) $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ *и*

(2) $\big|\tau(a)\big|^2 \le \|\tau\|\,\tau(a^*a)$.

Доказательство. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица в A. Тогда, используя следствие 4.45, имеем:

$$\tau(a^*) = \lim_\lambda \tau(a^*u_\lambda) = \lim_\lambda \overline{\tau\big((a^*u_\lambda)^*\big)} = \lim_\lambda \overline{\tau(u_\lambda a)} = \overline{\tau(a)}.$$

Аналогично,

$$\big|\tau(a)\big|^2 = \lim_\lambda \big|\tau(u_\lambda a)\big|^2 \le \sup_\lambda \tau(u_\lambda^* u_\lambda)\,\tau(a^*a) \le \|\tau\|\tau(a^*a),$$

где в последнем неравенстве использована лемма 4.48. □

Теорема 4.50. *Пусть τ — ограниченный линейный функционал на C^*-алгебре A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *функционал τ — положителен*;

(2) *для любой аппроксимативной единицы $\{u_\lambda\}$ в алгебре A выполняется равенство $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$*;

(3) *для некоторой аппроксимативной единицы $\{u_\lambda\}$ в алгебре A выполняется равенство $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что из (1) следует (2). Предположим для простоты, что $\|\tau\| = 1$. Так как τ — положительный, монотонный и ограниченный, направленность $\big\{\tau(u_\lambda)\big\}$ — возрастающая, содержится в отрезке $\big[0,1\big]$, поэтому $0 \le \lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \sup_\lambda \big\{\tau(u_\lambda)\big\} \le 1$.

Мы воспользовались следующей леммой (докажите).

Лемма 4.51. *Пусть $\{x_\lambda\}_\lambda \subset \mathbb{R}$ — направленность относительно стандартного отношения порядка, и предположим, что $\{x_\lambda\}_\lambda$ ограничена сверху. Тогда направленность $\{x_\lambda\}_\lambda$ сходится и $\lim_\lambda x_\lambda = \sup_\lambda x_\lambda$.*

Пусть теперь $a \in A$, $\|a\| \le 1$. Тогда $\tau(a) \le 1$ и, так как $\|a^*a\| = \|a\|^2 \le 1$, то $\tau(a^*a) \le 1$. Далее,

$$\big|\tau(u_\lambda a)\big|^2 = \big|\tau(u_\lambda^* a)\big|^2 \le \tau(u_\lambda^* u_\lambda)\tau(a^*a) \le \tau(u_\lambda^* u_\lambda) = \tau(u_\lambda^2).$$

Далее, так как отображение τ — неубывающее (предложение 4.39), то

$$\big|\tau(u_\lambda a)\big|^2 \le \tau(u_\lambda^2) \le \tau(u_\lambda) \le \sup_\lambda \tau(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda).$$

Переходя к пределу, заключаем, что $\big|\tau(a)\big| = \lim_\lambda \big|\tau(u_\lambda a)\big|$, поэтому $\big|\tau(a)\big| \le \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Так как a — произвольный элемент с нормой не больше 1 и $\|\tau\| = 1$, получаем, что $1 \le \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$, откуда и вытекает требуемое.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Докажем теперь импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\{u_\lambda\}$ — некоторая аппроксимативная единица, для которой выполняется равенство $1 = \|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_l)$. Пусть a — некоторый эрмитов элемент, $\|a\| \le 1$. Положим $\tau(a) = \alpha + i\beta$, где α, $\beta \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\tau(a) \in \mathbb{R}$, то есть $\beta = 0$. Рассмотрим случай $\beta \le 0$, случай неотрицательного β рассматривается аналогично. Для любого натурального n имеем:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 = \big\|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\big\| = \big\|a^2 + n^2u_\lambda^2 - in(au_\lambda - u_\lambda a)\big\| \le \\ \le \|a^2\| + \|n^2u_\lambda^2\| + \big\|in(au_\lambda - u_\lambda a)\big\| \le 1 + n^2 + n\|au_\lambda - u_\lambda a\|.\end{aligned}$$

Поэтому, применяя утверждение 4.49, получаем

$$\big|\tau(a - inu_\lambda)\big|^2 \le \|t\|^2\|a - inu_\lambda^2 \le 1 + n^2 + n\|au_\lambda - u_\lambda a\|.$$

Переходя к пределу и учитывая, что $\lim_\lambda \tau(a - inu_\lambda) = \tau(a) - in\lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \tau(a) - in = \alpha + i\beta - in$, а также $\lim_\lambda(au_\lambda - u_\lambda a) = 0$, имеем $|\alpha + i\beta - in|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \le 1 + n^2$, откуда заключаем, что неравенство $-2n\beta \le 1 - \alpha^2 - \beta^2$ выполнено при всех натуральных n. Учитывая, что $\beta \le 0$, последнее возможно только при $\beta = 0$. Таким образом, если a эрмитов, то $\tau(a) \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь $a \in A^+$, $\|a\| \le 1$. Тогда элемент $u_\lambda - a$ эрмитов, $\|u_\lambda - a\| \le 1$, поэтому $\tau(u_\lambda - a) \le 1$. Но тогда $1 \ge \lim_\lambda \tau(u_\lambda - a) = 1 - \tau(a)$, поэтому $\tau(a) \ge 0$, то есть τ — положительный. Теорема доказана. □

Следствие 4.52. *Ограниченный линейный функционал τ на унитальной C^*-алгебре A положителен тогда и только тогда, когда $\tau(1) = \|\tau\|$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{u_i = 1\}$. Это — аппроксимативная единица в алгебре A. Теперь утверждение следствия следует из теоремы 4.50 (равносильность пунктов (1) и (3)). □

Следствие 4.53. *Пусть τ и τ' — положительные линейные функционалы на C^*-алгебре A. Тогда $\|\tau + \tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\|$.*

Доказательство. Действительно, если $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица, то по теореме 4.50 имеем:

$$\|\tau + \tau'\| = \lim_\lambda(\tau + \tau')(u_\lambda) = \lim_\lambda \big(\tau(u_\lambda) + \tau'(u_\lambda)\big) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau'(u_\lambda) = \|\tau\| + \|\tau'\|.$$

Следствие доказано. □

Состоянием C^*-алгебры A называется всякий положительный линейный функционал на A нормы 1. Множество всех состояний алгебры A обозначим через $\mathcal{S}(A)$.

Напомним, что элемент $a \in A$ называется нормальным, если $a^* a = a\, a^*$.

Теорема 4.54. *Пусть a — нормальный элемент ненулевой C^*-алгебры A. Тогда существует такое состояние $\tau \in \mathcal{S}(A)$, что $\bigl|\tau(a)\bigr| = \|a\|$.*

Доказательство. Без ограничения общности $a \neq 0$. Рассмотрим коммутативную алгебру $B = C^*(a, 1)$, порожденную элементами 1 и a в унитализации $\tilde{A}$ алгебры A. Так как B коммутативна, по теореме Гельфанда (теорема 3.48) пространство характеров $\Omega(B)$ компактно, и, так как функция $\hat{a}$ непрерывна, существует характер $\tau_2 \in \Omega(B)$ такой, что $\bigl|\tau_2(a)\bigr| = \|\hat{a}\|_\infty = \|a\|$. Кроме того, $\tau_2(1) = 1$, поэтому $\|\tau_2\| = 1$.

Далее, по теореме Хана–Банаха, τ_2 можно продолжить на алгебру $\tilde{A}$ с сохранением нормы. Обозначим продолжение через τ_1. Так как $\tau_1(1) = \tau_2(1) = 1 = \|\tau_1\|$, то функционал τ_1 положителен по следствию 4.52. Положим $\tau = \tau_1|_A$. Тогда τ — положительный линейный функционал на A, $\bigl|\tau(a)\bigr| = \|a\|$, и $\|\tau\| \leq \|\tau_1\| = 1$. С другой стороны, $\|a\| = \bigl|\tau(a)\bigr| \leq \|\tau\|\|a\|$, откуда $\|\tau\| \geq 1$, то есть $\|\tau\| = 1$. Таким образом, τ — положительный функционал единичной нормы, что и требовалось. □

Утверждение 4.55. *Пусть τ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A. Тогда*

(1) *для данного $a \in A$ равенство $\tau(a^*a) = 0$ выполняется, если и только если $\tau(ba) = 0$ при всех $b \in A$;*

(2) *при всех $a, b \in A$ выполняется неравенство $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$.*

Доказательство. Напомним неравенство Шварца (следствие 4.45): $\bigl|\tau(b^*a)\bigr| \leq \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2}$. Поэтому, если $\tau(a^*a) = 0$, то $\tau(b^*a) = 0$ для всех b. Обратное утверждение очевидно, достаточно взять $b = a^*$.

При доказательстве второго утверждения можно предполагать, что $\tau(b^*b) > 0$ (иначе, в силу первого утверждения, в левой и правой части — нули). Рассмотрим функцию

$$f\colon A \to \mathbb{C}, \qquad f(c) = \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)}.$$

Функция f линейна, так как τ — линейный функционал. Более того, если c положителен, то элемент b^*cb тоже положителен по теореме 4.24, поэтому $f(c) \geq 0$, то есть f — линейный положительный функционал. Применим теорему 4.50. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица. Получаем:

$$\|f\| = \lim_\lambda f(u_\lambda) = \lim_\lambda \frac{\tau(b^*u_\lambda b)}{\tau(b^*b)} = \frac{\tau(b^*b)}{\tau(b^*b)} = 1.$$

Значит $f(a^*a) \leq \|a^*a\|$, откуда $f(a^*a) = \tau(b^*a^*ab)/\tau(b^*b) \leq \|a^*a\|$, то есть $\tau(b^*a^*ab) \leq \tau(b^*b)\|a^*a\|$, что и требовалось. □

Следующий результат касается продолжения положительных функционалов.

Теорема 4.56. *Пусть B — некоторая C^*-подалгебра в C^*-алгебре A и τ — положительный линейный функционал на B. Тогда на A существует положительный линейный функционал τ', продолжающий τ, так что $\|\tau\| = \|\tau'\|$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $A = \tilde{B}$. Определим линейный функционал так: $\tau'(b + \lambda 1) = \tau(b) + \lambda\|\tau\|$, $b \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $\{u_\lambda\}$ — аппроксимативная единица в B, тогда $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$ согласно теореме 4.50. Пусть теперь $b \in B$ и $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\bigl|\tau'(b + \mu)\bigr| = \bigl|\tau(b) + \mu\|\tau\|\bigr| = \bigl|\lim_\lambda \tau(bu_\lambda) + \mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)\bigr| = \bigl|\lim_\lambda \tau\bigl((b + \mu)u_\lambda\bigr)\bigr|,$$

где последнее равенство справедливо, поскольку B — идеал в $\tilde{B}$. Продолжим оценку:

$$\bigl|\tau'(b + \mu)\bigr| = \bigl|\lim_\lambda \tau\bigl((b + \mu)u_\lambda\bigr)\bigr| \leq \sup_\lambda \|\tau\|\bigl\|(b + \mu)u_\lambda\bigr\| = \|\tau\| \sup_\lambda \bigl\|(b + \mu)u_\lambda\bigr\| \leq \|\tau\|\|b + \mu\|,$$

так как $\|u_\lambda\| \leq 1$. Поэтому $\|\tau'\| \leq \|\tau\|$. Обратное неравенство очевидно, поскольку τ' — продолжение τ. Таким образом, $\|\tau'\| = \|\tau\| = \tau'(1)$, где последнее равенство очевидно из определения τ'. Поэтому τ' положителен в силу следствия 4.52. Утверждение теоремы доказано для случая $A = \tilde{B}$.

Перейдем к общему случаю. При необходимости, заменим B и A на их унитализации $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ и продолжим τ с подалгебры B на $\tilde{B}$ как описано выше. Поэтому можно предполагать, что A содержит 1, которая лежит в B. Тогда $\tau(1) = \|\tau\|$. Воспользуемся теоремой Хана–Банаха и продолжим линейный ограниченный функционал τ до линейного функционала τ' на A с сохранением нормы. Но тогда $\tau'(1) = \tau(1) = \|\tau\| = \|\tau'\|$, и функционал τ' положителен в силу следствия 4.52. □

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.57. *Пусть A — некоторая C^*-алгебра и τ — ограниченный линейный функционал на ней. Тогда*

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\|\le 1} \big|\operatorname{Re}\tau(a)\big|.$$

Доказательство. Действительно, $\big|\operatorname{Re}\tau(a)\big| \le \big|\tau(a)\big|$, поэтому $\sup_{\|a\|\le 1} \big|\operatorname{Re}\tau(a)\big| \le \|\tau\|$. С другой стороны, если $a \in A$, $\|a\| \le 1$, то существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, что $\lambda\tau(a) \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\big|\tau(a)\big| = \big|\lambda\tau(a)\big| = \big|\tau(\lambda a)\big| = \big|\operatorname{Re}(\lambda\tau(a))\big| = \big|\operatorname{Re}(\tau(\lambda a))\big|,$$

причем $\|\lambda a\| \le 1$, поэтому искомое равенство достигается. □

Пусть τ — ограниченный линейный функционал на A. Определим отображение τ^* так: $\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)}$. Заметим, что τ^* — комплексно-линейный функционал на A, тем самым, мы определили отображение $A^* \to A^*$. Ясно, что это отображение сопряженно линейно, $(\tau^*)^* = \tau$ и $\|\tau^*\| = \|\tau\|$.

Далее, назовем функционал τ ***самосопряженным***, если $\tau^* = \tau$. Каждый ограниченный линейный функционал представим в виде $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, где τ_1 и τ_2 — однозначно определенные самосопряженные функционалы, $\tau_1 = (\tau + \tau^*)/2$, $\tau_2 = (\tau - \tau^*)/2i$.

Лемма 4.58. *Функционал τ самосопряжен тогда и только тогда, когда $\tau(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Если $a \in A_{sa}$, $\tau(a) = \tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \overline{\tau(a)}$, поэтому $\tau(a) \in \mathbb{R}$. Обратно, представим произвольный элемент $a \in A$ в виде $a = b + ic$, где $b = (a + a^*)/2$ и $c = (a - a^*)/2i$ — эрмитовы элементы алгебры. Тогда $\tau(b)$, $\tau(c) \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\tau(a^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)} = \overline{\tau(b + ic)} = \overline{\tau(a)},$$

откуда $\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \tau(a)$, что и требовалось. □

Обозначим через τ' ограничение функционала τ на A_{sa}. Напомним, что A_{sa} — вещественное линейное подпространство. Если τ — самосопряжен, то $\tau' \colon A_{sa} \to \mathbb{R}$ — ограниченный вещественный линейный функционал.

Лемма 4.59. *В сделанных обозначениях, если τ самосопряжен, то $\|\tau'\| = \|\tau\|$.*

Доказательство. Нужно проверить, что

$$\|\tau\| = \|\tau'\| = \sup_{\substack{a\in A_{sa}\\ \|a\|\le 1}} \big|\tau(a)\big|.$$

Действительно, так как τ самосопряжен, то $\operatorname{Re}\tau(a) = \tau\big(\operatorname{Re}(a)\big)$ (проверьте). Поэтому, по лемме 4.57,

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\|\le 1} \big|\operatorname{Re}\tau(a)\big| = \sup_{\|a\|\le 1} \big|\tau(\operatorname{Re} a)\big| \le \sup_{\substack{b\in A_{sa}\\ \|b\|\le 1}} \tau(b) \le \|\tau\|,$$

откуда и вытекает требуемое. □

Напоминание 4.60. Пусть Ω — компактное хаусдорфово пространство, и $C(\Omega, \mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных вещественнозначных функций на Ω (операции — поточечные, норма — sup-норма). Тогда теорема Рисса–Маркова–Какутани утверждает, что для каждого вещественного непрерывного линейного функционала $\tau \colon C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ существует единственная знакопеременная мера μ, такая, что $\tau(f) = \int f\,d\mu$ для всех $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Более того, $\|\mu\| = \|\tau\|$, и μ — мера, если и только если функционал τ — положителен, то есть $\tau(f) \ge 0$ для любой неотрицательной функции f.

Для знакопеременных мер известно разложение Жордана, а именно, для каждой знакопеременной меры μ существуют меры $\mu^{\pm}$, такие, что $\mu = \mu^+ - \mu^-$ и $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Теорема Рисса превращает это утверждение в следующее.

Утверждение 4.61. *Для каждого ограниченного вещественного линейного функционала $\tau\colon \mathbb{C}(\Omega,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ существуют положительные ограниченные линейные функционалы $\tau_\pm\colon \mathbb{C}(\Omega,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, такие, что $\tau=\tau_+-\tau_-$ и $\|\tau\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|$.*

Наша ближайшая цель — обобщить это утверждение на случай C^*-алгебр.

Обозначим через A^*_{sa} множество всех самосопряженных функционалов. Ясно, что A^*_{sa} — вещественное линейное банахово пространство, а также вещественное линейное подпространство в A^*. Для вещественного линейного пространства X обозначим через $X^\#$ вещественное двойственное пространство, то есть пространство всех ограниченных вещественных линейных функционалов на X.

Лемма 4.62. *Определенное выше отображение $\tau\mapsto\tau'$ является изометричным вещественно-линейным изоморфизмом $A^*_{sa}\to A^\#_{sa}$.*

Доказательство. Действительно, линейность очевидна из определения, норма сохраняется по лемме 4.62. Инъективность отображения очевидна. Наконец, если $\tau'\in A^\#$, то определим $\tau\in A^*$ так. Представим произвольный элемент $a\in A$ в виде $a=b+ic$, где $b=(a+a^*)/2$ и $c=(a-a^*)/2i$ — эрмитовы элементы, и положим $\tau(a)=\tau'(b)+i\tau'(c)$. Тогда

$$\tau^*(a)=\overline{\tau(a^*)}=\overline{\tau(b-ic)}=\overline{\tau'(b)-i\tau'(c)}=\tau'(b)+i\tau'(c)=\tau(a),$$

то есть $\tau\in A^*_{sa}$ и, очевидно, ограничение τ на A_{sa} совпадает с τ'. Поэтому отображение $\tau\mapsto\tau'$ сюръективно. Лемма доказана. □

Теорема 4.63 (разложение Жордана). *Для каждого самосопряженного ограниченного линейного функционала τ на C^*-алгебре A существуют положительные ограниченные функционалы $\tau_\pm$ на A, такие, что $\tau=\tau_+-\tau_-$ и $\|\tau\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через Ω множество всех положительных функционалов τ, таких, что $\|\tau\|\le 1$. Тогда множество Ω замкнуто в $*$-слабой топологии, содержится в единичном шаре в пространстве A^*, который компактен в $*$-слабой топологии (теорема Банаха–Алаоглу), поэтому Ω — хаусдорфов компакт (в $*$-слабой топологии).

Определим отображение $\theta\colon A_{sa}\to C(\Omega,\mathbb{R})$, задав функцию $\theta(a)\in C(\Omega,\mathbb{R})$ так: $\theta(a)(\tau)=\tau(a)$, $\tau\in\Omega$. Ясно, что отображение θ вещественно-линейное, кроме того, если $a\in A^+$ — положительный элемент, то $\tau(a)\in\mathbb{R}_+$, то есть функция $\theta(a)$ принимает неотрицательные значения. Далее, $\bigl\|\theta(a)\bigr\|=\sup_{\tau\in\Omega}|\tau(a)|\le\|a\|$, так как $\|\tau\|\le 1$. С другой стороны, по теореме 4.54 существует такой положительный функционал τ единичной нормы, то есть $\tau\in\Omega$, что $\bigl|\tau(a)\bigr|=\|a\|$, поэтому $\bigl\|\theta(a)\bigr\|=\|a\|$, то есть отображение θ сохраняет норму. Положим $L=\theta(A_{sa})\subset C(\Omega,\mathbb{R})$ — (вещественное) линейное подпространство. Тогда $\theta\colon A_{sa}\to L$ — линейный изоморфизм, сохраняющий норму.

Пусть $\tau\in A^*_{sa}$, тогда $\tau'=\tau\big|_{A_{sa}}\in A^\#_{sa}$ можно рассматривать как функционал на L той же нормы. Тогда, по теореме Хана–Банаха, существует продолжение $\rho\in C(\Omega,\mathbb{R})^\#$ с L на $C(\Omega,\mathbb{R})$, то есть $\rho\circ\theta=\tau'$, причем $\|\rho\|=\|\tau'\|$. Теперь применим к ρ утверждение 4.61, согласно которому существуют положительные функционалы $\rho_\pm\in C(\Omega,\mathbb{R})^\#$, такие, что $\rho=\rho_+-\rho_-$ и $\|\rho\|=\|\rho_+\|+\|\rho_-\|$. Положим $\tau'_\pm=\rho_\pm\circ\theta$. Ясно, что $\tau'_\pm\in A^\#_{sa}$. Как в доказательстве леммы 4.62, построим соответствующие $\tau_\pm\in A^*_{sa}$. Тогда $\tau=\tau_+-\tau_-$. Легко проверить, что функционалы $\tau_\pm$ — положительны. Наконец, используя лемму 4.57, получаем

$$\|\tau\|=\|\tau'\|=\|\rho\|=\|\rho_+\|+\|\rho_-\|\ge\|\tau'_+\|+\|\tau'_-\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|\ge\|\tau\|,$$

где первое неравенство имеет место, поскольку $\rho_\pm$ является продолжением $\tau'_\pm$, последнее неравенство — это неравенство треугольника. Поэтому $\|\tau_+\|+\|\tau_-\|=\|\tau\|$. Теорема доказана. □

Замечание 4.64. Можно показать, что функционалы $\tau_\pm$ из теоремы 4.63 определены однозначно.

4.6 Конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала

Представлением C^*-алгебры A называется пара (H,φ), где H — некоторое гильбертово пространство, а $\varphi\colon A\to\mathcal{B}(H)$ — $*$-гомоморфизм в алгебру ограниченных линейных операторов на H. Представление называется ***точным***, если φ инъективен.

Пусть $(H_\lambda)_\lambda$ — семейство гильбертовых пространств. Тогда определена их прямая сумма $\bigoplus_\lambda H_\lambda = \bigl\{(h_\lambda) \in \prod_\lambda H_\lambda : \sum_\lambda \|h_\lambda\| < \infty\bigr\}$, которая является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\bigl\langle (u_\lambda), (v_\lambda)\bigr\rangle = \sum_\lambda \langle u_\lambda, v_\lambda\rangle$.

Задача 4.65. Проверьте, что $\bigoplus_\lambda H_\lambda$ с очевидными покомпонентными операциями и определенным выше скалярным произведением действительно является линейным пространством с корректно определенным скалярным произведением, полным относительно соответствующей нормы, то есть является гильбертовым пространством.

Далее, пусть $\bigl((H_\lambda, \varphi_\lambda)\bigr)_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство представлений алгебры A. Тогда определена их ***прямая сумма*** (H, φ), где $H = \bigoplus_\lambda H_\lambda$, а $\varphi(a)\bigl((h_\lambda)\bigr) = \bigl(\varphi_\lambda(a)(h_\lambda)\bigr)$. Если для любого $a \in A$ найдется индекс λ, такой, что $\varphi_\lambda(a) \neq 0$, то представление (H, φ) — точное.

Задача 4.66. Проверьте, что (H, φ) действительно является представлением алгебры A, то есть что $\varphi\colon A \to \mathcal{B}(H)$ — некоторый $*$-гомоморфизм.

Напомним, что для каждого линейного пространства L со скалярным произведением можно определить пополнение $\hat{L}$ соответствующего нормированного пространства, на котором, в свою очередь, определено скалярное произведение, являющееся продолжением исходного. В результате получается гильбертово пространство, которое называется ***гильбертовым пополнением*** L.

Пусть τ — положительный линейный функционал на C^*-алгебре A.

$$N_\tau = \bigl\{a \in A : \tau(a^*a) = 0\bigr\}.$$

Лемма 4.67. *В сделанных обозначениях, N_τ — замкнутый левый идеал в A.*

Доказательство. Действительно, для любого $x \in A$ и $a \in N_\tau$ имеем: $\tau\bigl((xa)^*(xa)\bigr) = t\bigl((a^*x^*x)a\bigr) = 0$ по утверждению 4.55, поэтому $xa \in N_\tau$, то есть N_τ — левый идеал. Замкнутость его следует из непрерывности τ. □

Рассмотрим фактор-пространство A/N_τ и определим отображение

$$F_\tau\colon \bigl(A/N_\tau\bigr)^2 \to \mathbb{C}, \qquad F_\tau : (a + N_\tau, b + N_\tau) \mapsto \tau(b^*a).$$

Лемма 4.68. *Определенное только что отображение задает на A/N_τ полуторалинейное скалярное произведение.*

Доказательство. Согласно лемме 4.43, отображение $f_\tau : (a, b) \mapsto \tau(b^*a)$ задает на A положительную полуторалинейную форму. Нужно показать, что F_τ невырождена на A/N_τ. Действительно, $F_\tau(a + N_\tau, a + N_\tau) = \tau(a^*a) = 0$, если и только если $a \in N_\tau$, то есть, $a + N_\tau = 0$ в A/N_τ, что и требовалось. □

Обозначим через H_τ гильбертово пополнение пространства A/N_τ. Для каждого $a \in A$ определим отображение $\varphi(a)\colon A/N_\tau \to A/N_\tau$ так: $\varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau$.

Лемма 4.69. *Отображение $\varphi(a)$ — линейно, более того $\bigl\|\varphi(a)\bigr\| \leq \|a\|$, в частности, $\varphi(a) \in \mathcal{B}(A/N_\tau)$.*

Доказательство. Линейность очевидна:

$$\varphi(a)\bigl((b_1 + N_\tau) + (b_2 + N_\tau)\bigr) = \varphi(a)(b_1 + b_2 + N_\tau) = a(b_1 + b_2) + N_\tau = (ab_1 + N_\tau) + (ab_2 + N_\tau) = \\ = \varphi(a)(b_1 + N_\tau) + \varphi(a)(b_2 + N_\tau),$$

и

$$\varphi(a)\bigl(\lambda(b + N_\tau)\bigr) = \varphi(a)(\lambda b + N_\tau) = a(\lambda b) + N_\tau = \lambda ab + N_\tau = \lambda\varphi(a)(b + N_\tau).$$

Далее, по определению скалярного произведения на A/N_τ имеем:

$$\bigl\|\varphi(a)(b + N_\tau)\bigr\|^2 = \|ab + N_\tau\|^2 = \tau\bigl((ab)^*(ab)\bigr) = \tau(b^*a^*a\,b) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b) = \|a\|^2\|b + N_\tau\|^2$$

где неравенство следует из утверждения 4.55, откуда $\bigl\|\varphi(a)\bigr\| \leq \|a\|$, что и требовалось. □

Оператор $\varphi(a)$ единственным образом продолжается до непрерывного оператора $\varphi_\tau(a)$ на пополнении H_τ, в результате получаем отображение $\varphi_\tau\colon A \to \mathcal{B}(H_\tau)$, $\varphi_\tau\colon a \mapsto \varphi_\tau(a)$.

Лемма 4.70. *Отображение $\varphi_\tau\colon A \to \mathcal{B}(H_\tau)$, $\varphi_\tau\colon a \mapsto \varphi_\tau(a)$, является $*$-гомоморфизмом алгебр, то есть пара (H_τ, φ_τ) — это некоторое представление алгебры A.*

Доказательство. Действительно,

$$\varphi_\tau(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)(b + N_\tau) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)b + N_\tau = \lambda_1(a_1 b + N_\tau) + \lambda_2(a_2 b + N_\tau) = \\ = \lambda_1 \varphi_\tau(a_1)(b + N_\tau) + \lambda_2 \varphi_\tau(a_2)(b + N_\tau),$$

и

$$\varphi_\tau(a_1) \circ \varphi_\tau(a_2)(b + N_\tau) = \varphi_\tau(a_1)(a_2 b + N_\tau) = a_1 a_2 b + N_\tau = \varphi_\tau(a_1 a_2)(b + N_\tau),$$

поэтому φ_τ — гомоморфизм алгебр. Остается проверить, что $\varphi_\tau(a^*) = \big(\varphi_\tau(a)\big)^*$. Для любых b_1, $b_2 \in A$ имеем:

$$\big\langle \varphi_\tau(a^*)(b_1 + N_\tau), b_2 + N_\tau \big\rangle = \langle a^* b_1 + N_\tau, b_2 + N_\tau \rangle = \tau\big(b_2^*(a^* b_1)\big) = \tau\big((ab_2)^* b_1\big) = \\ = \langle b_1 + N_\tau, ab_2 + N_\tau \rangle = \big\langle b_1 + N_\tau, \varphi_\tau(a)(b_2 + N_\tau) \big\rangle = \Big\langle \big(\varphi_\tau(a)\big)^*(b_1 + N_\tau), b_2 + N_\tau \Big\rangle,$$

поэтому $\varphi_\tau(a^*) = \big(\varphi_\tau(a)\big)^*$, что и требовалось. □

Представление (H_τ, φ_τ) называется ***представлением Гельфанда–Наймарка–Сигала*** или ***ГНС-представлением***, ассоциированным с τ. Прямая сумма представлений (H_τ, φ_τ) по всем состояниям $\tau \in \mathcal{S}(A)$ алгебры A называется ***универсальным представлением алгебры*** A.

Теорема 4.71 (Гельфанд–Наймарк)**.** *Всякая C^*-алгебра A допускает точное представление. В частности, ее универсальное представление является точным.*

Доказательство. Обозначим универсальное представление алгебры A через (H, φ), и пусть $\varphi(a) = 0$ для некоторого элемента $a \in A$. По теореме 4.54 для нормального элемента $a^*\, a$ существует состояние $\tau \in \mathcal{S}(A)$, такое, что $\tau(a^* a) = \|a^* a\|$. По теореме 4.18 элемент $a^* a$ положителен, поэтому определен положительный элемент $b = (a^* a)^{1/4}$. Тогда $\|a\|^2 = \|a^* a\| = \tau(a^* a) = \tau(b^4)$, а с другой стороны,

$$\big\|\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)\big\|^2 = \big\langle \varphi_\tau(b)(b + N_\tau), \varphi_\tau(b)(b + N_\tau) \big\rangle = \langle b^2 + N_\tau, b^2 + N_\tau \rangle = \tau\big((b^2)^* b^2\big) = \tau(b^4),$$

поэтому $\|a\|^2 = \big\|\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)\big\|^2$. Наконец, $\varphi_\tau(b^4) = \varphi_\tau(a^* a) = \varphi_\tau(a^*)\varphi_\tau(a) = 0$ для любого $\tau \in \mathcal{S}(A)$, поэтому $\varphi_\tau(b^4) = \big(\varphi_\tau(b)\big)^4 = 0$. Но элемент b — эрмитов, поэтому $\varphi_\tau(b)$ — тоже эрмитов, и, значит, $\varphi_\tau(b) = 0$ по следствию 3.27. Итак, $\|a\| = 0$, поэтому $a = 0$, откуда φ — инъективно, что и требовалось. □

В качестве примера использования ГНС-конструкции опишем конструкцию, превращающую матричную алгебру над C^*-алгеброй в C^*-алгебру. Пусть A — некоторая алгебра, и $M_n(A)$ — алгебра всех $(n \times n)$-матриц с элементами из A. Стандартным образом определенные операции над матрицами превращают $M_n(A)$ в алгебру, а если исходная алгебра A является $*$-алгеброй, то операция $*\colon (a_{ij}) \mapsto (a_{ji}^*)$ является, очевидно, инволюцией и превращает алгебру $M_n(A)$ в $*$-алгебру.

Пусть $\varphi\colon A \to B$ — некоторый $*$-гомоморфизм между $*$-алгебрами A и B. Несложно проверить, что отображение $M_n(A) \to M_n(B)$, заданное так: $(a_{ij}) \mapsto (\varphi(a_{ij}))$ также является $*$-гомоморфизмом матричных алгебр. Будем обозначать это отображение той же буквой φ и называть ***раздутием*** исходного гомоморфизма.

Задача 4.72. Проверьте, что раздутие $*$-гомоморфизма является $*$-гомоморфизмом матричных алгебр. Докажите, что если исходный гомоморфизм инъективен, то его раздутие — тоже.

Пусть H — гильбертово пространство. Через $H^{(n)}$ обозначим прямую ортогональную сумму n экземпляров H. Определим отображение $\varphi\colon M_n(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{B}(H^{(n)})$ так: для каждого $u = (u_{ij}) \in M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ и $x = (x^1, \ldots, x^n) \in H^{(n)}$ положим

$$\varphi(u)(x) = u \cdot x = \Big(\sum_{j=1}^n u_{1j} x^j\ \ldots, \sum_{j=1}^n u_{nj} x^j\Big),$$

где точка обозначает матричное умножение.

Лемма 4.73. *В сделанных обозначениях, отображение $\varphi\colon M_n\big(\mathcal{B}(H)\big) \to \mathcal{B}(H^{(n)})$ задает $*$-изоморфизм.*

Доказательство. Линейность отображения φ очевидна из формулы $\varphi(u) = u\cdot x$ и правила умножения матриц. Далее, $\varphi(u_1 \cdot u_2)(x) = (u_1 \cdot u_2) \cdot x = u_1 \cdot (u_2 \cdot x) = \varphi(u_1)\big(\varphi(u_2)(x)\big)$, поэтому $\varphi(u_1 \cdot u_2) = \varphi(u_1) \circ \varphi(u_2)$. Наконец, для любых x, $y \in H^{(n)}$ имеем:

$$\big\langle \varphi(u^*)(x), y\big\rangle = \langle u^* \cdot x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \Big\langle \sum_{j=1}^n u^*_{ji} x^j, y^i \Big\rangle = \sum_{i,\,j=1}^n \langle u^*_{ji} x^j, y^i\rangle = \sum_{i,\,j=1}^n \langle x^j, u_{ji} y^i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Big\langle x^j, \sum_{j=1}^n u_{ji} y^i \Big\rangle = \big\langle x, \varphi(u)(y)\big\rangle = \big\langle \varphi(u)^*(x), y\big\rangle,$$

откуда $\varphi(u^*) = \big(\varphi(u)\big)^*$, что и требовалось. □

Будем называть ***матрицей оператора*** $v \in \mathcal{B}(H^{(n)})$ такую матрицу $u \in M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$, что $\varphi(u) = v$. По лемме 4.73 эта матрица однозначно определена.

Определим норму на алгебре $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$, положив $\|u\| = \big\|\varphi(u)\big\| = \sup_x \big\|\varphi(u)(x)\big\|$, где супремум берется по всем $x \in H^{(n)}$, $\|x\| \le 1$.

Нам будут полезны следующие оценки.

Задача 4.74. Докажите, что для нормы $\|u\| = \big\|\varphi(u)\big\|$ на алгебре $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ имеют место следующие неравенства*:*

$$\|u_{ij}\| \le \|u\| \le \sum_{p,\,q=1}^n \|u_{pq}\|.$$

Лемма 4.75. *Норма $\|u\| = \big\|\varphi(u)\big\|$ превращает алгебру $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ в C^*-алгебру.*

Доказательство. Действительно,

$$\|u^* \cdot u\| = \big\|\varphi(u^* \cdot u)\big\| = \big\|\varphi(u^*) \circ \varphi(u)\big\| = \big\|\varphi(u)^* \circ \varphi(u)\big\| = \big\|\varphi(u)\big\|^2 = \|u\|^2,$$

где первое и последнее равенства — определение нормы на $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$, второе и третье выполнены, так как φ — $*$-гомоморфизм, а четвертое — так как $\mathcal{B}(H^{(n)})$ является C^*-алгеброй. Полноту можно проверить с помощью оценок из задачи 4.74. Лемма доказана. □

Теорема 4.76. *Для всякой C^*-алгебры A на соответствующей матричной алгебре $M_n(A)$ существует единственная норма, превращающая ее в C^*-алгебру.*

Доказательство. Рассмотрим универсальное представление (H, φ) алгебры A, которое существует по теореме Гельфанда–Наймарка. Напомним, что это инъективный $*$-гомоморфизм $\varphi\colon A \to \mathcal{B}(H)$, тогда его раздутие $\varphi\colon M_n(A) \to M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ — также инъективный $*$-гомоморфизм (см. задачу 4.72). Для произвольного $a \in A$ положим $\|a\| = \big\|\varphi(a)\big\|$, где слева стоит определенная выше норма, превращающая $M_n\big(\mathcal{B}(H)\big)$ в C^*-алгебру в соответствии с леммой 4.75. Единственность следует из следствия 3.28. □

Замечание 4.77. Согласно G.J. Murphy, использование ГНС-конструкции — единственный способ доказать теорему 4.76

Другое приложение — «естественное» доказательство следующей важной теоремы.

Теорема 4.78. *Пусть $a \in A_{sa}$ — некоторый самосопряженный элемент C^*-алгебры A. Тогда a положителен в том и только том случае, когда $\tau(a) \ge 0$ для всех положительных линейных функционалов τ на A.*

Доказательство. Если a — положителен, то $\tau(a) \in \mathbb{R}^+$ по определению положительного функционала. Обратно, пусть $\tau(a) \ge 0$ для всех положительных τ. Рассмотрим универсальное представление (H, φ) алгебры A. Фиксируем произвольный $x \in H$. Определим на A следующий линейный функционал: $\psi_x\colon b \mapsto \big\langle \varphi(b)(x), x\big\rangle$.

Лемма 4.79. *Функционал $\psi_x\colon A \to \mathbb{C}$, $\psi_x\colon b \mapsto \big\langle \varphi(b)(x), x\big\rangle$ положителен для каждого $x \in H$.*

Доказательство. Действительно, если $b \in A^+$, то оператор $\varphi(b) \in \mathcal{B}(H)^+$, поскольку φ — это $*$-изоморфизм. Тогда определен самосопряженный положительный оператор $\beta = \big(\varphi(b)\big)^{1/2} \in \mathcal{B}(H)^+$, причем $\beta \circ \beta = \varphi(b)$ и

$$\big\langle \varphi(b)(x), x \big\rangle = \big\langle \beta\big(\beta(x)\big), x \big\rangle = \big\langle \beta(x), \beta(x) \big\rangle \geq 0,$$

что и требовалось. □

Итак, каждый функционал ψ_x положителен, поэтому, по предположению, $\psi_x(a) =< \varphi(a)(x), x\big\rangle \geq 0$, причем последнее неравенство выполнено для любого x. Кроме того, так как a самосопряжен по условию, а φ — это $*$-изоморфизм, то $\varphi(a)$ тоже самосопряжен, поэтому $\varphi(a)$ — положительный оператор, то есть, $\varphi(a) \in \varphi(A)^+$, откуда $a \in A^+$, так как φ является $*$-изоморфизмом. □

Тема 5

Частичный порядок с единицей на векторных пространствах

План. Упорядоченные вещественные векторные пространства. Конус положительных элементов. Порядковая единица и архимедова порядковая единица. Положительные вещественные функционалы. Состояния. Порядковая полунорма. Упорядоченные $*$-пространства, положительные функционалы, состояния и порядковые полунормы на них. Минимальная и максимальная порядковые полунормы.

Этот раздел лекций основан на [12].

5.1 Вещественные векторные пространства с порядком

В этом разделе ***все рассматриваемые векторные пространства будут вещественными.***

Пусть V — (вещественное) векторное пространство. Тогда ***конусом*** в V назовем каждое непустое $C \subset V$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) для каждого $a \in [0, \infty)$ и $v \in C$ выполняется $av \in C$;

(2) для любых $v, w \in C$ имеем $v + w \in C$.

Заметим, что каждый конус содержит нулевой вектор 0, так как $0 = 0v$ для любого $v \in C$.

Пример 5.1. Тривиальным примером конуса может служить подпространство $C = \{0\}$.

Пусть в векторное пространстве V фиксирован некоторый конус $V^+ \subset V$, такой, что $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$. Тогда конус V^+ порождает на V естественный частичный порядок: $v \le w$, если и только если $w - v \in V^+$. Векторное пространство V вместе с таким фиксированным конусом называется ***упорядоченным векторным пространством.***

Пример 5.2. В качестве V^+ можно взять тривиальный конус $\{0\}$. Тогда соответствующий частичный порядок также будет тривиальным: в нем никакие два различных элемента несравнимы.

Предложение 5.3. *Определенный выше частичный порядок инвариантен относительно сдвигов и умножения на неотрицательные числа. Кроме того, $0 \in V^+$, поэтому $v \in V^+$ тогда и только тогда, когда $v \ge 0$.*

Доказательство. Если $v \le w$, то для каждого $x \in V$ и $a \in [0, \infty)$ имеем $(w+x)-(v+x) = w - v \in V^+$, так что $v + x \le w + x$, и $aw - av = a(w - v) \in V^+$ откуда $av \le aw$. Далее, 0 принадлежит любому конусу, в частности, конусу V^+. Наконец, если $v = v - 0 \in V^+$, то $v \ge 0$. Обратно, если $v \ge 0$, то $v = v - 0 \in V^+$. $\square$

Предложение 5.3 дает мотивацию называть V^+ ***конусом положительных элементов*** или, короче, ***положительным конусом***, что мы и будем делать.

Предложение 5.4. *Пусть на векторном пространстве V задан частичный порядок, инвариантный относительно сдвигов и умножения на неотрицательные числа. Тогда множество $V^+ = \{v \in V : v \ge 0\}$ является конусом в V, для которого $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, так что V с таким V^+ — упорядоченное векторное пространство, причем отношение порядка, порожденное на нем конусом V^+ совпадает с исходным.*

Доказательство. Пусть $a \in [0, \infty)$ и $v \in V^+$, тогда $av \in V^+$ по условию, так что первое свойство из определения конусов выполнено. Далее, пусть v, $w \in V^+$. Тогда из $v \geq 0$ и инвариантности относительно сдвигов следует, что $v + w \geq w \geq 0$, откуда $v + w \in V^+$, что доказывает и второе свойство. Итак, V^+ —конус. Покажем теперь, что $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$. Пусть это не так, т.е. существует ненулевой $v \in V^+ \cap (-V^+)$. Последнее означает, что $v \geq 0$ и $-v \geq 0$. Так как порядок инварианте относительно сдвигов, из второго неравенства заключаем, что $0 \geq v$. В силу антисимметричности частичного порядка, заключаем, что $v = 0$. Наконец, $v \leq w$ в исходном порядке тогда и только тогда, когда $0 = v - v \leq w - v$, то есть $w - v \in V^+$, то есть $v \leq w$ в упорядоченном векторном пространстве V с конусом V^+. □

Итак, мы показали эквивалентность определения упорядоченного метрического пространства с помощью конуса положительных элементов и в терминах свойств инвариантности частичного порядка относительно сдвигов и растяжений.

Следствие 5.5. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство. Тогда для любых v, v', w, $w' \in V$ и $a \leq 0$ таких, что $v \leq w$ и $v' \leq w'$, имеем $v + v' \leq w + w'$ и $aw \leq av$, в частности, $-w \leq -v$.*

Доказательство. Так как $w - v \geq 0$ и $w' - v' \geq 0$, то $(w + w') - (v + v') = (w - v) + (w' - v') \geq 0$, что доказывает первое неравенство. Для доказательства второго достаточно заметить, что $(-v) - (-w) = w - v \geq 0$ и воспользоваться инвариантностью порядка относительно умножения на неотрицательные числа. □

Элемент $e \in V$ упорядоченного векторного пространства называется ***порядковой единицей***, если для каждого $v \in V$ существует число $r > 0$, для которого $v \leq re$.

Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство. Конус V^+ называется ***полным***, если $V = V^+ - V^+$ (здесь имеется ввиду прямая сумма).

Лемма 5.6. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей $e \in V$. Тогда*

(1) $e \in V^+$;

(2) *если $v \in V$, $a \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ таковы, что $v \leq re$, то для всех $s \geq r$ выполняется $v \leq se$*;

(3) *для любых $v_1, \ldots, v_n \in V$ существует $r > 0$, для которого $v_i \leq re$ при всех i*;

(4) *конус V^+ — полный*;

(5) *если $v_1, \ldots, v_n \in V^+$ таковы, что $v_1 + \ldots + v_n = 0$, то $v_1 = \cdots = v_n = 0$*;

(6) *если $v_1, \ldots, v_n \in V^+$ и $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$ таковы, что $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$, то для каждого i или $a_i = 0$, или $v_i = 0$.*

Доказательство. (1) Существует $r > 0$, для которого $re \geq -e$. Инвариантность относительно сдвигов дает $(r + 1)e = re + e \geq 0$, и так как $r + 1 > 0$, то $e = (r + 1)^{-1}(r + 1)e \geq 0$, что и требовалось.

(2) Так как $e \geq 0$ по пункту (1) и $s - r \geq 0$, то $(s - r)e \geq 0$, поэтому, в силу следствия 5.5, имеем $se = (s - r)e + re \geq 0 + v = v$, что и требовалось.

(3) Для каждого i найдем $r_i > 0$ такое, что $v_i \leq r_i e$, и положим $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Остается применить пункт (2).

(4) Выберем произвольное $v \in V$. Мы должны показать, что $v = u - w$ для некоторых $u, w \in V^+$. По пункту (3), существует $r > 0$, для которого $v \leq re$ и $-v \leq re$, откуда $re - v \geq 0$ и $re + v \geq 0$. Положим $u = (re + v)/2$ и $w = (re - v)/2$, получаем требуемое представление для v.

(5) Докажем индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть для $n - 1$ утверждение доказано. Так как $v_n = -v_1 - \cdots - v_{n-1} \in V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, откуда $v_n = 0$. Но тогда, по индукции, $v_1 = \cdots = v_{n-1} = 0$.

(6) Мгновенно следует из пункта (5). □

Замечание 5.7. Отметим, что для пространства $V = \{0\}$ элемент 0 является порядковой единицей. Если же $V \neq \{0\}$, но $V^+ = \{0\}$, то порядковая единица e, если есть, должна, в силу леммы 5.6, равняться 0, но тогда вектор $re = 0$ при всех $r \in \mathbb{R}$, поэтому $v \leq re$ не может быть выполнено ни для ненулевого $v \in V$ ни при каком $r \in \mathbb{R}$, что противоречит определению порядковой единицы. Так что такое пространство порядковой единицы не содержит. Итак, если упорядоченное линейное пространство V отлично от нуля и обладает порядковой единицей e, то $V^+ \neq \{0\}$ и $e \neq 0$.

Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда e называется ***архимедовой порядковой единицей***, если для каждого $v \in V$ такого, что $re + v \geq 0$ для всех $r > 0$, выполняется $v \in V^+$ (пространство V не содержит «неположительных инфинитезимальных элементов»).

Лемма 5.8. *Пусть V — упорядоченное пространство с архимедовой порядковой единицей e. Предположим, что для некоторых $v \in V$, $r_0 \geq 0$ и всех $r > r_0$ выполняется $re + v \geq 0$. Тогда $r_0 e + v \geq 0$.*

Доказательство. Так как $re+v \geq 0$ для всех $r > r_0$, то $(s+r_0)e+v) \geq 0$ при всех $s > 0$, откуда $se+(r_0e+v) \geq 0$ при всех $s > 0$. Так как порядковая единица — архимедова, то $r_0 e + v \geq 0$, что и требовалось. □

5.1.1 Положительные $\mathbb{R}$-линейные функционалы и состояния

Пусть V — упорядоченное векторное пространство и $f\colon V \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Тогда f называется ***положительным функционалом***, если $f(V^+) \subset [0, \infty)$.

Предложение 5.9. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство. Линейный функционал f на V положителен, если и только если он сохраняет порядок.*

Доказательство. Действительно, пусть f положителен, и $v, w \in V$ таковы, что $v \leq w$, т.е. $w - v \in V^+$. Тогда $f(w - v) \geq 0$ по условию, откуда $f(w) \geq f(v)$, то есть f сохраняет порядок. Обратно, пусть f сохраняет порядок. Заметим, что для каждого элемента $u \in V^+$ выполнено $u \geq 0$, где 0 — нулевой вектор. Поэтому, так как f сохраняет порядок, то $f(u) \geq f(0) = 0$, то есть f — положителен. □

Говорят, что $S \subset V$ ***мажорирует*** V^+, если для каждого $v \in V^+$ существует $w \in S$ такой, что $v \leq w$.

Предложение 5.10. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство.*

(1) *Если $S \subset V$ мажорирует V^+, и $T \supset S$, то T также мажорирует V^+.*

(2) *Если $e \in V$ — порядковая единица, а E — подпространство в V, содержащее e, то E мажорирует V^+.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Действительно, так как e — порядковая единица, то для любого $v \in V$ найдется $r > 0$, для которого $r\,e \geq v$. Но $r\,e \in E$, поэтому E, что и требовалось. □

Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство с полным положительным конусом, $E \subset V^+$ мажорирует V^+. Для каждого $h \in V$ положим

$$L_h = \{z \in E : z \leq h\}, \qquad \text{и} \qquad U_h = \{z \in E : h \leq z\}.$$

Лемма 5.11. *В сделанных обозначениях, множества L_h и U_h непусты для любого $h \in V$.*

Доказательство. Так как V^+ — полный конус, то каждое $h \in V$ представимо в виде $w - v$, где $v, w \in V^+$. Но тогда $-v \leq w - v \leq w$, так как $0 \leq w \leq w + v$, а порядок инвариантен относительно сдвигов. Так как E мажорирует V^+, то существуют $\alpha, \beta \in E$ такие, что $\alpha \geq v$ и $\beta \geq w$. Но тогда, в силу леммы 5.5, $-\alpha \leq -v \leq w - v = h$, так что $-\alpha \in L_h$, и $\beta \geq w \geq w - v = h$, то есть $\beta \in U_h$, что и требовалось. □

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Положим

$$\ell_f(h) = \sup\{f(z) : z \in L_h\}, \qquad \text{и} \qquad u_f(h) = \inf\{f(z) : z \in U_h\}.$$

Так как для каждых $z \in L_h$ и $w \in U_h$ выполняется $z \leq w$, а f сохраняет порядок, то $\ell_f(h) \leq u_f(h)$. Ясно также, что если $h \in E$, то $h \in L_h \cap U_h$ и, так как f сохраняет порядок, $\ell_f(h) = f(h) = u_f(h)$.

Лемма 5.12. *Пусть (V, V^+) — упорядоченное векторное пространство с полным положительным конусом, линейное подпространство $E \subset V^+$ мажорирует V^+, вектор $h \in V$ не содержится в E, и $f\colon E \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Рассмотрим линейное подпространство $W = \{ah + v : a \in \mathbb{R},\, v \in E\}$, натянутое на E и h, и пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ таково, что $\ell_f(h) \leq \gamma \leq u_f(h)$, а $f_\gamma\colon W \to \mathbb{R}$ определяется так: $f_\gamma(ah + v) = a\gamma + f(v)$. Тогда f_γ — положительный линейный функционал такой, что $f_\gamma|_E = f$. Более того, если $g\colon W \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, для которого $g|_E = f$, то $\ell_f(h) \leq g(h) \leq u_f(h)$ и $g = f_\gamma$ для $\gamma = g(h)$.*

Доказательство. Линейность $f_\gamma(ah+v)=af(h)+f(v)=a\gamma+f(v)$ и то, что f_γ продолжает f, очевидны. Покажем, что f_γ положительный. Для этого выберем произвольный положительный $ah+v\in W$ и покажем, что $f(ah+v)\geq 0$. Рассмотрим три случая.

(1) Пусть $a=0$, тогда $ah+v=v\geq 0$ и $f(ah+v)=f(v)\geq 0$, так как $v\in E$ и f — положительный линейный функционал на E.

(2) Пусть $a>0$. Так как $ah+v\geq 0$, то $h\geq(-1/a)v$, откуда $(-1/a)v\in L_h$. Но тогда $(-1/a)f(v)=f\big((-1/a)v\big)\leq \ell_f(h)\leq\gamma$, откуда $0\leq f(v)+a\gamma=f_\gamma(ah+v)$.

(3) Пусть $a<0$, тогда $-a>0$ и условие $ah+v\geq 0$ влечет $(-1/a)v\geq h$, откуда $(-1/a)v\in U_h$. Но тогда $\gamma\leq u_f(h)\leq f\big((-1/a)v\big)=(-1/a)f(v)$, так что $0\leq f(v)+a\gamma=f_\gamma(ah+v)$.

Итак, мы доказали, что f_γ положителен.

Пусть теперь $g\colon W\to\mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, $g|_E=f$. Выберем произвольные $z\in L_h$ и $w\in U_h$, тогда $z\leq h\leq w$. В силу предложения 5.9 и условия $g|_E=f$, имеем $f(z)=g(z)\leq g(h)\leq g(w)=f(w)$. Применяя к полученным неравенствам супремум по $z\in L_h$ и инфимум по $w\in U_h$, получаем $\ell_f(h)\leq g(h)\leq u_f(h)$.

Положим теперь $\gamma=g(h)$, тогда

$$g(ah+v)=a\,g(h)+g(v)=a\gamma+f(v)=f_\gamma(ah+v),$$

откуда $g=f_\gamma$. Лемма доказана. □

Из леммы 5.6 и предложения 5.10 вытекает следующий важный частный случай леммы 5.12. Пусть (V,V^+) — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e, $E=\{re:r\in\mathbb{R}\}$, $v\in V\setminus E$. Тогда, в обозначениях леммы 5.12, $L_v=\{re:re\leq v$, и $U_v=\{re:re\geq v\}$. Рассмотрим положительный линейный функционал $f\colon E\to\mathbb{R}$, определенный так: $f(re)=r$. Положим

$$\alpha=\sup\{r\in\mathbb{R}:re\leq v\},\qquad\text{и}\qquad\beta=\inf\{r\in\mathbb{R}:v\leq re\},$$

тогда $\alpha=\ell_f(v)$, $\beta=u_f(v)$, и $\alpha\leq\beta$, в частности, α и β конечны. Рассмотрим линейное подпространство $W=\{av+re:a,r\in\mathbb{R}\}$, натянутое на v и e, выберем произвольное $\gamma\in[\alpha,\beta]$, и определим $f_\gamma\colon W\to\mathbb{R}$, положив $f_\gamma(av+re)=a\gamma+r\,f(e)$.

Следствие 5.13. *В сделанных обозначениях, f_γ — положительный линейный функционал, такой, что $f_\gamma|_E=f$. Более того, если $g\colon W\to\mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, для которого $g|_E=f$, то $g(v)\in[\alpha,\beta]$ и $g=f_\gamma$ для $\gamma=g(v)$.*

Имеет место следующий аналог теоремы Хана–Банаха.

Теорема 5.14. *Пусть (V,V^+) — упорядоченное векторное пространство с полным положительным конусом, линейное подпространство $E\subset V^+$ мажорирует V^+, и $f\colon E\to\mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Тогда существует положительный линейный функционал $\tilde f\colon V\to\mathbb{R}$ такой, что $\tilde f|_E=f$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}$ всех пар (E',f'), где $E'\subset V$ — линейное подпространство, мажорирующее V^+, а $f'\colon E'\to\mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, продолжающий f, и введем на нем частичный порядок: $(E_1,f_1)\leq(E_2,f_2)$, если и только если $E_1\subset E_2$ и $f_2|_{E_1}=f_1$. Нетрудно проверить, что к этому семейству применима лемма Цорна[1] поэтому в нем существует максимальный элемент $(\tilde E,\tilde f)$. Остается показать, что $\tilde E=V$.

Пусть $\tilde E\neq V$. Тогда, так как конус V^+ полон, найдется $p\in V^+\setminus\tilde E$. Обозначим через W линейную оболочку $\{p\}\cup\tilde E$. Тогда $\tilde E\subset W$ — собственное подпространство. Далее, $E\subset\tilde E$, поэтому $\tilde E$ мажорирует V^+. Применим лемму 5.12 и продолжим $\tilde f$ до положительного функционала f_W на W. Но тогда $(W,f_W)\in\mathcal{C}$ причем (W,f_W) строго больше максимального элемента $(\tilde E,\tilde f)$. Из полученного противоречия следует, что $\tilde E=V$. Теорема доказана. □

Следствие 5.15. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e, линейное подпространство $E\subset V^+$ содержит e, и $f\colon E\to\mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Тогда существует положительный линейный функционал $\tilde f\colon V\to\mathbb{R}$ такой, что $\tilde f|_E=f$.*

Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Положительный линейный функционал $f\colon V\to\mathbb{R}$, для которого $f(e)=1$, называется ***состоянием***, а множество всех состояний — ***пространством состояний***.

[1]В качестве верхней грани цепи $\big\{(E_\lambda,g_\lambda)\big\}$ можно взять $\big(\cup_\lambda E_\lambda,g\big)$, где $g(x)=f_\lambda(x)$ для $x\in E_\lambda$.

Предложение 5.16. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда пространство состояний непусто.*

Доказательство. Действительно, пусть $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$ — одномерное пространство, натянутое на e. Тогда $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(re) = r$, — положительный линейный функционал, для которого $f(e) = 1$. По теореме 5.14, этот функционал продолжается до положительного функционала $\tilde{f}\colon V \to \mathbb{R}$, для которого $\tilde{f}(e) = f(e) = 1$, т.е. $\tilde{f}$ — состояние. □

Теорема 5.17. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Выберем произвольный $v \in V$ и положим*

$$\alpha = \sup\{r \in \mathbb{R} : re \le v\}, \qquad \beta = \inf\{r \in \mathbb{R} : v \le re\}.$$

Тогда $\alpha \le \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и для каждого $\gamma \in [\alpha, \beta]$ существует состояние $f_\gamma\colon V \to \mathbb{R}$, для которого $f_\gamma(v) = \gamma$.

Доказательство. Пусть $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$. Определим $g\colon E \to R$, положив $g(re) = r$, тогда g — положительный линейный функционал и $g(e) = 1$.

Пусть сначала $v \in E$, т.е. $v = re$, тогда $\alpha = \beta = r = \gamma$. В силу следствия 5.15, функционал g продолжается до положительного линейного функционала $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{R}$, откуда $\tilde{g}(e) = 1$, так что $\tilde{g}$ — состояние, и $\tilde{g}(v) = \tilde{g}(re) = r = \gamma$, поэтому $\tilde{g}$ можно взять в качестве f_γ.

Пусть теперь $v \notin E$. Рассмотрим $W = \{av+re : a, r \in \mathbb{R}\}$, тогда, по следствию 5.13, определен положительный линейный функционал $g_\gamma\colon W \to \mathbb{R}$, $g_\gamma(av + re) = a\gamma + r$, продолжающий g. По определению, $g(e) = a\gamma + r$. Снова воспользуемся следствием 5.15 и продолжим g_γ до положительного линейного функционала $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{R}$. Тогда $\tilde{g}(1) = g_\gamma(e) = g(e) = 1$, так что $\tilde{g}$ — состояние, и $\tilde{g}(v) = g_\gamma(v) = \gamma$, поэтому $\tilde{g}$ может быть взято в качестве искомого f_γ. □

Из теоремы 5.17 легко получается следующий результат.

Следствие 5.18. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Выберем произвольный $v \in V$ и положим*

$$\alpha = \sup\{r \in \mathbb{R} : re \le v\}, \qquad \beta = \inf\{r \in \mathbb{R} : v \le re\}.$$

Тогда $[\alpha, \beta] = \big\{f(v) : f$ — состояние на $V\big\}$.

Доказательство. По теореме 5.17, $[\alpha, \beta] \subset \big\{f(v) : f$ — состояние на $V\big\}$. Докажем обратное включение.

Пусть $f\colon V \to \mathbb{R}$ — произвольное состояние. Если $v = re$, то $\alpha = \beta = r = \gamma$ и $f(v) = f(re) = r = \gamma$.

Пусть теперь $v \ne re$ ни для какого $r \in \mathbb{R}$. Тогда ограничение f на $E = \{re : r \in \mathbb{R}\}$ и на $W := \{av+re : a, r \in \mathbb{R}\}$ — положительные линейные функционалы такие, что ограничение $f|_W$ на E совпадает с $f|_E$. Эта ситуация описывается в следствии 5.13, в силу которого $f(v) \in [a, b]$, откуда и вытекает обратное включение. □

Предложение 5.19. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с архимедовой порядковой единицей e. Тогда если для $v \in V$ и всех состояний $f\colon V \to \mathbb{R}$ выполняется $f(v) = 0$, то $v = 0$.*

Доказательство. Так как $\big\{f(v) : f$ — состояние на $V\big\} = \{0\}$, то, в обозначениях следствия 5.18, имеем $\alpha = \beta = 0$. Так как $\alpha = 0$, то $re \le v$ имеет место для всех $r < 0$. Положив $s = -r$ заключаем, что $v + se \ge 0$ при всех $s > 0$. Так как e — архимедова единица, заключаем, что последнее неравенство верно и при $s = 0$, то есть $v \in V^+$. С другой стороны, $\beta = 0$ влечет, что $v \le re$ при всех $r > 0$, так что $-v + re \ge 0$ при всех $r > 0$, и архимедовость e дает $-v \in V^+$. Так как $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$, заключаем, что $v = 0$. □

Предложение 5.20. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с архимедовой порядковой единицей e. Тогда если для $v \in V$ выполняется $f(v) \ge 0$ для всех состояний $f\colon V \to \mathbb{R}$, то $v \in V^+$.*

Доказательство. В обозначениях следствия 5.18, имеем $\alpha \ge 0$, так что $v \ge re$ для всех $r \le \alpha$, в частности, для всех $r < 0$. Полагая $s = -r$, заключаем, что $v + se \ge 0$ для всех $s > 0$, откуда, в силу архимедовости порядковой единицы, получаем $v \in V^+$. □

5.1.2 Порядковая полунорма

Зададим естественную полунорму на упорядоченном векторном пространстве с единицей и покажем, что если единица архимедова, то эта полунорма является нормой.

Предложение 5.21. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда для каждого $v \in V$ множество $\{r \in \mathbb{R} : -re \le v \le re\}$ непусто. Если $V \neq \{0\}$, то множество $\{r \in \mathbb{R} : -re \le v \le re\}$ содержится в $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \ge 0\}$.*

Доказательство. По определение порядковой единицы, существует $r > 0$, для которого $v \le re$ и существует $s > 0$, для которого $-v \le se$, т.е. $v \ge -se$. Пусть $t = \max\{r, s\}$, тогда $re \le te$ и $-te \le -se$, поэтому $t \in \{r \in \mathbb{R} : -re \le v \le re\}$.

Из неравенства $-re \le re$ вытекает, что $2re \ge 0$. Если $V \neq \{0\}$, то, по замечанию 5.7, $e \neq 0$, откуда, в силу леммы 5.6, $e > 0$ и, значит, $r \ge 0$. □

Итак, пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Для каждого $v \in V$ положим

$$\|v\| = \inf\{r \in \mathbb{R} : -re \le v \le re\}.$$

Из предложения 5.21 вытекает, что $\|v\|$ — неотрицательное вещественное число.

Замечание 5.22. В сделанных обозначениях, $\|e\| = 1$.

Предложение 5.23. *В терминах следствия* 5.18*, имеем* $\|v\| = \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$.

Доказательство. Пусть $r \in \mathbb{R}$ такое, что $-re \le v \le re$, тогда $-r \le \alpha \le \beta \le r$, следовательно, $\max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\} \le |r| = r$, где последнее равенство имеет место в силу предложения 5.21. Так как r произвольно, имеем $\max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\} \le \|v\|$. Обратно, если $t > \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$, то $-t < \alpha \le \beta < t$, так что $-te \le v \le te$ и, значит, $\|v\| \le t$, поэтому, в силу произвольности t, заключаем, что $\|v\| \le \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$, что и завершает доказательство. □

Предложение 5.24 (Кадисон [17]). *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда определенная выше функция $\|\cdot\|$ является полунормой на V, причем*

$$\|v\| = \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} \text{ — состояние на } V\Big\}.$$

Если при этом e — архимедова порядковая единица, то $\|\cdot\|$ — норма.

Доказательство. В силу следствия 5.18, имеем

$$\big\{f(v) : f\colon V \to \mathbb{R} \text{ — состояние на } V\big\} = [\alpha, \beta],$$

поэтому, применяя предложение 5.23, получаем, что

$$\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} \text{ — состояние на } V\Big\} = \max\big\{|\alpha|, |\beta|\big\} = \|v\|.$$

Следовательно, для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|tv\| = \sup\Big\{\big|f(tv)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} \text{ — состояние на } V\Big\} = |t| \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{R} \text{ — состояние на } V\Big\} = |t|\,\|v\|,$$

что доказывает положительную однородность функции $\|\cdot\|$. Далее,

$$\|v + w\| = \sup\big|f(v + w)\big| \le \sup\Big(\big|f(v)\big| + \big|f(w)\big|\Big) \le \sup\big|f(v)\big| + \sup\big|f(w)\big| = \|v\| + \|w\|,$$

где все супремумы берутся по множеству всех состояний $f\colon V \to \mathbb{R}$, что доказывает полуаддитивность $\|\cdot\|$. Таким образом, мы показали, что $\|\cdot\|$ — полунорма.

Пусть теперь порядковая единица e — архимедова. Заметим, что $\|v\| = 0$, если и только если для всех состояний f выполняется $f(v) = 0$. Но тогда, в силу предложения 5.19, имеем $v = 0$, что доказывает положительную определенность $\|\cdot\|$. □

Определенная выше функция $\|\cdot\|$ на упорядоченном векторном пространстве с порядковой единицей e называется ***порядковой полунормой*** или, в случае, когда $\|\cdot\|$ — норма, например для архимедовых единиц, — ***порядковой нормой***. Также говорят, что эта полунорма (или норма) ***задана*** e.

Замечание 5.25. Если $\|\cdot\|$ является нормой, то не обязательно порядковая единица — архимедова. Действительно, пусть $V = \mathbb{R}^2$ и $V^+ = \big\{(x,y) : x > 0,\, y > 0\big\} \cup \{0\}$, и $e = (1,1)$. Тогда e — порядковая единица, так как для каждого $v = (x,y) \in V$ и $r > \max\big\{|x|,|y|\big\}$ имеем $v \le re$. Единица e не является архимедовой, так как $(1,0) + re \in V^+$ при всех $r > 0$, но $(1,0) \notin V^+$. Тем не менее, $\|\cdot\|$ — норма. Действительно, для $v = (x,y)$ имеем $\|v\| = \inf\big\{r : (-r,-r) \le (x,y) \le (r,r)\big\}$. Если x или y отличны от нуля, то $\|v\| \ne 0$, что доказывает положительную определенность $\|\cdot\|$.

Определение 5.26. ***Топологией*** упорядоченного векторного пространства с порядковой единицей называется метрическая топология, заданная введенной выше полунормой. Отметим, что эта топология не всегда хаусдорфова.

Замечание 5.27. Линейное отображение между пространствами с полунормами непрерывно, если и только если оно ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества в ограниченные.

Предложение 5.28. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Если $f\colon V \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал, то f непрерывен и $\|f\| = f(e)$. В частности, $\big|f(v)\big| \le f(e)\,\|v\|$.*

Доказательство. Выберем произвольные $v \in V$ и $r \in \mathbb{R}$, для которых $\|v\| < r$, тогда $-re \le v \le re$. По предложению 5.9, функционал f сохраняет порядок, поэтому $-r\,f(e) \le f(v) \le r\,f(e)$, так что $|f(v)| \le r\,f(e)$. Так как $\|v\|$ — точная нижняя грань таких r, то $|f(v)| \le f(e)\|v\|$, поэтому функционал f ограничен и, значит, непрерывен, а его норма не превосходит $f(e)$. Так как $\|e\| = 1$, то $\|f\| = \sup_{\|v\|\le 1} |f(v)| \ge |f(e)|$, откуда $\|f\| \ge f(e)$ и, значит, $\|f\| = f(e)$. □

Предложение 5.29. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Если $f\colon V \to \mathbb{R}$ — линейный функционал с $\|f\| = f(e)$ (в частности, f — непрерывный), то f — положительный.*

Доказательство. Выберем произвольный $v \in V^+$ и любой $r \in \mathbb{R}$ такой, что $r > \|v\|$, тогда, по определению порядковой полунормы, $0 \le v \le re$, откуда $0 \le re - v \le re$. Снова в силу определения порядковой полунормы, имеем $\|re - v\| \le r$. Так как f непрерывен и $\|f\| = f(e)$, то

$$\big|f(re - v)\big| \le \|f\|\,\|re - v\| \le f(e)r,$$

поэтому $f(re-v) \le r\,f(e)$, откуда $rf(e) - f(v) \le rf(e)$, следовательно, $f(v) \ge 0$, так что f — положительный. □

Теорема 5.30. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e. Тогда порядковая полунорма, заданная e, — это единственная полунорма на V, удовлетворяющая следующим условиям*:

(1) $\|e\| = 1$;

(2) *если* $-w \le v \le w$, *то* $\|v\| \le \|w\|$;

(3) *если* $f\colon V \to \mathbb{R}$ — *состояние, то* $\big|f(v)\big| \le \|v\|$.

Доказательство. Покажем, что порядковая полунорма, заданная e, удовлетворяет всем трем свойствам. Первое свойство очевидно и уже отмечалось выше. Чтобы доказать свойство (2), выберем произвольное $r > \|w\| = \|-w\|$, тогда $-re \le w \le re$, откуда $-re \le -w \le v \le w \le re$, откуда, по определению порядковой полунормы, $\|v\| \le r$. В силу произвольности r имеем $\|v\| \le \|w\|$. Свойство (3) мгновенно вытекает из предложения 5.24.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\|\cdot\|'$ — полунорма на V, удовлетворяющая трем условиям теоремы. Пусть $v \in V$ и $r > \|v\|$, тогда $-re \le v \le re$ по определению $\|v\|$. Условия (1) и (2) дают

$$\|v\|' \le \|re\|' = r\|e\|' = r,$$

откуда $\|v\|' \le \|v\|$ в силу произвольности r. Обратно, из условия (3) вытекает

$$\sup\Big\{\big|f(v)\big| : f \text{ — состояние на } V\Big\} \le \|v\|'$$

откуда, снова по предложению 5.24, имеем $\|v\| \le \|v\|'$ и, тем самым $\|v\| = \|v\|'$. □

Теорема 5.31. *Пусть V — упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей e и $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма, заданная e. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *порядковая единица e — архимедова*;

(2) *V^+ — замкнутое подмножество в V в топологии, индуцированной $\|\cdot\|$*;

(3) *$-\|v\|e \le v \le \|v\|e$ для всех $v \in V$.*

Доказательство. (1)⇒(2) Пусть $v \in V$ — предел некоторой последовательности элементов из V^+. Мы должны показать, что $v \in V^+$. Из определения предела вытекает, что для каждого $r > 0$ существует $v_r \in U_r(v) \cap V^+$ такой, что $\|v - v_r\| < r$, откуда $re + v - v_r \ge 0$. Так как $v_r \ge 0$, то $re + v \ge v_r \ge 0$, и так как e —архимедова единица, а $r > 0$ — произвольно, то $v \in V^+$, что и требовалось.

(2)⇒(1) Пусть V^+ замкнуто в топологии, индуцированной $\|\cdot\|$. Рассмотрим произвольное $v \in V$, для которого $re + v \ge 0$ при всех $r > 0$. Мы должны показать, что $v \ge 0$. Так как $\|re\| = r\|e\| = r$, то для каждого $r > 0$ имеем $re + v \in U_{2r}(v) \cap V^+$ (вместо $2r$ можно написать $r + \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$). Последнее означает, что v является пределом последовательности, лежащей в V^+, и, в силу замкнутости V^+, заключаем $v \in V^+$, что и требовалось.

(1)⇒(3) Выберем произвольное $v \in V$. Так как

$$\|v\| = \inf\{r : re + v \ge 0 \text{ и } re - v \ge 0\}$$

по определению нормы, то $re + v \ge 0$ и $re - v \ge 0$ для всех $r > \|v\|$. По лемме 5.8, имеем $\|v\|e + v \ge 0$ и $\|v\|e - v \ge 0$, так что $-\|v\|e \le v \le \|v\|e$, что и требовалось.

(3)⇒(1) Рассмотрим произвольный $v \in V$, для которого $re + v \in V^+$ при всех $r > 0$. Мы должны показать, что $v \ge 0$. Так как $\|v\|e - v \ge 0$, то $re + \big(\|v\|e - v\big) \ge 0$ при всех $r > 0$. Кроме того, так как $re + v \ge 0$ для всех $r > 0$, то $\big(r - \|v\|\big)e + v$ при всех $r - \|v\| > 0$, т.е. $re - \big(\|v\|e - v\big) \ge 0$ при всех $r > \|v\|$. Итак,

$$-re \le \big(\|v\|e - v\big) \le re$$

при всех $r > \|v\|$, поэтому, вспоминая определение порядковой нормы, заключаем, что $\big\|\|v\|e - v\big\| \le \|v\|$. С другой стороны, применяя предположение настоящего пункта к вектору $\|v\|e - v$, получаем, что $\|v\|e - v \le \big\|\|v\|e - v\big\|e$, откуда $\|v\|e - v \le \|v\|e$ и, значит, $v \ge 0$, что и требовалось. □

Пусть V и W — упорядоченные векторные пространства. Линейное отображение $f\colon V \to W$ называется ***положительным***, если $f(V^+) \subset W^+$. Если V и W содержат порядковые единицы e и e' соответственно, то положительное отображение f называется ***унитальным***, если $f(e) = e'$. Биективное линейное отображение $f\colon V \to W$ называется ***изоморфизмом упорядоченных пространств***, если $v \in V^+$, если и только если $f(v) \in W^+$. Иными словами, линейный изоморфизм f является изоморфизмом упорядоченных пространств, если и только если f и f^{-1} — положительные.

5.2 Упорядоченные $*$-пространства

Напомним, что комплексное векторное пространство V называется ***$*$-пространством***, если на нем задана сопряженно линейная инволюция $*$, т.е. отображение $*\colon V \to V$, для которого $v^{**} := (v^*)^* = v$ и $(\lambda v + \mu w) = \bar\lambda v^* + \bar\mu w^*$ для всех v, $w \in V$ и λ, $\mu \in \mathbb{C}$. Напомним также, что элемент $v \in V$, для которого $v = v^*$, называется ***самосопряженным*** или ***эрмитовым***. Множество эрмитовых элементов мы обозначали через V_{sa}.

По предложению 3.1, множество V_{sa} является вещественным линейным подпространством в V, а, по предложению 3.2, каждый $v \in V$ однозначно представим в виде $x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$ и имеют вид $x = (v + v^*)/2$ и $y = (v - v^*)/(2i)$. Будем называть x и y ***вещественной*** и ***мнимой*** частью v и обозначать $\mathrm{Re}(v)$ и $\mathrm{Im}(v)$ соответственно. Ясно также, что $V = V_{sa} \oplus iV_{sa}$.

Пусть V — (комплексное) $*$-пространство, тогда V называется ***упорядоченным векторным $*$-пространством***, если в нем фиксирован конус $V^+ \subset V_{sa}$, для которого $V^+ \cap (-V^*) = \{0\}$. Таким образом, V называется упорядоченным $*$-пространством тогда и только тогда, когда V_{sa} является упорядоченным вещественным линейным пространством. ***Порядковая единица*** и ее ***архимедовость*** для V — определяются как порядковая единица (архимедова порядковая единица) для V_{sa}. Далее, $\mathbb{C}$-линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{C}$ на упорядоченном $*$-пространстве V называется ***положительным***, если $f(V^+) \subset [0, \infty)$. Если V содержит порядковую единицу e, то $\mathbb{C}$-линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{C}$ называется ***состоянием***, если он — положительный, и $f(e) = 1$. Линейный изоморфизм $f\colon V \to W$ упорядоченных $*$-пространств называется ***изоморфизмом***, если f и f^{-1} — положительны.

Предложение 5.32. *Пусть V и W — упорядоченные $*$-пространства, V содержит порядковую единицу, а $f\colon V \to W$ — положительное линейное отображение. Тогда для каждого $v \in V$ имеем $f(v^*) = f(v)^*$.*

Доказательство. Так как V содержит порядковую единицу, то, в силу леммы 5.6, конус V^+ — полный, т.е. $V_{sa} = V^+ - V^+$. Далее, так как f — положительный функционал, то $f(V^+) \subset W^+$ и, значит, $f(V_{sa}) = f(V^+) - f(V^+) \subset W^+ - W^+ \subset W_{sa}$. Иными словами, эрмитовы элементы переходят в эрмитовы при отображении f. Так как для каждого $v \in V$ существуют $x, y \in V_{sa}$ такие, что $v = x + iy$, имеем:

$$f(v^*) = f(x^* - iy^*) = f(x - iy) = f(x) - if(y) = f(x)^* - if(y)^* = \big(f(x) + if(y)\big)^* = f(x+iy)^* = f(v)^*,$$

что и требовалось. □

Следствие 5.33. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство, а $f\colon V \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал. Тогда для каждого $v \in V$ имеем $f(v^*) = \overline{f(v)}$.*

Пусть V — упорядоченное $*$-пространство и $f\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$ — это $\mathbb{R}$-линейный функционал. Определим отображение $\tilde f\colon V \to \mathbb{C}$, положив $\tilde f(v) = f\big(\mathrm{Re}(v)\big) + if\big(\mathrm{Im}(v)\big)$.

Предложение 5.34. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство, и $f\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$ — некоторый $\mathbb{R}$-линейный функционал. Тогда $\tilde f\colon V \to \mathbb{C}$ — это $\mathbb{C}$-линейный функционал, причем $\tilde f|_{V_{sa}} = f$. Более того, если f — положительный, то и $\tilde f$ — положительный. Если же V содержит порядковую единицу, и f — состояние, то и $\tilde f$ — также состояние.*

Доказательство. Проверим сначала $\mathbb{C}$-линейность функционала $\tilde f$, т.е. что для любых $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, а также $v = x + iy$, $w = x' + iy' \in V$, $x, y, x', y' \in V_{sa}$, выполняется $\tilde f(v + w) = f(v) + f(w)$ и $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Имеем:

$$\begin{aligned}\tilde f(v + w) &= \tilde f\big((x + iy) + (x' + iy')\big) = \tilde f\big((x + x') + i(y + y')\big) = f(x + x') + if(y + y') = \\ &= f(x) + f(x') + i\,f(y) + if(y') = \big(f(x) + if(y)\big) + \big(f(x') + if(y')\big) = \tilde f(v) + \tilde f(w),\end{aligned}$$

где третье и последнее равенства выполнены по определению отображения $\tilde f$, а остальные — в силу линейности f. Аналогично,

$$\begin{aligned}\tilde f(\lambda v) &= \tilde f\big((a + ib)(x + iy)\big) = \tilde f\big((ax - by) + i(bx + ay)\big) = f(ax - by) + if(bx + ay) = \\ &= af(x) - bf(y) + i\,bf(x) + i\,af(y) = (a + ib)\big(f(x) + if(y)\big) = \lambda \tilde f(v).\end{aligned}$$

Далее, для $v \in V_{sa}$ имеем $\mathrm{Im}(v) = (v - v^*)/(2i) = 0$ и $\mathrm{Re}(v) = (v + v^*)/2 = v$, откуда $\tilde f(v) = f(v)$ и $\tilde f(V_{sa}) = f(V_{sa})$. В частности, если $v \in V^+$, то f и $\tilde f$ одновременно положительные или нет, так как $\tilde f(v) = f(v)$. Наконец, если V содержит порядковую единицу e, то, по лемме 5.6, $e \in V^+$, поэтому, в силу сказанного выше, $f(e) = \tilde f(e)$, так что оба этих функционала являются состояниями или нет одновременно. □

Предложение 5.35. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e. Тогда $\mathbb{C}$-линейный функционал $f\colon V \to \mathbb{C}$ положительный, если и только если существует положительный $\mathbb{R}$-линейный функционал $g\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$, для которого $f = \tilde g$.*

Доказательство. Пусть сначала $f = \tilde g$, тогда $f(V^+) = g(V^+) \subset [0, \infty)$ по предложению 5.34, поэтому функционал f — положительный.

Обратно, пусть f — положительный функционал, т.е. $f(V^+) \subset [0, \infty)$. Так как V содержит порядковую единицу, то, в силу леммы 5.6, конус V^+ — полный, поэтому для каждого $x \in V_{sa}$ существуют $x^+, x^- \in V^+$, такие, что $x = x^+ - x^-$, откуда $f(x) = f(x^+) - f(x^-) \in \mathbb{R}$, так что $f(V_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Положим $g = f|_{V_{sa}}$. Тогда g — положительный $\mathbb{R}$-линейный функционал. Более того, пусть $v \in V$ и $v = x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$, тогда

$$\tilde g(v) = g(x) + ig(y) = f(x) + if(y) = f(x + iy) = f(v),$$

так что $\tilde g = f$, что и требовалось. □

Предложение 5.36. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с архимедовой порядковой единицей e. Если для некоторого $v \in V$ равенство $f(v) = 0$ выполняется для каждого состояния $f\colon V \to \mathbb{C}$, то $v = 0$.*

Доказательство. Положим $v = x+iy$, где $x, y \in V_{sa}$. В силу предложения 5.34, для каждого состояния $g\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$ соответствующее отображение $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{C}$ также является состоянием. По предположению, $\tilde{g}(v) = 0$ для всех состояний g. Следовательно, $g(x) + ig(y) = 0$, откуда, в силу единственности разложения на вещественную и мнимую части, имеем $g(x) = g(y) = 0$. Так как порядковая единица — архимедова, применимо предложение 5.19, в силу которого $x = y = 0$, откуда $v = 0$, что и требовалось. □

Предложение 5.37. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с архимедовой порядковой единицей e. Если для некоторого $v \in V$ неравенство $f(v) \geq 0$ выполняется для каждого состояния $f\colon V \to \mathbb{C}$, то $v \in V^+$.*

Доказательство. Положим $v = x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$. В силу предложения 5.34, для каждого состояния $g\colon V_{sa} \to \mathbb{R}$ соответствующее отображение $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{C}$ также является состоянием. По предположению, $\tilde{g}(v) \geq 0$ для всех состояний g. Следовательно, $g(x) + ig(y) \geq 0$, откуда, в силу единственности разложения на вещественную и мнимую части, имеем $g(x) \geq 0$ и $g(y) = 0$. Так как порядковая единица — архимедова, применимы предложения 5.19 и 5.20, в силу которых $x \geq 0$ и $y = 0$, откуда $v \in V^+$, что и требовалось. □

5.2.1 Полунормы на упорядоченных ∗-пространствах

В теореме 5.30 мы показали, что порядковая полунорма на вещественном упорядоченном пространстве с порядковой единицей определена однозначно тремя естественными свойствами. В настоящем разделе мы будем продолжать такую полунорму с (вещественного) подпространства V_{sa} на все комплексное V, следя за тем, чтобы полученная полунорма уважала инволюцию ∗. Оказывается, имеется много таких продолжений, и среди них можно выделить минимальные и максимальные полунормы.

Итак, пусть V — произвольное ∗-пространство, тогда полунорма (норма) на V называется ***∗-полунормой*** (соответственно, ***∗-нормой***), если $\|v^*\| = \|v\|$ для всех $v \in V$.

Лемма 5.38. *Пусть V — произвольное ∗-пространство и $\|\cdot\|$ — некоторая ∗-полунорма на V. Тогда для каждого $v \in V$ выполняется $\big\|\mathrm{Re}(v)\big\| \leq \|v\|$ и $\big\|\mathrm{Im}(v)\big\| \leq \|v\|$*

Доказательство. Имеем

$$\big\|\mathrm{Re}(v)\big\| = \frac{1}{2}\big\|\mathrm{Re}(v)+i\,\mathrm{Im}(v)+\mathrm{Re}(v)-i\,\mathrm{Im}(v)\big\| \leq \frac{1}{2}\big\|\mathrm{Re}(v)+i\,\mathrm{Im}(v)\big\| + \frac{1}{2}\big\|\mathrm{Re}(v)-i\,\mathrm{Im}(v)\big\| = \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|v^*\| = \|v\|.$$

Аналогично оценивается и $\mathrm{Im}(v)$. □

Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e и порядковой полунормой $\|\cdot\|$ на V_{sa}. Тогда ***порядковой полунормой на*** V называется ∗-полунорма $\|\cdot\|'$ такая, что $\|v\|' = \|v\|$ для всех $v \in V_{sa}$.

5.2.1.1 Минимальная порядковая полунорма $\|\cdot\|_m$

Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e. Определим ***минимальную порядковую полунорму*** $\|\cdot\|_m\colon V \to [0,\infty)$ так:

$$\|v\|_m = \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\}.$$

Теорема 5.39. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e, и пусть $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма на V_{sa}. Тогда*

(1) *$\|\cdot\|_m$ является ∗-полунормой на V;*

(2) *$\|v\|_m = \|v\|$ для всех $v \in V_{sa}$, т.е. $\|\cdot\|_m$ — порядковая полунорма на V;*

(3) *если $\|\cdot\|'$ — любая порядковая ∗-полунорма на V, то $\|w\|_m \leq \|w\|'$ для всех $w \in V$.*

Доказательство. (1) Покажем сначала, что $\|\cdot\|_m$ является полунормой. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v, w \in V$, тогда

$$\|\lambda v\|_m = \sup\Big\{\big|f(\lambda v)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} = \sup\Big\{|\lambda|\,\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} = |\lambda|\,\|v\|_m;$$

$$\|v + w\|_m = \sup\Big\{\big|f(v + w)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} \le$$
$$\le \sup\Big\{\big|f(v)\big| + \big|f(w)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} \le \|v\|_m + \|w\|_m.$$

Покажем теперь, что $\|\cdot\|_m$ — это ∗-полунорма. Для этого воспользуемся следствием 5.33:

$$\|v^*\|_m = \sup\Big\{\big|f(v^*)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} = \sup\Big\{\big|\overline{f(v)}\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} = \|v\|_m.$$

(2) Докажем, что $\|\cdot\|_m$ — порядковая полунорма на V. Для этого используем предложения 5.35 и 5.24:

$$\|v\|_m = \sup\Big\{\big|f(v)\big| : f\colon V \to \mathbb{C} - \text{состояние}\Big\} = \sup\Big\{\big|\tilde{g}(v)\big| : g\colon V_{sa} \to \mathbb{R} - \text{состояние}\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{\big|g(v)\big| : g\colon V_{sa} \to \mathbb{R} - \text{состояние}\Big\} = \|v\|.$$

(3) Выберем произвольное $v \in V$ и любое состояние $f\colon V \to \mathbb{C}$. Существует единственное $\theta \in \mathbb{R}$ такое, что $\big|f(v)\big| = e^{i\theta} f(v) = f(e^{i\theta} v)$. Положим $w = e^{i\theta} v$. Так как функционал f — положительный, то $f\big(\mathrm{Re}(w)\big)$, $f\big(\mathrm{Im}(w)\big) \in \mathbb{R}$, и так как $f(w) = \big|f(v)\big| \in \mathbb{R}$, а $f(w) = f\big(\mathrm{Re}(w)\big) + i f\big(\mathrm{Im}(w)\big)$, имеем: $f\big(\mathrm{Im}(w)\big) = 0$ и $f(w) = f\big(\mathrm{Re}(w)\big)$. Следовательно,

$$\big|f(v)\big| = f(w) = f\big(\mathrm{Re}(w)\big) \le \big\|\mathrm{Re}(w)\big\| = \big\|\mathrm{Re}(w)\big\|' = \left\|\frac{w + w^*}{2}\right\|' \le \frac{1}{2}\big(\|w\|' + \|w^*\|'\big) = \|w\|' = \|v\|',$$

где первое неравенство имеет место в силу того, что $\mathrm{Re}(w) \in V_{sa}$ и, поэтому,применима теорема 5.30. Так как $\|v\|_m$ равно супремуму левой части полученного соотношения по всем состояниям f, то $\|v\|_m \le \|v\|'$, что и требовалось. □

5.2.1.2 Максимальная порядковая полунорма $\|\cdot\|_m$

Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e и соответствующей порядковой полунормой $\|\cdot\|$ на V_{sa}. Напомним, что каждый элемент $v \in V$ представим в виде $v = x + iy$, где $x, y \in V_{sa}$. Определим ***максимальную порядковую полунорму*** $\|\cdot\|_M \colon V \to [0, \infty)$ так:

$$\|v\|_M = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\,\|v_k\| : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k,\ v_k \in V_{sa},\ \lambda_k \in \mathbb{C}\Big\}.$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 5.39.

Теорема 5.40. *Пусть V — упорядоченное ∗-пространство с порядковой единицей e, и пусть $\|\cdot\|$ — порядковая полунорма на V_{sa}. Тогда*

(1) $\|\cdot\|_M$ *является ∗-полунормой на* V;

(2) $\|v\|_M = \|v\|$ *для всех* $v \in V_{sa}$, *т.е.* $\|\cdot\|_M$ *— порядковая полунорма на* V;

(3) *если* $\|\cdot\|'$ *— любая ∗-полунорма на* V, *для которой* $\|v\|' = \|v\|$ *при всех* $v \in V_{sa}$, *то* $\|w\|_M \ge \|w\|'$ *для всех* $w \in V$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\|\cdot\|_M$ является полунормой на V. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v \in V$. При $\lambda = 0$ равенство $\|\lambda v\|_M = |\lambda|\|v\|_M$ очевидно, так как обе его части равны нулю. При $\lambda \ne 0$ каждое представление $\lambda v = \sum_k \lambda_k v_k$ можно записать в виде $\lambda v = \sum_k \lambda(\lambda_k/\lambda) v_k$, и, обозначив $\mu_k = \lambda_k/\lambda$, переписать так: $\lambda v = \sum_k \lambda \mu_k v_k$, откуда, переходя к инфимуму по μ_k, получим равенство $\|\lambda v\|_M = |\lambda|\|v\|_M$.

Неравенство треугольника следует из того, что каждому представлению $v = \sum_k \lambda_k v_k$ и $w = \sum_k \mu_k u_k$, соответствует представление $v + w = \sum_k \lambda_k v_k + \sum_k \mu_k u_k$.

Далее, если $v = \sum_k \lambda_k v_k$, где $v_k \in V_{sa}$ и $\lambda_k \in \mathbb{C}$, то $v^* = \sum_k \overline{\lambda_k} v_k$, откеуда следует, что $\|v\|_M = \|v^*\|_M$, то есть $\|\cdot\|_M$ — это $*$-полунорма.

Пусть теперь $v \in V_{sa}$. Тогда среди представлений v в виде $v = \sum_k \lambda_k v_k$ есть тривиальное $v = 1v$, поэтому из неравенства треугольник вытекает, что в этом случае на нем достигается инфимум, и поэтому $\|v\|_M = \|v\|$.

Наконец, пусть $\|\cdot\|'$ — любая порядковая $*$-полунорма на V. Если $v = \sum_k \lambda_k v_k$, то

$$\|v\|' \leq \sum_k |\lambda_k| \|v_k\|' = \sum_k |\lambda_k| \|v_k\|,$$

где неравенство — это неравенство треугольника, а равенство имеет место поскольку $\|v\|' = \|v\|$ для любого $v \in V_{sa}$ по предположению. Переходя к инфимуму, получаем $\|v\|' \leq \|v\|_M$, что и требовалось. $\square$

Предложение 5.41. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e. Тогда любые две порядковые полунормы на V эквивалентны. Более того, если $\|\cdot\|'$ — произвольная порядковая полунорма на V, то*

$$\big\{v \in V : \|v\|' = 0\big\} = \bigcap_{\substack{f\colon V \to \mathbb{C} \text{ — } \\ \text{состояние}}} \ker f.$$

Доказательство. Так как $\|v\|_m \leq \|v\|' \leq \|v\|_M$ для всех $v \in V$, достаточно проверить эквивалентность минимальной и максимальной порядковых полунорм. Неравенство $\|v\|_m \leq \|v\|_M$ справедливо для каждого $v \in V$ в силу теорем о минимальности и максимальности норм $\|\cdot\|_m$ и $\|\cdot\|_M$. С другой стороны, пусть $\|\cdot\|$ обозначает порядковую полунорму на V_{sa}, тогда, представив v в виде $\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)$ и воспользовавшись леммой 5.38, получим

$$\|v\|_M \leq \big\|\mathrm{Re}(v)\big\|_M + |i|\,\big\|\mathrm{Im}(v)\big\|_M = \big\|\mathrm{Re}(v)\big\| + \big\|\mathrm{Im}(v)\big\| = \big\|\mathrm{Re}(v)\big\|_m + \big\|\mathrm{Im}(v)\big\|_m \leq \|v\|_m + \|v\|_m = 2\|v\|_m,$$

что и завершает доказательство эквивалентности полунорм.

Далее, эквивалентность полунорм влечет $\big\{v \in V : \|v\|' = 0\big\} = \big\{v \in V : \|v\|_m = 0\big\}$. Теперь второе утверждение предложения вытекает из определения минимальной порядковой полунормы. $\square$

Следующий результат легко вытекает из предложений 5.24, 5.34 и 5.41.

Предложение 5.42. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с порядковой единицей e. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *порядковая полунорма на V_{sa} является нормой*;

(2) $\displaystyle\bigcap_{\substack{f\colon V_{sa} \to \mathbb{R} \text{ — } \\ \text{состояние}}} \ker f = \{0\}$;

(3) $\displaystyle\bigcap_{\substack{f\colon V \to \mathbb{C} \text{ — } \\ \text{состояние}}} \ker f = \{0\}$;

(4) *существует порядковая полунорма, являющаяся нормой*;

(5) *все порядковые полунормы на V являются нормами.*

Непосредственно из предложений 5.42 и 5.36 выводим следующий результат.

Следствие 5.43. *Пусть V — упорядоченное $*$-пространство с архимедовой порядковой единицей e. Тогда каждая порядковая полунорма является нормой.*

Литература

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[4] Rieffel M.A. *Metrics on states from actions of compact groups.* Doc. Math., 1998, v. 3, 215–229, см. также arXiv:math/9807084 [math.OA].

[5] Rieffel M.A. *Metrics on state spaces*, Doc. Math., 1999, v. 4, pp. 559—600, см. также arXiv:math/9906151 [math.OA].

[6] Rieffel M.A. *Gromov—Hausdorff distance for quantum metric spaces.* Mem. Amer. Math. Soc., 2004, v. 168, pp. 1—65, см. также arXiv:math/0011063 [math.OA].

[7] Kerr D. *Matricial quantum Gromov-Hausdorff distance.* J. Funct. Anal., 2003, v. 205, no. 1, pp. 132-–167, см. также arXiv:math/0207282 [math.OA].

[8] Kerr D., Li H. *On Gromov–Hausdorff convergence of operator metric spaces.* J. Oper. Theory, 2009, v. 1, no. 1, 83—109, см. также arXiv:math/0411157 [math.OA].

[9] Wu W. *Non-commutative metrics on state spaces*, J Ramanujan Math. Soc., 2005, v. 20, no. 3, pp. 215-–214, см. также arXiv:math/0411475 [math.OA].

[10] Wu W. *Non-commutative metric topology on matrix state spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 2006, v. 134, no. 2, pp. 443–453, см. также arXiv:math/0410587 [math.OA].

[11] Wu W. *Quantized Gromov-Hausdorff distance.* J. Funct. Anal. 2006, v. 238, no. 1, pp. 58-–98, см. также arXiv:math/0503344 [math.OA].

[12] Paulsen V., Tomforde M. *Vector spaces with an order unit.* ArXiv:0712.2613 [math.OA].

[13] Putnam I.F. *Lecture Notes on C^*-algebras.*
`https://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf`

[14] Kesavan S. *Functional Analysis*, Hindustan Book Agency, 2009.

[15] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов.* Факториал, 1997.

[16] Pedersen G. K. *C*-algebras and their automorphism groups.* London: Academic Press, 1979.

[17] Kadison R.V. *A representation theory for commutative topological algebra.* Mem. Amer. Math. Soc., no. 7, 1951.