

Геометрия квантового расстояния Громова–Хаусдорфа, часть I

вопросы экзамена

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

- (1) Алгебра, унитарная алгебра, единица унитарной алгебры, подалгебра. Подалгебра, порожденная данным подмножеством. Субмультипликативность, нормированная алгебра, нормированная унитарная алгебра, замкнутая подалгебра нормированной алгебры, порожденная данным подмножеством.
- (2) Банахова алгебра, унитарная банахова алгебра. Банахова подалгебра, порожденная данным подмножеством. Примеры банаховых алгебр, прямая сумма семейства банаховых алгебр, ограниченная сумма семейства банаховых алгебр. Формулировка теоремы Вейерштрасса–Стоуна (компактная и локально-компактная версии).
- (3) Левый, правый и (двусторонний) идеалы алгебры. Тривиальный идеал, собственный идеал, факторалгебра, модулярный идеал, связь модулярности идеала с унитарностью факторалгебры. Свойства модулярных идеалов. Идеал, порожденный данным подмножеством алгебры. Замкнутый идеал, порожденный данным подмножеством нормированной алгебры. Фактор нормированной алгебры по замкнутому идеалу.
- (4) Гомоморфизм алгебр, нулевой гомоморфизм, унитарный гомоморфизм унитарных алгебр, примеры гомоморфизмов.
- (5) Унитаризация алгебры, канонический гомоморфизм, свойства унитаризации, унитаризация нормированной алгебры.
- (6) Обратимые элементы унитарной алгебры, мультипликативная группа обратимых элементов унитарной алгебры, резольвентное множество, спектр элемента унитарной алгебры, примеры вычисления спектров.
- (7) Свойства обратимых и необратимых элементов, свойства спектров элементов унитарной алгебры.
- (8) Унитарные банаховы алгебры. Сумма геометрической прогрессии элемента, норма которого меньше 1, и оценка частичной суммы этой прогрессии.
- (9) Открытость множества обратимых элементов унитарной банаховой алгебры и дифференцируемость отображения перехода к обратному элементу, компактность спектра элемента унитарной банаховой алгебры.
- (10) Непустота спектра элемента унитарной банаховой алгебры (теорема Гельфанда). Теорема Гельфанда–Мазура об унитарной банаховой алгебре, все элементы которой обратимы.
- (11) Спектральный радиус элемента унитарной алгебры, свойства спектрального радиуса, примеры вычисления спектрального радиуса.
- (12) Теорема Бёрлинга о вычислении спектрального радиуса элемента унитарной банаховой алгебры, пример использования теоремы Бёрлинга.
- (13) Спектры элементов содержащей единицу замкнутой подалгебры унитарной банаховой алгебры.
- (14) Спектры и спектральные радиусы элементов неунитарной алгебры, их свойства.
- (15) Экспоненты элементов унитарной банаховой алгебры, свойства экспоненты.
- (16) Модулярные идеалы банаховой алгебры, их замыкания, максимальные модулярные идеалы.
- (17) Характеры коммутативной алгебры, их свойства, связь со спектром, непрерывность характеров коммутативной банаховой алгебры, их связь с максимальными идеалами.
- (18) Характеры коммутативной алгебры и ее унитаризации.
- (19) Связь между характерами и спектрами элементов коммутативной банаховой алгебры.
- (20) Топология пространства характеров коммутативной банаховой алгебры.
- (21) Пространство характеров банаховой алгебры непрерывных функций, заданных на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве.
- (22) Отождествление пространства характеров коммутативной банаховой алгебры с подпространством в пространстве характеров ее унитаризации.
- (23) Преобразования Гельфанда и представление Гельфанда коммутативной банаховой алгебры.
- (24) Согласованность преобразований Гельфанда элементов унитаризации коммутативной банаховой алгебры с отождествлениями.

(25) Применение представления Гельфанда для доказательства свойств спектрального радиуса, отсутствие субаддитивности и субмультипликативности спектрального радиуса в общем случае. Гомеоморфность пространства характеров унитарной банаховой алгебры, порожденной одним элементом, со спектром этого элемента. Гомеоморфность пространства характеров неунитарной банаховой алгебры, порожденной одним элементом, со спектром этого элемента, из которого выкинут 0.

(26) Инволюция или сопряжение на алгебре, самосопряженное подмножество. Инволютивная или $*$ -алгебра, $*$ -подалгебра $*$ -алгебры. $*$ -подалгебра, порожденная данным подмножеством. Самосопряженный или эрмитов элемент, вещественное подпространство всех эрмитовых элементов, разложение каждого элемента $*$ -алгебры на эрмитовы элементы (вещественную и мнимую части), эрмитовость произведения элемента и его сопряженного. Нормальные элементы, $*$ -подалгебра, порожденная нормальным элементом.

(27) Инволюция в унитарной $*$ -алгебре коммутирует со взятием обратного элемента и неподвижна на единице. Эрмитовость элемента, обратного к эрмитову. Элемент-изометрия, элемент-коизометрия, унитарный элемент. Мультипликативная группа унитарных элементов, равенство обратного к унитарному элементу его сопряженному.

(28) $*$ -гомоморфизм и $*$ -изоморфизм. Ядро и образ $*$ -гомоморфизма. $*$ -гомоморфизмы сохраняют эрмитовость элементов. Факторизация $*$ -алгебры по самосопряженному идеалу. Унитарный $*$ -гомоморфизм. Унитарный $*$ -гомоморфизм сохраняет унитарность. Автоморфизм $*$ -алгебры, автоморфизм унитарной $*$ -алгебры. Внутренний автоморфизм унитарной $*$ -алгебры. Действие мультипликативной группы унитарных элементов унитарной $*$ -алгебры на этой алгебре. Унитарно эквивалентные элементы, равенство спектров унитарно эквивалентных элементов.

(29) Нормированная $*$ -алгебра, банахова $*$ -алгебра. Оценка норм вещественной и мнимой частей элементов нормированной $*$ -алгебры. Банаховость вещественного подпространства всех эрмитовых элементов банаховой $*$ -алгебры. Унитарная банахова $*$ -алгебра. Унитарность экспоненты от элемента, полученного умножением эрмитова элемента на мнимую единицу.

(30) C^* -алгебра, определяющее свойство C^* -алгебры. Унитарная C^* -алгебра, C^* -подалгебра. Норма единицы и унитарного элемента, спектр унитарного элемента. Примеры C^* -алгебр. Прямая сумма и ограниченная прямая сумма C^* -алгебр.

(31) Совпадения спектрального радиуса с нормой эрмитова элемента C^* -алгебры. Невырожденность спектра ненулевого эрмитова элемента C^* -алгебры. Равенство нулю нильпотентного эрмитова элемента C^* -алгебры. Единственность нормы, превращающей $*$ -алгебру в C^* -алгебру.

(32) Унитаризация банаховой $*$ -алгебры, невыполнение определяющего свойства C^* -алгебры для стандартной нормы на унитаризации.

(33) Унитаризация C^* -алгебры.

(34) Продолжение $*$ -гомоморфизма C^* -алгебр на их унитаризации. 1-липпшицевость $*$ -гомоморфизма из $*$ -банаховой алгебры в C^* -алгебру.

(35) Вещественность спектров эрмитовых элементов C^* -алгебры. Уважение инволюции характерами коммутативной C^* -алгебры. Непустота спектра ненулевой C^* -алгебры.

(36) Теорема Гельфанда о представлении Гельфанда для коммутативной C^* -алгебры.

(37) C^* -подалгебра, порожденная данным подмножеством C^* -алгебры. Коммутативность и нормальность всех элементов C^* -подалгебры, порожденной нормальным элементом C^* -алгебры.

(38) Совпадение спектров унитарной C^* -алгебры и любой ее C^* -подалгебры, содержащей единицу.

(39) Равенство нормы и спектрального радиуса у нормального элемента C^* -алгебры.

(40) Представление унитарного элемента со спектром, отличным от окружности, в виде экспоненты эрмитова элемента, умноженного на мнимую единицу.