Геометрия квантового расстояния Громова–Хаусдорфа, часть I задачи экзамена

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

(1) Приведите пример унитальной некоммутативной банаховой алгебры, в которой нет нетривиальных идеалов, т.е. идеалов, отличных от A и $\{0\}$.

(2) Приведите пример немодулярного максимального идеала в коммутативной банаховой алгебре.

(3) Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a, b \in A$. Докажите, что $\sigma(a+b) \subset \sigma(a)+\sigma(b)$ и $\sigma(ab) \subset \sigma(a)\sigma(b)$. Покажите, что это неверно для произвольных банаховых алгебр.

(4) Пусть A — унитальная банахова алгебра. Покажите, что множество $\mathrm{Inv}(A)$ локально линейно связно.

(5) Пусть A — унитальная банахова алгебра и $U_1(0) \subset A$ — открытый единичный шар с центром в нуле, $X = \{1-x\}_{x\in U_1(0)} \cup \{(1-x)^{-1}\}_{x\in U_1(0)}$. Обозначим G_0 множество всевозможных конечных произведений элементов из X.

i) Покажите, что G_0 — открытая мультипликативная подгруппа в $\mathrm{Inv}(A)$.
ii) Покажите, что G_0 — связная компонента $1_A \in \mathrm{Inv}(A)$.
iii) Покажите, что G_0 — нормальная подгруппа в $\mathrm{Inv}(A)$ и что $\mathrm{Inv}(A)/\mathit{\Gamma}_0$ — дискретная группа.

(6) Приведите пример банаховой алгебры A, в которой для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $a, b \in A$, для которых $\|a-b\| < \varepsilon$, спектр $\sigma(a)$ связен, а спектр $\sigma(b)$ имеет бесконечно много компонент связности.

(7) Опишите все характеры алгебры c_0 (всех последовательностей комплексных чисел, сходящихся к 0).

(8) Пусть A — унитальная банахова алгебра, содержащая нетривиальный ***идемпотент***, т.е. элемент $e \in A$, удовлетворяющий $e^2 = e$ и отличный от 0 и 1. Докажите, что спектр $\Omega(A)$ несвязен.

(9) Пусть A — унитальная банахова алгебра и элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$ порождают A как банахову алгебру. Положим

$$\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \Big\{\big(\tau(a_1), \ldots, \tau(a_n)\big) : \tau \in \Omega(A)\Big\}.$$

Покажите, что $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ — компактное подмножество $\mathbb{C}^n$, а отображение $\varphi\colon \Omega(A) \to \sigma(a_1, \ldots, a_n)$, $\varphi\colon \tau \mapsto \big(\tau(a_1), \ldots, \tau(a_n)\big)$ — гомеоморфизм.

(10) Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Покажите, что $r(a^n) = \big(r(a)\big)^n$.

(11) Пусть A — коммутативная унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Докажите, что представление Гельфанда изометрично, если и только если $\|a^2\| = \|a\|^2$ для каждого $a \in A$.

(12) Пусть A — банахова алгебра. Покажите, что функция $r\colon A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto r(a)$, полунепрерывна сверху.

(13) Пусть A — унитальная банахова алгебра и $B \subset A$ — максимальная коммутативная подалгебра. Докажите, что подалгебра A замкнута, содержит единицу алгебры A, и $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для всякого $a \in A$.

(14) Пусть $A = C^1[0,1]$ с нормой $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ и $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — включение, $x(t) = t$.

i) Покажите, что x порождает A как банахову алгебру.
ii) Докажите, что отображение $\varphi\colon [0,1] \to \Omega(A)$, $\varphi(t)(f) = f(t)$ при каждом $f \in A$, является гомеоморфизмом.
iii) Выведите отсюда, что $r(f) = \|f\|_\infty$ для каждого $f \in A$.
iv) Покажите, что представление Гельфанда в данном случае сюръективно.

Определение 1. Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Положим

$$\zeta(a) = \inf\big\{\|ab\| : b \in A,\ \|b\| = 1\big\}.$$

Говорят, что $a \in A$ является ***левым топологическим делителем нуля***, если существует последовательность $a_n \in A$, $\|a_n\| = 1$, такая, что $\lim_{n\to\infty} a\, a_n = 0$ (последнее эквивалентно $\zeta(a) = 0$).

(15) В терминах определения 1, покажите, что левые топологические делители нуля необратимы.

(16) В обозначениях определения 1, покажите, что $\bigl|\zeta(a) - \zeta(b)\bigr| \le \|a - b\|$ для всех $a, b \in A$, в частности, функция ζ непрерывна.

(17) В обозначениях определения 1, пусть $a \in A$ — граничная точка множества $\mathrm{Inv}(A)$. Покажите, что существует последовательность $v_n \in \mathrm{Inv}(A)$, $v_n \to a$, для которой $\lim_{n\to\infty} \|v_n^{-1}\|^{-1} = 0$. Используя непрерывность функции ζ, докажите, что $\zeta(a) = 0$, т.е. что граничные точки множества $\mathrm{Inv}(A)$ являются левыми топологическими нулями. Выведите отсюда, что если $\lambda \in \mathbb{C}$ — граничная точка спектра $\sigma(a)$ элемента $a \in A$, то $\lambda 1 - a$ — левый топологический делитель нуля.

(18) В терминах определения 1, покажите, что для $A = C(X)$, где X — хаусдорфов компакт, множество левых топологических делителей нуля совпадает с множеством необратимых элементов.

(19) В терминах определения 1, приведите пример унитальной банаховой алгебры, в которой существует необратимый элемент, не являющийся левым топологическим делителем нуля.

Определение 2. Пусть A — алгебра. Отображение $d\colon A \to A$ называется ***дифференцированием***, если d линейно и для каждых $a, b \in A$ выполняется $d(ab) = d(a)b + a\,d(b)$.

(20) Пусть $d\colon A \to A$ — дифференцирование на алгебре A. Докажите формулу Лейбница:

$$d^n(a,b) = \sum_{r=0}^{n} C_n^k d^r(a) d^{n-r}(b)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$, где C_n^k — биномиальные коэффициенты.

(21) Пусть A — унитальная банахова алгебра, $d \in A^*$ — дифференцирование, $a \in A$, и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $d(a) = \lambda a$. Покажите, что элемент a нильпотентен, т.е. $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

(22) Пусть $A = \mathbb{C}[z]$ — унитальная $*$-алгебра комплексных многочленов переменной z. Найдите спектр каждого элемента из A.

(23) Пусть $A = \mathbb{C}[z]$ — унитальная $*$-алгебра комплексных многочленов переменной z. Покажите, что не существует нормы на A, превращающей A в C^*-алгебру.

(24) Покажите, что элемент $*$-алгебры — нормальный, если и только если его вещественная и мнимая части коммутируют.

Определение 3. Банахова $*$-алгебра A называется ***симметричной***, если для каждого характера $\tau \in \Omega(A)$ и каждого $a \in A$ выполняется $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$.

(25) Пусть A — симметричная банахова $*$-алгебра и $\Gamma\colon A \to C_0\bigl(\Omega(A)\bigr)$ — ее представление Гельфанда. Докажите, что $\Gamma(A)$ всюду плотно в $C_0\bigl(\Omega(A)\bigr)$.

(26) Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы топологические пространства и $\rho\colon C(X) \to C(Y)$ — унитальный $*$-гомоморфизм.

i) Докажите, что существует непрерывная функция $h\colon Y \to X$ такая, что $\rho(f) = f \circ h$ для всех $f \in C(X)$.
ii) Докажите, что предыдущее утверждение может не иметь места, если отказаться от унитальности ρ.
iii) Приведите необходимое и достаточное условие на h, гарантирующее инъективность ρ.
iv) Приведите необходимое и достаточное условие на h, гарантирующее сюръективность ρ.

(27) Пусть $A = \mathbb{C}^2$ рассматривается как $*$-алгебра с покомпонентными операциями сложения, умножения и сопряжения.

i) Убедитесь, что A с нормой $\bigl\|(a_1, a_2)\bigr\| = |a_1| + |a_2|$ не является C^*-алгеброй.
ii) Докажите, что норма $\bigl\|(a_1, a_2)\bigr\| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$ — единственная, превращающая A в C^*-алгебру.

(28) Пусть A — ненулевая C^*-алгебра, и предположим, что существует $e \in A$, для которого $xe = x$ при всех $x \in A$. Покажите, что $e = e^*$, $\|e\| = 1$ и выведите отсюда, что e — единица алгебры A.

(29) Пусть A — произвольная C^*-алгебра. Покажите, что для всех $x \in A$ выполняется $\|x\| = \sup_{\|y\|\le 1} \|xy\|$.