Геометрия квантового расстояния Громова–Хаусдорфа, часть I

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

22 мая 2023 г.
22:16:40

Оглавление

Введение

Мы предполагаем, что слушатели нашего курса знакомы с основами общей топологии [1] и метрической геометрии [2], [3]. Цель наших лекций — познакомить слушателей с современными работами, посвященными геометрии квантового расстояния Громова–Хаусдорфа — расстояния между квантовыми метрическими пространствами. Эти пространства возникают в физике, в частности, в теории струн, и определение степени похожести между ними играет важную роль в приложениях. Понятия квантового метрического пространства и соответствующего квантового расстояния Громова–Хаусдорфа между такими пространствами были введены Риффелем [4, 5, 6]. Эти конструкции были обобщены многими авторами, например Керром [7, 8] и Ву [9, 10, 11].

Квантовые метрические пространства строятся на базе C^*-алгебр и, более общо, на базе частично упорядоченных векторных пространств с единицей. Мы приведем все необходимые определения и свойства соответствующих теорий. Об этих конструкциях имеется огромная монография. Мы воспользовались [13] и [12].

Классическая часть теории расстояния Громова–Хаусдорфа в основном имеет дело с непустыми компактными метрическими пространствами, рассматриваемыми с точностью до изометрии (расстояние между изометричными пространствами равно нулю). Такое семейство, обычно обозначаемое $\mathcal{M}$ и называемое ***пространством Громова–Хаусдорфа***, континуально, расстояние Громова–Хаусдорфа на нем является метрикой (равенство нулю расстояния нулю между компактными метрическими пространствами на самом деле равносильно их изометричности), а само пространство — полное, сепарабельное и геодезическое. Важным утверждением является критерий Громова предкомпактности подмножества пространства $\mathcal{M}$.

Мы будем также работать с компактными квантовыми метрическими пространствами и покажем, что квантовое расстояние Громова–Хаусдорфа равно нулю между квантовыми изометричными пространствами, а также что для него выполняются многие свойства стандартного расстояния Громова–Хаусдорфа.

Тема 1

Предварительные результаты

План. Банаховы пространства, примеры, фактор-пространства, непрерывные линейные отображения, сопряженные пространства и линейные функционалы, обобщенная норма, сильная топология, пространство непрерывных линейных операторов, банахова алгебра с единицей, теорема Хана-Банаха и ее следствия, рефлексивные пространства, примеры, теорема Банаха–Штейнгауза, направленное множество, направленное множество окрестностей точки топологического пространства, направленность и ее область определения, сходимость и предел направленности, примеры, критерий непрерывности отображения топологических пространств, конфинальная поднаправленность и поднаправленность общего вида, точка накопления, точка накопления направленности и сходящиеся поднаправленности, пример "несовершенства" конфинальных поднаправленностей, плоскость Тихонова, критерий компактности топологического пространства, центрированные системы множеств, слабая топология для множества отображения из данного множества в топологические пространства, слабая топология на нормированном пространстве и его сопряженном, свойства слабой сходимости, $*$-слабая топология на сопряженном пространстве к нормированному пространству, свойства $*$-слабой сходимости, теорема Банаха–Алаоглу, рефлексивные пространства, сепарабельные пространства, равномерная выпуклость, гильбертовы пространства, эрмитово произведение, полуторалинейность, тождество параллелограмма, теорема Рисса, сопряженный линейный оператор, семейство всех непрерывных линейных операторов на гильбертовом пространстве как пример C^*-алгебры.

Приведем ряд понятий и теорем из функционального анализа, которые нам потребуются в дальнейшем, см. детали, например, в [14]. В наших лекциях все объекты, определенные в общем случае над некоторым полем $\mathbb{F}$ (линейные пространства, функции и др.), предполагаются заданными или над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если выбирается конкретное из этих полей, то это обговаривается отдельно.

1.1 Банаховы пространства

Напомним, что ***банаховым пространством*** называется нормированное линейное пространство, являющееся полным относительно метрики, заданной нормой.

Пример 1.1. Приведем некоторые примеры банаховых пространств:

- все конечномерные нормированные векторные пространства;
- пространство всех ограниченных функций $\mathcal{B}(S)$, заданных на произвольном множестве S и наделенное sup-нормой $\|f\| = \sup_{s\in S}\bigl|f(s)\bigr|$;
- подпространство всех непрерывных ограниченных функций $C_b(X) \subset \mathcal{B}(X)$, заданных на произвольном топологическом пространстве X;
- подпространство всех непрерывных функций $C(X) \subset \mathcal{B}(X)$, заданных на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве X;
- подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$ всех непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{F}$, заданных на хаусдорфовом локально компактном топологическом пространстве X и ***исчезающих*** (***обращающихся в нуль***) на бесконечности (последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, для которого $\bigl|f(x)\bigr| < \varepsilon$ при всех $x \in X \setminus K$);
- пространство ℓ_p, $1 \le p < \infty$ всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ чисел $x_k \in \mathbb{F}$, удовлетворяющих $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ с нормой $\|x\|_p = \bigl(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\bigr)^{1/p}$;

- пространство $m = \ell_\infty$ всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ чисел (вещественных или комплексных) с sup-нормой $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ (это пространство является частным случаем пространства $\mathcal{B}(S)$ для $S = \mathbb{N}$);

- замкнутое подпространство c пространства ℓ_∞, состоящее из всех сходящихся последовательностей;

- замкнутое подпространство c_0 пространства c, состоящее из всех последовательностей, сходящихся к 0;

- подпространство $\mathcal{B}_\infty(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, состоящее из всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{F}$, заданных на измеримом пространстве Ω (множестве Ω, наделенном σ-алгеброй);

- пространство $L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$, состоящее из всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{F}$ с интегрируемой по Лебегу функцией $|f|^p$ (такие функция называются ***μ-интегрируемыми***) и наделенное нормой $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$, где $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ, а функции, равные друг другу μ-почти всюду, отождествляются;

- пространство $L_\infty(\mu)$ существенно ограниченных функций, т.е. у которых
$$\|f\|_\infty = \inf\Big\{M \ge 0 : \mu\big(|f| \ge M\big) = 0\Big\} < \infty,$$
наделенное нормой $\|f\|_\infty$, где $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ, а функции, равные друг другу μ-почти всюду, отождествляются.

Замечание 1.2. Отметим, что пространство ℓ_p, $1 \le p \le \infty$ является частным случаем пространства $L_p(\mu)$, где $\Omega = \mathbb{N}$, а μ — считающая мера, т.е. $\mu(S) = \#S$ для каждого конечного $S \subset \mathbb{N}$, и $\mu(S) = \infty$ для бесконечного S.

Замечание 1.3. Примером не банахова пространства может служить, например, пространство всех вещественных многочленов одной переменной, заданных на отрезке $[a, b]$, с sup-нормой.

Напомним также конструкцию фактор-пространства. Пусть E — векторное пространство и $F \subset E$ — его подпространство. Тогда на E возникает отношение эквивалентности, для которого $x \sim y$, если и только если $x - y \in F$. Классами этой эквивалентности являются аффинные подпространства вида $x + F$. Множество классов эквивалентности естественно наделяется структурой векторного пространства, называется ***фактор-пространством*** E ***по*** F и обозначается E/F. Если E — нормированное пространство, то в качестве F выбирается замкнутое подпространство, а фактор-пространство E/F наделяется естественной нормой $\|x+F\| = \inf_{y\in F} \|x + y\|$.

Замечание 1.4. Замкнутость F требуется для того, чтобы действительно получилась норма, иначе может не выполниться условие положительной определенности. Действительно, рассмотрим нормированное векторное пространство $E = C\big([a, b]\big)$ непрерывных вещественных функций с sup-нормой, а в нем — подпространство F всех многочленов. Тогда E/F состоит более чем из одного класса (так как не все непрерывные функции — многочлены), однако “норма” каждого класса, определенная приведенной выше формулой, равна нулю, так как каждая непрерывная функция, в соответствии с теоремой Вейерштрасса, сколь угодно хорошо приближается по sup-норме многочленами.

Задача 1.5. Докажите, что если E — банахово пространство, а $F \subset E$ — его замкнутое подпространство, то E/F — также банахово пространство.

Так как норма превращает линейное пространство в топологическое, определено понятие ***непрерывного линейного отображения*** $L\colon E \to F$ между нормированными пространствами.

Задача 1.6. Докажите, что линейное отображение $L\colon E \to F$ нормированных пространств непрерывно, если и только если оно ограничено, т.е. переводит каждое ограниченное подмножество E в ограниченное подмножество F. В силу линейности это эквивалентно тому, что L переводит единичный замкнутый шар $B_E \subset E$ с центром в нуле в ограниченное подмножество F.

Множество всех ограниченных линейных отображений $L\colon E \to F$ будем обозначать $\mathcal{B}(E, F)$. Отметим, что операции поточечного сложения и умножение на элементы поля превращают $\mathcal{B}(E, F)$ в векторное пространство. В частном случае, когда F совпадает с полем $\mathbb{F}$, пространство $\mathcal{B}(E, F)$ обозначается E^* и называется ***сопряженным пространством***, а его элементы называются ***линейными функционалами***.

Пусть $L\colon E \to F$ — линейное отображение нормированных пространств. Положим

$$\|L\| = \sup_{x \in B_E} \bigl\|L(x)\bigr\|$$

и назовем ***обобщенной нормой*** L.

Задача 1.7. Покажите, что отображение L непрерывно, если и только если $\|L\| < \infty$. Иными словами, $\mathcal{B}(E,F)$ состоит из всех линейных отображений L с конечной обобщенной нормой $\|L\|$. В частности, E^* — это семейство всех линейных функционалов с конечной обобщенной нормой.

Отметим, что обобщенная норма на $\mathcal{B}(E,F)$ является обычной нормой. Соответствующая этой норме топология на $\mathcal{B}(E,F)$ называется ***сильной***. В частности, таким образом определяется сильная топология на сопряженном пространстве E^*. Также ***сильной*** называют исходную топологию на E, заданную нормой.

Задача 1.8. Покажите, что для $L \in \mathcal{B}(E,F)$ и любого $x \in E$ выполняется $\bigl\|L(x)\bigr\| \le \|L\|\,\|x\|$, т.е. каждое такое L является $\|L\|$-липшицевым.

Задача 1.9. Покажите, что если E — нормированное пространство, а F — банахово пространство, то пространство $\mathcal{B}(E,F)$ — банахово. В частности, сопряженное пространство E^* является банаховым для любого, не обязательно банахова, нормированного пространства E.

Еще одном важным частным случаем пространства $\mathcal{B}(E,F)$ является пространство $\mathcal{B}(E) := \mathcal{B}(E,E)$ ***непрерывных линейных операторов***. Помимо структуры векторного пространства, на $\mathcal{B}(E)$ имеется еще и операция "умножения" — композиция отображений.

Задача 1.10. Докажите, что

- для произвольных $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(E)$ выполняется $\|L_1L_2\| \le \|L_1\|\,\|L_2\|$;
- тождественное отображение $1\colon E \to E$ лежит в $\mathcal{B}(E)$;
- $\|1\| = 1$.

Тем самым, $\mathcal{B}(E)$ является также кольцом с единицей.

В случае банахова E, пространство $\mathcal{B}(E)$, в силу задачи 1.9, является банаховым, и поэтому кольцо $\mathcal{B}(E)$ называется ***банаховой алгеброй с единицей***. Банаховыми алгебрами мы будем более детально заниматься в будущих лекциях.

Также приведем важный для дальнейшего результат о продолжении непрерывных линейных функционалов.

Теорема 1.11 (Хан-Банах)**.** *Пусть E — нормированное пространство, $F \subset E$ — его подпространство и $f \in F^*$. Тогда существует $g \in E^*$, продолжающий f, т.е. $g|_F = f$, и имеющий с f ту же норму: $\|g\| = \|f\|$.*

Следствие 1.12. *Пусть E — нормированное пространство и $x \in E$, тогда существует $f \in E^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. В частности,*

- *если $x, y \in E$, $x \ne y$, то существует $f \in E^*$,* ***различающий точки*** *x* ***и*** *y, т.е. $f(x) \ne f(y)$;*
- *имеет место формула, двойственная определению нормы линейного функционала, а именно*

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*,\, \|f\| \le 1} \bigl|f(x)\bigr| = \max_{f \in E^*,\, \|f\| \le 1} \bigl|f(x)\bigr|,$$

где последняя формула означает, что супремум достигается.

Рассмотрим каждый элемент $x \in E$ как функцию $J_x\colon E^* \to \mathbb{F}$, определенную правилом $J_x(f) = f(x)$. По определению линейной структуры на E^*, каждое отображение J_x линейно, а для линейной комбинации $ax + by$, $x, y \in E$, $a, b \in \mathbb{F}$ имеем $J_{ax+by} = aJ_x + bJ_y$. Кроме того, из задачи 1.8 непосредственно вытекает, что каждый функционал J_x — липшицев и, значит, непрерывный (в сильной топологии). Таким образом, $x \mapsto J_x$ представляет собой отображение $J\colon E \to E^{**}$. В силу следствия 1.12, имеем $\|J_x\| = \|x\|$, т.е. отображение J изометрично, в частности, для $x, y \in E$, $x \ne y$, отображения J_x и J_y различны. Значит, отображение J — изометричное линейное вложение.

Нормированное пространство E называется ***рефлексивным***, если J — сюръективное отображение (изометричный изоморфизм), т.е. $E^{**} = E$. Приведем примеры рефлексивных и не рефлексивных пространств. Для $1 < p < \infty$ положим p^* равным единственному числу q, удовлетворяющему $1/p + 1/q = 1$. Иными словами, $p^* = p/(p-1)$, так что p^* удовлетворяет такому же неравенству $1 < p^* < \infty$. Продолжим это определение по непрерывности, положив $1^* = \infty$ и $\infty^* = 1$. Ясно, что для любого $p \in [1, \infty]$ имеем $p^{**} := (p^*)^* = p$.

Теорема 1.13. *Имеют место следующие результаты.*

- *Все конечномерные нормированные пространства рефлексивны.*
- *Для каждого $p \in (1, \infty)$ выполняется $\ell_p^* = \ell_{p^*}$, поэтому такие пространства ℓ_p рефлексивны.*
- *Для пары $\{1, \infty\}$ ситуация иная: $\ell_1^* = \ell_\infty$, но $\ell_\infty^* \subsetneqq \ell_1 = c_0^*$, так что пространства ℓ_1, ℓ_∞ и c_0 не рефлексивны.*
- *Для каждого $p \in (1, \infty)$ пространство $\bigl(L^p(\mu)\bigr)^*$ изометрически изоморфно $L^{p^*}(\mu)$, поэтому такие пространства $L^p(\mu)$ рефлексивны (теорема Рисса–Фреше).*
- *Пространство $C\bigl([a, b]\bigr)$ не рефлексивно.*

Следующая фундаментальная теорема также пригодится нам в дальнейшем. Мы приведем ту ее версию, которая будет нам нужна.

Теорема 1.14 (Банах–Штейнгауз)**.** *Пусть $\{T_\alpha \colon E \to F\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — семейство непрерывных линейных отображений из банахова пространства E в нормированное пространство F. Предположим, что $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|T_\alpha(x)\| < \infty$ для всех $x \in E$. Тогда существует $M > 0$ такое, что $\|T_\alpha\| \le M$ при всех $\alpha \in \mathcal{A}$.*

1.2 Направленности и их пределы

В этом разделе мы обсудим конструкцию из общей топологии, которая обобщает понятие последовательности и называется направленностью. Оказывается, в случае произвольных топологических пространств последовательностей не хватает для получения утверждений, являющихся одновременно необходимыми и достаточными. Например, хорошо известно, что в хаусдорфовом пространстве каждая сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Однако из единственности предела для каждой сходящейся последовательности хаусдорфовость не следует (приведите пример). Далее, непрерывные отображения сохраняют сходимость последовательностей. Однако из сохранения сходимости всех последовательностей непрерывность не вытекает (впрочем, для частного случая метрических пространств сохранение сходимости эквивалентно непрерывности). Наконец, компактность (из открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие) и секвенциальная компактность (из произвольной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность) — независимые свойства, т.е. ни одно из них не влечет другое. Замена последовательности на направленность решает все перечисленные выше проблемы.

Пусть S — частично упорядоченное множество. Оно называется ***направленным***, если для любых $s_1, s_2 \in S$ существует $s \in S$ такое, что $s \ge s_1$ и $s \ge s_2$ (каждая пара элементов имеет общую мажоранту).

Пример 1.15. (1) Множество $S = \mathbb{N}$ натуральных чисел с естественным порядком.

(2) Пусть X — топологическое пространство, $x \in X$, а Ω_x — семейство всех открытых окрестностей точки x, упорядоченное отношением, обратным к включению: $U \le V$, если и только если $U \supset V$. Тогда для любых $U_1, U_2 \in \Omega_x$ в качестве их общей мажоранты можно взять $U_1 \cap U_2$. Такое Ω_x назовем ***направленным множеством окрестностей точки*** $x \in X$.

По аналогии с тем, что последовательность во множестве X — это отображение из $\mathbb{N}$ в X, ***направленностью в*** X***, параметризованной направленным множеством*** S, называется каждое отображение $f \colon S \to X$. Множество S называется ***областью определения направленности*** f. Как и в случае с последовательностью $x \colon \mathbb{N} \to X$, когда образ натурального числа n обычно обозначают в виде x_n, для направленности $x \colon S \to X$ образ $x(s)$ элемента $s \in S$ будем обозначать x_s.

Пример 1.16. (1) Каждая последовательность является направленностью.

(2) Для направленного множества Ω_x окрестностей точки x топологического пространства X в качестве направленности выберем отображение, сопоставляющее каждой окрестности $U \in \Omega_x$ некоторую точку $x_U \in U$.

Напомним, что последовательность точек x_n топологического пространства X сходится к $x \in X$, если для любой окрестности $U \in \Omega_x$ существует n_0 такое, что при всех $n \ge n_0$ выполняется $x_n \in U$. Аналогично определим сходимость направленности $\{x_s\}_{s \in S}$: эта направленность ***сходится к*** $x \in X$, называемой ***пределом*** этой направленности, если для любой окрестности $U \in \Omega_x$ существует $s_0 \in S$ такое, что при всех $s \ge s_0$ выполняется $x_s \in U$. Сохраним для направленностей похожие обозначения сходимости и предела: $x_s \to x$ и $x = \lim_S x_s$.

Пример 1.17. (1) Каждая сходящаяся последовательность является сходящейся направленностью с тем же пределом.

(2) Пусть $\{x_U : U \in \Omega_x\}$ — определенная выше направленность в топологическом пространстве X. Тогда $x_U \to x$. Действительно, для любой открытой окрестности V точки x, имеем $V \in \Omega_x$, и все окрестности $W \in \Omega_x$ такие, что $W \geq V$, содержатся в V, поэтому и все соответствующие x_W содержатся в V.

Конструкция 1.18. Пусть S и T — направленные множества. Превратим $S \times T$ в частично упорядоченное множество, положив $(s_1, t_1) \leq (s_2, s_2)$, если и только если $s_1 \leq s_2$ и $t_1 \leq t_2$. Покажем, что $S \times T$ — направленное множество. Выберем произвольные $(s_1, t_1), (s_2, s_2) \in S \times T$, и пусть s — мажоранта s_1 и s_2, а t — мажоранта t_1 и t_2, тогда (s, t) — мажоранта для обеих пар (s_i, t_i). Полученный порядок на $S \times T$ называется ***порядком произведения***.

Теорема 1.19. *Топологическое пространство X хаусдорфово, если и только если каждая сходящаяся направленность в X имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть сначала пространство X — хаусдорфово. Предположим, что некоторая направленность x_s сходится одновременно к x и y, $x \neq y$. В силу хаусдорфовости, у этих точек имеются окрестности U^x и U^y такие, что $U^x \cap U^y = \emptyset$. Так как $x_s \to x$, то существует s_0 такое, что при всех $s \geq s_0$ выполняется $x_s \in U^x$. Аналогично, существует s_1 такое, что при всех $s \geq s_1$ выполняется $x_s \in U^y$. Так как S — направленное множество, существует $\sigma \in S$, мажорирующая s_1 и s_2. Тогда $x_\sigma \in U^x \cap U^y = \emptyset$, противоречие.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что каждая сходящаяся направленность в X имеет единственный предел, но пространство X — не хаусдорфово. Это означает, что существуют различные $x, y \in X$, у которых любая пара окрестностей U^x и U^y пересекается. Рассмотрим направленное множество $S = \Omega_x \times \Omega_y$ и построим направленность, параметризованную S, выбрав для каждого $U = (U^x, U^y)$ произвольную точку $x_U \in U^x \cap U^y$. Тогда x_U сходится одновременно к x и y. Действительно, для каждой окрестности V^x точки x имеем $V^x \in \Omega_x$. Выберем произвольную окрестность V^y точки y, тогда $V = (V^x, V^y) \in S$, и для всех $W = (W^x, W^y) \in S$, $V \leq W$, выполняется $V^x \supset W^x \supset W^x \cap W^y \ni x_W$, откуда $x_U \to x$. Аналогично $x_U \to y$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 1.20. *Отображение $F\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно, если и только если оно сохраняет сходимость направленностей.*

Доказательство. Пусть F непрерывно. Рассмотрим произвольную направленность $\{x_s\}_{s \in S}$ в X, сходящуюся к некоторому $x \in X$, и пусть $y = F(x)$. Тогда, в силу непрерывности F, для любой окрестности U^y точки y существует окрестность U^x точки x такая, что $F(U^x) \subset U^y$. Так как $x_s \to x$, существует $s_0 \in S$ такое, что для всех $s \geq s_0$ выполняется $x_s \in U^x$, но тогда для этих же s имеем $F(x_s) \in F(U^x) \subset V^y$, поэтому $F(x_s) \to y$, что и требовалось.

Обратно, пусть F сохраняет сходимость всех направленностей. Покажем, что F непрерывно в каждой точке $x \in X$. Предположим противное, т.е. существует $x \in X$ такое, что F не является непрерывным в x. Снова положим $y = F(x)$. Тогда существует окрестность U^y точки y такая, что в каждой окрестности $U \in \Omega_x$ имеется точка x_U, для которой $F(x_U) \notin V^x$. Семейство $\{x_U\}_{U \in \Omega_x}$ — направленность, сходящаяся к x в силу примера 1.17. Но направленность $F(x_U)$ не сходится к y, противоречие. □

Определим для направленностей понятие поднаправленности, являющееся аналогом подпоследовательности. В случае $\mathbb{N}$ подпоследовательность y_i последовательности x_n во множестве X задается с помощью строго монотонно возрастающей функции $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ так: $y_i = x_{h(i)}$. Иными словами, если последовательность x_n — это отображение $x\colon \mathbb{N} \to X$, то подпоследовательность $y\colon \mathbb{N} \to X$ равна композиции $x \circ h$. Фактически, мы выбираем бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$ и ограничиваем x на это подмножество, нумеруя при этом последовательные элементы последовательными натуральными числами.

В случае направленности $\{x_s\}_{s \in S}$ можно было бы поступить аналогично, а именно, выбрать произвольное подмножество $T \subset S$, индуцировать на нем частичный порядок, и рассмотреть соответствующее семейство $\{x_t\}_{t \in T}$. Однако теперь мы можем столкнуться с рядом трудностей. Во-первых, T может перестать быть направленным (например, все элементы T могут оказаться несравнимыми). Во-вторых, даже если T — направленность, такое подмножество может оказаться неадекватным задаче вычисления пределов, ведь нам важно, чтобы в поднаправленности “сыграли” сколь угодно большие элементы. Например, это будет в случае, если S равно объединению двух стандартно упорядоченных множеств натуральных чисел $\mathbb{N}_1$ и $\mathbb{N}_2$, при этом для любых $n_i \in \mathbb{N}_i$ выполняется $n_1 < n_2$, а в качестве T выбрано $\mathbb{N}_1$.

Чтобы справиться с последней проблемой, введем понятие конфинального подмножества частично упорядоченного множества. А именно, подмножество T направленного множества S называется ***конфинальным***, если для любого $s \in S$ существует $t \in T$ такое, что $t \geq s$. Тем не менее, даже в случае конфинального множества T оно может не оказаться направленным.

Чтобы избежать описанных проблем, ограничимся конфинальными подмножествами, являющимися направленными. Для такого T обозначим $h\colon T \to S$ отображение включения. Тогда если $x\colon S \to X$ — направленность, то $x \circ h\colon T \to X$ будем называть ***конфинальной поднаправленностью*** в x. Оказывается, и этот класс поднаправленностей обладает рядом недостатков, так что его расширяют, отказываясь выбирать T в качестве подмножества S.

Итак, пусть $x\colon S \to X$ — направленность. Тогда каждая ее ***поднаправленность*** задается **произвольным** направленным множеством T, вообще говоря, не имеющим отношения к S, отображением $h\colon T \to S$, сохраняющим порядок и таким, что множество $h(T) \subset S$ конфинально в S. При этом соответствующая поднаправленность — это композиция $x \circ h\colon T \to X$.

Замечание 1.21. Понятие поднаправленности и конфинальной поднаправленности оказываются неэквивалентными по отношению к сходимости: ниже мы приведем пример 1.24 направленности, когда ни одна конфинальная поднаправленность не сходится, а вот среди поднаправленностей общего вида имеются сходящиеся.

Напомним, что точка x топологического пространства X называется ***точкой накопления последовательности*** x_n, если для любой окрестности U точки x и любого n_0 существует $n \geq n_0$ такое, что $x_n \in U$. Аналогичное определение имеет место для направленности $\{x_s\}_{s\in S}$. А именно, точка $x \in X$ является ***точкой накопления направленности*** $\{x_s\}_{s\in}$, если для любой окрестности U точки x и любого $s_0 \in S$ существует $s \geq s_0$ такое, что $x_s \in U$.

Теорема 1.22. *Точка x топологического пространства X является точкой накопления направленности $\{x_s\}_{s\in S}$, если и только если в этой направленности существует поднаправленность $\{y_t\}_{t\in T}$, сходящаяся к x.*

Замечание 1.23. Ниже мы покажем, что если в качестве поднаправленностей выбирать лишь конфинальные, то теорема 1.22 перестает быть верной.

Доказательство теоремы 1.22. Пусть сначала $\{x_s\}_{s\in S}$ — направленность в X, у которой некоторая поднаправленность $\{y_t\}_{t\in T}$, $h\colon T \to S$, $y_t = x_{h(t)}$ сходится к точке $x \in X$. Тогда для каждой окрестности U точки x существует $t_0 \in T$ такое, что для каждого $t \in T$, $t \geq t_0$ выполняется $x_{h(t)} \in U$.

Выберем теперь произвольное $s_0 \in S$. Мы должны показать, что существует $s \in S$, $s \geq s_0$, для которого $x_s \in U$. Так как $h(T)$ конфинально в S, существует $t_0 \in T$ такое, что $h(t_0) \geq s_0$. По сказанному выше, существует $t'_0 \in T$ такое, что для всех $t \in T$, $t \geq t'_0$ выполняется $x_{h(t)} \in U$. Так как T — направленное множество, существует $t \in T$, $t \geq \max\{t_0, t'_0\}$. Положим $s = h(t)$, тогда $x_s \in U$, и так как отображение h сохраняет порядок, то $s = h(t) \geq h(t_0) \geq s_0$, что и требовалось.

Обратно, предположим, что точка $x \in X$ является точкой накопления для направленности $\{x_s\}_{s\in S}$. Рассмотрим множество T, составленное из всех пар (U, s), где $U \in \Omega_x$ — окрестность x, и $s \in S$ такова, что $x_s \in U$. Введем на T порядок произведения из конструкции 1.18. Тогда отображение $h\colon T \to S$, $h\colon (U, s) \mapsto s$ сохраняет порядок. Кроме того, $h(T)$ конфинально. Действительно, для каждого s_0 имеем $h\big((X, s_0)\big) = s_0 \geq s_0$. Покажем, что $y_t = x_{h(t)}$ сходится к x.

Действительно, рассмотрим произвольную окрестность $U \in \Omega_x$. По условию, существует $s_0 \in S$ такое, что $x_{s_0} \in U$. Пусть $t_0 = (U, s_0)$. Тогда все $t = (V, s) \in T$ такие, что $t \geq t_0$, удовлетворяют $V \in \Omega_x$, $V \subset U$, $s \geq s_0$, $s = h(t)$, $x_s \in V$. Следовательно, для каждого такого t имеем $y_t = x_{h(t)} = x_s \in U$, что и доказывает сходимость направленности y_t к x. $\square$

Пример 1.24. Обозначим ω первый счетный ординал, а ω_1 — первый несчетный ординал. Для каждого ординала α на отрезке $[0, \alpha]$, состоящем из всех ординалов β, $0 \leq \beta \leq \alpha$, определена порядковая топология, т.е. интервалы $(a, b) = \{c : a < c < b\}$ и полуинтервалы $[0, a)$ и $(a, \alpha]$ образуют базу. ***Плоскостью Тихонова*** называется декартово произведение отрезков $P := [0, \omega_1] \times [0, \omega]$, наделенное топологией произведения. Положим $p = (\omega_1, \omega)$.

Рассмотрим теперь линейно упорядоченное множество S, полученное из $[0, \omega_1) \times [0, \omega) \subset P$ введением лексикографического порядка: $(\alpha, m) \leq (\beta, n)$, если или $\alpha < \beta$, или $\alpha = \beta$ и $m \leq n$. Ясно, что S — направленное множество. Пусть $x\colon S \to P$ — включение, тогда x — направленность в P. Покажем, что p — точка накопления направленности x.

Выберем произвольную окрестность U точки p. По определению порядковой топологии, существуют $\alpha_0 \in [0, \omega_1)$ и $n_0 \in [0, \omega)$ такие, что все точки (α, n), где $\alpha > \alpha_0$ и $n > n_0$ содержатся в U. Выберем произвольную точку $(\beta, m) \in S$ и положим $\alpha = \max(\beta, \alpha_0 + 1)$ и $n = \max(m, n_0 + 1)$, тогда $(\alpha, n) \geq (\beta, m)$ в S, и $(\alpha, n) \in U$. Таким образом, p — точка накопления направленности x. Отметим, что, в силу теоремы 1.22, существует поднаправленность в x, сходящаяся к p.

Покажем теперь, что никакая конфинальная поднаправленность в x не сходится к p. Пусть $T \subset S$ — произвольное конфинальное подмножество. Для каждого $n \in [0, \omega)$ положим $T_n = T \cap \big([0, \omega_1) \times \{n\}\big)$ и покажем, что конфинальность T в S влечет несчетность одного из T_n. Действительно, если все T_n счетны, то для каждого n в $[0, \omega_1)$ есть элемент q_n такой, что $T_n < (q_n, n)$. Множество всех таких q_n также счетно, поэтому в $[0, \omega_1)$ есть элемент q такой, что $q > q_n$ при всех n. Последнее означает, что для $(q, 0)$ в T нет элемента, больше или равного $(q, 0)$, противоречие с конфинальностью T.

Итак, пусть T_m несчетно. Тогда T_m конфинально в T. Действительно, если это не так, то существует $t_0 = (\alpha_0, n_0) \in T$ такой, что для всех $t = (\alpha, m) \in T_m$ выполняется $t < t_0$, т.е. или $\alpha < \alpha_0$, или $\alpha = \alpha_0$, но $m < n_0$. В любом случае, $\alpha \leq \alpha_0$, поэтому T_m счетно.

Рассмотрим теперь окрестность U точки p, состоящую из всех (α, n), где $n \geq m + 1$. Тогда T_m не пересекает U, и так как T_m конфинально в T, для каждого $t_0 \in T$ существует $t \in T_m$, $t \geq t_0$, но тогда $x_t \notin U$, так что конфинальная поднаправленность $\{x_t\}_{t \in T}$ не сходится к p. Что и требовалось.

Теорема 1.25. *Топологическое пространство X компактно, если и только если у каждой направленности имеется сходящаяся поднаправленность.*

Доказательство. Напомним, что семейство подмножеств $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества X называется ***центрированным***, если каждое конечное непустое подсемейство имеет непустое пересечение. Хорошо известно (см. например [1]), что компактность топологического пространства X эквивалентна следующему условию: всякая центрированная система замкнутых подмножеств X имеет непустое пересечение. Перейдем к доказательству теоремы.

Предположим сначала, что пространство X компактно, и пусть $x \colon S \to X$ — произвольная направленность в X. Для каждого $s \in S$ положим $A_s = \{x_t : t \in S, t \geq s\}$. Легко видеть, что для каждого конечного набора $s_1, \ldots, s_k \in S$ существует общая мажоранта s, поэтому каждый конечный набор $A_{s_1}, \ldots, A_{s_k}$ имеет непустое пересечение, так как, например, содержит эту общую мажоранту s. Тем самым, система $\{A_s\}_{s \in S}$ — центрированная. Положим $F_s = \bar{A}_s$. Тогда $\{F_s\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств X. По цитированной выше теореме, компактность пространства X влечет наличие общей точки p у всех F_s.

Покажем, что p является точкой накопления направленности x. Рассмотрим произвольную окрестность U точки p и выберем произвольное $s_0 \in S$. Так как $p \in F_{s_0}$ и $F_{s_0} = \bar{A}_{s_0}$, то $U \cap A_{s_0} \neq \emptyset$. Пусть $x_s \in U \cap A_{s_0}$, тогда $s \geq s_0$, а это означает, в силу произвольности U и s_0, что p — точка накопления для направленности x. По теореме 1.22, у направленности x есть поднаправленность, сходящаяся к p. Таким образом, мы доказали, что компактность влечет наличие сходящейся поднаправленности у каждой направленности.

Докажем теперь обратное. Пусть у каждой направленности имеется сходящаяся поднаправленность. Рассмотрим произвольное центрированное семейство F замкнутых подмножеств X. Дополним F пересечениями всевозможных непустых конечных подсемейств в F. Полученное семейство S также будет центрированным, и если мы покажем, что $\cap S \neq \emptyset$, то и $\cap F \neq \emptyset$ также будет верным.

Так как пересечение любых двух элементов из S также принадлежит S, то семейство S, вместе с частичным порядком, заданным обратным включением, является направленным множеством (пересечение пары элементов — их общая мажоранта). Выберем в каждом $s \in S$ произвольный элемент x_s, тогда $x \colon s \mapsto x_s$ — направленность. По предположению, эта направленность имеет поднаправленность, сходящуюся к некоторой точке $p \in X$. По теореме 1.22, точка p является точкой накопления для направленности x. Выберем любое $s_0 \in S$, тогда для каждой окрестности U точки p существует $s \geq s_0$, для которого $x_s \in U$. Отметим, что $x_s \in s \subset s_0$, таким образом p — точка прикосновения s_0. Так как множество $s_0 \subset X$ замкнуто, то $p \in s_0$. Таким образом, p содержится во всех $s_0 \in S$, так что $\cap S \neq \emptyset$, откуда $\cap F \neq \emptyset$. По цитированной выше теоремы, это влечет компактность X. $\square$

Замечание 1.26. Для метрических пространств X компактность равносильна возможности выбрать в каждой последовательности сходящуюся подпоследовательность. Отметим, что доказательство этого факта намного сложнее, чем приведенное доказательство теоремы 1.25.

Замечание 1.27. В терминах направленностей существенно легче доказывается теорема Тихонова о компактности декартова произведения любого семейства компактов, если это произведение наделяется тихоновской топологией. Также несложно получить доказательство приводимой ниже теоремы Алаоглу.

1.3 Слабая топология

Кроме сильной, на E и E^* имеются и другие естественные топологии. Напомним важную топологическую конструкцию. Пусть X — множество, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство топологических пространств, и $\mathcal{F}$ — семейство отображений $\{f_\alpha\colon X\to Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Тогда на X определена самая слабая топология, в которой все отображения $f_\alpha\in\mathcal{F}$ непрерывны. Эта топология называется ***$\mathcal{F}$-слабой*** или ***слабой для*** $\mathcal{F}$. Ее предбазой являются прообразы всевозможных открытых подмножеств Y при всевозможных отображениях $f_\alpha\in\mathcal{F}$, а базой — всевозможные конечные пересечения таких прообразов.

Пример 1.28. Топология на декартовом произведении $X=\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha$ — это $\mathcal{F}$-слабая топология для семейства $\mathcal{F}$ всех проекций $f_\alpha\colon X\to X_\alpha$.

Описанная только что конструкция позволяет определить ***слабую топологию на нормированном пространстве*** E, для которой в качестве $\mathcal{F}$ рассматривается семейство E^* всех непрерывных (в сильной топологии) функционалов. Заменив E на E^*, а E^* — на $E^{**}=(E^*)^*$, мы определим также ***слабую топологию на*** E^*.

Чтобы различать сходимость последовательности точек x_n банахова пространства E к точке $x\in E$ в сильной и слабой топологии, первую сходимость будем обозначать $x_n\to x$, а вторую — через $x_n\rightharpoonup x$. Аналогичные обозначения будем использовать и для направленностей. В следующей теореме мы собрали утверждения, относящиеся к слабой сходимости на банаховом пространстве E. Их доказательства см. в [14]. Аналогичные результаты имеют место и для пространства E^*.

Теорема 1.29. *Пусть E — банахово пространство, x_n и f_n — последовательности в E и E^* соответственно, $\{x_s\}_{s\in S}$ и $\{f_s\}_{s\in S}$ — направленности в E и E^* соответственно, $x\in E$, $f\in E^*$. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Слабая топология на E хаусдорфова.*

(2) *Имеет место $x_n\rightharpoonup x$, если и только если $f(x_n)\to f(x)$ при всех $f\in E^*$. Равносильное утверждение: $x_s\rightharpoonup x$, если и только если $f(x_s)\to f(x)$ при всех $f\in E^*$.*

(3) *Если $x_n\to x$, то $x_n\rightharpoonup x$, т.е. сильная сходимость влечет слабую.*

(4) *Если $x_n\rightharpoonup x$, то множество чисел $\{\|x_n\|\}$ ограничено и $\|x\|\le\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.*

(5) *Если $x_n\rightharpoonup x$ и $f_n\to f$, то $f_n(x_n)\to f(x)$.*

(6) *В конечномерном E сильная и слабая топологии совпадают.*

(7) *В бесконечномерном E сфера никогда не замкнута в слабой топологии, а открытый шар никогда не является открытым с слабой топологии (так как каждое открытое множество содержит некоторую аффинную гиперплоскость, т.е. множество вида $\{x\in E:\varphi(x)=\mathrm{const}\}$, где $\varphi\colon E\to\mathbb{F}$ — линейное отображение).*

(8) *В бесконечномерном E слабая топология всегда строго слабее сильной (слабая топология содержится в сильной и отлична от нее). Это вытекает из предыдущего пункта.*

(9) *В ℓ_1 последовательность сходится в сильной топологии, если и только если она сходится в слабой топологии. В частности, слабая топология в ℓ_1 не метризуема (если бы слабая топология была метризуемой, то тождественное отображение оказалось бы гомеоморфизмом, но это противоречит предыдущему пункту).*

(10) *Если F — еще одно банахово пространство, и $L\colon E\to F$ — линейное отображение, то L непрерывно относительно сильных топологий, если и только если оно непрерывно относительно слабых топологий.*

(11) *Выпуклое и замкнутое в сильной топологии подмножество банахова пространства является также замкнутым в слабой топологии.*

Задача 1.30. Выясните, какие пункты из теоремы 1.29 можно переформулировать в терминах направленностей.

1.4 $*$-слабая топология

Итак, на сопряженном пространстве E^* к нормированному пространству E мы определили две топологии: сильную и слабую. Отметим, что слабая топология на E^* получается максимальным ослаблением сильной до топологии, в которой все функционалы из E^{**} (непрерывные в сильной топологии) оставались бы непрерывными. Сейчас мы сделаем еще большее ослабление.

Напомним, что для каждого $x \in E$ мы определили функцию $J_x\colon E^* \to \mathbb{F}$, положив $J_x(f) = f(x)$, и показали, что J_x лежит в E^{**}, тем самым, построив отображение $J\colon E \to E^{**}$, $J\colon x \mapsto J_x$. Отметим, что $J(E) \subset E^{**}$, вообще говоря, не совпадает с E^{**}, поэтому самая слабая топология на E^*, в которой все еще непрерывны функционалы из $J(E)$, еще слабее, чем слабая топология на E^*. Построенная таким образом топология называется ***$*$-слабой***.

Чтобы отличать сходимость последовательности функционалов $f_n \in E^*$ к функционалу $f \in E^*$ в $*$-слабой топологии, эту сходимость будем обозначать $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Аналогичные обозначения будем использовать и для направленностей.

Теорема 1.31. *Пусть E — банахово пространство, x_n и f_n — последовательности в E и E^* соответственно, $\{x_s\}_{s \in S}$ и $\{f_s\}_{s \in S}$ — направленности в E и E^* соответственно, $x \in E$, $f \in E^*$. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *$*$-слабая топология на E^* хаусдорфова.*

(2) *Имеет место $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, если и только если $f_n(x) \to f(x)$ при всех $x \in E$. Равносильное утверждение: $f_s \overset{*}{\rightharpoonup} f$, если и только если $f_s(x) \to f(x)$ для всех $x \in E$.*

(3) *Имеют место импликации $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

(4) *Если $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ и $x_n \to x$, то $f_n(x_n) \to f(x)$.*

(5) *В конечномерном E сильная, слабая и $*$-слабая топологии на E^* совпадают.*

(6) **Гиперплоскостью в** *E^* назовем каждое множество $\{f \in E^* : \varphi(f) = \mathrm{const}\}$, где $\varphi\colon E^* \to \mathbb{F}$ — линейное отображение. Тогда гиперплоскость в E^* замкнута в $*$-слабой топологии, если и только если $\varphi = J_x$ для некоторого $x \in E$.*

(7) *Для бесконечномерного нерефлексивного E всегда $*$-слабая топология на E^* строго слабее слабой ($*$-слабая топология содержится в слабой топологии и отлична от нее), что мгновенно следует из предыдущего пункта. Для рефлексивного E слабая и $*$-слабая топологии совпадают.*

(8) *Пусть B и B^{**} — замкнутые единичные шары с центром в нуле в пространствах E и E^{**} соответственно, а $J\colon E \to E^{**}$ — построенное выше изометричное линейное вложение. Тогда если пространство E рефлексивно, то $J(B) = B^{**}$, а если нет, что $J(B)$ — замкнутое собственное неплотное подмножество B^{**} относительно сильной топологии, но $*$-слабое замыкание $J(B)$ совпадает с B^{**}, т.е. $J(B)$ всюду плотно в B^{**} в $*$-слабой топологии.*

(9) *Множество $J(E)$ совпадает с множеством всех линейных функционалов на E^*, являющихся непрерывными в $*$-слабой топологии. Иными словами, для каждого линейного функционала $\varphi\colon E^* \to \mathbb{F}$, непрерывного в $*$-слабой топологии, существует $x \in E$ такой, что $\varphi = J_x$.*

Задача 1.32. Выясните, какие пункты из теоремы 1.31 можно переформулировать в терминах направленностей.

Ослабляя топологию, можно добиться того, что некоторые подмножества, не являвшиеся компактными, превратились в компактные. Именно это имеет место в случае со $*$-слабой топологией.

Теорема 1.33 (Банах–Алаоглу)**.** *Пусть E — банахово пространство и $B^* \subset E^*$ — замкнутый единичный шар с центром в нуле. Тогда B^* компактен в $*$-слабой топологии.*

Замечание 1.34. Компактность шара B^* еще не означает, что из любой последовательности в B^* можно выделить сходящуюся подпоследовательность (секвенциальная компактность). А общем случае эти два понятия не вытекают одно из другого. Тем не менее, для метрических пространств компактность и секвенциальная компактность равносильны. Поэтому важной составляющей многих доказательств является обсуждение метризуемости компакта B^*. Ниже мы приведем некоторые утверждения такого типа.

Сформулируем еще ряд результатов о рефлексивных пространствах.

1.5 Рефлексивные пространства

Следующая теорема устанавливает связь между рефлексивностью и компактностью единичного шара.

Теорема 1.35. *Банахово пространство E рефлексивно, если и только если замкнутый единичный шар $B \subset E$ компактен в слабой топологии.*

Задача 1.36. Докажите следующие утверждения.

- Замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства само рефлексивно.
- Банахово пространство E рефлексивно, если и только если E^* рефлексивно.
- Выпуклое ограниченное и замкнутое в сильной топологии подмножество рефлексивного пространства компактно в слабой топологии.

1.6 Сепарабельные пространства

Напомним, что топологическое пространство называется ***сепарабельным***, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество. В случае произвольных топологических пространств, сепарабельность, вообще говоря, не наследуется подмножествами. Стандартным примером является плоскость Зоргенфрея, полученная как декартово произведение вещественной прямой с топологией, база которой — полуинтервалы вида $[a, b)$. Легко видеть, что плоскость Зоргенфрея сепарабельна (множество всех рациональных точек всюду плотно), однако, если x, y — координаты на плоскости Зоргенфрея, то множество $y = -x$ наследует дискретную топологию, поэтому не сепарабельно. Для метрических пространств сепарабельность наследуется подмножествами.

В теории банаховых пространств сепарабельность тоже проявляется необычным образом. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение 1.37. *Если E — банахово пространство, у которого пространство E^* сепарабельно, то E также сепарабельно. Обратное утверждение не имеет места. Например, пусть $E = \ell_1$, тогда $E^* = \ell_\infty$. Хотя пространство ℓ_1 сепарабельно, пространство ℓ_∞ — нет.*

Оказывается, если к сепарабельности добавить рефлексивность, то аналог предыдущего предложения превратится в критерий.

Следствие 1.38. *Пусть E — банахово пространство. Тогда E — рефлексивно и сепарабельно, если и только если E^* — рефлексивно и сепарабельно.*

В следующем утверждении демонстрируется, что сепарабельность может быть тесно связана с метризуемостью.

Теорема 1.39. *Пусть E — банахово пространство и $B^* \subset E^*$ — замкнутый единичный шар. Тогда пространство E сепарабельно, если и только если шар B^* со $*$-слабой топологией метризуем.*

Следствие 1.40. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, тогда каждая ограниченная последовательность в E^* содержит $*$-слабо сходящуюся подпоследовательность.*

В следующем результате сепарабельность появляется лишь в доказательстве (которое мы не приводим).

Теорема 1.41. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство. Тогда каждая ограниченная последовательность в E содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

1.7 Равномерная выпуклость

Вводимое здесь понятие тесно связано с рефлексивностью. Неформально оно означает, что середина каждого отрезка, лежащего в шаре, находится достаточно далеко от границы шара. Приведем формальное определение.

Линейное нормированное пространство E называется ***равномерно выпуклым***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \in E$, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$, $\|x - y\| > \varepsilon$ выполняется $\big\|(x+y)/2\big\| < 1 - \delta$.

Приведем примеры пространств, являющихся и не являющихся равномерно выпуклыми. Обозначим ℓ_p^n пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой из ℓ_p (мы рассматриваем $\mathbb{R}^n$ как подпространство в ℓ_p, состоящее из всех последовательностей, в которых все члены, начиная с $(n+1)$го, равны нулю). Тогда

- ℓ_1^n, ℓ_∞^n, ℓ_1 и ℓ_∞ не являются равномерно выпуклыми (границы их единичных шаром содержат уплощения);
- все остальные пространства ℓ_p^n и ℓ_p, т.е. при $1 < p < \infty$, — равномерно выпуклы.

Теорема 1.42. *Каждое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.*

Замечание 1.43. Обратное утверждение к теореме 1.42 не имеет места. Действительно, ℓ_1^n рефлексивно, но не равномерно выпукло.

В равномерно выпуклых пространствах слабая сходимость влечет сильную сходимость.

Предложение 1.44. *Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство, $x_n, x \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $x_n \rightharpoonup x$ и $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\|$. Тогда $x_n \to x$.*

1.8 Гильбертовы пространства

Напомним, что ***гильбертовыми пространствами*** называются банаховы пространства, у которых норма задается скалярным произведением. Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ линейно по первому аргументу и симметрично в следующем смысле: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, где черта над числом обозначает комплексное сопряжение (если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то симметричность означает, что $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$). Таким образом, в случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ скалярное произведение линейно и по второму аргументу, т.е. оно ***билинейно***. В случае же $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ скалярное произведение (часто называемое ***эрмитовым произведением***) ***сопряженно линейно*** по второму аргументу: $\langle x, ay + bz\rangle = \bar a\langle x, y\rangle + \bar b\langle x, z\rangle$, поэтому говорят, что такое произведение ***полуторалинейно***. При этом, в обоих случаях требуется, чтобы $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Приведем примеры гильбертовых пространств.

- Пространство ℓ_2^n со скалярным произведением
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar y_k,$$
где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.
- Пространство ℓ_2 со скалярным произведением
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar y_k,$$
где $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$.
- Пространство $L_2(\mu)$ со скалярным произведением
$$\langle f, g\rangle = \int f \bar g \, d\mu.$$

Для того, чтобы нормированное пространство E являлось гильбертовым, необходимо и достаточно выполнения ***тождества параллелограмма***: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y^2\|\big)$ для любых $x, y \in E$ (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон параллелограмма).

Задача 1.45. Покажите, что $C[-1, 1]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ нельзя превратить в гильбертово пространство.

Теорема 1.46. *Каждое гильбертово пространство равномерно выпукло и поэтому рефлексивно.*

Теорема 1.47 (Рисс)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $\varphi \in H^*$. Тогда существует единственный $y \in H$, для которого $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in H$. При этом $\|\varphi\| = \|y\|$.*

Для каждого x из гильбертова пространства H положим $f_x(y) = \langle y, x\rangle$, тогда $f_x \in H^*$ и, по теореме Рисса, все элементы из H^* так получаются. Положим $\langle f_x, f_y\rangle_* = \langle y, x\rangle$. Легко проверяется, что эта операция на H^* является скалярным произведением, причем $\|f_x\|^2 = \langle f_x, f_x\rangle_* = \|x\|^2$. Тем самым, мы превратили H^* в гильбертово пространство (напомним, что двойственное пространство каждого нормированного является банаховым, задача 1.9). Аналогично гильбертовым становится пространство H^{**}. Таким образом, определены два отображения из H в H^{**}: первое $x \mapsto J_x$, построенное выше, а второе $x \mapsto f_{f_x}$, построенное только что. Несложно проверить, что оба этих отображения совпадают. Действительно, для каждого $\varphi = f_y \in H^*$ имеем

$$f_{f_x}(\varphi) = f_{f_x}(f_y) = \langle f_y, f_x \rangle_* = \langle x, y \rangle = f_y(x) = \varphi(x) = J_x(\varphi).$$

Замечание 1.48. По теореме 1.47, отображение $y \mapsto f_y$ является изометрией между H и H^*. В случае вещественного H эта изометрия линейна, а в случае комплексного — сопряженно линейна.

Пусть теперь $A \in \mathcal{B}(H)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда для любого $y \in H$ отображение $\varphi\colon x \mapsto \big\langle A(x), y \big\rangle$ — непрерывный линейный функционал на H. По теореме 1.47, существует единственный вектор $A^*(y) \in H$ такой, что $\varphi(x) = \big\langle x, A^*(y) \big\rangle$. Иными словами, мы построили отображение $A^*\colon H \to H$, для которого

$$\big\langle x, A^*(y) \big\rangle = \big\langle A(x), y \big\rangle$$

при всех $x, y \in H$. Из этой формулы видно, что A^* — непрерывный линейный оператор, который называется ***сопряженным*** с A.

Задача 1.49. Пусть H — гильбертово пространство, $A, A_1, A_2 \in \mathcal{B}(H)$ и $a \in \mathbb{F}$. Докажите, что

(1) $\|A\| = \|A^*\|$;

(2) $\|A^*A\| = \|A\|^2$;

(3) $A^{**} = A$;

(4) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$;

(5) $(A_1A_2)^* = A_2^*A_1^*$;

(6) $(aA)^* = \bar{a}A^*$.

Таким образом, для гильбертова пространства H банахова алгебра $\mathcal{B}(H)$ его непрерывных линейных операторов обладает еще одной операцией, а именно, инволюцией $A \mapsto A^*$, удовлетворяющей свойствам из задачи 1.49. Такая банахова алгебра является примером C^*-алгебр, которые мы будем изучать в дальнейшем. Отметим также, что для хаусдорфова локально компактного пространства X банахова алгебра $C_0(X)$ с операцией сопряжения также представляет собой пример C^*-алгебры. При этом последняя алгебра коммутативна, а первая — некоммутативна. Оказывается, все C^*-алгебры исчерпываются в некоммутативном случае подалгебрами в $\mathcal{B}(H)$, замкнутыми относительно сильной топологии и инволюции, а в коммутативном — совпадают с $C_0(X)$ для соответствующих хаусдорфовых локально-компактных пространств.

Тема 2

Банаховы алгебры

План. Алгебра, унитальная алгебра, единица унитальной алгебры, подалгебра; подалгебра, порожденная данным подмножеством; субмультипликативность, нормированная алгебра, нормированная унитальная алгебра; замкнутая подалгебра нормированной алгебры, порожденная данным подмножеством; банахова алгебра, унитальная банахова алгебра; банахова подалгебра, порожденная данным подмножеством; примеры банаховых алгебр, прямая сумма семейства банаховых алгебр, ограниченная сумма семейства банаховых алгебр, теорема Вейерштрасса–Стоуна (компактная и локально-компактная версии); левый, правый и (двусторонний) идеалы алгебры; тривиальный идеал, собственный идеал, факторалгебра, модулярный идеал, связь модулярности идеала с унитальностью факторалгебры, свойства модулярных идеалов; идеал, порожденный данным подмножеством алгебры; замкнутый идеал, порожденный данным подмножеством нормированной алгебры; фактор нормированной алгебры по замкнутому идеалу; гомоморфизм алгебр, нулевой гомоморфизм, унитальный гомоморфизм унитальных алгебр, примеры гомоморфизмов, унитализация алгебры, канонический гомоморфизм, свойства унитализации, унитализация нормированной алгебры, обратимые элементы унитальной алгебры, мультипликативная группа обратимых элементов унитальной алгебры, резольвентное множество, спектр элемента унитальной алгебры, примеры вычисления спектров, свойства обратимых и необратимых элементов, свойства спектров элементов унитальной алгебры, унитальные банаховы алгебры; сумма геометрической прогрессии элемента, оценка частичной суммы этой прогрессии, норма которого меньше 1; открытость множества обратимых элементов унитальной банаховой алгебры и дифференцируемость отображения перехода к обратному элементу, компактность спектра элемента унитальной банаховой алгебры, непустота спектра (теорема Гельфанда); теорема Гельфанда–Мазура об унитальной банаховой алгебре, все элементы которой обратимы; спектральный радиус элемента унитальной алгебры, свойства спектрального радиуса, примеры вычисления спектрального радиуса, теорема Бёрлинга о вычислении спектрального радиуса, пример использования теоремы Бёрлинга, спектры элементов содержащей единицу замкнутой подалгебры унитальной банаховой алгебры, спектры и спектральные радиусы элементов неунитальной алгебры, экспоненты элементов унитальной банаховой алгебры, модулярные идеалы банаховой алгебры, их замыкания, максимальные модулярные идеалы, характеры коммутативной алгебры, их свойства, связь со спектром, непрерывность характеров коммутативной банаховой алгебры, их связь с максимальными идеалами, характеры коммутативной алгебры и ее унитализации, связь между характерами и спектрами элементов коммутативной банаховой алгебры, топология пространства характеров коммутативной банаховой алгебры, пространство характеров банаховой алгебры непрерывных функций, заданных на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве, отождествление пространства характеров коммутативной банаховой алгебры с подпространством в пространстве характеров ее унитализации, преобразования Гельфанда, представление Гельфанда коммутативной банаховой алгебры, согласованность преобразований Гельфанда элементов унитализации коммутативной банаховой алгебры с отождествлениями, радикал алгебры, квазинильпотентные элементы, полупростая алгебра, применение представления Гельфанда для доказательства свойств спектрального радиуса, отсутствие субаддитивности и субмультипликативности спектрального радиуса в общем случае; гомеоморфность пространства характеров унитальной банаховой алгебры, порожденной одним элементом, со спектром этого элемента; гомеоморфность пространства характеров неунитальной банаховой алгебры, порожденной одним элементом, со спектром этого элемента, из которого выкинут 0.

Начнем с определения разных типов алгебр и более детально обсудим так называемые банаховы алгебры. Содержание этого раздела является базой теории C^*-алгебр, к которой мы обратимся в следующих лекциях. Для более детального изучения материала мы рекомендуем монографию [15]. Впрочем, многие излагаемые там факты приводятся без доказательств и пояснений. В наших лекциях мы постарались заполнить эти пробелы.

В дальнейшем, мы будем иметь дело лишь с алгебрами над полем $\mathbb{C}$, не оговаривая это каждый раз.

2.1 Элементы теории алгебр

Напомним сначала определение алгебры.

2.1.1 Алгебра, унитальная алгебра

Алгебра A — это векторное пространство с билинейным ассоциативным умножением: для любых $a, b, c \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ имеем

$$(a, b) \mapsto ab, \quad (\lambda a + \mu b, c) = \lambda ac + \mu bc, \quad (c, \lambda a + \mu b) = \lambda ca + \mu cb, \quad a(bc) = (ab)c.$$

Если в алгебре A есть ***единица***, т.е. элемент $1 \in A$, для которого $a\,1 = 1\,a = a$ для всех $a \in A$, то A называется ***унитальной алгеброй***.

Подалгебра B ***алгебры*** A — это линейное подпространство, замкнутое относительно умножения: для любых $a, b \in B$ выполняется $ab \in B$. Таким образом, подалгебра сама является алгеброй.

Пересечение произвольного семейства подалгебр снова является подалгеброй. В частности, если $S \subset A$ — произвольное подмножество, то пересечение всех подалгебр в A, содержащих S, называется ***подалгеброй, порожденной*** S.

Пример 2.1. Пусть $S = \{a\}$ — одноточечное подмножество алгебры A. Тогда подалгебра $B \subset A$, порожденная S, является линейной оболочкой всех степеней a^n, $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Нормированные и унитальные нормированные алгебры

Пусть на алгебре A задана норма $\|\cdot\|$. Эта норма называется ***субмультипликативной***, если для любых $a, b \in A$ выполняется $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$. Алгебра с субмультипликативной нормой называется ***нормированной***. ***Унитальной нормированной алгеброй*** называется нормированная алгебра, содержащая единицу 1 такую, что $\|1\| = 1$.

Замечание 2.2. Всякая подалгебра нормированной алгебры сама является нормированной алгеброй.

Задача 2.3. Убедитесь, что замыкание нормированной подалгебры — также нормированная подалгебра.

Замечание 2.4. Выше мы определили понятие подалгебры A, порожденной подмножество S этой алгебры. В случае, когда A — нормированная алгебра, определено понятие ***замкнутой подалгебры*** $C \subset A$***, порожденной*** S. По определению, C — наименьшая замкнутая подалгебра, содержащая S (напомним, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто, поэтому пересечение замкнутых подалгебр — замкнутая подалгебра). Отметим, что если B — подалгебра, порожденная S, то $C = \bar{B}$, так как замыкание пересечения равно пересечению замыканий.

Замечание 2.5. Из субмультипликативности нормы вытекает, что умножение в нормированной алгебре непрерывно. Это мгновенно следует из неравенства

$$\|ab - a'b'\| = \|ab - ab' + ab' - a'b'\| \leq \big\|a(b-b')\big\| + \big\|(a-a')b'\big\| \leq \|a\|\,\|b-b'\| + \|a-a'\|\,\|b'\|.$$

2.1.3 Банаховы алгебры

Полная нормированная алгебра называется ***банаховой***, а полная унитальная нормированная алгебра — ***унитальной банаховой алгеброй***.

Замечание 2.6. Отметим, что замкнутая подалгебра банаховой алгебры сама является банаховой алгеброй. Таким образом, для каждого подмножества S банаховой алгебры A пересечение всех замкнутых подалгебр в A, содержащих S, что совпадает с замыканием пересечения всех подалгебр в A, содержащих S, — наименьшая банахова подалгебра A, содержащая S, которая называется ***банаховой подалгеброй, порожденной*** S.

Следующее простое утверждение будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Предложение 2.7. *Пусть A — банахова алгебра и $S \subset A$ состоит из попарно коммутирующих элементов. Тогда банахова подалгебра $B \subset A$, порожденная S, — коммутативна.*

Доказательство. Отметим, что семейство $\mathbb{C}[S]$ всевозможных многочленов от всевозможных конечных наборов элементов, содержащихся в S, является подалгеброй в A, порожденной S, так что B — замыкание $\mathbb{C}[S]$. Каждая пара многочленов из $\mathbb{C}[S]$ коммутирует, так как коммутируют все элементы из S.

Пусть a и b — произвольные элементы из B. Так как B — замыкание $\mathbb{C}[S]$, существуют последовательности a_n и b_n элементов из $\mathbb{C}[S]$, сходящиеся в a и b соответственно. Так как умножение в нормированной алгебре непрерывно (замечание 2.5), то $a_n b_n \to ab$ и $b_n a_n \to ba$. Но $a_n b_n = b_n a_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому, в силу единственности предела в нормированном пространстве, имеем $ab = ba$, что и требовалось. □

Пример 2.8. Приведем примеры банаховых алгебр (сравните с примерами из раздела 1.1):

- алгебра $\mathcal{B}(E)$ ограниченных линейных отображений банахова пространства E в себя, наделенное операторной нормой, в частности, алгебра $M_n(\mathbb{C})$ всех комплексных матриц размера $n \times n$ (эти банаховы алгебры унитальны);

- пространство $\mathcal{B}(S)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на множестве S, наделенное sup-нормой (эта банахова алгебра унитальна);
- пространство $C_b(X) \subset \mathcal{B}(X)$ всех непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве X (эта банахова алгебра также унитальна);
- пространство $C(X) \subset \mathcal{B}(X)$ всех непрерывных функций на хаусдорфовом компактном топологическом пространстве X (в этом случае $C(X) = C_b(X)$, так что эта банахова алгебра также унитальна);
- подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$ всех непрерывных функций, заданных на хаусдорфовом локально компактном топологическом пространстве X и ***исчезающих*** (***обращающихся в нуль***) на бесконечности (эта банахова алгебра унитальна, если и только если пространство X компактно);
- пространство $m = \ell_\infty$ всех ограниченных последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots)$ комплексных чисел с sup-нормой (эта банахова алгебра унитальна);
- замкнутое подпространство c пространства ℓ_∞, состоящее из всех сходящихся последовательностей;
- замкнутое подпространство c_0 пространства c, состоящее из всех последовательностей, сходящихся к 0;
- подпространство $\mathcal{B}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, состоящее из всех (ограниченных) измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, заданных на измеримом пространстве Ω (эта банахова алгебра унитальна);
- пространство $L^\infty(\mu)$ классов эквивалентности существенно ограниченных комплекснозначных функций с нормой $\|f\|_\infty$ (здесь — существенный супремум функции $|f|$) на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ с мерой μ (эта банахова алгебра унитальна).

Замечание 2.9. Пространство $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$, вообще говоря, не является банаховой алгеброй, поскольку норма может не являться субмультипликативной. Например, пусть $\Omega = [0, a]$, $0 < a < 1$, μ — мера Лебега, $f = g = 1$, тогда $\|f\|_p = \|g\|_p = \|f\,g\|_p = \sqrt[p]{\int_0^a 1\,d\lambda} = a^{1/p}$, откуда $\|f\,g\|_p = a^{1/p}$, $\|f\|_p\|g\|_p = a^{2/p}$, поэтому $\|f\,g\|_p > \|f\|_p\|g\|_p$.

Следующая конструкция будет особенно полезна в дальнейшем.

Конструкция 2.10. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство банаховых алгебр. Положим

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \Big\{(a_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda : \big\|(a_\lambda)\big\| := \sup_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda\| < \infty\Big\}.$$

Доказательство следующего утверждения тривиально.

Предложение 2.11. *Множество $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ с поточечными операциями*

$$(a_\lambda) + (b_\lambda) = (a_\lambda + b_\lambda), \quad \mu(a_\lambda) = (\mu a_\lambda), \quad (a_\lambda)(b_\lambda) = (a_\lambda b_\lambda)$$

и определенной выше нормой $(a_\lambda) \mapsto \big\|(a_\lambda)\big\|$ является банаховой алгеброй.

Множество $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, вместе с определенными выше поточечными операциями и нормой, называется ***прямой суммой***[1] ***семейства*** $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ***банаховых алгебр***.

Следующий объект является модификацией конструкции 2.10.

Конструкция 2.12. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство банаховых алгебр. ***Ограниченной суммой***[2] этого семейства называется множество $B = \oplus^{c_0}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, состоящее из всех (a_λ) таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество $\{\lambda \in \Lambda : \|a_\lambda\| > \varepsilon\}$ конечно.

Задача 2.13. Покажите, что $\oplus^{c_0}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ является замкнутым идеалом в $\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ (определение идеала мы напомним в разделе 2.1.4).

---

[1] Имеется несколько разных определений прямой суммы. Стандартное состоит из всех элементов декартова произведения, у которых все координаты, за исключением конечного числа, равны нулю. Приводимый здесь вариант прямой суммы некоторые авторы называют ***ℓ_∞-прямая сумма***.

[2] Этот вариант прямой суммы некоторые авторы называют ***c_0-прямая сумма***.

Особую роль в дальнейшем будут играть банаховы алгебры $C(X)$, где X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, а также $C_0(X)$, где X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство (см. выше). Знаменитая теорема Вейерштрасса-Стоуна описывает условия, при которых подалгебра этих алгебр является всюду плотной. Имеется много разновидностей теоремы Вейерштрасса–Стоуна. Мы приведем те, которые понадобятся нам.

Теорема 2.14 (Вейерштрасс–Стоун, компактная версия)**.** *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A \subset C(X)$ — унитальная подалгебра,*

- *замкнутая относительно сопряжения (т.е. для каждого $a \in A$ выполняется $\bar{a} \in A$) и*
- *разделяющая точки (т.е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ существует $a \in A$ такое, что $a(x) \neq a(y)$).*

Тогда A — всюду плотна в $C(X)$.

Теорема 2.15 (Вейерштрасс–Стоун, локально-компактная версия)**.** *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A \subset C_0(X)$ — подалгебра,*

- *замкнутая относительно сопряжения,*
- *разделяющая точки и*
- *нигде не зануляющаяся (т.е. для любого $x \in X$ существует $a \in A$ такое, что $a(x) \neq 0$).*

Тогда A — всюду плотна в $C_0(X)$.

2.1.4 Идеалы, модулярные идеалы

Левым (***правым***) ***идеалом*** I в алгебре A называется векторное подпространство такое, что $AI \subset I$ ($IA \subset I$). Если I одновременно левый и правый идеал, то он называется просто ***идеалом***. Ясно, что $\{0\}$ и A — идеалы. Они называются ***тривиальными***. Идеал, отличный от A, называется ***собственным***. Собственный идеал называется ***максимальным***, если он не содержится ни в одном отличном от него собственном идеале. Аналогично определяются максимальные левые и правые идеалы.

Если I —идеал в алгебре A, то на факторпространстве A/I естественным образом определено умножение: $(a+I)(b+I) = ab+I$, превращающее A/I в алгебру, которая называется ***факторалгеброй***. Интересный вопрос: для каких идеалов $I \subset A$ алгебра A/I является унитальной? Назовем собственный идеал I ***модулярным***, если существует такой элемент $u \in A$, что для всех $a \in A$ выполняется $a - au \in I$ и $a - ua \in I$. При этом u называется ***I-модулярным элементом***.

Предложение 2.16. *Пусть A — алгебра, а $I \subset A$ — ее собственный идеал. Тогда алгебра A/I унитальна, если и только если идеал I — модулярный. Более того, для модулярного I и любого I-модулярного элемента u класс $u + I$ — единица в A/I.*

Доказательство. Пусть I — модулярный идеал. Покажем, что $u + I$ — единица в A/I. Имеем $(a + I)(u + I) = au + I = a + I$, где последнее равенство вытекает из того, что $a - au \in I$. Аналогично, $(u + I)(a + I) = a + I$.

Обратно, пусть A/I — унитальная алгебра, а $u + I$ — единица в A/I. Тогда $(a + I)(u + I) = au + I = a + I$, поэтому $a - au \in I$. Аналогично, $a - ua \in I$. □

Опишем некоторые свойства модулярных идеалов.

Предложение 2.17. *Пусть I — модулярный идеал в алгебре A, а $u \in A$ — соответствующий I-модулярный элемент. Тогда*

(1) *$u \notin I$;*

(2) *каждый собственный идеал $J \subset A$, содержащий I, также модулярен, и в качестве J-модулярного элемента можно выбрать тот же u;*

(3) *идеал I содержится в некотором максимальном в A идеале (который, в силу предыдущего пункта, также является модулярным);*

(4) *если алгебра A унитальна, то все ее собственные идеалы модулярны, так что для каждого собственного идеала $I \subset A$ факторалгебра A/I унитальна и $1 + I$ — ее единица, т.е. $1 \in A$ является I-унитальным элементом для всех таких I;*

(5) *в унитальной алгебре такой, что $0 \neq 1$, множество максимальных идеалов непусто.*

Доказательство. (1) Предположим противное, т.е. $u \in I$, и выберем произвольный $a \in A$. Тогда $ua \in I$ в силу того, что I — идеал, и $a - ua \in I$ в силу модулярности I, поэтому $a \in I$, так что $I = A$, противоречие с тем, что I — собственный идеал (по определению модулярного идеала).

(2) Для каждого $a \in A$ выполняется $a - ua \in I \subset J$ и $a - au \in I \subset J$, так что J, будучи собственным, тоже модулярен, а u — один из J-модулярных элементов.

(3) Обозначим $\mathcal{M}_I$ множество всех идеалов в A, содержащих I и не содержащих u. Отметим, что множество $\mathcal{M}_I$ частично упорядочено отношением включения. Рассмотрим произвольную цепочку в $\mathcal{M}_I$, тогда объединение K ее элементов является собственным идеалом, так как все элементы этой цепочки, а, значит, и K, не содержат u. Таким образом, $K \in \mathcal{M}_I$ и, по лемме Цорна, в $\mathcal{M}_I$ имеется максимальный элемент M. Покажем, что M — максимальный идеал в A. Действительно, если это не так, то существует собственный идеал L, отличный от M и такой, что $L \supset M \supset I$. Но тогда $u \in L$. По пункту (2), идеал L модулярен, а элемент u является L-модулярным. Но, по пункту (1), $u \notin L$, противоречие.

(4) Положим $u = 1$, тогда для каждого идеала $I \subset A$ имеем $a - ua = a - au = 0 \in I$.

(5) Так как $0 \neq 1$ по условию, то $\{0\}$ — собственный идеал. По пункту (4), собственный идеал $\{0\} \subset A$ является модулярным. По пункту (3), идеал $\{0\}$ содержится в некотором идеале, максимальном в A, так что множество максимальных в A идеалов непусто. □

Пусть $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство идеалов в алгебре A, тогда $\cap_{\lambda \in \Lambda}$ — тоже идеал. Таким образом, для каждого $S \subset A$ существует наименьший идеал, содержащий S. Говорят, что такой идеал ***порожден*** S.

Замечание 2.18. Если A — нормированная алгебра, то замыкание идеала — также идеал. Пересечение всех замкнутых идеалов, содержащих S, — наименьший замкнутый идеал, содержащий S. Такой идеал называется ***замкнутым идеалом, порожденным*** S. Если I — идеал, порожденный S, то его замыкание совпадает с замкнутым идеалом, порожденным S.

Теорема 2.19. *Пусть I — замкнутый идеал в нормированной алгебре A. Тогда на алгебре A/I определена факторнорма*

$$\|a + I\| = \inf_{a' \in I} \|a + a'\|,$$

для которой умножение субмультипликативна. Таким образом, A/I — нормированная алгебра.

Доказательство. Для произвольных $a, b \in A$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $a', b' \in I$, для которых выполняется

$$\|a + a'\| < \|a + I\| + \varepsilon \quad \text{и} \quad \|b + b'\| < \|b + I\| + \varepsilon.$$

Но тогда

$$\big(\|a + I\| + \varepsilon\big)\big(\|b + I\| + \varepsilon\big) > \|a + a'\|\,\|b + b'\| \geq \big\|(a + a')(b + b')\big\| = \|ab + ab' + a'b + a'b'\| \geq \|ab + I\|,$$

где второе неравенство — следствие того, что алгебра A нормированная, а последнее вытекает из того, что $ab' + a'b + a'b' \in I$. Так как итоговое неравенство выполняется для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\|a + I\|\,\|b + I\| \geq \|ab + I\| = \big\|(a + I)(b + I)\big\|,$$

так что введенная норма на A/I субмультипликативна и, значит, A/I — нормированная алгебра. □

2.1.5 Гомоморфизмы алгебр

Гомоморфизмом алгебр $\varphi\colon A \to B$ называется всякое линейное отображение, сохраняющее умножение: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Множество всех гомоморфизмов из A в B обозначим $\mathrm{Hom}(A, B)$. Так как каждый гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ является линейным отображением, для него определено ядро $\ker \varphi$. Легко видеть, что ядро $\ker \varphi$ — идеал алгебры A, а образ $\mathrm{im}\,\varphi$ — подалгебра в B. При этом факторалгебра $A/\ker \varphi$ изоморфна $\mathrm{im}\,\varphi$. Гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$, для которого $\varphi(a) = 0$ при всех $a \in A$, назовем ***нулевым***. У такого гомоморфизма φ ядро $\ker \varphi$ совпадает со всей алгеброй A.

Замечание 2.20. Хотя каждый гомоморфизм алгебр — линейное отображение, $\mathrm{Hom}(A,B)$ не является векторным пространством (линейные комбинации не сохраняют произведение).

Гомоморфизм φ унитальных алгебр, сохраняющий 1, т.е. $\varphi(1)=1$, называется ***унитальным***. Отметим, что если A и $B\neq\{0\}$ — унитальные алгебры, то нулевой гомоморфизм $\varphi\colon A\to B$ не является унитальным. Существуют ли ненулевые неунитальные гомоморфизмы унитальных алгебр? Ответ положительный, хотя в некоторых случаях это не так, например, когда $B=\mathbb{C}$ (см. ниже предложение 2.54). Множество всех унитальных гомоморфизмов между унитальными алгебрами обозначим $\mathrm{Hom}_1(A,B)$. Приведем примеры гомоморфизмов алгебр, в частности, продемонстрируем, что ненулевой гомоморфизм унитальных алгебр не обязан быть унитальным.

Пример 2.21. (1) Рассмотрим определенное выше факторотображение $\pi\colon A\to A/I$, где I — идеал, $\pi\colon a\to a+I$. Тогда $\pi\in\mathrm{Hom}(A,A/I)$.

(2) Пусть $A=\mathbb{C}$ и $B=M_2(\mathbb{C})$. Тогда A и B — унитальные алгебры. Построим ненулевой гомоморфизм, не являющийся унитальным. Положим $b=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\varphi\colon 1\mapsto b$ и продолжим это отображение по линейности. Так как $b^2=b$, то φ сохраняет произведение. Тем самым, $\varphi\in\mathrm{Hom}(A,B)$, но $\varphi\notin\mathrm{Hom}_1(A,B)$. Если вместо φ рассмотреть отображение $\psi\colon A\to B$, являющееся продолжением по линейности отображения $1\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, то ψ — унитальный гомоморфизм.

(3) Обозначим $\mathbb{C}[z]$ алгебру комплексных многочленов переменной z. Пусть A — унитальная алгебра, тогда для каждого $a\in A$ и $p(z)\in\mathbb{C}[z]$, $p(z)=\lambda_0+\lambda_1 z+\cdots+\lambda_n z^n$ определен элемент $p(a)=\lambda_0\,1+\lambda_1 a+\cdots+\lambda_n a^n$ алгебры A. Легко видеть, что отображение $\varphi:\mathbb{C}[z]\to A$, $\varphi\colon p\mapsto p(a)$, является унитальным гомоморфизмом, т.е. $\varphi\in\mathrm{Hom}_1\big(\mathbb{C}[z],A\big)$.

2.1.6 Унитализация

Каждую неунитальную алгебру A можно расширить до унитальной. Мы приведем конструкцию, применяемую к произвольной алгебре, даже унитальной. Отметим, что при таком расширении унитальной алгебры ее исходная единица перестает быть единицей.

Итак, пусть A — произвольная алгебра. Положим $\widetilde{A}=A\oplus\mathbb{C}$ (в смысле векторных пространств) и зададим умножение так: $(a,\lambda)(b,\mu)=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu)$. Легко проверяется, то это умножение билинейно, ассоциативно, и $(0,1)$ является единицей в $\widetilde{A}$. Алгебра $\widetilde{A}$ называется ***унитализацией алгебры*** A. Отметим, что отображение $a\mapsto(a,0)$ из A в $\widetilde{A}$ является инъективным гомоморфизмом, который позволяет отождествить A с ее образом в $\widetilde{A}$ (в дальнейшем мы будем писать $A\subset\widetilde{A}$, имея в виду это отождествление). Для удобства, элементы (a,λ) алгебры $\widetilde{A}$ будем записывать в виде $a+\lambda$. Имеется важный гомоморфизм алгебр $\widetilde{A}\to\mathbb{C}$, $a+\lambda\mapsto\lambda$, который называется ***каноническим***.

Замечание 2.22. Если алгебра A унитальна, то в $\widetilde{A}$ образ единицы $1_A\in A$ имеет вид $(1_A,0)$. Этот элемент уже не является единицей в $\widetilde{A}$, так как, например, $(1_A,0)(0,\lambda)=(\lambda 1_A,0)\neq(0,\lambda)$ при $\lambda\neq0$. Однако $(1_A,0)$ является единицей в подалгебре $A\subset\widetilde{A}$, так как $(a,0)(1_A,0)=(1_A,0)(a,0)=(a,0)$.

Замечание 2.23. В дальнейшем мы выясним, что определенная нами унитализация иногда оказывается не вполне пригодной для ряда задач. В связи с этим мы также введем другой прием, моделирующий единицу, а именно, так называемую аппроксимативную единицу.

Приведем ряд простейших свойств унитализации $\widetilde{A}$ алгебры A.

Предложение 2.24. *Пусть $\widetilde{A}$ — унитализации алгебры A. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Подалгебра $A\subset\widetilde{A}$ является модулярным идеалом в $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}/A\approx\mathbb{C}$.*

(2) *Если A — коммутативная алгебра, что $\widetilde{A}$ — тоже.*

(3) *Если A — нормированная алгебра, то $\widetilde{A}$, на которой задана функция $\|a+\lambda\|=\|a\|+|\lambda|$, является нормированной.*

(4) *Подалгебра A замкнута в $\widetilde{A}$.*

(5) *Если A — банахова алгебра, то $\widetilde{A}$ — тоже.*

(6) *Если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм алгебр и алгебра B унитальна, то отображение $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to B$, заданное формулой $a+\lambda \mapsto \varphi(a)+\lambda 1_B$ для всех $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, является единственным унитальным гомоморфизмом, продолжающим φ. Здесь 1_B — единица алгебры B.*

Доказательство. (1) В силу предложения 2.17, достаточно проверить, что A — идеал в $\widetilde{A}$, т.е. $(b,\mu)A \subset A$ для всех $(b,\mu) \in \widetilde{A}$. Но это так в силу $(b,\mu)(a,0) = (ba+\mu a, 0) \in A$. Аналогично, $(a,0)(b,\mu) \in A$.

Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varphi\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, $a+\lambda \mapsto \lambda$. Тогда его ядро состоит из всех (a,λ) таких, что $\varphi(a,\lambda) = \lambda = 0$, т.е. это ядро совпадает с $A \subset \widetilde{A}$. По известной теореме из линейной алгебры, $\widetilde{A}/A \approx \operatorname{im}\varphi = \mathbb{C}$, что и утверждалось.

(2) Это мгновенно видно из формулы умножения.

(3) Свойства нормы проверяются непосредственно. Для проверки субмультипликативности заметим, что

$$\begin{aligned}\|(a+\lambda)(b+\mu)\| = \|ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu\| = \|ab+\lambda b+\mu a\| + |\lambda\mu| \le \|ab\| + \|\lambda b\| + \|\mu a\| + |\lambda\mu| \le \\ \le \|a\|\,\|b\| + |\lambda|\,\|b\| + |\mu|\,\|a\| + |\lambda|\,|\mu| = \big(\|a\|+|\lambda|\big)\big(\|b\|+|\mu|\big) = \|a+\lambda\|\,\|b+\mu\|.\end{aligned}$$

(4) Если $a+\lambda \notin A \subset \widetilde{A}$, то $\lambda \neq 0$ и $\inf_{b\in A}\|a+\lambda-b\| \ge |\lambda| > 0$, поэтому $a+\lambda$ не является точкой прикосновения для A.

(5) Пусть (a_k,λ_k) —фундаментальная последовательность в $\widetilde{A}$, тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $p,q \ge N$ выполняется $\|a_p-a_q\| + |\lambda_p-\lambda_q| < \varepsilon$, откуда $\|a_p-a_q\| < \varepsilon$ и $|\lambda_p-\lambda_q| < \varepsilon$, т.е. последовательности a_k в A и λ_k в $\mathbb{C}$ фундаментальны. Но A и $\mathbb{C}$ — полные пространства, поэтому $a_k \to a \in A$ и $\lambda_k \to \lambda \in \mathbb{C}$, поэтому $(a_k,\lambda_l) \to (a,\lambda)$, что и доказывает полноту $\widetilde{A}$.

(6) Проверяется непосредственно. □

Замечание 2.25. Хотя определенная выше норма на унитализации $\widetilde{A}$ нормированной алгебры A вполне подходит для изучения банаховых алгебр, при переходе к C^*-алгебрам она оказывается непригодной, так как для нее не выполняется условие, определяющее C^*-алгебры. Для C^*-алгебры A мы заменим норму на $\widetilde{A}$ так, чтобы это условие выполнялось. А пока, вплоть до раздела 3.3.1, **будем рассматривать унитализацию $\widetilde{A}$ именно с той нормой, которая была введена в пункте (3) предложения 2.24**.

Важным понятием в рассматриваемой теории является спектр элемента унитальной банаховой алгебры и обобщение этого понятия на неунитальные банаховы алгебры. Приведем ряд важных для дальнейшего результатов.

2.2 Резольвентные множества и спектры в унитальной алгебре

Элемент a унитальной алгебры A называется ***обратимым***, если существует такой $b \in A$, что $ab = ba = 1$. Элемент b однозначно определен, так как если есть еще один такой b', то $b'ab = b'(ab) = b' = (b'a)b = b$. Элемент b обозначается a^{-1}, а множество всех обратимых элементов из A — через $\operatorname{Inv}(A)$.

Предложение 2.26. *Для унитальной алгебры A множество $\operatorname{Inv}(A)$ — группа по умножению, и для любых $a,b \in \operatorname{Inv}(A)$ выполняется $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Доказательство. Если $a,b \in \operatorname{Inv}(A)$, то $abb^{-1}a^{-1} = 1 = b^{-1}a^{-1}ab$, поэтому $ab \in \operatorname{Inv}(A)$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Кроме того, $1\cdot 1 = 1$, откуда $1 \in \operatorname{Inv}(A)$. Очевидно также, что для каждого $a \in \operatorname{Inv}(A)$ имеем $a^{-1} \in \operatorname{Inv}(A)$. □

Для каждого элемента a унитальной алгебры A определим следующие два подмножества поля $\mathbb{C}$:

- ***резольвентное множество*** $\rho_A(a) = \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \in \operatorname{Inv}(A)\}$ и
- ***спектр*** $\sigma_A(a) = \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \operatorname{Inv}(A)\} = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.

Кроме того, если $\lambda \in \rho(a)$, то элемент $(a-\lambda 1)^{-1} \in A$ называется ***резольвентой*** элемента $a \in A$. В дальнейшем, для краткости, вместо $\lambda 1$ будем писать просто λ.

Приведем некоторые примеры вычисления спектров.

- Пусть $A = C(X)$, где X — хаусдорфов компакт. Тогда $f \in A$ обратим, если и только если он всюду отличен от нуля. Поэтому $\sigma(f) = f(X)$.

- Пусть $A = C_b(X)$, где X — произвольное топологическое пространство. Элемент $f \in A$ обратим, если он всюду отличен от нуля и, кроме того, множество $1/f(X)$ ограничено. Последнее имеет место, если и только если 0 не является точкой прикосновения множества $f(X)$. Таким образом, необратимость $\lambda - f$ равносильно тому, что $\lambda \in \overline{f(X)}$, где $\overline{f(X)}$ обозначает замыкание множества $f(X)$. Итак, $\sigma(f) = \overline{f(X)}$.

- Пусть $A = M_n(\mathbb{C})$, тогда спектр $a \in A$ — это множество всех собственных значений матрицы a, т.е. ее спектр в смысле линейной алгебры.

В предложении 2.26 мы показали, что в унитальной алгебре произведение любых двух обратимых элементов — также обратимый элемент. А что можно сказать про другие произведения?

Предложение 2.27. *Пусть a и b — элементы унитальной алгебры A. Тогда*

(1) *если a обратим, b — необратим, то ab и ba необратимы;*

(2) *если a и b необратимы, то ab — может быть обратимым;*

(3) *если a и b коммутируют, то элемент ab обратим, если и только если a и b обратимы;*

(4) *если $a_1, \dots, a_n \in A$ попарно коммутируют, то элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим, если и только если все a_k обратимы;*

(5) *если $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ — ненулевой комплексный многочлен, $p(z) = \lambda_0(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$, $\lambda_0 \neq 0$, — его разложение на множители, то $p(a)$ обратим, если и только если все сомножители $a - \lambda_k 1$ обратимы.*

Доказательство. (1) Предположим противное, и пусть сначала ab обратим. Тогда $ab = c \in \mathrm{Inv}(A)$ и $b = a^{-1}c \in \mathrm{Inv}(A)$ по предложению 2.26, противоречие. Случай обратимости ba разбирается аналогично.

(2) Рассмотрим алгебру линейный отображений пространства ℓ_2 в себя (можно ограничиться непрерывными отображениями), и пусть $a\colon (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$ — сдвиг вправо, а $b\colon (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ — сдвиг влево. Тогда a необратим, так как не сюръективен, ведь его образ не содержит, скажем, $(1, 0, 0, \dots)$. Элемент b также необратим, так как не инъективен, поскольку его ядро содержит ненулевой элемент, скажем тот же $(1, 0, 0, \dots)$. Но ba — тождественное отображение.

(3) Если a и b — обратимы, то обратимость ab следует из предложения 2.26. Докажем обратное утверждение. Пусть теперь элемент ab обратим, т.е. $ab = ba = c \in \mathrm{Inv}(A)$, тогда $ac = aba = ca$ и аналогично $cb = bab = bc$. Далее, умножая равенство $ac = ca$ справа и слева на c^{-1}, получаем $c^{-1}a = ac^{-1}$. Аналогично, $c^{-1}b = bc^{-1}$. Наконец,

$$1 = (ab)c^{-1} = a(bc^{-1}) = c^{-1}ab = c^{-1}ba = (bc^{-1})a,$$

где третье равенство следует из того, что c^{-1} коммутирует с a и b, четвертое — из коммутируемости a и b, а пятое — снова из коммутируемости c^{-1} и b. Таким образом, $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Аналогично, $b \in \mathrm{Inv}(B)$.

(4) Если все a_k обратимы, то обратимость $a_1 \cdots a_n$ вытекает из предложения 2.26. Обратно, пусть элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим. Покажем, что все a_k обратимы. Положим b равным произведению все a_i, кроме a_k. Тогда, в силу пункта (3), элементы b и a_k обратимы, что и требовалось.

(5) Доказательство вытекает из пункта (4) и того, что все $a - \lambda_k 1$ коммутируют между собой и с λ_0. □

Задача 2.28. Выяснить, могут ли некоммутирующие элементы a и b унитальной алгебры A быть необратимыми, то иметь оба произведения ab и ba обратимыми.

Предложение 2.29. *Пусть A — унитальная алгебра. Тогда*

(1) *для $a \in A$ и $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеем $\sigma(\mu a) = \mu\, \sigma(a)$;*

(2) *для $a \in A$ и $\mu \in \mathbb{C}$ имеем $\sigma(a + \mu) = \sigma(a) + \mu$;*

(3) *для $a, b \in A$ элемент $1 - ab$ обратим, если и только если $1 - ba$ обратим;*

(4) *для любых $a, b \in A$ имеем $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$;*

(5) *равенство $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ может не иметь места;*

(6) *если B — унитальная алгебра и $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм, то $\varphi\big(\mathrm{Inv}(A)\big) \subset \mathrm{Inv}(B)$, поэтому для любого $a \in A$ выполняется $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \sigma(a)$.*

Доказательство. (1) Пусть $\lambda \notin \sigma(a)$, тогда $a-\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, откуда $\mu a - \mu\lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A)$ и, значит, $\mu\lambda \notin \sigma(\mu a)$. Аналогично доказывается и обратное утверждение. Таким образом, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, если и только если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mu a)/\mu$, откуда $\sigma(a) = \sigma(\mu a)/\mu$ и, значит, $\sigma(\mu a) = \mu\,\sigma(a)$.

(2) Условие $\lambda \in \sigma(a)$ означает, что $a-\lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$, а это равносильно условию $a+\mu-(\lambda+\mu) \notin \mathrm{Inv}(A)$, которое означает $\lambda+\mu \in \sigma(a+\mu)$. Последнее влечет $\sigma(a)+\mu = \sigma(a+\mu)$.

(3) Пусть $1-ab$ обратим и $c = (1-ab)^{-1}$. Положим $d = 1+bca$, тогда

$$d(1-ba) = (1+bca)(1-ba) = 1-ba+bca-bcaba = 1-ba+bc(1-ab)a = 1-ba+ba = 1,$$
$$(1-ba)d = (1-ba)(1+bca) = 1-ba+bca-babca = 1-ba+b(1-ab)ca = 1-ba+ba = 1,$$

поэтому $1-ba$ обратим и $d = (1-ba)^{-1}$.

(4) Пусть $\lambda \notin \sigma(ab)$, $\lambda \neq 0$, тогда $\lambda - ab \in \mathrm{Inv}(A)$ и, значит, $1-ab/\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$. По предыдущему пункту, $1-ba/\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, откуда $\lambda - ba \in \mathrm{Inv}(A)$, так что $\lambda \notin \sigma(ba)$. Отсюда вытекает, что $\sigma(ab)\setminus\{0\} = \sigma(ba)\setminus\{0\}$.

(5) Рассмотрим пример из доказательства пункта (2) предложения 2.27, т.е. унитальную алгебру линейных операторов на пространстве ℓ_2, пусть, как и выше a — оператор сдвига вправо, а b — сдвига влево. Тогда $ba = 1$, поэтому $\sigma(ba) = \{1\} \not\ni 0$, а элемент ab необратим, так что $\sigma(ab) \ni 0$. Заметим, что, в силу предыдущего пункта, $\sigma(ab) = \{0,1\}$.

(6) Пусть $a \in \mathrm{Inv}(A)$, тогда существует $b \in A$ такой, что $ab = ba = 1$, так что $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(1) = 1 = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$, поэтому $\varphi(a) \in \mathrm{Inv}(B)$. Отсюда вытекает, что если $\lambda \notin \sigma(a)$, т.е. $a-\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, то $\varphi(a-\lambda) = \varphi(a)-\lambda \in \mathrm{Inv}(B)$, откуда $\lambda \notin \sigma\big(\varphi(a)\big)$, откуда и вытекает требуемое. □

Замечание 2.30. В пункте (1) предложения 2.29 условие μ существенно. Хотя в унитальной банаховой алгебре спектр каждого элемента ограничен (см. лемму 2.36), в общем случае спектр элемента унитальной алгебры ограниченным быть не обязан. В качестве примера рассмотрим унитальную алгебру $\mathbb{C}$-линейных отображений алгебры $\mathbb{C}[z]$ комплексных многочленов в себя. Пусть T — умножение на z. Покажем, что $\sigma(T) = \mathbb{C}$. Рассмотрим оператор $T-\lambda E$, где E — тождественное отображение, $\lambda \in \mathbb{C}$. Этот оператор не является обратимым, так как он не сюръективен: для любого ненулевого многочлена $p = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, $c_n \neq 0$, имеем $q = (T-\lambda E)(p) = c_n z^{n+1} + \cdots$, где $\cdots$ означает сумму членов порядка меньше $n+1$. Таким образом, степень q не меньше 1, поэтому q никогда не равен 1. Если же $p = 0$, то $(T-\lambda E)(0) = 0$. Итак, образ отображения $T-\lambda E$ не содержит 1.

Предложение 2.31. *Пусть A — унитальная алгебра. Тогда*

(1) *элемент $a \in A$ обратим, если и только если $0 \notin \sigma(A)$;*

(2) *для $a \in \mathrm{Inv}(A)$ имеем $\sigma(a^{-1}) = 1/\sigma(a)$, иными словами, $\lambda \in \sigma(a)$, если и только если $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$.*

Доказательство. (1) Условие $0 \in \sigma(a)$ означает в точности, что $a - 0 = a$ необратим.

(2) Пусть $\lambda \in \sigma(a)$. По предыдущему пункту, $\lambda \neq 0$. По определению, элемент $a-\lambda$ необратим, но тогда и $a^{-1}(a-\lambda) = 1-\lambda\, a^{-1} = \lambda(\lambda^{-1}-a^{-1})$, а с ним и $a^{-1}-\lambda^{-1}$ необратимы, см. предложение 2.27. Следовательно, $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$. Меняя местами a и a^{-1}, получаем требуемое. □

Теорема 2.32. *Пусть A — унитальная алгебра и $p(z)$ — комплексный многочлен. Тогда для каждого $a \in A$ такого, что $\sigma(a) \neq \emptyset$, выполняется $\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$.*

Доказательство. Если $p = 0$, то $\sigma\big(p(a)\big) = \{0\} = p\big(\{0\}\big)$. Если $p = \lambda_0 = \mathrm{const} \neq 0$, то $\sigma\big(p(a)\big) = \{\lambda_0\} = p\big(\sigma(a)\big)$.

Пусть теперь $p(z) \neq \mathrm{const}$. Тогда для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ существуют $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \neq 0$, $n \geq 1$, такие, что $p(z) - \mu = \lambda_0(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$ и, значит, $p(a)-\mu = \lambda_0(a-\lambda_1 1)\cdots(a-\lambda_n 1)$. По предложению 2.27, $p(a)-\mu$ необратим, т.е. $\mu \in \sigma\big(p(a)\big)$, если и только если необратим хотя бы один из элементов $a-\lambda_k 1$, т.е. когда $\lambda_k \in \sigma(a)$. Заметим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ равно одному из λ_k, если и только если $p(\lambda) = \mu$. Таким образом, $p(a)-\mu$ необратим в точности для тех μ, которые равны $p(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \sigma(a)$. Иными словами, все такие μ образуют множество $p\big(\sigma(a)\big)$, что и требовалось. □

2.2.1 Случай унитальных банаховых алгебр

Теорема 2.33. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$ такой, что $\|a\| < 1$. Тогда $1-a \in \mathrm{Inv}(A)$ и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$, где $a^0 = 1$.*

Доказательство. Так как $\sum_{n=0}^{\infty}\|a^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|a\|^n = \big(1-\|a\|\big)^{-1} < \infty$, то последовательность $s_m = \sum_{n=0}^{m} a^n$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты A, она сходится к некоторому b. Так как, по замечанию 2.5, умножение в A непрерывно, последовательность $(1-a)s_m = s_m(1-a) = 1-a^{m+1}$ сходится одновременно к $(1-a)b = b(1-a)$ и к 1. Таким образом, в силу единственности предела, имеем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, поэтому $1-a \in \mathrm{Inv}(A)$ и $b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ — обратный элемент к $1-a$. □

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.34. *Пусть A — унитальная алгебра и $a \in A$ такой, что $\|a\| < 1$. Тогда $1-a \in \mathrm{Inv}(A)$ и*

$$\Big\|(1-a)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} a^k\Big\| \le \frac{|a\|^{m+1}}{1-\|a\|}.$$

Доказательство. Действительно, $1-a \in \mathrm{Inv}(A)$ вытекает из теоремы 2.33. Далее,

$$\Big\|(1-a)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} a^k\Big\| = \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} a^k - \sum_{k=0}^{m} a^k\Big\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{\infty} a^k\Big\| = \big\|a^{m+1}(1-a)^{-1}\big\| \le \|a\|^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\|a\|^k = \frac{\|a\|^{m+1}}{1-\|a\|},$$

что и требовалось. □

Теорема 2.35. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда*

(1) *множество* $\mathrm{Inv}(A)$ *открыто в* A;

(2) *отображение* $\varphi\colon \mathrm{Inv}(A) \to A$, $\varphi\colon a \mapsto a^{-1}$, *— дифференцируемо*;

(3) *дифференциал отображения φ в точке a вычисляется по формуле $d\varphi|_a(b) = -a^{-1}ba^{-1}$.*

Доказательство. (1) Берем произвольный $a \in \mathrm{Inv}(A)$ и любой $b \in A$ такой, что $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, тогда

$$\|ba^{-1}-1\| = \big\|(b-a)a^{-1}\big\| \le \|b-a\|\,\|a^{-1}\| < \|a^{-1}\|^{-1}\|a^{-1}\| = 1,$$

поэтому, в силу теоремы 2.33, элемент $1-(1-ba^{-1}) = ba^{-1}$ — обратим, откуда, в силу предложения 2.27, имеем $b \in \mathrm{Inv}(A)$. Итак, вместе с каждым $a \in \mathrm{Inv}(A)$ в $\mathrm{Inv}(A)$ лежат все элементы из A, принадлежащие открытому шару с центром в a и радиусом $\|a^{-1}\|^{-1}$, что доказывает открытость $\mathrm{Inv}(A)$.

(2), (3) Докажем теперь дифференцируемость отображения φ в точке $a \in \mathrm{Inv}(A)$ в предположении, что $d\varphi|_a(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ (заметим, что линейное отображение $d\varphi|_a$ непрерывно, так как $\big\|d\varphi|_a\big\| \le \|a^{-1}\|^2$, где последнее неравенство вытекает из субмультипликативности нормы). Для этого мы должны проверить, что

$$\lim_{b\to 0}\frac{\big\|(a+b)^{-1}-a^{-1}-d\varphi|_a(b)\big\|}{\|b\|} = 0 \tag{2.1}$$

Имеем

$$\big\|(a+b)^{-1}-a^{-1}-d\varphi|_a(b)\big\| = \big\|(1+a^{-1}b)^{-1}a^{-1}-a^{-1}+a^{-1}ba^{-1}\big\| \le \big\|(1+a^{-1}b)^{-1}-1+a^{-1}b\big\|\,\|a^{-1}\|.$$

Отметим, что нас интересует последнее выражение при b сколь угодно близких к 0. Положим $c = a^{-1}b$ и будем считать, что $\|-c\| < 1/2$. По лемме 2.34,

$$\big\|(1+c)^{-1}-1+c\big\| \le \frac{\|c\|^2}{1-\|c\|} < 2\|c\|,$$

где последнее равенство вытекает из того, что $\|c\| < 1/2$. Следовательно,

$$\frac{\big\|(a+b)^{-1}-a^{-1}-d\varphi|_a(b)\big\|}{\|b\|} < \frac{2\|a^{-1}\|^3\,\|b\|^2}{\|b\|} = 2\|a^{-1}\|^3\,\|b\|,$$

что мгновенно влечет (2.1). □

Лемма 2.36. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Тогда*

(1) *спектр* $\sigma(a)$ *— замкнутое подмножество* $\mathbb{C}$;

(2) *спектр* $\sigma(a)$ *содержится в замкнутом круге радиуса* $\|a\|$ *с центром в* $0 \in \mathbb{C}$, *тем самым, с учетом предыдущего пункта, спектр* $\sigma(a)$ *— компакт*;

(3) *отображение* $\psi\colon \mathbb{C}\backslash\sigma(a) \to A$, $\psi\colon \lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$, *определенное на резольвентном множестве* $\rho(a) = \mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ *элемента* a, *дифференцируемо.*

Доказательство. (1) Если множество $\sigma(a)$ незамкнуто, то существует точка прикосновения $\lambda \in \mathbb{C}$ множества $\sigma(a)$, не лежащая в $\sigma(a)$. Тогда $a - \lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A)$, а для некоторой последовательности $\lambda_n \to \lambda$ элементы $a - \lambda_n 1$ необратимы. Заметим, что $\big\|(a - \lambda_n 1) - (a - \lambda 1)\big\| = |\lambda - \lambda_n| \, \|1\| = |\lambda - \lambda_n|$, так что $a - \lambda_n 1 \to a - \lambda 1$. Однако последнее противоречит открытости $\mathrm{Inv}(A)$ (теорема 2.35).

(2) Пусть $|\lambda| > \|a\|$, тогда $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, так что, в силу теоремы 2.33, $1-\lambda^{-1}a \in \mathrm{Inv}(A)$, откуда и $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$. Следовательно, все такие λ не содержатся в $\sigma(a)$.

(3) Отображения $\mathbb{C} \to A$, $\lambda \mapsto \lambda 1$ и $A \to A$, $\lambda 1 \mapsto a - \lambda 1$ аффинны и ограничены, поэтому дифференцируемы. Отображение $A \to A$, $b \mapsto b^{-1}$ также дифференцируемо в силу теоремы 2.35. Осталось заметить, что отображение ψ является композицией этих трех дифференцируемых отображений и, поэтому, само дифференцируемо. □

Следующая теорема является фундаментальным результатом в теории банаховых алгебр.

Теорема 2.37 (Гельфанд)**.** *Пусть* A *— унитальная банахова алгебра и* $a \in A$. *Тогда* $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существуют A и $a \in A$, для которых $\sigma(a) = \emptyset$. Рассмотрим отображение $\psi\colon \lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ из $\mathbb{C}$ в A. По лемме 2.36, это отображение дифференцируемо, поэтому для каждого непрерывного линейного функционала $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ композиция $\tau \circ \psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфное отображение. Мы покажем, что образ $\tau \circ \psi$ ограничен и, значит, по теореме Лиувилля, $\tau \circ \psi$ — постоянная функция.

В силу непрерывности отображения ψ, достаточно показать, что ψ ограничено вне какого-нибудь круга. Мы докажем это для круга радиуса $2\|a\|$. Итак, пусть $\|\lambda\| > 2\|a\|$, тогда $\|\lambda^{-1}a\| < 1/2$. По лемме 2.34, получим $\big\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1\big\| \le \|\lambda^{-1}a\|/\big(1 - \|\lambda^{-1}a\|\big) < 1$, откуда

$$\big\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\big\| = \big\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1 + 1\big\| \le \big\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1\big\| + \|1\| < 2.$$

Таким образом,

$$\big\|(a - \lambda)^{-1}\big\| = \big\|(\lambda - a)^{-1}\big\| = \big\|\lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\big\| = |\lambda^{-1}| \, \big\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\big\| < 2/|\lambda| < \|a\|^{-1}.$$

Итак, мы показали, что для любого непрерывного линейного функционала $\tau \in A^*$ функция $f_\tau(\lambda) = \lambda \mapsto \tau\big((a - \lambda)^{-1}\big)$ постоянна, в частности,

$$f_\tau(0) = \tau(a^{-1}) = f_\tau(1) = \tau\big((a - 1)^{-1}\big).$$

Так как, в силу следствия 1.12, для каждой пары точек нормированного пространства существует непрерывный линейный функционал, различающий эти точки, имеем $a^{-1} = (a - 1)^{-1}$, откуда $a = a - 1$, противоречие. □

Теорема 2.38 (Гельфанд–Мазур)**.** *Пусть* A *— унитальная банахова алгебра, в которой каждый ненулевой элемент обратим. Тогда* $A = \mathbb{C}\,1$.

Доказательство. Пусть в A существует элемент a, отличный от $\lambda 1$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $a - \lambda \neq 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, то, по условию, $a - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)$, так что $\sigma(a) = \emptyset$, противоречие с теоремой 2.37. □

2.3 Спектральный радиус в унитальной алгебре

Пусть A — унитальная алгебра и $a \in A$. Величину $r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|$ назовем ***спектральным радиусом*** элемента a.

Следствие 2.39. *Пусть* A *— унитальная банахова алгебра. Тогда для любых* $a, b \in A$ *имеем* $r(ab) = r(ba)$.

Доказательство. Если $r(ab) > 0$, то существует $\lambda \in \sigma(ab)$, $\lambda \neq 0$, и так как, в силу предложения 2.29, $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$, то $r(ba) > 0$ и $r(ba) = r(ab)$. Далее, если неверно, что $r(ab) > 0$, то также неверно, что $r(ba) > 0$, но тогда, по теореме 2.37, $\sigma(ab)$ и $\sigma(ba)$ непусты и, значит, $\sigma(ab) = \sigma(ba) = \{0\}$, откуда $r(ab) = 0 = r(ba)$. □

Следствие 2.40. *Пусть A и B — унитальные алгебры, $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм, и $a \in A$. Тогда $r\big(\varphi(a)\big) \leq r(a)$.*

Доказательство. По предложению 2.29, для каждого $a \in A$ имеем $\sigma\big(\varphi(a)\big) \subset \sigma(a)$, откуда и вытекает требуемое. □

Пример 2.41. Приведем примеры вычисления спектральных радиусов.

- Если $A = C(X)$, где X — хаусдорфов компакт, то для $f \in A$ имеем $r(f) = \sup_{\lambda \in f(X)} |\lambda| = \|f\|_\infty$.
- Если $A = M_n(\mathbb{C})$, то для $a \in A$ величина $r(a)$ равна максимуму модулей собственных чисел матрицы a. В частности, у матрицы $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ все собственные числа равны нулю, поэтому $r(a) = 0$. Тем не менее, $\|a\| = 1$.

Теорема 2.42 (Бёрлинг)**.** *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$, тогда*

$$r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство. Если $a = 0$, то $r(a) = 0$ и равенство имеет место. Предположим теперь, что $a \neq 0$, в частности, $\|a\| \neq 0$. Отметим, что при этом $r(a)$ может равняться нулю.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ по теореме 2.32, откуда $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$ (лемма 2.36). Следовательно, $\|\lambda\| \leq \|a^n\|^{1/n}$ для каждого $\lambda \in \sigma(a)$ и, значит,

$$r(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Для завершения доказательства мы покажем, что $r(a) \geq \limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства этого факта мы выберем произвольное $|\lambda| < 1/r(a)$ (если $r(a) = 0$, то полагаем $1/r(a) = \infty$) и докажем, что $\|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n}/|\lambda|$, где M — положительная вещественная константа, вообще говоря, зависящая от выбора λ, но не зависящая от n. Если это неравенство выполнено, то

$$\limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n \to \infty} M^{1/n}/|\lambda| = 1/|\lambda|.$$

Так как последнее неравенство имеет место для всех λ, удовлетворяющих $|\lambda| < 1/r(a)$, то

$$\limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a).$$

Итак, нам осталось показать, что при каждом λ, $|\lambda| < 1/r(a)$, выполняется $\|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n}/|\lambda|$, т.е. последовательность $\lambda^n a^n$ равномерно ограничена (нормы $\|\lambda^n a^n\|$ ограничены некоторой константой M).

Рассмотрим открытый круг $\varDelta \subset \mathbb{C}$ с центром в нуле и радиусом $1/r(a)$ (при $r(a) = 0$ положим $\varDelta = \mathbb{C}$).

Лемма 2.43. *При каждом $\lambda \in \varDelta$ выполняется $1 - \lambda a \in \mathrm{Inv}(A)$.*

Доказательство. Действительно, если $\lambda = 0$, то $1 - \lambda a = 1 \in \mathrm{Inv}(A)$. Если же $\lambda \neq 0$, то $1 - \lambda a = -\lambda(a - 1/\lambda)$, и так как $|\lambda| < 1/r(a)$, то $|1/\lambda| > r(a)$, поэтому $1/\lambda \notin \sigma(a)$ и, значит, $a - 1/\lambda$, а вместе с ним и $1 - \lambda a$, обратимы. □

Выберем произвольный непрерывный линейный функционал $\tau \in A^*$. Так как отображения $\lambda \mapsto 1 - \lambda a$ и τ дифференцируемы (как непрерывные аффинные отображения), отображение $b \mapsto b^{-1}$ дифференцируемо в каждой точке $b \in \mathrm{Inv}(A)$ (теорема 2.35), и $1 - \lambda a \in \mathrm{Inv}(A)$ при всех $\lambda \in \varDelta$ по лемме 2.43, то функция $f(\lambda) = \tau\big((1 - \lambda a)^{-1}\big)$ дифференцируема (голоморфна) во всем круге $\varDelta$. Значит, f раскладывается в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n$ с центром в 0, причем этот ряд однозначно определен и равномерно сходится к самой функции на каждом замкнутом подкруге.

Выберем теперь λ так, чтобы $|\lambda| < 1/\|a\|$. В силу леммы 2.36, $r(a) \le \|a\|$, откуда $|\lambda| < 1/r(a)$, поэтому выбранное λ лежит в круге Δ. Кроме того, для выбранного λ выполняется $\|\lambda a\| < 1$, поэтому, в силу теоремы 2.33, имеем

$$(1-\lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n,$$

откуда $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tau(a^n)$. Это — тоже разложение голоморфной функции f в ряд в 0, поэтому, в силу единственности такого разложения, имеем $\tau(a^n) = \lambda_n$. Таким образом, при каждом $\lambda \in \Delta$ ряд $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \tau(a^n)$ сходится, поэтому $\lambda^n \tau(a^n) \to 0$ при $n \to \infty$, в частности, при каждом $\tau \in A^*$ и фиксированном $\lambda \in \Delta$ семейство $\tau(\lambda^n a^n)$ ограничено. Будем рассматривать каждое $\lambda^n a^n$ как непрерывное отображение из пространства A^* (оно — банахово в силу задачи 1.9) в нормированное пространство $\mathbb{C}$, т.е. как элемент из A^{**}. Тогда, по теореме 1.14 Банаха–Штейнгауза, семейство норм этих отображений ограничено. По следствию 1.12 (см. также обсуждение после этого следствия), норма каждого функционала $\lambda^n a^n \in A^{**}$ совпадает с его нормой как элемента из A. Итак, мы показали, что при каждом $\lambda \in \Delta$ существует $M > 0$, вообще говоря, зависящее от λ, для которого при всех n выполняется $\|\lambda^n a^n\| \le M$, а это и завершает доказательство. □

Замечание 2.44. Обратите внимание, что теорема 2.42 гарантирует существование предела $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$ для каждого элемента a унитальной банаховой алгебры, что априори совсем не очевидно.

По лемме 2.36, для каждого элемента a унитальной банаховой алгебры A выполняется $r(a) \le \|a\|$. Проиллюстрируем, как работает теорема 2.42, показав, что последнее неравенство может быть строгим.

Пример 2.45. Пусть A — множество всех непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на отрезке $[0,1]$. Тогда A — алгебра относительно поточечных операций. Для каждого $f \in A$ положим $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, тогда $\|\cdot\|$ — субмультипликативная норма на A, относительно которой линейное пространство A полно. Тем самым, мы превратили A в банахову алгебру. Постоянная функция 1 является единицей в A, так что алгебра A унитальна.

Пусть $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — включение, тогда $x \in A$ и $\|x^n\| = 1 + n$. По теореме 2.42, имеем

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (1+n)^{1/n} = 1 < 2 = \|x\|.$$

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — непустое компактное подмножество. Тогда ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus K$ называются ***дырами в*** K. Отметим, что множество $\mathbb{C} \setminus K$ имеет ровно одну неограниченную компоненту связности. Заметим также, что, в силу леммы 2.36, спектр $\sigma(a)$ каждого элемента a унитальной банаховой алгебры замкнут и ограничен, а потому является компактом, так что и для него определено понятие дыр.

Теорема 2.46. *Пусть B — замкнутая подалгебра унитальной банаховой алгебры A, содержащая единицу алгебры A. Тогда*

(1) *множество $\mathrm{Inv}(B)$ открыто и замкнуто в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$;*

(2) *для всех $b \in B$ справедливы включения $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$ и $\partial\sigma_B(b) \subset \partial\sigma_A(b)$;*

(3) *для всех $b \in B$ множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто и замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$;*

(4) *если для $b \in B$ множество $\sigma_A(b)$ не имеет дыр, то $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.*

Доказательство. (1) Так как $1_A \in B$, то $\mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$ и, значит, $\mathrm{Inv}(B) \subset B \cap \mathrm{Inv}(A) \subset B$. По теореме 2.35, множество $\mathrm{Inv}(B)$ открыто в B, поэтому $\mathrm{Inv}(B) = \mathrm{Inv}(B) \cap \big(B \cap \mathrm{Inv}(A)\big)$ — открыто в индуцированной на $B \cap \mathrm{Inv}(A)$ топологии.

Докажем, что $\mathrm{Inv}(B)$ — замкнуто в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$. Так как A — метрическое пространство, достаточно проверить, что предел каждой последовательности из $\mathrm{Inv}(B)$, сходящейся в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$, содержится в $\mathrm{Inv}(B)$. Пусть $b_n \in \mathrm{Inv}(B)$ — последовательность такая, что $b_n \to b \in B \cap \mathrm{Inv}(A)$. Так как $\mathrm{Inv}(B)$ — группа по умножению в силу предложения 2.26, то $b_n^{-1} \in \mathrm{Inv}(B) \subset B$ при всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме 2.35, отображение $a \mapsto a^{-1}$, определенное на $\mathrm{Inv}(A)$, дифференцируемо и, значит, непрерывно, поэтому $b_n^{-1} \to b^{-1}$ в $\mathrm{Inv}(A)$. Так как подалгебры B — замкнута, то $b^{-1} \in B$. Таким образом, $b, b^{-1} \in B$, откуда $b \in \mathrm{Inv}(B)$ и, значит, мы доказали замкнутость $\mathrm{Inv}(B)$ в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$.

(2) Так как $\mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, то для каждых $b \in B$ и $\lambda \notin \sigma_B(b)$ имеем $b - \lambda \in \mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, откуда $\lambda \notin \sigma_A(b)$ и, значит, $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$.

Пусть теперь $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$, тогда существует последовательность $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, сходящаяся к λ. Но это означает, что $b - \lambda_n \in \mathrm{Inv}(B) \subset \mathrm{Inv}(A)$, но $b - \lambda \notin \mathrm{Inv}(B)$. Покажем, что $b - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$.

Предположим противное, т.е. $b-\lambda \in \mathrm{Inv}(A)$. Так как B — подалгебра и $1_A \in B$, то $b-\lambda \in B$. Таким образом, $b-\lambda \in B \cap \mathrm{Inv}(A)$. В силу первого утверждения, $\mathrm{Inv}(B)$ замкнуто в $B \cap \mathrm{Inv}(A)$, поэтому, так как $b-\lambda_n \in \mathrm{Inv}(B)$, имеем $b - \lambda \in \mathrm{Inv}(B)$, противоречие. Итак, мы показали, что $b - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$. Напомним, что $b_n - \lambda_n \in \mathrm{Inv}(A)$, поэтому $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ и $\lambda \in \sigma_A(b)$, так что $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$.

(3) Как мы уже отмечали, спектр элемента — компакт, поэтому $\mathbb{C}\setminus\sigma_B(b)$ и $\mathbb{C}\setminus\sigma_A(b)$ — открытые подмножества $\mathbb{C}$, причем, в силу предыдущего пункта, $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, откуда вытекает открытость.

Покажем теперь, что $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$. Предположим противное, т.е. $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ не замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$. Это означает, что существует $x \in \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, являющаяся в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ точкой прикосновения для $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, но не лежащая в $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$. Но тогда каждая окрестность $U^x \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ точки x, а вместе с ней и каждая окрестность V^x этой точки в $\mathbb{C}$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, так что x — точка прикосновения $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ в $\mathbb{C}$. Так как $x \notin \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$, то $x \in \sigma_B(b)$, откуда $x \in \partial\sigma_B(b)$. Но, по пункту (2), имеем $x \in \partial\sigma_A(b) \subset \sigma_A(b)$, поэтому $x \notin \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, противоречие.

(4) Пусть теперь $\sigma_A(b)$ не имеет дыр. Тогда $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ связно. По пункту (3), множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто и замкнуто в $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$, поэтому $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ и, значит, $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$. □

2.4 Спектры и спектральные радиусы в неунитальной алгебре

С помощью операции унитализации мы определим спектр и спектральный радиус также и для элементов неунитальной алгебры A. А именно, если $\widetilde{A}$, как и выше, обозначает унитализацию алгебры A, то положим $\sigma_A(a) = \sigma_{\widetilde{A}}(a)$ и $r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma_A(a)} |\lambda|$.

Замечание 2.47. Из определения спектра элемента произвольной, не обязательно унитальной алгебры, а также теоремы 2.37, вытекает, что для алгебры A и любого ее элемента $a \in A$ всегда выполняется $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Напомним, что конструкция унитализации применима не только к неунитальным, но и к унитальным алгебрам. При этом, если считать спектр элемента унитальной алгебры A в ее унитализации $\widetilde{A}$, то этот спектр может измениться (это будет заведомо так для обратимого a, см. ниже), так как в унитализации $1_{\widetilde{A}} \neq 1_A$. Одно из таких изменений приведено в следующем утверждении.

Предложение 2.48. *Пусть A — произвольная банахова алгебра (унитальная или нет), $\widetilde{A}$ — унитализация A и $a \in A \subset \widetilde{A}$. Тогда $0 \in \sigma_{\widetilde{A}}(a)$, т.е. в унитализации $\widetilde{A}$ все элементы алгебры $A \subset \widetilde{A}$ необратимы. В частности, спектры всех элементов неунитальной алгебры содержат 0.*

Доказательство. Действительно, $a \in A \subset \widetilde{A}$ не является обратимым элементом в $\widetilde{A}$, так как $(a,0)(b,\mu) = (ab + \mu a, 0) \neq (0,1)$ ни при каком (b,μ), поэтому $0 \in \sigma_{\widetilde{A}}(a)$. □

Приведем еще один результат. Он вытекает из леммы 2.36.

Следствие 2.49. *Пусть A — банахова алгебра и $a \in A$. Тогда $r(a) \leq \|a\|$.*

Доказательство. Действительно, если алгебра A унитальна, то утверждение содержится в лемме 2.36. Если же A не унитальна, $r(a)$ вычисляется для унитализации $\widetilde{A}$. Но и здесь лемма 2.36 дает ту же оценку $r(a) \leq \|a\|$, так как норма a в $\widetilde{A}$ такая же, как и в A. □

2.5 Экспоненты в унитальной банаховой алгебре

Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n/n!\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|/n! < \infty,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ сходится в A (частичные суммы образуют фундаментальную последовательность, которая сходится в силу полноты пространства A). Сумму этого ряда обозначим e^a.

Напомним, что понятие дифференцируемости определено для отображений банаховых пространств. Нас будут интересовать отображения из $\mathbb{R}$ в унитальную банахову алгебру A. В этом случае для отображений $f, g\colon \mathbb{R} \to A$ определено произведение $f(t)g(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Непосредственно проверяется, что если f и g — дифференцируемы, то fg также дифференцируемо, и имеет место правило Лейбница: $(fg)' = f'g + fg'$.

Лемма 2.50. *Пусть $f\colon \mathbb{R} \to A$ — дифференцируемое отображение в произвольную банахову алгебру A, причем $f' = 0$. Тогда f — постоянное отображение.*

Доказательство. Выберем произвольный $\tau \in A^*$ и рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, заданную так: $h(t) = \tau\bigl(f(t)\bigr)$. Тогда h дифференцируема и $h' = 0$, поэтому $\tau\bigl(f(t)\bigr) = \tau\bigl(f(0)\bigr)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как последнее равенство выполняется для всех $\tau \in A^*$, а, по следствию 1.12, для каждой пары точек из A существует τ, различающий эти точки, имеем $f(t) = f(0)$ для всех t, что и требовалось. □

Теорема 2.51. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда*

(1) *для каждого $a \in A$ элемент e^a обратим, причем $(e^a)^{-1} = e^{-a}$;*

(2) *если $a \in A$, функция $f\colon \mathbb{R} \to A$ дифференцируема, $f(0) = 1$, $f'(t) = a\,f(t)$, то $f(t) = e^{ta}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*

(3) *для любых коммутирующих $a, b \in A$ выполняется $e^{a+b} = e^a e^b$.*

Доказательство. (1) Пусть $f(t) = e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n/n!$. Так как этот ряд абсолютно сходится, его можно почленно дифференцировать (доказательство такое же, как и в случае обычных рядов), поэтому $f'(t) = a\,f(t)$.

Пусть теперь $f, g\colon \mathbb{R} \to A$ — дифференцируемые отображения такие, что $f'(t) = a\,f(t)$, $g'(t) = a\,g(t)$, $f(0) = g(0) = 1$, и a коммутирует с $f(t)$ при всех t (например, это так, если $f(t) = e^{ta}$). Рассмотрим отображение $h\colon \mathbb{R} \to A$, заданное так: $h(t) = f(t)g(-t)$, тогда h дифференцируемо и

$$h'(t) = f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = a\,f(t)g(-t) - f(t)\,a\,g(-t) = a\,f(t)g(-t) - a\,f(t)g(-t) = 0.$$

Но тогда, по лемме 2.50, имеем $h(t) = \mathrm{const}$, и так как $h(0) = f(0)g(0) = 1$, то $h(t) = 1$ при всех t. В частности, если положить $f(t) = g(t) = e^{ta}$, то $e^{ta}e^{-ta} = 1$. В частности, $e^a e^{-a} = 1$, так что, заменяя a на $-a$, получаем $e^{-a}e^a = 1$, откуда $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

(2) Пусть теперь $f(t)$ дифференцируема, $f'(t) = a\,f(t)$ и $f(0) = 1$. Положим $g(t) = e^{ta}$, тогда $f(t)g(-t) = f(t)e^{-ta} = 1$, откуда, в силу пункта (1), имеем $f(t) = (e^{-ta})^{-1} = e^{ta}$.

(3) Пусть теперь a и b коммутируют. Положим $f(t) = e^{ta}e^{tb}$. Тогда $f(0) = 1$ и $f'(t) = a\,e^{ta}e^{tb} + e^{ta}\,b\,e^{tb} = (a+b)f(t)$ (последнее равенство вытекает из того, что a и b коммутируют). В силу доказанного выше, имеем $f(t) = e^{t(a+b)}$ для всех t. В частности, $f(1) = e^{a+b} = e^a e^b$. □

2.6 Модулярные идеалы, продолжение

В настоящем разделе мы приведем несколько необходимых для дальнейшего результатов, связанных с модулярными идеалами. Определение этих идеалов была дано в разделе 2.1.4. Там же мы показали, что это в точности такие идеалы, факторы по которым являются унитальными.

Теорема 2.52. *Пусть I — модулярный идеал в банаховой алгебре A. Тогда его замыкание $\bar{I}$ — собственный идеал. В частности, каждый максимальный модулярный идеал замкнут.*

Доказательство. Пусть $u \in A$ такой, что для всех $a \in A$ выполняется $a - ua \in I$ и $a - au \in I$. Покажем, что $u \notin \bar{I}$. Возьмем произвольный $b \in I$. Оказывается, $\|u - b\| \geq 1$, что и завершит доказательство $u \notin \bar{I}$. Покажем, что $\|u - b\| \geq 1$.

Предположим противное, т.е. что существует $b \in I$, для которого $\|u - b\| < 1$. Тогда, в силу теоремы 2.33, элемент $c = 1 - u + b \in \widetilde{A}$ обратим в $\widetilde{A}$ и, так как A — идеал в $\widetilde{A}$ по предложению 2.24, то $cA = A$ (равенство вытекает из обратимости c). С другой стороны, для каждого $a \in A$ имеем $ca = a - ua + ba \in I$, откуда $A = cA \subset I$, так что $I = A$, а это противоречит тому, что I собственный (I должен быть собственным по определению модулярного идеала).

Пусть теперь I — модулярный максимальный идеал. Тогда, как было показано выше, $\bar{I}$ — собственный идеал. Но тогда $I = \bar{I}$ в силу максимальности. □

Лемма 2.53. *Пусть A — коммутативная алгебра, а $I \subset A$ — максимальный модулярный идеал. Тогда A/I — поле.*

Доказательство. Заметим, что алгебра A/I коммутативна и, в соответствии с разделом 2.1.4, унитальна. Осталось проверить, что каждый ненулевой элемент из A/I обратим.

Покажем сначала, что в A/I нет нетривиальных идеалов, т.е. отличных от $\{0\}$ и A/I. Предположим противное, и пусть J — такой идеал, а $\pi\colon A \to A/I$ — каноническая проекция. Тогда $\pi^{-1}(J)$ — идеал в A, содержащий I и отличный от I. Так как I — максимальный идеал, $\pi^{-1}(J) = A$, поэтому $J = A/I$, противоречие.

Используем этот факт для того, чтобы показать обратимость произвольного ненулевого $a \in A/I$. Заметим, что $a(A/I)$ — ненулевой идеал в A/I, так как A/I унитальна. По доказанному выше, $a(A/I) = A/I$, в частности, существует $b \in A/I$ такой, что $ab = 1 \in A/I$, поэтому a — обратим. $\square$

2.7 Характеры коммутативной алгебры, ее спектр

Для коммутативной алгебры мы определим характеры, которые играют важную роль в теореме Гельфанда, позволяющей отождествить коммутативную банахову алгебру с алгеброй непрерывных функций на некотором топологическом пространстве.

Пусть A — коммутативная алгебра. Каждый ненулевой гомоморфизм алгебр $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ называется ***характером*** этой алгебры. Множество всех характеров алгебры A обозначается $\Omega(A)$ или $\operatorname{Spec} A$. Напомним, что для произвольных алгебр B и C через $\operatorname{Hom}(B, C)$ мы обозначали множество всех гомоморфизмов $\varphi\colon B \to C$. Тем самым, $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{C}) = \Omega(A) \cup \{0\}$, где 0 — нулевой гомоморфизм.

Приведем некоторые простейшие свойства характеров на унитальной алгебре. Отметим, что, вообще говоря, в определении характера $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ на унитальной алгебре A не требуется выполнение условия $\tau(1) = 1$. Однако, как мы покажем, это автоматически имеет место.

Предложение 2.54. *Пусть A — унитальная коммутативная алгебра и $\tau \in \Omega(A)$ — характер. Тогда*

(1) $\tau(1) = 1$*, т.е. каждый характер унитальной алгебры является унитальным гомоморфизмом*;

(2) *для каждого обратимого элемента $a \in A$ имеем $\tau(a) \neq 0$ и, более того, $\tau(a^{-1}) = \tau(a)^{-1}$*;

(3) *для произвольного $a \in A$ выполняется $\tau(a) \in \sigma(a)$.*

Доказательство. (1) Покажем сначала, что $\tau(1) \neq 0$. Действительно, если это не так, то $\tau(1\,a) = \tau(1)\tau(a) = 0$ для любого $a \in A$, поэтому τ — нулевой гомоморфизм, противоречие. Далее, $\tau(1) = \tau(1 \cdot 1) = \tau(1)^2$, и так как $\tau(1) \neq 0$, то $\tau(1) = 1$.

(2) Из предыдущего пункта вытекает, что если $a \in \operatorname{Inv}(A)$, то $\tau(a\,a^{-1}) = \tau(a)\tau(a^{-1}) = \tau(1) = 1$, откуда мгновенно следует требуемое.

(3) Мы должны показать, что элемент $a - \tau(a)\,1$ необратим. Заметим, что $\tau\bigl(a - \tau(a)\,1\bigr) = \tau(a) - \tau(a)\tau(1) = 0$, поэтому, в силу предыдущего пункта, $a - \tau(a)\,1$ — необратимый элемент. $\square$

Теорема 2.55. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Тогда*

(1) *для каждого $\tau \in \Omega(A)$ выполняется $\|\tau\| = 1$, в частности, линейный функционал τ непрерывен, так что $\Omega(A) \subset A^*$;*

(2) *множество $\Omega(A)$ непусто и отображение $\varkappa\colon \tau \mapsto \ker(\tau)$ — биекция между $\Omega(A)$ и множеством всех максимальных идеалов в A.*

Доказательство. (1) Из предложения 2.54 вытекает, что для каждого $a \in A$ имеем $\tau(a) \in \sigma(a)$, следовательно, $\bigl|\tau(a)\bigr| \le r(a) \le \|a\|$, где последнее неравенство вытекает из леммы 2.36. Таким образом, $\|\tau\| \le 1$. С другой стороны, $\tau(1) = 1$ и $\|1\| = 1$, поэтому $\|\tau\| = 1$.

(2) Покажем сначала, что $I := \ker(\tau)$ — максимальный идеал в A, и отображение $\varkappa$ биективно. Так как τ — гомоморфизм алгебр, то I — идеал. В силу того, что $\tau \neq 0$, идеал I собственный. Так как, по пункту (1), отображение τ непрерывно, то I — замкнутое подмножество в A. Итак, I — замкнутый идеал. Наконец, для каждого $a \in A$ выполняется $\tau\bigl(a - \tau(a)\,1\bigr) = 0$, так что $a - \tau(a)\,1 \in I$. Если идеал I не максимальный, то существует отличный от I собственный идеал $M \supset I$. Выберем произвольный $a \in M \setminus I$. Тогда, по определению I, имеем $\tau(a) \neq 0$. В силу сказанного выше, $a - \tau(a)\,1 \in I \subset M$, поэтому $\tau(a)\,1 \in M$, и раз $\tau(a) \neq 0$, то и $1 \in M$. Но тогда $M = A$, противоречие. Итак, мы показали, что I — максимальный идеал.

Покажем, что отображение $\varkappa$ инъективно. Предположим, что для $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$ выполняется $\ker(\tau_1) = \ker(\tau_2)$. Так как для каждого $a \in A$ имеем $a - \tau_1(a)\,1 \in \ker(\tau_1)$, и так как $\ker(\tau_1) = \ker(\tau_2)$, то и $\tau_2(a - \tau_1(a)\,1) = 0$, откуда $\tau_2(a) = \tau_1(a)$ при всех $a \in A$, поэтому $\tau_1 = \tau_2$.

Докажем сюръективность отображения $\varkappa$, т.е. что каждый максимальный идеал в A является ядром некоторого характера.

Лемма 2.56. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра и $I \subset A$ — максимальный идеал. Тогда $A = \mathbb{C} \oplus I$ (здесь равенство не учитывает норму).*

Доказательство. Так как алгебра A унитальна, идеал I модулярный и, по теореме 2.52, идеал I замкнут (как максимальный модулярный идеал). По лемме 2.53, факторалгебра A/I является полем, т.е. унитальной алгеброй, в которой все ненулевые элементы обратимы. По теореме 2.38, имеем $A/I = \mathbb{C}(1 + I)$, поэтому для каждого $a \in A$ существует $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого $a + I = \lambda 1 + \lambda I = \lambda 1 + I$. Следовательно, существует $b \in I$ такое, что $a = a + 0 = \lambda 1 + b$. Это представление однозначно, так как если $\lambda 1 + b = \lambda' 1 + b'$, то $b - b' = (\lambda' - \lambda)1$, поэтому если $\lambda \neq \lambda'$, то $1 \in I$, что невозможно, так как I — собственный. Таким образом, $\lambda = \lambda'$ и, значит, $b = b'$. Согласованность операций в A и $\mathbb{C} \oplus I$ проверяется непосредственно. □

Воспользуемся леммой 2.56 и определим $\tau\colon A \to \mathbb{C}$, положив $\tau(\lambda 1 + a) = \lambda$. Тогда τ — характер, причем $\tau(\lambda 1 + a) = 0$, если и только если $\lambda = 0$, т.е. $\lambda 1 + a \in I$. Иными словами, $\ker \tau = I$, что и доказывает сюръективность $\varkappa$.

Для завершения доказательства теоремы напомним, что, по предложению 2.17, множество максимальных идеалов унитальной алгебры непусто, поэтому и $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

2.7.1 Характеры коммутативной алгебры и ее унитализации

Выясним, как связаны множества всех характеров коммутативной алгебры A и ее унитализации $\widetilde{A}$. Пусть $F\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ — отображение, ставящее в соответствие каждому характеру $\tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})$ гомоморфизм $\tilde{\tau}|_A \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$, полученный ограничением $\tilde{\tau}$ на A.

Лемма 2.57. *Отображение F инъективно.*

Доказательство. Мы должны показать, что если $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$, то и $\tilde{\tau}_1|_A \neq \tilde{\tau}_2|_A$. Так как $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$, существует $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$, для которого, $\tilde{\tau}_1(a, \lambda) \neq \tilde{\tau}_2(a, \lambda)$. По предложению 2.54, каждый характер является унитальным гомоморфизмом, поэтому

$$\tilde{\tau}_1(a, \lambda) = \tilde{\tau}_1\big((a, 0) + \lambda(0, 1)\big) = \tilde{\tau}_1|_A(a) + \lambda \neq \tilde{\tau}_2(a, \lambda) = \tilde{\tau}_2|_A(a) + \lambda,$$

откуда $\tilde{\tau}_1|_A(a) \neq \tilde{\tau}_2|_A(a)$, так что $\tilde{\tau}_1|_A \neq \tilde{\tau}_2|_A$ и, значит, отображение F — инъективно. □

Лемма 2.58. *Отображение F сюръективно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ и продолжим его до гомоморфизма $\tilde{\tau}\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, положив $\tilde{\tau}(a, \lambda) = \varphi(a) + \lambda$. Тогда $\tilde{\tau}$ — ненулевой гомоморфизм, так как $\tilde{\tau}(1) = 1$, поэтому $\tau \in \Omega(\widetilde{A})$ и $\tilde{\tau}|_A = \varphi$, что и требовалось. □

Следствие 2.59. *Отображение F — биективно.*

Заметим, что в нулевой гомоморфизм $0 \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ переходит ровно один гомоморфизм, а именно, канонический гомоморфизм $\tilde{\tau}_\infty\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$, $\tilde{\tau}_\infty(a, \lambda) = \lambda$. Итак, мы доказали следующий результат.

Следствие 2.60. *Если $F\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C})$ — построенная выше биекция, то*

$$\Omega(A) = F\big(\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}\big) = F\big(\Omega(\widetilde{A})\big) \setminus \{0\}.$$

2.7.2 Характеры, спектры, топология пространства характеров

Продолжим изучать характеры коммутативной банаховой алгебры.

Теорема 2.61. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Тогда*

(1) *если A унитальна, то для каждого $a \in A$ имеем $\sigma(a) = \big\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\big\}$;*

(2) *если A не унитальна, то для каждого $a \in A$ имеем $\sigma(a) = \big\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\big\} \cup \{0\}$.*

Доказательство. (1) Выберем произвольное $a \in A$ и любое $\lambda \in \sigma(a)$, тогда $a - \lambda$ — необратимый элемент. Положим $I = (a-\lambda)A$. Покажем, что I — собственный идеал. Действительно, если $I = A$, то $1 \in I$, так что существует $b \in I$, для которого $(a-\lambda)b = 1$ и, значит, $a - \lambda$ — обратимый элемент, противоречие.

По предложению 2.17, идеал I модулярный и, по тому же предложению, I содержится в некотором максимальном идеале M. По теореме 2.55, $M = \ker\tau$ для некоторого характера $\tau \in \Omega(A)$. Так как $a - \lambda \in I \subset M$, то $0 = \tau(a-\lambda) = \tau(a) - \lambda$, поэтому $\tau(a) = \lambda$. Так как мы выбрали произвольное $\lambda \in \sigma(a)$, заключаем, что $\sigma(a) \subset \big\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\big\}$. Обратное включение содержится в предложении 2.54.

(2) Пусть $\widetilde{A}$ — унитализация A. Тогда, по следствию 2.60, имеем $\Omega(A) = F\big(\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}\big)$, где $\tilde{\tau}_\infty \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — канонический гомоморфизм, а $F\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ — построенная выше биекция, см. следствие 2.60. По определению спектра элемента a неунитальной алгебры A, он равен спектру этого элемента в унитализации $\widetilde{A}$. Таким образом, по пункту (1), имеем

$$\sigma(a) = \big\{\tilde{\tau}(a) : \tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})\big\} = \big\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\big\} \cup \big\{\tilde{\tau}_\infty(a)\big\} = \big\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\big\} \cup \big\{0\big\},$$

что и требовалось. □

Следствие 2.62. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, тогда $\Omega(A) \subset A^*$, причем $\Omega(A)$ лежит в замкнутом единичном шаре из A^*.*

Доказательство. Из теоремы 2.61 и следствия 2.49 вытекает, что для каждого $a \in A$, $\|a\| \le 1$, и $\tau \in \Omega(A)$ выполняется $\big|\tau(a)\big| \le r(a) \le \|a\| \le 1$. Следовательно, τ — ограниченный линейный функционал, т.е. $\tau \in A^*$, и τ лежит в замкнутом единичном шаре относительно нормы на A^*. □

Превратим $\Omega(A)$ в топологическое пространство, ограничив на него $*$-слабую топологию из A^*. Полученное топологическое пространство называется ***пространством характеров*** или ***спектром*** алгебры A.

Теорема 2.63. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Тогда, по отношению к $*$-слабой топологии,*

(1) *пространство $\Omega(A) \cup \{0\}$ хаусдорфово и компактно*;

(2) *пространство $\Omega(A)$ хаусдорфово и локально компактно*;

(3) *если алгебра A унитальна, то $\Omega(A)$ — хаусдорфов компакт.*

Доказательство. (1) То, что $\Omega(A) \cup \{0\}$ — хаусдорфово в $*$-слабой топологии, вытекает из теоремы 1.31.

Покажем, что $\Omega(A) \cup \{0\}$ замкнуто в $*$-слабой топологии. Пусть $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ — непрерывный линейный функционал, не лежащий в $\Omega(A) \cup \{0\}$. Мы должны показать, что существует окрестность функционала φ в $*$-слабой топологии, не пересекающая $\Omega(A) \cup \{0\}$. Так как $\varphi \notin \Omega(A)$ и $\varphi \ne 0$, то существуют такие $a, b \in A$, что $\varphi(ab) \ne \varphi(a)\varphi(b)$. Так как умножение в поле $\mathbb{C}$ непрерывно, существуют такие окрестности $U^{\varphi(a)}$, $U^{\varphi(b)}$ и $U^{\varphi(ab)}$, что $(U^{\varphi(a)}U^{\varphi(b)}) \cap U^{\varphi(ab)} = \emptyset$. Напомним, что для $a \in A$ мы определили непрерывный линейный функционал $J_a\colon A^* \to \mathbb{C}$, $J_a(f) = f(a)$, а предбаза $*$-слабой топологии состоит из прообразов $J_a^{-1}(U)$ всевозможных открытых множеств $U \subset \mathbb{C}$ по всем $a \in A$. В частности, множества $V_a := J_a^{-1}(U^{\varphi(a)})$, $V_b := J_b^{-1}(U^{\varphi(b)})$, $V_{ab} := J_{ab}^{-1}(U^{\varphi(ab)})$ и их пересечение $W = V_a \cap V_b \cap V_{ab}$ являются открытыми в $*$-слабой топологии. В явном виде,

$$W = \big\{f \in A^* : f(a) \in U^{\varphi(a)},\ f(b) \in U^{\varphi(b)},\ f(ab) \in U^{\varphi(ab)}\big\}.$$

Ясно, что $\varphi \in W$, поэтому W — окрестность φ в $*$-слабой топологии. В силу выбора окрестностей $U^{\varphi(a)}$ и $U^{\varphi(b)}$, для любого $f \in W$ имеем $f(a)f(b) \ne f(ab)$, поэтому f не является характером и не равен 0, т.е. $W \cap \big(\Omega(A) \cup \{0\}\big) = \emptyset$. Тем самым, мы доказали замкнутость $\Omega(A) \cup \{0\}$ в $*$-слабой топологии.

По следствию 2.62, $\Omega(A)$ содержится в замкнутом единичном шаре пространства A^*. Также там содержится 0. По теореме 1.33, этот шар компактен в $*$-слабой топологии. В силу замкнутости $\Omega(A) \cup \{0\}$ в этой топологии, $\Omega(A) \cup \{0\}$ — тоже компакт в $*$-слабой топологии.

(2) Напомним, что топологическое пространство X называется ***локально компактным***, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует такая окрестность V точки x, что замыкание $\overline{V}$ — компакт. Иными словами, каждая точка имеет базу окрестностей, замыкания которых компактны.

Лемма 2.64. *Пусть X — хаусдорфово. Тогда*

(a) *пространство X локально компактно, если и только если у любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что ее замыкание $\overline{U}$ — компактно*;

(*b*) *если пространство X компактно, то для каждой точки $p \in X$ пространство $Y := X \setminus \{p\}$ — локально компактно.*

Доказательство. (*a*) Достаточно проверить, что из существования у каждой точки окрестности с компактным замыканием вытекает существование базы окрестностей, замыкания которых компактны. Пусть $x \in X$ — произвольная точка и U — ее окрестность, для которой $\overline{U}$ — компакт. Выберем произвольную окрестность V точки x и положим $W = V \cap U$, тогда $\overline{W} \subset \overline{U}$ — замкнутое подмножество, и так $\overline{U}$ компактно и хаусдорфово, то $\overline{W}$ — компакт.

(*b*) В силу пункта (*a*), достаточно показать, что у каждой точки $y \in Y$ имеется окрестность $U \subset Y$ с компактным замыканием $\overline{U} \subset Y$. Так как X — хаусдорфово, в X существуют непересекающиеся окрестности V и W точек p и y соответственно. Множество $X \setminus V$ замкнуто как в X, так и Y, поэтому, в силу хаусдорфовости X, это $X \setminus V$ — компакт. С другой стороны, $W \subset X \setminus V \subset Y$, поэтому замыкание $\overline{W}$ в Y, будучи замкнутым подмножеством хаусдорфова компакта $X \setminus V$, также компактно в Y. □

Напомним, что $\Omega(A)$ не содержит нулевой гомоморфизм, поэтому $\Omega(A) = (\Omega(A) \cup \{0\}) \setminus \{0\}$. По пункту (1), пространство $\Omega(A) \cup \{0\}$ компактно, поэтому, в силу леммы 2.64, пространство $\Omega(A)$ — локально компактно.

(3) Пусть теперь алгебра A унитальна. Покажем, что 0 не лежит в замыкании $\Omega(A)$ в $*$-слабой топологии. Действительно, пусть $V_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$, тогда множество $U_0 = J_1^{-1}(V_0)$ открыто в $*$-слабой топологии и содержит нулевой функционал 0, т.е. U_0 — окрестность 0. С другой стороны, по предложению 2.54, для каждого $\tau \in \Omega(A)$ выполняется $\tau(1) = 1$, так что U_0 не пересекает $\Omega(A)$. Таким образом, в этом случае $\Omega(A)$ само является замкнутым подмножеством в $*$-слабой топологии и, значит, компактно. □

Приведем пример описания пространства характеров конкретной банаховой алгебры.

Теорема 2.65. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $C(X)$ — банахова алгебра непрерывных функций на X, наделенная* sup*-нормой. Тогда пространство характеров $\Omega\big(C(X)\big)$ гомеоморфно X.*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ обозначим δ_x отображение $\delta_x\colon C(X) \to \mathbb{C}$, $\delta_x(f) = f(x)$. Тогда f — характер алгебры $C(X)$, т.е. $f \in \Omega\big(C(X)\big)$. Таким образом, мы определили отображение $\delta\colon X \to \Omega\big(C(X)\big)$, $\delta(x) = \delta_x$. Покажем, что отображение δ — гомеоморфизм.

Докажем, что δ инъективно. Для этого воспользуемся леммой Урысона. Напомним, что топологическое пространство Y называется ***нормальным***, если любые два непустых замкнутых непересекающихся подмножества $A, B \subset Y$ отделимы, т.е. существуют открытые множества $U \supset A$ и $V \supset B$ такие, что $U \cap V = \emptyset$.

Задача 2.66. Покажите, что каждое компактное хаусдорфово пространство нормально.

Таким образом, рассматриваемое нами пространство X является нормальным.

Лемма 2.67 (Урысон). *Топологическое пространство Y нормально, если и только если для любых двух непустых непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset Y$ существует непрерывная функция $f\colon Y \to [0,1]$ такая, что $f|_A = 0$ и $f|_B = 1$.*

В случае пространства X в качестве A и B возьмем произвольные две разных точки x и x', тогда, по лемме Урысона, существует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(x) \neq f(x')$, откуда $\delta_x(f) \neq \delta_{x'}(f)$, следовательно, $\delta_x \neq \delta_{x'}$ и, значит, отображение δ инъективно.

Докажем теперь сюръективность отображения δ. Для каждой точки $x \in X$ положим $I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, тогда I_x — идеал в $C(X)$.

Лемма 2.68. *Идеал $I \subset C(X)$ максимальный, если и только если $I = I_x$ для некоторого $x \in X$.*

Доказательство. Покажем сначала, что каждый идеал I_x — максимальный. Предположим противное, т.е. для некоторого I_x имеется отличный от I_x собственный идеал $I \supset I_x$. Тогда $I \setminus I_x \neq \emptyset$ и, значит, существует $f \in I \setminus I_x$. По определению I_x, имеем $f(x) \neq 0$. Но тогда $g := f - f(x) \in I_x$, откуда $h = f - g \in I$. Но функция h постоянная и не равная нулю, поэтому она обратима в $C(X)$ и, значит, $I = C(X)$, противоречие.

Докажем теперь, что каждый максимальный идеал в $C(X)$ совпадает с некоторым I_x. Предположим противное, и пусть I — максимальный идеал в $C(X)$, отличный от всех I_x. Это означает, что для каждого $x \in X$ идеал I содержит функцию f_x, для которой $f_x(x) \neq 0$ (если это не так, то для некоторого x имеем $I_x \subset I$ и, значит, I_x — не максимальный идеал). Так как каждая функция f_x непрерывна, существует окрестность

U^x точки x, в которой f_x отлична от нуля. Семейство $\{U^x\}_{x\in X}$ является открытым покрытием X, поэтому, в силу компактности X, это семейство содержит конечное подпокрытие $\{U^{x_k}\}_{k=1}^n$. Заметим, что вместе с каждой $f_{x_k}\in C(X)$ сопряженная с ней функция $\bar f_{x_k}$ также лежит в $C(X)$, и так как I — идеал, что $|f_{x_k}|^2=\bar f_{x_k}f_{x_k}\in I$, откуда $f:=\sum_{k=1}^n f_{x_k}\bar f_{x_k}=\sum_{k=1}^n|f_{x_k}|^2\in I$. Но f всюду отлична от нуля, поэтому f обратима в $C(X)$ и, значит, $I=C(X)$, противоречие. □

Вернемся к доказательству сюръективности δ. Выберем произвольный $\tau\in\Omega\bigl(C(X)\bigr)$. По теореме 2.55, $\ker\tau$ — максимальный идеал в $C(X)$. По лемме 2.68, существует $x\in X$ такой, что $\ker\tau=I_x$, т.е. $\tau(f)=0$ для всех функций из $\ker\tau$. Но δ_x также зануляет все эти функции. По предложению 2.54, $\tau(\lambda)=\lambda=\delta_x(\lambda)$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}$. Заметим также, что для любой $g\in C(X)$ функция $f:=g-g(x)$ лежит в I_x, так что для $\lambda:=g(x)$ имеем $g=f+\lambda$ и, значит,

$$\tau(g)=\tau(f+\lambda)=\tau(f)+\lambda=\delta_x(f)+\lambda=\delta_x(f+\lambda)=\delta_x(g),$$

откуда $\tau=\delta_x$.

Итак, мы доказали, что δ — биективное отображение. Покажем, что отображение δ непрерывно. Для этого рассмотрим произвольную направленность $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в X, сходящуюся к некоторой точке $x\in X$. Тогда $\lim_{\lambda\in\Lambda}f(x_\lambda)=f(x)$ для всех $f\in C(X)$, так как все эти функции непрерывны. Так как $\delta_{x_\lambda}(f)=f(x_\lambda)$ и $\delta_x(f)=f(x)$, то по теореме 1.31, пункт (2), направленность δ_{x_λ} является $*$-слабо сходящейся к δ_x. Напомним, что пространство характеров мы наделяем $*$-слабой топологией. Поэтому, в силу теоремы 1.20, отображение δ непрерывно.

Таким образом, мы показали, что отображение δ непрерывно и биективно отображает компактное пространство X на пространство $\Omega\bigl(C(X)\bigr)$, являющееся хаусдорфовым в силу теоремы 2.63. По известной теореме из общей топологии, отображение δ — гомеоморфизм, что и требовалось. □

Замечание 2.69. В доказательстве теоремы 2.63 утверждается, что 0 не лежит в замыкании пространства характеров унитальной алгебры. Возьмем в качестве унитальной алгебры унитализацию $\widetilde{A}$ неунитальной алгебры A. Тогда и для $\widetilde{A}$ точка 0 не содержится в замыкании $\Omega(\widetilde{A})$. С другой стороны, пространство характеров из $\Omega(A)$ получается ограничением всех характеров из $\Omega(\widetilde{A})\setminus\{\tilde\tau_\infty\}$ на A, если отождествлять A с соответствующим идеалом в $\widetilde{A}$. При этом ограничение $\tilde\tau_\infty$ на A дает нулевой гомоморфизм, и при выбрасывании этого нуля мы, как декларируется, получаем локально компактное пространство, т.е. этот 0 не предполагается изолированной точкой в образе всего $\Omega(\widetilde{A})$, т.е. в $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{C})$. Тем самым, возникает видимость противоречия. Ниже мы покажем, как связаны друг с другом $\Omega(\widetilde{A})$ и $\Omega(A)$, откуда будет видно, почему на самом деле никакого противоречия нет.

2.7.3 Отождествления

Напомним, что алгебра A, рассматриваемая как подалгебра в ее унитализации $\widetilde{A}$, является идеалом, в частности, линейным подпространством. Более того, по предложению 2.24, если A — банахова алгебра, то $\widetilde{A}$ — тоже банахова, и A является замкнутым подпространством в $\widetilde{A}$.

Пусть A — банахова алгебра, тогда A^* и $\widetilde{A}^*$ — банаховы пространства. Каждому непрерывному линейному функционалу $\varphi\in A^*$ поставим в соответствие линейный функционал $\varphi'\colon\widetilde{A}\to\mathbb{C}$, однозначно определяемый условием $\varphi'(a,\lambda)=\varphi(a)$. Так как

$$\|\varphi'\|=\sup_{\|a\|+|\lambda|=1}\bigl|\varphi'(a,\lambda)\bigr|=\sup_{\|a\|+|\lambda|=1}\bigl|\varphi(a)\bigr|=\sup_{\|a\|=1}\bigl|\varphi(a)\bigr|=\|\varphi\|,$$

то φ' — непрерывный, т.е. $\varphi'\in\widetilde{A}^*$, поэтому определено отображение $F^*\colon A^*\to\widetilde{A}^*$, $F^*\varphi:\mapsto\varphi'$, являющееся изометричным вложением.

Далее, вложение F^* линейно, так как для любых $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$ и $\varphi_1,\varphi_2\in A^*$ выполняется

$$F^*(\mu_1\varphi_1+\mu_2\varphi_2)(a,\lambda)=(\mu_1\varphi_1+\mu_2\varphi_2)(a)=\mu_1\varphi_1(a)+\mu_2\varphi_2(a)=\mu_1F^*(\varphi_1)(a,\lambda)+\mu_2F^*(\varphi_2)(a,\lambda).$$

Тем самым, мы изометрично и линейно вкладываем A^* в виде линейного подпространства в $\widetilde{A}^*$. Подпространство $F^*(A^*)$ замкнуто, так как для любой последовательности $F^*(\varphi_k)$, сходящейся в $\widetilde{A}^*$ к некоторому элементу $\psi\in\widetilde{A}^*$, имеем $F^*(\varphi_k)(a,\lambda)=\bigl(\varphi_k(a),0\bigr)$, поэтому $\psi(a,\lambda)$ также имеет вид $(b,0)$, так что ψ является образом функционала $\varphi\in A^*$, $\varphi(a)=b$ для всех таких a и b (линейность и непрерывность φ вытекает из этих же свойств функционала ψ).

Пусть теперь алгебра A коммутативна. Будем отождествлять A^* с подпространством $F^*(A^*) \subset \widetilde{A}^*$, что задается отождествлением каждого $\varphi \in A^*$ с соответствующим $\varphi' \in \widetilde{A}^*$. По следствию 2.62, $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}) \subset A^*$, таким образом, мы также можем отождествить множество $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ с соответствующим подмножеством в $F^*(A^*) \subset \widetilde{A}^*$. Отметим, что при таком отождествлении нулевой гомоморфизм $0 \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ соответствует нулю в $\widetilde{A}^*$.

Рассмотрим теперь $\mathrm{Hom}(\widetilde{A}, \mathbb{C})$. По предложению 2.54, для каждого ненулевого $\tilde{\tau} \in \mathrm{Hom}(\widetilde{A}, \mathbb{C})$, т.е. для характера $\tilde{\tau} \in \Omega(\widetilde{A})$, выполняется $\tilde{\tau}(0, 1) = 1$. С другой стороны, $\varphi := \tilde{\tau}|_A$, т.е. ограничение $\tilde{\tau}$ на $A \subset \widetilde{A}$, является гомоморфизмом, т.е. $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$, причем $\varphi \in \Omega(A) \subset \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$, если и только если $\tilde{\tau} \neq \tilde{\tau}_\infty$, где $\tilde{\tau}_\infty \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — канонической гомоморфизм, $\tilde{\tau}_\infty(a, \lambda) = \lambda$. Более того, имеет место очевидное равенство: $\tilde{\tau} = \varphi' + \tilde{\tau}_\infty$, где, как и выше, $\varphi' \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — продолжение гомоморфизма φ нулем на $1_{\widetilde{A}}$. Тем самым, для каждого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ мы построили два продолжения на $\widetilde{A}$: продолжение φ' нулем на $1_{\widetilde{A}}$ и продолжение $\tilde{\tau}$, равное 1 на $1_{\widetilde{A}}$. Из сказанного вытекает, что если отождествить $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ с соответствующим подмножеством в $A^* \subset \widetilde{A}^*$, т.е. отождествить каждое $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ с $\varphi' \in \widetilde{A}^*$, то получим

$$\Omega(\widetilde{A}) = \tilde{\tau}_\infty + \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}) = \big(\tilde{\tau}_\infty + \Omega(A)\big) \sqcup \{\tilde{\tau}_\infty\} \subset \tilde{\tau}_\infty + A^*,$$

где второе равенство имеет место в силу того, что $\Omega(A)$ не содержит нулевой гомоморфизм. Отметим, что $\tilde{\tau}_\infty + A^*$ — аффинное подпространство в $\widetilde{A}^*$, не являющееся линейным, так как $\tilde{\tau}_\infty \notin A^*$.

Итак, $\Omega(A)$ лежит в линейном подпространстве $A^* \subset \widetilde{A}^*$, а $\Omega(\widetilde{A})$ — в аффинном подпространстве $\tilde{\tau}_\infty + A^* \subset \widetilde{A}^*$, получающемся сдвигом пространства A^*. Напомним, что на множестве характеров мы рассматриваем $*$-слабую топологию. Положим $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$ и $U = J_{1_{\widetilde{A}}}^{-1}(V)$, где, как и выше, $J_{\tilde{a}} \colon \widetilde{A}^* \to \mathbb{C}$, $J_{\tilde{a}}(g) = g(\tilde{a})$. Тогда в $*$-слабой топологии на $\widetilde{A}^*$ множество U открыто и является окрестностью нуля, так как $J_{1_{\widetilde{A}}}(0) = 0(1_{\widetilde{A}}) = 0 \in V$. С другой стороны, для каждой точки $g := f + \tilde{\tau}_\infty \in \tilde{\tau}_\infty + A^*$, $f \in A^*$, имеем

$$J_{1_{\widetilde{A}}}(g) = (f + \tilde{\tau}_\infty)(1_{\widetilde{A}}) = f(1_{\widetilde{A}}) + \tilde{\tau}_\infty(1_{\widetilde{A}}) = 1 \notin V,$$

так что $g \notin U$ и, значит, $U \cap (\tilde{\tau}_\infty + A^*) = \emptyset$. Теперь видно, почему $0 \in \widetilde{A}^*$ не является точкой прикосновения для $\Omega(\widetilde{A})$, но может являться точкой прикосновения для $\Omega(A)$, см. замечание 2.69. С другой стороны, часто бывает удобно отождествлять $\Omega(A)$ с $\tilde{\tau}_\infty + \Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$. Имея в виду это отождествление, будем писать $\Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$ и, значит, $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$.

Предложение 2.70. *Пусть A — банахова алгебра и $\widetilde{A}$ — ее унитализация. Тогда*

(1) *топология, индуцированная на $A^* \subset \widetilde{A}^*$ из $*$-слабой топологии совпадает со $*$-слабой топологией на A^*;*

(2) *отображение $\psi \colon \widetilde{A}^* \to \widetilde{A}^*$, $\psi \colon \tilde{a}^* \mapsto \tilde{a}^* + c$, $c \in \widetilde{A}^*$, является гомеоморфизмом в $*$-слабой топологии.*

Доказательство. (1) Достаточно проверить это на предбазах, состоящих из прообразов открытых в $\mathbb{C}$ множеств при всевозможных отображениях $J_a \colon A^* \to \mathbb{C}$ и $J_b \colon \widetilde{A}^* \to \mathbb{C}$, $a, c \in A$, $b = c + \lambda 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, тогда $J_b^{-1}(U) = \big\{f \in \widetilde{A}^* : f(b) \in U\big\}$. По определению отождествления A^* и соответствующего подмножества $\widetilde{A}^*$, каждому $g \in A^*$ ставится в соответствии функционал $g' \colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ такой, что $g'(a + \lambda 1_{\widetilde{A}}) = g(a)$, и, значит, $g'(1_{\widetilde{A}}) = 0$. Следовательно, $f \in A^* \subset \widetilde{A}^*$, если и только если $f(a + \lambda 1_{\widetilde{A}}) = f(a)$ при всех λ. Заметим, что

$$J_b^{-1}(U) \cap A^* = \{g' \in A^* \subset \widetilde{A}^* : g'(b) \in U\} = \{g' \in A^* \subset \widetilde{A}^* : g'(c) \in U\} = \{g \in A^* : g(c) \in U\} = J_c^{-1}(U).$$

Тем самым, мы показали, что индуцированная база $*$-слабой топологии из $\widetilde{A}^*$ содержится в базе $*$-слабой топологии на $A^* \subset \widetilde{A}^*$ (после отождествления).

Обратно, рассмотрим произвольное $J_c^{-1}(U) \subset A^*$, тогда на $A^* \subset \widetilde{A}^*$ это множество выглядит так:

$$\{g' \in A^* \subset \widetilde{A}^* : g'(c) \in U\} = J_b^{-1}(U) \cap A^*,$$

где в качестве b можно взять любой $c + \lambda 1_{\widetilde{A}}$. Таким образом, базы совпадают и, значит, топологии — тоже.

(2) Снова проверим, что при сдвиге каждое открытое множество из базы $*$-слабой топологии остается открытым. Имеем

$$\psi\big(J_b^{-1}(U)\big) = \big\{f + c : f \in \widetilde{A}^*,\ f(b) \in U\big\} = \big\{f + c \in \widetilde{A}^* : (f + c)(b) \in U + c\big\} = J_b^{-1}(U + c),$$

что и требовалось. □

Предложение 2.70 позволяет извлечь из теоремы 2.63, в соответствии с которой пространство $\Omega(\widetilde{A})$ со $*$-слабой топологией является хаусдорфовым компактном, что $\Omega(A)$ — локально компактно в силу леммы 2.64.

В дальнейшем, для неунитальной коммутативной банаховой алгебры A, мы будем часто отождествлять алгебру A с $F(A) \subset \widetilde{A}$, а множество всех характеров $\Omega(A)$ алгебры A — с подмножеством $\tilde{\tau}_\infty + \Omega(A)$ в $\Omega(\widetilde{A})$.

2.8 Представление Гельфанда коммутативной банаховой алгебры

Начнем со следующего замечания, объясняющего, почему представление Гельфанда, которое мы определим ниже, имеется не для всякой коммутативной банаховой алгебры.

Замечание 2.71. Для коммутативной алгебры A множество $\Omega(A)$ может быть пустым. В качестве примера можно рассмотреть $A = \{0\}$.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра с непустым $\Omega(A)$. Для каждого $a \in A$ определим отображение

$$\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto \tau(a).$$

Иными словами, $\widehat{a}$ равно ограничению $J_a\colon A^* \to \mathbb{C}$ на $\Omega(A)$. Так как каждое J_a непрерывно в $*$-слабой топологии, то $\widehat{a} \in C\big(\Omega(A)\big)$. По теореме 2.63, если A — унитальная алгебра, то $\Omega(A)$ — хаусдорфов компакт. Если же A — не унитальна, то, по той же теореме 2.63, $\Omega(A) \cup \{0\}$ — хаусдорфов компакт, поэтому, в силу леммы 2.64, пространство $\Omega(A)$ локально компактно.

Лемма 2.72. *Пусть X — хаусдорфов компакт, $p \in X$ — произвольная точка, $Y = X \setminus \{p\}$ и $f \in C(X)$. Тогда $f|_Y \in C_0(Y)$, если и только если $f(p) = 0$.*

Доказательство. Пусть сначала $f(p) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Big\{x \in X : \big|f(x)\big| \geq \varepsilon\Big\}$ — замкнуто в X и, значит, компактно и в X, и в Y, поэтому $f \in C_0(Y)$.

Обратно, если $f \in C_0(Y)$, то $T := \Big\{x \in Y : \big|f(x)\big| \geq \varepsilon\Big\}$ компактно в Y, а, значит, и в X. Так как X — хаусдорфов компакт, то T замкнуто в X, поэтому $U := X \setminus T$ — открыто в X, причем $p \in U$. Значит, U — окрестность p, и мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки p, что $|f| < \varepsilon$ в этой окрестности. Так как f непрерывна в p, то $f(p) = 0$, что и требовалось. □

Заметим, что для непрерывного в $*$-слабой топологии отображения J_a выполняется $J_a(0) = 0(a) = 0$, поэтому $\widehat{a}$, будучи ограничением J_a на $\big(\Omega(A) \cup \{0\}\big) \setminus \{0\}$, зануляется на бесконечности по лемме 2.72, т.е. $\widehat{a} \in C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Функция $\widehat{a}$ называется ***преобразованием Гельфанда*** элемента a.

Теорема 2.73 (Представление Гельфанда)**.** *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с непустым спектром. Тогда отображение*

$$\varGamma\colon A \to C_0\big(\Omega(A)\big), \quad \varGamma\colon a \mapsto \widehat{a},$$

— гомоморфизм алгебр, причем $\|\widehat{a}\|_\infty = r(a) \leq \|a\|$ для всех $a \in A$, так что $\|\varGamma\| \leq 1$, и, значит, гомоморфизм $\varGamma$ является 1-липшицевым.

Если алгебра A унитальна, то $C_0\big(\Omega(A)\big) = C\big(\Omega(A)\big)$ и гомоморфизм $\varGamma$ унитальный. Далее, для каждого $a \in A$,

- *если алгебра A унитальна, то $\sigma(a) = \widehat{a}\big(\Omega(A)\big)$,*
- *если алгебра A не унитальна, то $\sigma(a) = \widehat{a}\big(\Omega(A)\big) \cup \{0\}$.*

Доказательство. То, что $\varGamma$ — гомоморфизм алгебр, вытекает из ограничения отображений J_a на характеры, что приводит к сохранению мультипликативной структуры. То, что $\sigma(a)$ совпадает с образом отображения $\widehat{a}$, с добавленным нулем для не унитальной алгебры, содержится в теореме 2.61. Отсюда мгновенно вытекает равенство $r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty$, и так как $r(a) \leq \|a\|$ по следствию 2.49, заключаем, что $\|\varGamma\| \leq 1$.

Наконец, если алгебра A унитальна, то $\varGamma(1)\colon \tau \mapsto \tau(1) = 1$, где последнее равенство содержится в предложении 2.54, т.е. $\varGamma(1)$ — единица алгебры $C\big(\Omega(A)\big)$. □

Замечание 2.74. Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $\widetilde{A}$ — ее унитализация. Тогда $\widetilde{A}$ также коммутативна и для нее имеется представление Гельфанда $\widetilde{\Gamma}\colon \widetilde{A} \to C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ из теоремы 2.73. Покажем, как из этого представления получается представление Гельфанда $\Gamma\colon A \to C_0\big(\Omega(A)\big)$ для A.

Как мы уже выяснили в разделе 2.7.3, имеются естественные отождествления, которые, в частности, позволяют рассматривать $\Omega(A)$ как множество $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\} \subset \Omega(\widetilde{A})$. Однако априори не ясно, насколько это отождествление согласовано с функциями из представления Гельфанда. Покажем, что имеется полное согласование, т.е. функции $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как ограничения на $\Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$ функций $\widehat{\widehat{a}}\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \mathbb{C}$, где обе функции $\widehat{a}$ и $\widehat{\widehat{a}}$ построены по элементам $a \in A$ и $(a, 0) \in \widetilde{A}$ соответственно (эти элементы мы тоже отождествляем).

Напомним (см. раздел 2.7.3), что каждый элемент $\tau \in \Omega(A)$ мы, рассматривая A как подпространство в $\widetilde{A}$, продолжаем до $\tau' \in \widetilde{A}^*$, полагая $\tau'(1_{\widetilde{A}}) = 0$, и затем получаем соответствующий характер $\tilde{\tau}$ так: $\tilde{\tau} = \tau' + \tilde{\tau}_\infty$. Отождествление $\Omega(A)$ с подмножеством в $\Omega(\widetilde{A})$ происходит по правилу $\tau \mapsto \tilde{\tau}$. Таким образом, нам нужно сравнить $\widehat{a}(\tau)$ и $\widehat{\widehat{a}}(\tilde{\tau})$. Имеем

$$\widehat{a}(\tau) = \tau(a) = \tau'(a, 0) = \tau'(a, 0) + \tilde{\tau}_\infty(a, 0) = \tilde{\tau}(a, 0) = \widehat{\widehat{a}}(\tilde{\tau}),$$

что и доказывает согласованность функций $\widehat{a}$ и $\widehat{\widehat{a}}$.

Как мы уже отмечали в разделе 2.7.3, множество $\Omega(\widetilde{A})$, наделенное $*$-слабой топологией, — хаусдорфов компакт, а его подмножество $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ — локальный компакт. Заметим, что для $a \in A$ имеем $\widehat{\widehat{a}}(\tilde{\tau}_\infty) = \tilde{\tau}_\infty(a, 0) = 0$, так что, в силу непрерывности функции $\widehat{\widehat{a}}$, ее ограничение на локальный компакт $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ зануляется на бесконечности. Таким образом, ограничения функций $\widehat{\widehat{a}} \in C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ на $\Omega(A)$ — это функции $\widehat{a} \in C_0\big(\Omega(A)\big)$. Обратно, каждая функция $\widehat{a} \in C_0\big(\Omega(A)\big)$, будучи продолженная нулем в $\tilde{\tau}_\infty$, непрерывна на всем $\Omega(\widetilde{A})$ и равна $\widehat{\widehat{a}}$. Тем самым, мы показали, что ограничение функций из $C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ на $\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$ задает биективное соответствие между $\widetilde{\Gamma}(A) \subset C\big(\Omega(\widetilde{A})\big)$ и $\Gamma(A) \subset C_0\big(\Omega(A)\big)$, согласованное с представлениями Гельфанда: $\widetilde{\Gamma}(a)|_{\Omega(A)} = \Gamma(a)$ для всех $a \in A$.

Замечание 2.75. Ядро представления Гельфанда может быть ненулевым. Это ядро называется ***радикалом алгебры*** A. По теореме 2.73, оно состоит из всех элементов $a \in A$, для которых $r(a) = 0$, т.е. у которых все спектр нулевой. В частности, радикал содержит все нильпотентные элементы, т.е. такие $a \in A$, для которых $a^n = 0$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ (в общей алгебре элементы с нулевым спектром называются ***квазинильпотентными***). Если радикал равен нулю, то алгебра A называется ***полупростой***.

Приведем пример приложения теоремы 2.73.

Пример 2.76. Пусть $a, b \in A$ — коммутирующие элементы произвольной (не обязательно коммутативной) банаховой алгебры. Покажем, что

$$r(a + b) \leq r(a) + r(b) \text{ и } r(ab) \leq r(a)r(b).$$

Пусть B — замкнутая унитальная подалгебра в $\widetilde{A}$, порожденная элементами a, b и 1, тогда B — коммутативная унитальная банахова алгебра в силу предложения 2.7. Рассмотрим представление Гельфанда для алгебры B, а именно, унитальный гомоморфизм $\Gamma\colon B \to C\big(\Omega(B)\big)$, $\Gamma\colon b \mapsto \widehat{b}$. По теореме 2.73, имеем

$$r(a + b) = \|\widehat{a + b}\|_\infty = \|\widehat{a} + \widehat{b}\|_\infty \leq \|\widehat{a}\|_\infty + \|\widehat{b}\|_\infty = r(a) + r(b);$$
$$r(ab) = \|\widehat{ab}\|_\infty = \|\widehat{a}\,\widehat{b}\|_\infty \leq \|\widehat{a}\|_\infty \|\widehat{b}\|_\infty = r(a)r(b).$$

Отметим, что без теоремы о представлении Гельфанда субаддитивность спектрального радиуса на коммутирующих элементах доказывается весьма громоздко.

Замечание 2.77. В общем случае, спектральный радиус не является ни субаддитивным, ни субмультипликативным. В качестве примера рассмотрим алгебру $M_2(\mathbb{C})$, и пусть

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $r(a) = r(b) = 0$ (обе матрицы нильпотентны), но $r(a + b) = r(ab) = 1$.

Пространство характеров можно воспринимать как обобщенный спектр благодаря следующему результату.

Теорема 2.78. *Пусть A — банахова алгебра, порожденная 1 и некоторым элементом $a \in A$. Тогда A унитальна, коммутативна и отображение $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \sigma(a)$, $\widehat{a}\colon \tau \mapsto \tau(a)$, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Алгебра A коммутативна в силу предложения 2.7. Непрерывность отображения $\widehat{a}$ обсуждалась непосредственно перед теоремой 2.73. Сюръективность содержится в теореме 2.73. Инъективность $\widehat{a}$ вытекает предложения 2.54, в соответствии с которым каждый характер на унитальной банаховой алгебре переводит единицу алгебры в 1 и, поэтому, если два характера совпадают на a, то они совпадают и на всей A. Наконец, гомеоморфность $\widehat{a}$ вытекает из того, что $\Omega(A)$ — компакт, а спектр $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ хаусдорфов. $\square$

Теорема 2.79. *Пусть A — неунитальная банахова алгебра, порожденная некоторым элементом $a \in A$. Тогда A коммутативна и отображение $\widehat{a}\colon \Omega(A) \to \sigma(a) \setminus \{0\}$, $\widehat{a}\colon \tau \mapsto \tau(a)$, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Алгебра A коммутативна в силу предложения 2.7. Пусть $\widetilde{A}$ — унитализация A, тогда, в обозначениях замечания 2.74, отображение $\widehat{\tilde{a}}\colon \Omega(\widetilde{A}) \to \sigma(a)$ является гомеоморфизмом в силу теоремы 2.78. В разделе 2.7.3 мы объяснили, что $\Omega(A)$ можно отождествить с $\Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\tilde{\tau}_\infty\}$, где $\tilde{\tau}_\infty\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C}$ — канонический гомоморфизм, причем это отождествление являются гомеоморфизмом с образом в $*$-слабой топологии. В замечании 2.74 мы также выяснили, что отображения $\widehat{\tilde{a}}$ и $\widehat{a}$ согласованы в том смысле, что $\widehat{a}$ равно ограничению $\widehat{\tilde{a}}$ на $\Omega(A) \subset \Omega(\widetilde{A})$. Так как $\widehat{\tilde{a}}(\tilde{\tau}_\infty) = \tilde{\tau}_\infty(\tilde{a}) = 0$, то заключаем, что $\widehat{a}$ — гомеоморфизм между $\Omega(A)$ и $\sigma(a) \setminus \{0\}$. $\square$

Тема 3

Элементы теории C^*-алгебр

План. Инволюция или сопряжение на алгебре, самосопряженное подмножество, инволютивная или $*$-алгебра, $*$-подалгебра $*$-алгебры; $*$-подалгебра, порожденная данным подмножеством; самосопряженный или эрмитов элемент, вещественное подпространство всех эрмитовых элементов, разложение каждого элемента $*$-алгебры на эрмитовы элементы (вещественную и мнимую части), эрмитовость произведения элемента и его сопряженного, нормальные элементы; $*$-подалгебра, порожденная нормальным элементом; инволюция в унитальной $*$-алгебре коммутирует со взятием обратного элемента и неподвижна на единице, проектор; эрмитовость элемента, обратного к эрмитову; элемент-изометрия, элемент-коизометрия, унитарный элемент, мультипликативная группа унитарных элементов, равенство обратного к унитарному элементу его сопряженному, $*$-гомоморфизм и $*$-изоморфизм, ядро и образ $*$-гомоморфизма, $*$-гомоморфизмы сохраняют эрмитовость элементов, факторизация $*$-алгебры по самосопряженному идеалу, унитальный $*$-гомоморфизм, унитальный $*$-гомоморфизм сохраняет унитарность, автоморфизм $*$-алгебры, автоморфизм унитальной $*$-алгебры, внутренний автоморфизм унитальной $*$-алгебры, действие мультипликативной группы унитарных элементов унитальной $*$-алгебры на этой алгебре, унитарно эквивалентные элементы, равенство спектров унитарно эквивалентных элементов, нормированная $*$-алгебра, банахова $*$-алгебра, оценка норм вещественной и мнимой частей элементов нормированной $*$-алгебры, банаховость вещественного подпространства всех эрмитовых элементов банаховой $*$-алгебры, унитальная банахова $*$-алгебра, унитарность экспоненты от элемента, полученного умножением эрмитова элемента на мнимую единицу, C^*-алгебра, определяющее свойство C^*-алгебры, унитальная C^*-алгебра, C^*-подалгебра, норма единицы и унитарного элемента, спектр унитарного элемента, примеры C^*-алгебр, прямая сумма и ограниченная прямая сумма C^*-алгебр, совпадения спектрального радиуса с нормой эрмитова элемента, невырожденность спектра ненулевого эрмитова элемента, равенство нулю нильпотентного эрмитова элемента; единственность нормы, превращающей $*$-алгебру в C^*-алгебру; унитализация банаховой $*$-алгебры, невыполнение определяющего свойства C^*-алгебры для стандартной нормы на унитализации, унитализация C^*-алгебры, продолжение $*$-гомоморфизма C^*-алгебр на их унитализации, 1-липшицевость $*$-гомоморфизма из $*$-банаховой алгебры в C^*-алгебру, вещественность спектров эрмитовых элементов C^*-алгебры, уважение инволюции характерами коммутативной C^*-алгебры, непустота спектра ненулевой C^*-алгебры, теорема Гельфанда о представлении Гельфанда для коммутативной C^*-алгебры; C^*-подалгебра, порожденная данным подмножеством C^*-алгебры; коммутативность и нормальность всех элементов C^*-подалгебры, порожденной нормальным элементом C^*-алгебры; совпадение спектров унитальной C^*-алгебры и любой ее C^*-подалгебры, содержащей единицу; равенство нормы и спектрального радиуса у нормального элемента C^*-алгебры; представление унитарного элемента со спектром, отличном от окружности, в виде экспоненты эрмитова элемента, умноженного на мнимую единицу.

Мы определим $C*$-алгебры в три шага: зададим алгебры с инволюцией, затем добавим банаховость, что приведет еще и к двум другим, помимо полноты, дополнительным свойствам нормы (одно из них накладывается на нормированные алгебры, другое — новое; такие алгебры называются банаховыми $*$-алгебрами), и, наконец, наложим на норму еще одно важное ограничение, в результате, придем к C^*-алгебрам.

3.1 Алгебры с инволюцией или $*$-алгебры

Инволюцией или ***сопряжением*** алгебры A называется такое отображение $a \mapsto a^*$ алгебры A в себя, которое

- является сопряженно линейным, так как $(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
- удовлетворяет $a^{**} := (a^*)^* = a$, и
- $(ab)^* = b^* a^*$.

Алгебра A, на которой задана инволюция $*$, называется ***инволютивной*** или ***$*$-алгеброй***. Элемент a^* называется ***сопряженным с*** a.

Всюду ниже, если не оговорено противное, A обозначает некоторую $*$-алгебру.

Подмножество $S \subset A$ называется ***самосопряженным***, если $S^* := \{a^* : a \in S\} = S$. Всякая самосопряженная подалгебра в A является $*$-алгеброй и называется ***$*$-подалгеброй***. Отметим также, что пересечение любого набора $*$-алгебр — снова $*$-алгебра, поэтому для каждого множества $S \subset A$ определена наименьшая $*$-подалгебра, содержащая S, которая называется ***порожденной*** S.

Элемент $a \in A$ называется ***самосопряженным*** или ***эрмитовым***, если $a^* = a$. Множество всех эрмитовых элементов обозначим A_{sa}.

Предложение 3.1. *Множество A_{sa} является вещественным линейным подпространством в A.*

Доказательство. Действительно, для любых $a, b \in A_{sa}$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\lambda a + \mu b)^* = \lambda a^* + \mu b^* = \lambda a + \mu b,$$

что и требовалось. □

Предложение 3.2. *Пусть A — это $*$-алгебра. Тогда для каждого $a \in A$ существуют и единственны эрмитовы элементы $b, c \in A$ такие, что $a = b + ic$, а именно, $b = (a + a^*)/2$ и $c = (a - a^*)/(2i)$.*

Доказательство. Действительно, b и c, очевидно, подходят. Для доказательства единственности заметим, что $a^* = b^* - ic^* = b - ic$, откуда и вытекают приведенные выше формулы для b и c. □

Эрмитовы элементы b и c в разложении из предложения 3.2 назовем соответственно ***вещественной*** и ***мнимой частями*** элемента a.

Предложение 3.3. *Пусть A — это $*$-алгебра. Тогда для каждого $a \in A$ элементы $a\,a^*$ и a^*a — эрмитовы.*

Доказательство. Имеем $(a\,a^*)^* = a^{**}a^* = a\,a^*$. Аналогично доказывается эрмитовость a^*a. □

Элемент $a \in A$ называется ***нормальным***, если $a^*a = a\,a^*$.

Задача 3.4. Пусть A — это $*$-алгебра и $a \in A$ — нормальный элемент. Покажите, что порожденная им $*$-подалгебра коммутативна и совпадает с линейной оболочкой элементов вида $a^m(a^*)^n$, где m и n — неотрицательные целые, одновременно не обращающиеся в 0. Аналогично, для унитальной $*$-алгебры A и любого ее нормального элемента a унитальная $*$-подалгебра, порожденная a, совпадает с линейной оболочкой элементов вида $a^m(a^*)^n$, где m и n — неотрицательные целые (если $m = n = 0$, то $a^m(a^*)^n = 1$).

Следующее важное для дальнейшего утверждение очевидно.

Предложение 3.5. *Пусть A — произвольная $*$-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент, и $P(a, a^*)$ — комплексный многочлен, имеющий нулевой свободный член. Тогда $P(a, a^*)$ — нормальный элемент в A. Если же A — унитальная $*$-алгебра, то в качестве $P(a, a^*)$ можно взять произвольный комплексный многочлен, не обязательно с нулевым свободным членом. И снова $P(a, a^*)$ — нормальный элемент из A. Таким образом, (унитальная) $*$-подалгебра в (унитальной) $*$-алгебре A, порожденная нормальным элементом, состоит из нормальных элементов алгебры A.*

Предложение 3.6. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, тогда инволюция коммутирует со взятием обратного элемента, т.е. для любого $a \in A$ выполняется $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$, в частности, $1^* = 1$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $1^* = 1$. Имеем

$$1^* = 1 \cdot 1^* = (1 \cdot 1^*)^* = (1^*)^* = 1.$$

Далее, пусть $a \in \mathrm{Inv}(A)$, тогда $1 = (a^{-1}a)^* = a^*(a^{-1})^*$ и, аналогично, $(a^{-1})^*a^* = 1$, откуда и вытекает требуемое. □

Элемент $p \in A$ называется ***проектором***, если $p = p^* = p^2$. Из сказанного выше вытекает, что 1 унитальной алгебры является проектором.

Задача 3.7. Приведите пример проектора в неунитальной алгебре.

Следствие 3.8. *Пусть a — обратимый эрмитов элемент унитальной $*$-алгебры A, тогда элемент a^{-1} — также эрмитов.*

Доказательство. По предложению 3.6,

$$(a^{-1})^* = (a^*)^{-1} = a^{-1},$$

что и требовалось. □

Элемент $a \in A$ унитальной $*$-алгебры называется

- ***изометрией***, если $a^*a = 1$,
- ***коизометрией***, если $a\,a^* = 1$,
- ***унитарным***, если $a\,a^* = a^*a = 1$, т.е. если он одновременно — изометрия и коизометрия.

Предложение 3.9. *Множество $U(A)$ всех унитарных элементов $*$-алгебры A образуют подгруппу (по умножению) в группе $\mathrm{Inv}(A)$ всех обратимых элементов. При этом, для унитарного элемента обратный к нему равен сопряженному.*

Доказательство. То, что 1 — унитарный элемент доказано в предложении 3.6. То, что все унитарные элементы обратимы и для них обратный равен сопряженному есть мгновенное следствие определения.

Покажем, что $U(A)$ замкнуто относительно умножения. Пусть $a, b \in U(A)$, тогда $ab(ab)^* = abb^*a^* = 1$ и, аналогично, $(ab)^*ab = 1$, поэтому $ab \in U(A)$.

Наконец, проверим, что переход к обратному элементу сохраняет унитарность элемента. Пусть $a \in U(A)$. Тогда $a^{-1}(a^{-1})^* = a^{-1}(a^*)^{-1} = (a^*a)^{-1} = 1$, где первое равенство вытекает из предложения 3.6 (взятие обратного элемента коммутирует с сопряжением). Аналогично, $(a^{-1})^*a^{-1} = 1$, что и требовалось. □

Гомоморфизм $*$-алгебр $\varphi\colon A \to B$, сохраняющий сопряжение, т.е. $\varphi(a^*) = \big(\varphi(a)\big)^*$ для всех $a \in A$, называется ***$*$-гомоморфизмом***. Если φ при этом биективен, то он называется ***$*$-изоморфизмом***. Отметим, что для $*$-гомоморфизма φ ядро $\ker\varphi$ — самосопряженный идеал в A, а образ $\varphi(A)$ — это $*$-подалгебра в B.

Предложение 3.10. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ является $*$-гомоморфизмом $*$-алгебр, тогда для каждого эрмитова $a \in A$ элемент $\varphi(a) \in B$ — также эрмитов. Таким образом, $\varphi(A_{sa}) \subset B_{sa}$.*

Доказательство. Так как $a^* = a$ и φ сохраняет сопряжение, имеем $\varphi(a) = \varphi(a^*) = \varphi(a)^*$, что и требовалось. □

Примером $*$-гомоморфизма является факторизация по идеалу. Следующее предложение проверяется непосредственно.

Предложение 3.11. *Пусть A — произвольная $*$-алгебра, а $I \subset A$ — самосопряженный идеал. Тогда A/I является $*$-алгеброй с инволюцией $(a+I)^* = a^*+I$, а каноническая проекция $\pi\colon A \to A/I$ — $*$-гомоморфизмом.*

Унитальным $*$-гомоморфизмом называется $*$-гомоморфизм унитальных $*$-алгебр $\varphi\colon A \to B$, если он сохраняет единицу, т.е. $\varphi(1) = 1$.

Предложение 3.12. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный $*$-гомоморфизм унитальных $*$-алгебр. Тогда φ сохраняет унитарность элементов: если $a \in A$ — унитарный, то $\varphi(a) \in B$ — также унитарный.*

Доказательство. Применим к равенству $a^*a = a\,a^* = 1$ гомоморфизм φ и воспользуемся тем, что он сохраняет сопряжение и 1. Имеем
$$1 = \varphi(1) = \varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \varphi(a)^*\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(a)^*,$$
что и требовалось. □

Автоморфизмом $*$-алгебры A называется $*$-изоморфизм $\varphi\colon A \to A$. Если алгебра A еще и унитальна, то ее ***автоморфизмом*** называется унитальный $*$-изоморфизм.

Предложение 3.13. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, а $u \in A$ — унитарный элемент. Тогда отображение $\mathrm{Ad}_u\colon a \mapsto uau^*$ является автоморфизмом.*

Доказательство. Линейность отображения Ad_u очевидна. Биективность следует из того, что Ad_{u^*} — отображение, обратное к Ad_u. Далее, $\mathrm{Ad}_u(1) = u1u^* = uu^* = 1$ и $\mathrm{Ad}_u(ab) = uabu^* = uau^*ubu^* = \mathrm{Ad}_u(a)\,\mathrm{Ad}_u(b)$. Таким образом, Ad сохраняет 1 и умножение. Наконец, $\mathrm{Ad}_u(a^*) = ua^*u^* = (uau^*)^* = \big(\mathrm{Ad}_u(a)\big)^*$. Таким образом, Ad_u сохраняет сопряжение. □

Описанный в предложении 3.13 автоморфизм Ad_u называется ***внутренним***.

Предложение 3.14. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, тогда отображение Ad задает действие мультипликативной группы $U(A)$ унитарных элементов на алгебре A.*

Доказательство. Путь $u, v \in U(A)$ и $a \in A$, тогда $\mathrm{Ad}_{uv}(a) = uva(uv)^* = uvav^*u^*\,\mathrm{Ad}_u\big(\mathrm{Ad}_v(a)\big)$, откуда $\mathrm{Ad}_{uv} = \mathrm{Ad}_u\,\mathrm{Ad}_v$. Кроме того, $\mathrm{Ad}_1(a) = 1a1^* = a$, так что Ad_a — тождественное отображение. Последнее завершает доказательство предложения. □

Из предложения 3.14 вытекает, что Ad разбивает A на орбиты этого действия. Элементы a и b, попавшие в одну орбиту, то есть связанные равенством $b = uau^*$ для некоторого унитарного u, называются ***унитарно эквивалентными***.

Предложение 3.15. *Пусть A — унитальная $*$-алгебра, и $a, b \in A$ — унитарно эквивалентные элементы. Тогда $\sigma(a) = \sigma(b)$.*

Доказательство. Действительно, $b = uau^*$ и $a = u^*bu$ для некоторого унитарного u. Так как $u, u^* \in \mathrm{Inv}(A)$, а $\mathrm{Inv}(A)$ — группа по умножению, то a и b одновременно или вырождены, или невырождены. Так как при всех $\lambda \in \mathbb{C}$

$$b - \lambda\,1 = uau^* - \lambda\,1 = uau^* - u\lambda\,1u^* = u(a - \lambda\,1)u^*,$$

то $b - \lambda\,1$ и $a - \lambda\,1$ также являются унитарно эквивалентными и, значит, одновременно вырожденными или невырожденными, откуда и вытекает равенство $\sigma(a) = \sigma(b)$. □

3.2 Нормированные и банаховы $*$-алгебры

Напомним, что нормированная алгебра A — это алгебра с субмультипликативной нормой. Если в дополнение на алгебре задана инволюция, уважающая норму, т.е. $\|a\| = \|a^*\|$ для всех $a \in A$, то такая A называется ***нормированной $*$-алгеброй***. Если при этом алгебра еще и банахова, то она называется ***банаховой $*$-алгеброй***. Итак, нормированная (банахова) $*$-алгебра является одновременно нормированной (банаховой) алгеброй и $*$-алгеброй, причем норма уважает сопряжение.

Уточним предложение 3.2 в случае нормированных $*$-алгебр.

Предложение 3.16. *Пусть A — нормированная $*$-алгебра, $a \in A$, и $b, c \in A$ — эрмитовы элементы, для которых $a = b + ic$. Тогда $\|b\| \le \|a\|$ и $\|c\| \le \|a\|$.*

Доказательство. Имеем

$$\|b\| \le \frac{1}{2}\big(\|a\| + \|a^*\|\big) = \frac{1}{2}\big(\|a\| + \|a\|\big) = \|a\|$$

и, аналогично, $\|c\| \le \|a\|$, что и требовалось. □

Уточним предложение 3.1 в случае банаховых $*$-алгебр.

Предложение 3.17. *Пусть A — произвольная банахова $*$-алгебра. Тогда множество A_{sa} всех эрмитовых элементов в A является вещественным банаховым подпространством в A.*

Доказательство. То, что A_{sa} — вещественное подпространство, было доказано в предложении 3.1. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $a_n \in A_{sa}$. Так как пространство A — банахово, существует $a \in A$ такое, что $a_n \to a$. Покажем, что $a = a^*$, т.е. $a \in A_{sa}$, чем и завершим доказательство. Имеем

$$\|a^* - a_n^*\| = \big\|(a - a_n)^*\big\| = \|a - a_n\| \to 0 \ \text{ при } n \to \infty,$$

поэтому $a_n = a_n^* \to a^*$ и $a_n \to a$ при $n \to \infty$, откуда $a^* = a$, так как A — хаусдорфово пространство. □

Предложение 3.18. *Пусть A — нормированная, в частности, банахова $*$-алгебра и $a \in A$. Тогда $\|a^*a\| \le \|a\|^2$.*

Доказательство. Действительно, так как алгебра A нормированная, то $\|a^*a\| \le \|a^*\|\,\|a\|$. Так как A — нормированная $*$-алгебра, то $\|a\| = \|a^*\|$, что и требовалось. □

Если в банаховой $*$-алгебре есть еще и 1, т.е. она является унитальной $*$-алгеброй, то, при дополнительном условии $\|1\| = 1$ алгебра A называется ***унитальной банаховой $*$-алгеброй***.

Пример 3.19. Приведем важный пример унитарного элемента в унитальной банаховой $*$-алгебре A. В разделе 2.5 мы определили экспоненту элемента произвольного элемента $a \in A$ (даже в случае, когда A — банахова алгебра). Напомним, что $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Кроме того, по теореме 2.51, для коммутирующих $a, b \in A$ имеем $e^{a+b} = e^a e^b$. Отсюда вытекает, что $e^{ia}e^{-ia} = e^0 = 1 = e^{-ia}e^{ia}$, т.е. $(e^{ia})^{-1} = e^{-ia}$. С другой стороны, из свойств инволюции вытекает, что для всякого $b \in A$ имеем $(ib)^* = -ib^*$ и $(e^b)^* = \sum_{n=0}^{\infty}(b^*)^n$, откуда

$$(e^{ia})^* = \sum_{n=0}^{\infty}\big((ia)^*\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big(-ia^*\big)^n = e^{-ia^*}$$

Пусть теперь a — эрмитов элемент, т.е. $a^* = a$, тогда $(e^{ia})^* = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, поэтому e^{ia} — унитарный элемент алгебры A.

Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 3.20. *Пусть A — унитальная банахова $*$-алгебра и $a \in A$ — эрмитов элемент. Тогда элемент $e^{ia} \in A$ — унитарный.*

3.3 C^*-алгебры

Дадим наконец определение C^*-алгебры. А именно, ***C^*-алгебра*** A — это банахова $*$-алгебра с дополнительным условием $\|a\,a^*\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$. Это последнее условие будем называть ***определяющим для C^*-алгебры***. Отметим, что так как сопряжение согласовано с нормой, для C^*-алгебры выполняется $\|a^*a\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2$, так что определяющее условие можно писать и как $\|a^*a\| = \|a\|^2$, и как $\|a\,a^*\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$.

Далее, если C^*-алгебра A содержит единицу 1, то такую A будем называть ***унитальной C^*-алгеброй***. Отметим, что, в отличии от унитальных $*$-банаховых алгебр, для C^*-алгебры мы не требуем, чтобы $\|1\| = 1$. Тем не менее, последнее свойство непосредственно вытекает из определяющего свойства C^*-алгебр, см. предложение 3.21 ниже.

Отметим также следующее очевидное свойство C^*-алгебр: замкнутая $*$-алгебра в C^*-алгебре является C^*-алгеброй (называем их ***C^*-подалгебрами***).

Предложение 3.21. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, в которой $0 \ne 1$, а $u \in A$ — унитарный элемент. Тогда*

(1) $\|1\| = 1$,

(2) $\|u\| = 1$, *и*

(3) $\sigma(u) \subset S^1 \subset \mathbb{C}$, *где S^1 — единичная окружность с центром в нуле.*

Доказательство. (1) Так как сопряжение согласовано с нормой, имеем $\|1\| = \|1^*\| = \|1^*1\|$. Так как A — это C^* алгебра, выполняется $\|1^*1\| = \|1\|^2$. Таким образом, $\|1\| = \|1\|^2$. По предположению, $0 \ne 1$ и, значит, $\|1\| \ne 0$, поэтому $\|1\| = 1$.

(2) Так как A — это C^* алгебра, имеем $\|u\|^2 = \|u\,u^*\|$. Так как элемент u — унитарный, то $u\,u^* = 1$. По предыдущему пункту, $\|1\| = 1$, откуда $\|u\|^2 = \|u\,u^*\| = \|1\| = 1$, и, значит, $\|u\| = 1$, так как $\|u\| \ge 0$.

(3) Пусть $\lambda \in \sigma(u)$. Тогда, по предложению 2.31, имеем $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$. В силу следствия 2.49, справедливо $|\lambda| \le \|u\| = 1$ (см. предыдущий пункт) и, аналогично, $|\lambda^{-1}| \le \|u^*\| = 1$, поэтому $|\lambda| = 1$, так что $\lambda \in S^1$. □

Пример 3.22. Приведем некоторые примеры C^*-алгебр. Простейшим примером является само поле $\mathbb{C}$ с инволюцией, заданной сопряжением.

- Пространство $\mathcal{B}(S)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на множестве S.
- Пространство $C_b(X) \subset \mathcal{B}(X)$ всех непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве X.
- Подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$ всех непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{C}$, заданных на хаусдорфовом локально компактном топологическом пространстве X и обращающихся в нуль на бесконечности.

- Подпространство $\mathcal{B}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$, состоящее из всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, заданных на измеримом пространстве Ω.

- Пространство $L^\infty(\mu)$ классов эквивалентности существенно ограниченных комплекснозначных функций на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ с мерой μ.

- Пространство $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H.

Предложение 3.23. *Если $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство C^*-алгебр, то прямая сумма $A := \oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ с поточечной инволюцией — тоже C^*-алгебра, а ограниченная сумма $A^{c_0} := \oplus^{c_0}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ — ее замкнутый самосопряженный идеал.*

Доказательство. По предложению 2.11, A является банаховой алгеброй. Проверим, что для любого $a \in A$ выполняется $\|aa^*\| = \|a\|^2$. Действительно, если $a = (a_\lambda)$, то $aa^* = (a_\lambda a_\lambda^*)$ и

$$\|aa^*\| = \sup \|a_\lambda a_\lambda^*\| = \sup \|a_\lambda\|^2 = \big(\sup \|a_\lambda\|\big)^2 = \|a\|^2,$$

что и требовалось. В силу задачи 2.13, A^{c_0} является замкнутым идеалом в A. Его самосопряженность вытекает из того, что $\|a_\lambda^*\| = \|a_\lambda\|$ для всех λ. □

Задача 3.24. Докажите следующие утверждения.

(1) Пусть S — непустое множество, A — некоторая C^*-алгебра, тогда $\mathcal{B}(S, A)$ — семейство всех ограниченных комплекснозначных отображений — тоже C^*-алгебра (с поточечной инволюцией).

(2) Если X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, то $C_0(X, A)$ является C^*-подалгеброй в $\mathcal{B}(X, A)$.

Напомним, что, в силу следствия 2.49, для банаховой алгебры A и любого ее элемента $a \in A$ выполняется $r(a) \le \|a\|$.

Теорема 3.25. *Если a — эрмитов элемент C^*-алгебры A, то $r(a) = \|a\|$.*

Доказательство. Так как $\|a^2\| = \|aa^*\| = \|a\|^2$, то, по индукции, $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. В силу теоремы 2.42 Бёрлинга,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|,$$

что и требовалось. □

Следствие 3.26. *Если a — эрмитов элемент C^*-алгебры A. Тогда $\sigma(a) = \{0\}$, если и только если $a = 0$.*

Доказательство. Если $a = 0$, то $\sigma(a) = \{0\}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\sigma(a) = \{0\}$. По определению $r(a)$ и в силу теоремы 3.25, имеем $0 = r(a) = \|a\|$, откуда $a = 0$. □

Следствие 3.27. *Если a — эрмитов элемент C^*-алгебры A такой, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $a^n = 0$, то $a = 0$.*

Доказательство. По теореме 2.32, имеем $\sigma(a^n) = \{0\} = \big(\sigma(a)\big)^n$, откуда $\sigma(a) = \{0\}$. Осталось применить следствие 3.26. □

Следствие 3.28. *На $*$-алгебре существует не более одной нормы, превращающей ее в C^*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы на $*$-алгебре A, превращающие ее в C^*-алгебры. Тогда для произвольного $a \in A$ имеем

$$\|a\|_j^2 = \|a^*a\|_j = r(a^*a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a^*a)} |\lambda|, \quad j = 1, 2,$$

поэтому $\|a\|_1 = \|a\|_2$. □

Напомним, что банахова алгебра A превращается в C^*-алгебру, если

- на A задана инволюция $a \mapsto a^*$, которая не меняет норму, т.е. является изометрией, и

- выполняется $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$.

Оказывается, вместо этих двух свойств можно рассмотреть некоторое одно, а именно, имеет место следующий результат.

Лемма 3.29. *Пусть A — банахова алгебра, снабженная такой инволюцией $a \mapsto a^*$, что $\|a\|^2 \le \|a^*a\|$ при каждом $a \in A$. Тогда A является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Воспользуемся субмультипликативностью нормы банаховой алгебры:

$$\|a\|^2 \le \|a^*a\| \le \|a^*\|\,\|a\|. \tag{3.1}$$

Если $a \ne 0$, то получаем $\|a\| \le \|a^*\|$. Если $a = 0$, то имеет место то же самое неравенство. Меняя местами a и a^* и пользуясь инволютивностью сопряжения, получаем обратное неравенство, что влечет $\|a\| = \|a^*\|$. Подставляя в правую часть (3.1) вместо нормы $\|a\|$ равную ей норму $\|a^*\|$, заключаем, что $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. □

3.3.1 Унитализация банаховой $*$-алгебры и C^*-алгебры

В разделе 2.1.6 мы определили унитализацию $\widetilde{A}$ банаховой алгебры A. В качестве нормы элемента унитализации (a, λ) мы выбрали $\|a\| + |\lambda|$. Чтобы не привести к путанице в дальнейшем, эту норму в данном разделе будем обозначать $\|\cdot\|_1$.

Определим ***унитализацию банаховой $*$-алгеброй*** A. В качестве $\widetilde{A}$ выберем то же самое, что и в случае банаховых алгебр, а инволюцию зададим так: $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$. Тогда

$$\big\|(a,\lambda)^*\big\|_1 = \|(a^*, \bar\lambda)\|_1 = \|a^*\| + |\bar\lambda| = \|a\| + |\lambda| = \big\|(a,\lambda)\big\|_1.$$

Таким образом, $\widetilde{A}$ также является банаховой $*$-алгеброй. Кроме того, $\big\|(0,1)\big\|_1 = |1| = 1$, так что $\widetilde{A}$ — унитальная банахова $*$-алгебра. Отметим, что для каждого $(a, 0) \in A$ (мы отождествляем A с его образом в $\widetilde{A}$) выполняется $(a, 0)^* = (a^*, 0) \in A$. Таким образом, A — самосопряженный идеал в $\widetilde{A}$.

Замечание 3.30. Если A была C^*-алгеброй, то описанная конструкция $\widetilde{A}$, вообще говоря, не приводит к C^*-алгебре. Действительно, пусть $A = \mathbb{C}$, $(a, \lambda) = (-2, 1)$, тогда $\big\|(a,\lambda)\big\|_1 = 3$, откуда $\big\|(a,\lambda)\big\|_1^2 = 9$. Однако

$$\big\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\big\|_1 = \big\|(-2,1)(-2,1)\big\|_1 = \big\|(4-2-2,1)\big\|_1 = \big\|(0,1)\big\|_1 = 1 \ne 9.$$

Оказывается, для C^*-алгебры A алгебру $\widetilde{A}$ все-таки можно снабдить нормой, превращающей ее в C^*-алгебру, при этом такая норма однозначно определена. Приведем соответствующую конструкцию.

Конструкция 3.31. Пусть сначала A — нормированная алгебра и $\widetilde{A}$ — ее унитализация, построенная выше. Алгебра $\widetilde{A}$ действует умножениями (правыми и левыми) на A, при этом каждое умножение, в силу дистрибутивности, является линейным отображением. Для $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$ обозначим $L_{(a,\lambda)}$ и $R_{(a,\lambda)}$ соответствующее левое и правое умножения на A, т.е. для каждого $b \in A$ положим

$$L_{(a,\lambda)}(b) = (a,\lambda)b = (a,\lambda)(b,0) = (ab + \lambda b, 0) = ab + \lambda b,$$
$$R_{(a,\lambda)}(b) = b(a,\lambda) = (b,0)(a,\lambda) = (ba + \lambda b, 0) = ba + \lambda b.$$

Так как

$$\|L_{(a,\lambda)}\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ab + \lambda b\| \le \|a\| + |\lambda| < \infty \quad\text{и}\quad \|R_{(a,\lambda)}\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ba + \lambda b\| \le \|a\| + |\lambda| < \infty,$$

то эти операторы — ограниченные, т.е. $L_{(a,\lambda)}, R_{(a,\lambda)} \in \mathcal{B}(A)$. Тем самым, мы построили отображения

$$L\colon \widetilde{A} \to \mathcal{B}(A) \;\text{ и }\; R\colon \widetilde{A} \to \mathcal{B}(A), \quad L\colon (a,\lambda) \mapsto L_{(a,\lambda)},\; R\colon (a,\lambda) \mapsto R_{(a,\lambda)}.$$

Лемма 3.32. *Отображения L и R — линейные.*

Доказательство. Докажем лемму только для L, так как для R рассуждения вполне аналогичны. Имеем

$$L_{\mu(a,\lambda)}(c) = L_{(\mu a, \mu\lambda)}(c) = \mu ac + \mu\lambda c = \mu(ac + \lambda c) = \mu L_{(a,\lambda)}(c),$$
$$L_{(a,\lambda)+(b,\mu)}(c) = L_{(a+b,\lambda+\mu)}(c) = (a+b)c + (\lambda+\mu)c = (ac + \lambda c) + (bc + \mu c) = L_{(a,\lambda)}(c) + L(b,\mu)(c),$$

что и требовалось. □

В силу задачи 1.10, алгебра $\mathcal{B}(A)$ с операторной нормой является нормированной алгеброй, т.е., напомним, для любых двух $L_1, L_2 \in \mathcal{B}(A)$ выполняется $\|L_1 L_2\| \le \|L_1\|\,\|L_2\|$. Отсюда вытекает, что если на алгебре $\mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$ с поточечными операциями рассмотреть норму $\big\|(\lambda, L, R)\big\| = \max\big\{|\lambda|, \|L\|, \|R\|\big\}$, то эта норма также будет субмультипликативна, т.е.

$$\big\|(\lambda_1, L_1, R_1)(\lambda_2, L_2, R_2)\big\| \le \big\|(\lambda_1, L_1, R_1)\big\|\,\big\|(\lambda_2, L_2, R_2)\big\|.$$

Пусть теперь A является C^*-алгеброй. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \widetilde{A} \to \mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A), \quad \varphi(a, \lambda) = (\lambda, L_{(a,\lambda)}, R_{(a,\lambda)}).$$

Это отображение линейно в силу леммы 3.32.

Лемма 3.33. *Отображение φ инъективно.*

Доказательство. Действительно, если $\varphi(a, \lambda) = (\lambda, L_{(a,\lambda)}, R_{(a,\lambda)}) = 0$, то $\lambda = 0$ и $L_{(a,\lambda)} = L_{(a,0)} = 0$, т.е. для любого $c \in A$ имеем $L_{(a,0)}(c) = ac = 0$. Если $a \ne 0$, то в качестве c возьмем $a^*/\|a\|$, тогда $\|ac\| = \|a^*a\|/\|a\| = \|a\|^2/\|a\| = \|a\| = 0$, откуда $a = 0$, противоречие. Значит $a = 0$, что и доказывает инъективность φ. □

Таким образом, φ является вложением линейного пространства $\widetilde{A}$ в линейное пространство $\mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$, и мы тем самым можем индуцировать норму с $\mathbb{C} \oplus \mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$ на $\widetilde{A}$. В явном виде,

$$\begin{aligned}\big\|(a, \lambda)\big\| = \max\big\{|\lambda|, \|L_{(a,\lambda)}\|, \|R_{(a,\lambda)}\|\big\} &= \sup_{\|c\|\le 1}\Big\{|\lambda|, \big\|L_{(a,\lambda)}(c)\big\|, \big\|R_{(a,\lambda)}(c)\big\|\Big\} = \\ &= \sup_{\|c\|\le 1}\Big\{|\lambda|, \big\|(a,\lambda)(c,0)\big\|, \big\|(c,0)(a,\lambda)\big\|\Big\} = \sup_{\|c\|\le 1}\big\{|\lambda|, \|ac + \lambda c\|, \|ca + \lambda c\|\big\}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что **во всех формулах из (3.2) можно ограничиться** $\|c\| = 1$.

В силу сказанного выше, $\widetilde{A}$ с введенной нормой является нормированной алгеброй.

Лемма 3.34. *Имеем $\big\|(a, 0)\big\| = \|a\|$, так что вложение $A \to \widetilde{A}$, $a \mapsto (a, 0)$ изометрично.*

Доказательство. Если $a = 0$, то равенство очевидно. Пусть теперь $a \ne 0$, тогда

$$\big\|(a, 0)\big\| = \sup_{\|c\|=1}\big\{0, \|ac\|\big\} \le \|a\|,$$

и если взять в качестве c элемент $a^*/\|a^*\| = a^*/\|a\|$, то получим $\|(a, 0)\| \ge \|a\,a^*\|/\|a\| = \|a\|$, откуда и заключаем требуемое. □

Лемма 3.35. *Имеем $\|(0, 1)\| = 1$.*

Доказательство. Распишем норму элемента $(0, 1)$: $\big\|(0, 1)\big\| = \sup_{\|c\|\le 1}\big\{1, \|c\|\big\} = 1$, что и требовалось. □

Таким образом, $\widetilde{A}$ с введенной нормой является унитальной нормированной алгеброй.

Лемма 3.36. *Для каждого $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$ выполняется $\big\|(a, \lambda)\big\| \le \big\|(a, \lambda)\big\|_1$.*

Доказательство. Имеем

$$\big\|(a, \lambda)\big\| = \sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|, \|ac + \lambda c\|, \|ca + \lambda c\|\big\} \le \sup_{\|c\|=1}\big\{|\lambda|, \|a\|\,\|c\| + |\lambda|\,\|c\|\big\} = \|a\| + |\lambda| = \big\|(a, \lambda)\big\|_1,$$

что и требовалось. □

Лемма 3.37. *Для каждого $(a, \lambda) \in \widetilde{A}$ выполняется $\big\|(a, \lambda)\big\|_1 \le 3\big\|(a, \lambda)\big\|$.*

Доказательство. Пусть сначала $a = 0$, тогда $\|(a,\lambda)\|_1 = |\lambda|$, а $\|(a,\lambda)\| = \sup_{\|c\|=1}\{|\lambda|, |\lambda c|\} = |\lambda|$, так что неравенство выполнено.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда, с одной стороны, $\|(a,\lambda)\| = \sup_{\|c\|\le 1}\{|\lambda|, \|ac+\lambda c\|, \|ca+\lambda c\|\} \ge |\lambda|$. С другой,

$$\begin{aligned}\|(a,\lambda)\| &= \sup_{\|c\|=1}\{|\lambda|, \|ac+\lambda c\|, \|ca+\lambda c\|\} \ge \sup_{\|c\|=1}\{|\lambda|, \|ac\|-\|\lambda c\|, \|ca\|-\|\lambda c\|\} = \\ &= \sup_{\|c\|=1}\{|\lambda|, \|ac\|-|\lambda|, \|ca\|-|\lambda|\} \ge \max\{|\lambda|, \|a^*a\|/\|a^*\|-|\lambda|\} = \max\{|\lambda|, \|a\|-|\lambda|\} \ge \|a\|/2,\end{aligned}$$

т.е. $2\|(a,\lambda)\| \ge \|a\|$. Таким образом,

$$3\|(a,\lambda)\| = 2\|(a,\lambda)\| + \|(a,\lambda)\| \ge \|a\| + |\lambda| = \|(a,\lambda)\|_1,$$

что и требовалось. □

Следствие 3.38. *Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ на $\widetilde{A}$ эквивалентны, в частности, $\widetilde{A}$ с нормой $\|\cdot\|$ также является банаховой.*

Покажем теперь, что $\widetilde{A}$ с введенной нормой является также $*$-банаховой алгеброй.

Лемма 3.39. *Для каждого $(a,\lambda) \in \widetilde{A}$ выполняется $\|(a,\lambda)^*\| = \|(a,\lambda)\|$.*

Доказательство. Имеем

$$\|(a,\lambda)^*\| = \|(a^*,\bar\lambda)\| = \sup_{\|c\|=1}\{|\bar\lambda|, \|a^*c+\bar\lambda c\|, \|c\,a^*+\bar\lambda c\|\} = \sup_{\|c^*\|=1}\{|\lambda|, \|c^*a+\lambda c^*\|, \|a\,c^*+\lambda c^*\|\} = \|(a,\lambda)\|,$$

что и требовалось. □

Осталось проверить выполнение определяющего свойства C^*-алгебры.

Лемма 3.40. *Для любого $(a,\lambda) \in \widetilde{A}$ выполняется $\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| = \|(a,\lambda)\|^2$.*

Доказательство. Неравенство

$$\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| \le \|(a,\lambda)^*\|\,\|(a,\lambda)\| = \|(a,\lambda)\|^2$$

вытекает из того, что $\widetilde{A}$ одновременно и нормированная, и $*$-алгебра. Докажем обратное неравенство.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| &= \sup_{\|c\|=1}\Big\{|\lambda|^2, \|(a,\lambda)^*(a,\lambda)c\|, \|c(a,\lambda)^*(a,\lambda)\|\Big\},\\ \|(a,\lambda)\|^2 &= \sup_{\|c\|=1}\Big\{|\lambda|^2, \|(a,\lambda)c\|^2, \|c(a,\lambda)\|^2\Big\},\end{aligned}$$

поэтому достаточно показать, что $\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)c\| \ge \|(a,\lambda)c\|^2$ и $\|c(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| \ge \|c(a,\lambda)\|^2$ выполняются для всех $c \in A$, $\|c\| = 1$. Докажем первое неравенство (второе доказывается аналогично). Имеем:

$$\begin{aligned}\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)c\| &= \|c^*\|\,\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)c\| \ge \|c^*(a,\lambda)^*(a,\lambda)c\| = \|(c^*,0)(a,\lambda)^*(a,\lambda)(c,0)\| = \\ &= \Big\|\big((c^*,0)(a,\lambda)^*\big)\big((a,\lambda)(c,0)\big)\Big\| = \Big\|\big((a,\lambda)(c,0)\big)^*\big((a,\lambda)(c,0)\big)\Big\| = \Big\|\big((a,\lambda)c\big)^*(a,\lambda)c\Big\| = \|(a,\lambda)c\|^2,\end{aligned}$$

где второе неравенство — субмультипликативность в A. □

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.41. *Определенная в формуле (3.2) норма $\|\cdot\|$ на унитализации $\widetilde{A}$, построенной для C^*-алгебры A, превращает $\widetilde{A}$ в C^*-алгебру.*

Теорема 3.42. *Для каждой C^*-алгебры A на унитализации $\widetilde{A}$ существует и единственна норма, продолжающая норму на A и превращающая $\widetilde{A}$ с C^*-алгебру.*

Доказательство. В силу следствия 3.28, если на $*$-алгебре $\widetilde{A}$ есть норма, превращающая ее в C^*-алгебру, то такая норма единственна. Существование содержится в теореме 3.41. $\square$

В дальнейшем, под ***нормой на*** $\widetilde{A}$ будем понимать норму, заданную формулой (3.2). Доказательство следующего важного предложения тривиально.

Предложение 3.43. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — это $*$-гомоморфизм C^*-алгебр, тогда он единственным образом продолжается до унитального $*$-гомоморфизма $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to \widetilde{B}$.*

3.4 Представление Гельфанда коммутативной C^*-алгебры

Докажем ряд важных вспомогательных утверждений.

Теорема 3.44. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — произвольный $*$-гомоморфизм $*$-банаховой алгебры A в C^*-алгебру B. Тогда φ не увеличивает норму.*

Доказательство. Сразу предположим, что A и B унитальны, а φ — унитальный $*$-гомоморфизм, так как иначе продолжим φ до единственного унитального $*$-гомоморфизма $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, что можно сделать в силу предложения 3.43, и если для $\tilde{\varphi}$ утверждение верно, то оно также верно и для его ограничения φ. Далее, мы приведем цепочку неравенств, из которой и будет следовать результат.

- Так как B является C^*-алгеброй, то $\big\|\varphi(a)\big\|^2 = \big\|\varphi(a)^*\varphi(a)\big\|$.
- Так как φ — это $*$-гомоморфизм, то $\big\|\varphi(a)^*\varphi(a)\big\| = \big\|\varphi(a^*)\varphi(a)\big\| = \big\|\varphi(a^*a)\big\|$.
- В силу предложения 3.3, элемент a^*a эрмитов. Так как φ является $*$-гомоморфизмом, то, по предложению 3.10, $\varphi(a^*a)$ — также эрмитов.
- Так как элемент $\varphi(a^*a)$ — эрмитов, то, по теореме 3.25, выполняется $\big\|\varphi(a^*a)\big\| = r\big(\varphi(a^*a)\big)$.
- По следствию 2.40, имеем $r\big(\varphi(a^*a)\big) \le r(a^*a)$.
- По следствию 2.49, выполняется $r(a^*a) \le \|a^*a\|$.
- По предложению 3.18, имеем $\|a^*a\| \le \|a\|^2$.

Собирая вместе все описанные выше неравенства, заключаем, что $\big\|\varphi(a)\big\|^2 \le \|a\|^2$, откуда $\big\|\varphi(a)\big\| \le \|a\|$, что и требовалось. $\square$

Теорема 3.45. *Для C^*-алгебры A и любого ее эрмитова элемента $a \in A$ имеем $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как спектр элемента не унитальной алгебры равен спектру ее унитализации, то сразу будем считать алгебру A унитальной. Так как элемент a эрмитов, то, по предложению 3.20, элемент e^{ia} — унитарный. Но тогда, по предложению 3.21, $\sigma(e^{ia}) \subset S^1$.

Выберем произвольное $\lambda \in \sigma(a)$ и положим $b = \sum_{n=1}^{\infty} i^n (a-\lambda)^{n-1}/n!$. Тогда

$$e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i(a-\lambda+\lambda)} - e^{i\lambda} = e^{i(a-\lambda)}e^{i\lambda} - e^{i\lambda} = (e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} = (a-\lambda)be^{i\lambda}.$$

Так как $a-\lambda$ необратим и он, b и $e^{i\lambda}$ попарно коммутируют, то, в силу предложения 2.27, элемент $e^{ia} - e^{i\lambda}$ необратим, поэтому $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subset S^1$, т.е. $|e^{i\lambda}| = 1$. Осталось заметить, что последнее равенство имеет место в точности для вещественных λ. $\square$

Теорема 3.46. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра и $\tau \in \Omega(A)$ — ее характер. Тогда для каждого $a \in A$ выполняется $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$, т.е. τ сохраняет отношение сопряженности.*

Доказательство. В соответствии с предложением 3.2, существуют эрмитовы элементы $b, c \in A$, для которых $a = b + ic$. По предложению 2.54, $\tau(b) \in \sigma(b)$ и $\tau(c) \in \sigma(c)$, и так как b и c — эрмитовы, теорема 3.45 влечет, что $\tau(b)$ и $\tau(c)$ — вещественные числа. Поэтому

$$\tau(a^*) = \tau\big((b+ic)^*\big) = \tau(b^* - ic^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)} = \overline{\tau(a)}.$$

Отметим, что вещественность чисел $\tau(b)$ и $\tau(c)$ была использована в равенстве $\tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)}$. Доказательство закончено. $\square$

В заключение данного раздела мы докажем теорему Гельфанда о представлении коммутативных C^*-алгебр. В соответствующей теореме 2.73, описывающей представление Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, мы требовали, чтобы спектр алгебры был непуст. Когда алгебра унитальна, это условие выполняется автоматически в силу теоремы 2.55. Если же алгебра не унитальна, то спектр алгебры может быть пустым, например так у нулевой алгебры.

Предложение 3.47. *Пусть A — ненулевая C^*-алгебра. Тогда ее спектр $\Omega(A)$ непуст.*

Доказательство. По теореме 2.55, спектр унитальной алгебры непуст. Пусть теперь алгебра A не унитальна. Так как $A \neq \{0\}$, существует ненулевой $a \in A$, в частности, $\|a\| \neq 0$. Так как $\|a\| = \|a^*\|$, то a^* также ненулевой. Так как $\|a\|^2 = \|a\,a^*\| \neq 0$, то aa^* — ненулевой элемент. По предложению 3.3, элемент $b := aa^*$ эрмитов. По теореме 3.25, имеем $\|b\| = r(b)$, так что $\sigma(b)$ содержит ненулевые числа. По теореме 2.61, $\sigma(b) = \{\tau(b) : \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$, и так как $\sigma(b) \neq \{0\}$, должен существовать характер $\tau \in \Omega(A)$, для которого $\tau(b) \neq 0$, так что $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

Сформулируем теперь и докажем теорему Гельфанда о представлении C^*-алгебр. Отметим, что в ее аналоге — теореме 2.73 — строится липшицев гомоморфизм, у которого, вообще говоря, есть ядро. В случае C^*-алгебр все обстоит намного лучше: этот гомоморфизм является изоморфизмом, т.е. не только имеет нулевое ядро, но и сюръективен. Кроме того, этот изоморфизм сохраняет сопряжение и норму. Таким образом, в теореме Гельфанда алгебра A фактически отождествляется с пространством $C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Теорема 3.48 (Гельфанд)**.** *Если A — ненулевая коммутативная C^*-алгебра, то представление Гельфанда*

$$\Gamma\colon A \to C_0\big(\Omega(A)\big), \quad \Gamma\colon a \mapsto \widehat{a},$$

является изометричным $*$-изоморфизмом. Если при этом алгебра A унитальна, то $\Omega(A)$ — компакт, $C_0\big(\Omega(A)\big) = C\big(\Omega(A)\big)$ и изоморфизм Γ — унитальный.

Доказательство. Из теоремы 2.73 вытекает, что Γ — гомоморфизм алгебр, не увеличивающий норму, причем $\big|\Gamma(a)\big| = r(a)$ для каждого $a \in A$. Выберем произвольный характер $\tau \in \Omega(A)$, тогда, по определению отображение Γ, имеем $\Gamma(a^*)(\tau) = \tau(a^*)$. По теореме 3.46, каждый характер сохраняет отношение сопряженности, т.е.

$$\tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \overline{\Gamma(a)(\tau)} = \Gamma(a)^*(\tau).$$

Итак, мы показали, что $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$, т.е. Γ сохраняет сопряжение и, значит, является $*$-гомоморфизмом.

Далее, так как $C_0\big(\Omega(A)\big)$ — это C^*-алгебра (примеры 3.22), имеем

$$\big\|\Gamma(a)\big\|^2 = \big\|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\big\| = \big\|\Gamma(a^*)\Gamma(a)\big\| = \big\|\Gamma(a^*a)\big\| = r(a^*a).$$

По предложению 3.3, элемент a^*a эрмитов, поэтому, в силу теоремы 3.25, $r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, где последнее равенство — определяющее свойство C^*-алгебр. Таким образом, $\big\|\Gamma(a)\big\| = \|a\|$ для всех $a \in A$, поэтому Γ сохраняет норму, т.е. отображение Γ изометрично.

Покажем, что к образу $\Gamma(A)$ применима теорема 2.15 Вейерштрасса–Стоуна.

- Как мы уже отмечали, гомоморфный образ алгебры является подалгеброй.
- Покажем, что подалгебра $\Gamma(A)$ замкнута относительно сопряжений. Для этого заметим, что $\Gamma(a)$ переводит каждый характер τ в $\tau(a)$, поэтому надо проверить, что отображение $f\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$, $f\colon \tau \mapsto \overline{\tau(a)}$ также содержится в $\Gamma(A)$ (оно равно $\Gamma(a)^*$). Но, как было отмечено выше, $\overline{\tau(a)} = \tau(a^*)$, так что $f = \Gamma(a^*)$.
- Покажем, что $\Gamma(A)$ разделяет точки. Это означает, что для любых $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$, $\tau_1 \neq \tau_2$ существует такой $a \in A$, что $\Gamma(a)(\tau_1) \neq \Gamma(a)(\tau_2)$. Но последнее неравенство — это $\tau_1(a) \neq \tau_2(a)$, а существование $a \in A$, удовлетворяющего этому неравенству, вытекает из определения неравенства между τ_1 и τ_2.
- Покажем, что $\Gamma(A)$ нигде не зануляется. Это означает, что для любого $\tau \in \Omega(A)$ существует $a \in A$ такой, что $\Gamma(a)(\tau) \neq 0$. Но последнее неравенство — это $\tau(a) \neq 0$, что верно, так как в $\Omega(A)$ входят только ненулевые гомоморфизмы.

Итак, по теореме 2.15 Вейерштрасса–Стоуна, подалгебра $\Gamma(A)$ всюду плотна в $C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Наконец, покажем, что подалгебра $\Gamma(A)$ замкнута в $C_0\big(\Omega(A)\big)$. Пусть $f \in C_0\big(\Omega(A)\big)$ — точка прикосновения множества $\Gamma(A)$, тогда существует последовательность $\Gamma(a_n)$, сходящаяся к f. Но тогда последовательность $\Gamma(a_n)$ фундаментальна, и так как Γ — изометричное отображение, последовательность a_n также фундаментальна. Так как A — банахово пространство, последовательность a_n сходится к некоторому $a \in A$. Но непрерывное отображение Γ переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся. Следовательно, последовательность $\Gamma(a_n)$ сходится к $\Gamma(a)$. Так как пространство $C_0\big(\Omega(A)\big)$ хаусдорфово, имеем $f = \Gamma(a)$, т.е. $f \in \Gamma(A)$, что и доказывает замкнутость $\Gamma(A)$.

Итак, $\Gamma(A)$ — замкнуто и всюду плотно в $C_0\big(\Omega(A)\big)$, поэтому $\Gamma(A) = C_0\big(\Omega(A)\big)$.

Унитальность изоморфизма Γ для унитальной алгебры A вытекает из теоремы 2.73. □

3.5 Некоторые приложения представления Гельфанда

Пусть A — произвольная C^*-алгебра и $S \subset A$. Тогда, ***C^*-алгеброй $C^*(S)$, порожденной*** S, будем называть наименьшую C^*-подалгебру в A, содержащую S. Иными словами, $C^*(S)$ — это пересечение всех C^*-подалгебр в A, содержащих S. Если $a \in A$ и $S = \{a\}$, то $C^*(S)$ будем обозначать $C^*(a)$. Если же A унитальна, $a \in A$ и $S = \{a, 1\}$, то $C^*(S)$ обозначим $C^*(a, 1)$.

В силу предложения 2.7, если все элементы из S коммутируют, то банахова алгебра, порожденная S, коммутативна. Однако, в случае C^*-алгебр в алгебре $C^*(S)$ вместе с каждым элементом содержится и его сопряженный. Поэтому для коммутативности алгебры $C^*(S)$ не достаточно, чтобы элементы из S коммутировали: нужно требовать, чтобы коммутировали элементы из $S \cup S^*$, где $S^* = \{a^*\}_{a\in S}$, в частности, должны коммутировать a и a^*. Напомним, что элемент a, коммутирующий со своим сопряженным a^*, называется ***нормальным***. Таким образом, алгебры $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$ коммутативны, если и только если элемент a нормален.

Предложение 3.49. *Пусть A — произвольная C^*-алгебра и $a \in A$ — ее нормальный элемент. Тогда $C^*(a)$ — коммутативная C^*-подалгебра в A. Если алгебра A унитальна, то $C^*(a, 1)$ — коммутативная унитальная C^*-подалгебра в A. Более того, все элементы алгебр $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$ — нормальные.*

Доказательство. Коммутативность этих алгебры мы уже обсудили. Далее, в силу предложения 3.5, многочлены от нормального элемента $a \in A$ и его сопряженного a^* — нормальные элементы в A. По аналогии с доказательством предложения 2.7 заключаем, что для нормального элемента $a \in A$ все элементы алгебр $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$ также являются нормальными. □

В дальнейшем мы воспользуемся представлением Гельфанда для коммутативных алгебр $C^*(a)$ и $C^*(a, 1)$, определенных для нормального элемента a. Однако возникает важная проблема: в представлении Гельфанда существенную роль играет спектр элемента a. Однако, если вычислять это спектр в подалгебрах $C^*(a)$ или $C^*(a, 1)$, то спектр, вообще говоря, мог бы оказаться отличным от $\sigma_A(a)$, что привело бы к дополнительным трудностям (см. теорему 2.46). Однако, в унитальных C^*-алгебрах для C^*-подалгебр, содержащих единицу, такое случиться не может.

Теорема 3.50. *Пусть B — это C^*-подалгебра унитальной C^*-алгебры A, причем B содержит единицу алгебры A. Тогда для каждого $b \in B$ выполняется $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.*

Доказательство. Заметим, что утверждение теоремы эквивалентно следующему: каждый элемент $b \in B$ обратим в B тогда и только тогда, когда он обратим в A. Действительно, если $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для всех $b \in B$, то учитывая, что обратимость элемента равносильна отсутствию 0 в спектре этого элемента, получаем справедливость утверждения про обратимость. Обратно, если верно утверждение про обратимость, то для каждого $b \in B$ элемент $b - \lambda$ обратим в B, если и только если он обратим в A, а это в точности означает, что $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

Итак, пусть сначала b — эрмитов элемент, тогда, по теореме 3.45, имеем $\sigma_A(b) \subset \mathbb{R}$, поэтому, рассматривая $\sigma_A(b)$ как подмножество $\mathbb{C}$, заключаем, что $\sigma_A(b)$ не имеет дыр, откуда, в силу теоремы 2.46, выполняется $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. Таким образом, для эрмитовых элементов из B показано, что их обратимость в B равносильна их обратимости в A.

Пусть теперь $b \in B$ — произвольный элемент. Если b обратим в B, то он обратим и в A. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда b обратим в A и показать, что он также обратим и в B. Так как b обратим в A, существует $a \in A$ такой, что $ab = ba = 1$, но тогда $a^*b^* = b^*a^* = 1$ и, значит, $bb^*a^*a = a^*abb^* = 1$, откуда bb^* обратим в A. Так как bb^* эрмитов, из показанного выше вытекает, что bb^* также обратим и в B. Следовательно, существует $c \in B$ такой, что $bb^*c = cbb^* = 1$, откуда $abb^*c = a = b^*c$ и, значит, $a \in B$. Итак, мы показали, что элемент b обратим в B, что и требовалось. $\square$

Приведем еще одно утверждение, демонстрирующее отличие C^*-алгебр от банаховых алгебр (см. пример 2.41).

Предложение 3.51. *Пусть A — произвольная C^*-алгебра и $a \in A$ — ее нормальный элемент. Тогда $r(a) = \|a\|$.*

Доказательство. По определению, спектр элемента a неунитальной алгебры равен его в спектру в унитализации. Отметим, что спектр не зависит от выбора нормы. С другой стороны, в силу теоремы 3.42, на $\widetilde{A}$ существует (единственная) норма, которая превращает $\widetilde{A}$ в C^*-алгебру. Имея в виду все сказанное, будем сразу предполагать, что алгебра A.

Так как элемент $a\,a^*$ — эрмитов, то, в силу теоремы 3.25, имеем $r(a\,a^*) = \|a\,a^*\| = \|a\|^2$. С другой стороны, по теореме 2.42, выполняется $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$. Далее,

$$\big(r(a)\big)^2 = \Big(\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}\Big)^2 = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{2/n} = \lim_{n\to\infty} \big\|a^n(a^n)^*\big\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \big\|(a\,a^*)^n\big\|^{1/n} = r(a\,a^*) = \|a\|^2,$$

откуда и вытекает требуемое. $\square$

Пусть A — унитальная алгебра и $a \in A_{sa}$ — эрмитов элемент. Напомним, что элемент $u \in A$ называется ***унитарным***, если $u\,u^* = u^*u = 1$. По предложению 3.20, элемент e^{ia} является унитарным. Однако, не любой унитарный элемент имеет такой вид (приведем пример существенно позже). Следующая теорема дает достаточное условие того, что унитарный элемент имеет “логарифм”, т.е. представим в виде e^{ia} для некоторого эрмитова a. Приводимое ниже доказательство этой теоремы использует представление Гельфанда. Напомним, что, в силу предложения 3.21, спектр $\sigma(u)$ унитарного элемента u из C^*-алгебры содержится в единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$.

Теорема 3.52. *Пусть u — унитарный элемент унитальной C^*-алгебры A. Предположим, что $\sigma(u) \neq S^1$, например, это имеет место, если $\|1-u\| < 2$. Тогда существует $a \in A_{sa}$ такой, что $u = e^{ia}$.*

Доказательство. Отметим, что для каждого $\lambda = e^{i\psi} \in S^1$ элемент λu также унитарен. Более того, u обладает логарифмом a, если и только если λu обладает логарифмом $a + \psi 1$, при этом a и $a + \psi 1$ одновременно лежат в A_{sa}. Итак, для доказательства мы можем выбрать любой элемент λu. По предложению 2.29, $\sigma(\lambda u) = \lambda\,\sigma(u)$. Выберем λ так, чтобы $-1 \notin \sigma(\lambda u)$. Из сказанного вытекает, что без ограничения общности, можно сразу предполагать справедливым $-1 \notin \sigma(u)$, и именно это мы и будем делать.

Далее, так как u — нормальный элемент, то подалгебра $C^*(u,1)$ коммутативна. Мы докажем, что именно в этой подалгебре можно найти логарифм. Для удобства заменим A на $C^*(u,1)$, т.е. будем сразу предполагать, что A коммутативна.

Пусть $\Omega = \Omega(A)$ — пространство характеров алгебры A. Так как A унитальна, то, в силу теоремы 2.63, пространство Ω компактно, так что $C_0(\Omega) = C(\Omega)$. Пусть $\Gamma\colon A \to C(\Omega)$ — представление Гельфанда. Положим $f = \Gamma(u)$.

Через $\ln\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ обозначим главную ветвь многозначной функции комплексного логарифма, т.е. если $z = \rho e^{i\theta}$, где $-\pi < \theta < \pi$, то $\ln z = \ln\rho + i\theta$. По теореме 2.73, $f(\Omega) = \sigma(u) \subset S^1 \setminus \{-1\}$, поэтому корректно определена функция $g := \ln\circ f \in C(\Omega)$, так что $f = e^g$. Так как $|f(\tau)| = 1$ для всех $\tau \in \Omega$, то $g = ih$ для некоторой вещественной функции $h \in C(\Omega)$. Так как, по теореме 3.48, отображение Γ — это изометрический $*$-изоморфизм, определен элемент $a = \Gamma^{-1}(h)$ и $a^* = \Gamma^{-1}(\bar h) = \Gamma^{-1}(h) = a$, так что $a \in A_{sa}$. Из определения экспоненты элемента унитальной банаховой алгебры и свойств отображения Γ вытекает, что каждый начальный отрезок ряда, определяющего e^{ia}, переводится Γ в соответствующий начальный отрезок ряда, определяющего e^g, и так как Γ является изометрией, эти начальные отрезки сходятся к экспонентам, первая из которых переводится Γ во вторую, т.е. $\Gamma(e^{ia}) = e^g$. Таким образом, $\Gamma(u) = e^g = \Gamma(e^{ia})$, откуда $u = e^{ia}$ в силу биективности Γ.

Покажем теперь, что если $\|1-u\| < 2$, то $\sigma(u) \neq S^1$. Действительно, по следствию 2.49, имеем $r(1-u) \le \|1-u\| < 2$. В силу предложения 2.29, имеем $\sigma(1-u) = 1 - \sigma(u)$, поэтому $r(1-u) = \sup_{\lambda\in\sigma(u)} |1-\lambda|$, так что если $-1 \in \sigma(u)$, то $r(1-u) \ge 2$, противоречие. $\square$

Литература

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[4] Rieffel M.A. *Metrics on states from actions of compact groups.* Doc. Math., 1998, v. 3, 215–229, см. также arXiv:math/9807084 [math.OA].

[5] Rieffel M.A. *Metrics on state spaces*, Doc. Math., 1999, v. 4, pp. 559—600, см. также arXiv:math/9906151 [math.OA].

[6] Rieffel M.A. *Gromov—Hausdorff distance for quantum metric spaces.* Mem. Amer. Math. Soc., 2004, v. 168, pp. 1—65, см. также arXiv:math/0011063 [math.OA].

[7] Kerr D. *Matricial quantum Gromov-Hausdorff distance.* J. Funct. Anal., 2003, v. 205, no. 1, pp. 132-–167, см. также arXiv:math/0207282 [math.OA].

[8] Kerr D., Li H. *On Gromov–Hausdorff convergence of operator metric spaces.* J. Oper. Theory, 2009, v. 1, no. 1, 83—109, см. также arXiv:math/0411157 [math.OA].

[9] Wu W. *Non-commutative metrics on state spaces*, J Ramanujan Math. Soc., 2005, v. 20, no. 3, pp. 215-–214, см. также arXiv:math/0411475 [math.OA].

[10] Wu W. *Non-commutative metric topology on matrix state spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 2006, v. 134, no. 2, pp. 443–453, см. также arXiv:math/0410587 [math.OA].

[11] Wu W. *Quantized Gromov-Hausdorff distance.* J. Funct. Anal. 2006, v. 238, no. 1, pp. 58-–98, см. также arXiv:math/0503344 [math.OA].

[12] Paulsen V., Tomforde M. *Vector spaces with an order unit.* ArXiv:0712.2613 [math.OA].

[13] Putnam I.F. *Lecture Notes on C^*-algebras.*
`https://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf`

[14] Kesavan S. *Functional Analysis*, Hindustan Book Agency, 2009.

[15] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов.* Факториал, 1997.

[16] Pedersen G. K. *C*-algebras and their automorphism groups.* London: Academic Press, 1979.

[17] Kadison R.V. *A representation theory for commutative topological algebra.* Mem. Amer. Math. Soc., no. 7, 1951.