

Реализация топологических инвариантов интегрируемыми бильярдными книжками**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич*****Харчева Ирина Сергеевна****Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: irina_harcheva@mail.ru

Рассмотрим произвольную компактную область Ω в плоскости с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется внутри этой области Ω по прямой с постоянной скоростью и отражается о гладкую часть границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. Тогда *бильярдом в области Ω* называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки. Эта динамика задает гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω . У бильярда есть один первый интеграл – гамильтониан, равный половине квадрата модуля вектора скорости. Значит, бильярд является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для ее интегрируемости необходим еще один первый интеграл.

Важным классом интегрируемых бильярдных областей является бильярд в области Ω , ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол, или *элементарный бильярд*. Оказывается, в таком бильярде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к каустике — фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл Λ , независимый с предыдущим, — параметр каустики, и система будет интегрируемой по Лиувиллю.

Бильярдная книжка — это обобщение бильярда, полученное склейкой нескольких элементарных бильярдных областей вдоль их границ. Первые интегралы на элементарном бильярде порождают первые интегралы на бильярдной книжке. Таким образом, можно показать, что бильярдная книжка также является системой, интегрируемой по Лиувиллю, но в отличие от элементарного бильярда, динамика бильярдной книжки устроена сложнее.

Для динамических систем, интегрируемых по Лиувиллю, определены топологические инварианты Фоменко-Цишанга: атомы, f -графы, грубые и меченые молекулы (см. [1]). Они позволяют выявлять лиувиллеву эквивалентность таких систем.

На докладе будет рассматриваться вопрос о реализации бильярдными книжками систем, интегрируемых по Лиувиллю, в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга. Будет предъявлен алгоритм реализации произвольной бифуркации в терминах 3-атомов (см. [2]) или, их эквивалентов, f -графов. Кроме того, этот алгоритм расширяется до алгоритма реализации произвольной грубой молекулы.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (№17-11-01303) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Источники и литература

- 1) Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко - том 1. Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

- 2) Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева - Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56.