

Лекции по геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

16 декабря 2021 г.
11:17:50

Оглавление

1	Введение	2
1.1	Расстояние Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа	2
1.1.1	Общее устройство обобщенных псевдометрических пространств	2
1.1.2	Базовые подмножества обобщенных псевдометрических пространств	3
1.1.3	Расстояние Хаусдорфа	4
1.1.4	Расстояние Громова–Хаусдорфа	5
1.1.5	Элементы теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя	5
1.1.6	Расстояние Громова–Хаусдорфа и соответствия	7
1.1.7	Обобщенная псевдометрика Громова–Хаусдорфа является внутренней	9
1.1.8	Неприводимые соответствия	10
1.1.9	Пространство Громова–Хаусдорфа	12
2	Изометричные отображения в классе Громова–Хаусдорфа	16
2.1	Группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа	16
2.1.1	Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов	22
2.1.2	Симплексы большей мощности	23
2.1.3	Симплексы не большей мощности	23
2.1.4	Равномощные симплексы	25
2.2	Пространства $\mathcal{E}_n(\lambda)$ и $\mathcal{F}_n(\lambda)$ для произвольной мощности $n \geq 2$	25
2.3	Представление конечных метрических пространств векторами расстояний	27
2.4	Векторы расстояний общих метрических пространств	29
2.5	Пространства общего положения и изометрии: случай $\mathcal{M}$	35
2.6	Алгебраическое завершение доказательства	38
	Литература	40

Лекция 1

Введение

План. Функция расстояния, обобщенная псевдометрика, обобщенная метрика, (конечные) псевдометрика и метрика, (обобщенное) (псевдо-)метрическое пространство, облака, факторизация, открытый шар, замкнутый шар, сфера; для подмножества топологического пространства: точка прикосновения, внутренняя точка, граничная точка, замыкание, внутренность, граница; открытая s -окрестность, замкнутая s -окрестность, расстояние Хаусдорфа, гиперпространства, диаметр обобщенного псевдометрического пространства, ограниченные, полные и вполне ограниченные обобщенные псевдометрические пространства, компактное топологическое и метрическое пространства, ограниченно компактное метрическое пространство, реализация пары метрических пространств, расстояние Громова–Хаусдорфа, теория множеств фон Неймана–Бернаиса–Гёделя, перенесение на классы функции расстояния, а также (обобщенной) (псевдо-)метрики, классы, фильтрующие множества, топология на классе, фильтрующемся множествами, топологический класс, топологическое пространство, непрерывные отображения из топологических пространств в топологические классы, непрерывные кривые в топологическом классе, внутренние и строго внутренние (обобщенные) (псевдо-)метрики на классе, собственный класс метрических пространств и собственный класс ограниченных метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрий), отношения и соответствия, искажение отношения и соответствия между метрическими пространствами, второе определение расстояния Громова–Хаусдорфа, простейшие свойства расстояния Громова–Хаусдорфа, кратчайшие и ε -кратчайшие кривые, обобщенная псевдометрика класса Громова–Хаусдорфа — внутренняя, неприводимые соответствия, их существование и примеры использования, пространство Громова–Хаусдорфа, всюду плотное подмножество топологического пространства, сепарабельность, польское метрическое пространство, свойства пространства Громова–Хаусдорфа, число покрытия, число упаковки, связь между этими числами, критерий Громова предкомпактности, оптимальные соответствия, кратчайшие геодезический в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Мы предполагаем, что слушатели нашего курса знакомы с основами общей топологии [1] и метрической геометрии [2]. Цель наших лекций — познакомить слушателей с современными работами, посвященными геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа [3]. Начнем с напомним базовых понятий и результатов.

1.1 Расстояние Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать мощность X , а через $\mathcal{P}_0(X)$ — множество всех **непустых** подмножеств X . **Функцией расстояния на множестве X** будем называть каждое симметричное отображение $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, равное нулю на парах одинаковых элементов, т.е. $d(x, y) = d(y, x)$ и $d(x, x) = 0$ для любых $x, y \in X$.

- Если d еще и удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ для любых $x, y, z \in X$, то d называется **обобщенной псевдометрикой**.
- Если, кроме того, $d(x, y) > 0$ для всех $x \neq y$, то d называется **обобщенной метрикой**.
- Если $d(x, y) < \infty$ для всех $x, y \in X$, то слово “обобщенная” опускают. Также, если желают подчеркнуть это свойство, добавляют слово “конечная”. Таким образом, получаются **конечная псевдометрика** или просто **псевдометрика**, а также **конечная метрика** или просто **метрика**.

Множество X , на котором задана (обобщенная) (псевдо-)метрика, называется **(обобщенным) (псевдо-)метрическим пространством**.

Если X — пространство с некоторой функцией расстояния, то, как правило, это расстояние между точками x и y будем обозначать через $|xy|$.

1.1.1 Общее устройство обобщенных псевдометрических пространств

Опишем устройство обобщенных псевдометрических пространств. Для этого рассмотрим на таком пространстве X два отношения эквивалентности. Первое ставит в отношение все те пары точек, расстояния между которыми конечно. Классы этой эквивалентности будем называть **облаками**. Ясно, что ограничение функции расстояния на каждое облако представляет собой конечную псевдометрику.

Упражнение 1.1. Покажите, что расстояние между любыми точками из разных облаков равно бесконечности, и что каждое облако является открыто-замкнутым подмножеством.

Таким образом, каждое обобщенное псевдометрическое пространство представимо как дизъюнктивное объединение псевдометрических пространств.

Второе отношение эквивалентности устанавливается между каждой парой точек, находящихся на нулевом расстоянии. Ясно, что соответствующее разбиение пространства X является подразбиением, порожденным первой эквивалентностью.

Упражнение 1.2. Покажите, что расстояния между точками из двух классов второй эквивалентности не зависят от выбора этих точек, и что классы этой эквивалентности являются замкнутыми подмножествами, причем ограничение обобщенной псевдометрики на каждый класс порождает антидискретную топологию. В частности, каждый такой класс является линейно связным подмножеством.

Из упражнения вытекает, что если на множестве классов второй эквивалентности ввести расстояние, равное расстоянию между любыми их представителями, то получим обобщенное метрическое пространство, а его подпространство, порожденное облаком, является метрическим пространством. Переход к классам эквивалентности называется **факторизацией**. Таким образом, отфакторизованное по второй эквивалентности обобщенное псевдометрическое пространство распадается в дизъюнктивное объединение метрических пространств, находящихся на бесконечном расстоянии друг относительно друга.

1.1.2 Базовые подмножества обобщенных псевдометрических пространств

Далее, напомним определения важных подмножеств обобщенных псевдометрических пространств. Всюду ниже, если не оговорено противное, X — обобщенное псевдометрическое пространство. Для $s > 0$ и $r \geq 0$ подмножество

- $U_s(x) = \{y \in X : |xy| < s\}$ называется **открытым шаром с центром в x радиуса s** ;
- $B_r(x) = \{y \in X : |xy| \leq r\}$ — **замкнутым шаром с центром в x радиуса r** ;
- $S_r(x) = \{y \in X : |xy| = r\}$ — **сферой с центром в x радиуса r** ,

причем если $r = 0$, то соответствующие замкнутый шар и сфера называются **вырожденными**, а если $r > 0$ — **невыврожденными**.

Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Точка $x \in X$ называется

- **точкой прикосновения для A** , если каждая ее окрестность пересекает A ;
- **внутренней точкой для A** , если некоторая ее окрестность содержится в A ;
- **граничной точкой для A** , если каждая ее окрестность пересекает как A , так и его дополнение.
- Множество всех точек прикосновения A называется **замыканием A** и представляет собой наименьшее замкнутое множество, содержащее A , т.е. пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Замыкание A будем обозначать $\bar{A}$.
- Множество всех внутренних точек A называется **внутренностью A** и является наибольшим открытым множеством, содержащимся в A . Внутренность A будем обозначать $\text{Int } A$.
- Множество всех граничных точек A называется **границей A** (имеется много разных формул, связывающих границу с внутренностями и замыканиями, см. [1]). Границу множества A будем обозначать ∂A .

Упражнение 1.3. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, $r \geq 0$ и $s > 0$. Покажите, что

- $\partial U_s(x)$ и $\partial B_s(x)$ не связаны никаким включением,
- $\partial U_s(x) \subset S_s(x)$,
- $\partial B_r(x) \subset S_r(x)$,

причем оба предыдущих включения могут быть строгими.

Определим теперь открытые и замкнутые окрестности непустого подмножества $A \subset X$:

- для $x \in X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$;
- $U_s(A) = \{x \in X : |xA| < s\}$ называется **открытой s -окрестностью множества A** ;
- $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \leq r\}$ называется **замкнутой r -окрестностью множества A** .

Упражнение 1.4. Покажите, что $U_s(A) = \cup_{a \in A} U_s(a)$, а $B_r(A)$ равно замыканию множества $\cup_{a \in A} B_r(a)$.

1.1.3 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — метрическое пространство. Определим на множестве $\mathcal{P}_0(X)$ всех непустых подмножеств из X функцию расстояния $d_H : \mathcal{P}_0(X) \times \mathcal{P}_0(X) \rightarrow [0, \infty]$, которая называется **расстоянием Хаусдорфа**. Приведем три эквивалентных определения: для любых $A, B \in \mathcal{P}_0(X)$ положим

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset U_\varepsilon(B), B \subset U_\varepsilon(A)\}; \\ d_H(A, B) &= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon(B), B \subset B_\varepsilon(A)\}; \\ d_H(A, B) &= \max\left\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab|\right\}. \end{aligned}$$

Множество $\mathcal{P}_0(X)$, наделенное расстоянием Хаусдорфа, а также различные его подмножества будем называть **гиперпространствами**.

Упражнение 1.5. Докажите эквивалентность трех приведенных выше определений расстояния Хаусдорфа.

Пусть $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}_0(X)$ обозначает семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X .

Теорема 1.6 ([2]). *Если X — метрическое пространство, то d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Напомним, что **диаметром** обобщенного псевдометрического пространства X называется точная верхняя грань расстояний между его точками. Диаметр X обозначим $\text{diam } X$.

Обобщенное псевдометрическое пространство X называется

- **ограниченным**, если его диаметр конечен: $\text{diam } X < \infty$;
- **полным**, если каждая его фундаментальная последовательность сходится;
- **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε -сеть, т.е. такое конечное подмножество $S \subset X$, что $U_\varepsilon(S) = X$.

Далее,

- топологическое пространство называется **компактным**, если из каждого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие (для метрических пространств это равносильно одновременной полноте и полной ограниченности);
- обобщенное псевдометрическое пространство называется **ограниченно компактным**, если компактными являются в точности все его замкнутые ограниченные подмножества.

Теорема 1.7 ([2]). *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

- пространство $\mathcal{H}(X)$ — полное, если и только если X — полное;
- пространство $\mathcal{H}(X)$ вполне ограничено, если и только если X вполне ограничено;
- пространство $\mathcal{H}(X)$ компактное, если и только если X компактное;
- пространство $\mathcal{H}(X)$ ограниченно компактное, если и только если X ограниченно компактное.

1.1.4 Расстояние Громова–Хаусдорфа

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z) , состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y' , изометричных соответственно X и Y , назовем **реализацией пары** (X, Y) . **Расстоянием** $d_{GH}(X, Y)$ **по Громову–Хаусдорфу** между X и Y назовем точную нижнюю грань чисел r , для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \leq r$.

Теорема 1.8 ([2]). *Расстояние Громова–Хаусдорфа может принимать как конечные, так и бесконечные значения, а также всегда удовлетворяет неравенству треугольника. Кроме того, это расстояние равно нулю на каждой паре изометричных пространств, поэтому, в силу неравенства треугольника, расстояние Громова–Хаусдорфа корректно определено на классах изометрии метрических пространств: оно не зависит от выбора представителей этих классов.*

Замечание 1.9. Легко построить пару неизометричных пространств, расстояние между которыми равно нулю. Например, это имеет место для отрезка $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$. Более общо, это верно для любых двух непустых подмножеств метрического пространства, у которых совпадают замыкания (проверьте). Имеются и более интересные примеры. Так, существуют неизометричные ограниченно компактные метрические пространства, расстояние между которыми зануляется, см. [4].

Так как на каждом множестве можно определить некоторую метрику, например, положив все расстояния между разными точками равными 1, классов изометрии метрических пространств “столько же”, сколько и всех возможных кардинальных чисел (множеств, рассматриваемых с точностью до биекции), т.е. все эти классы не образуют множество, а образуют класс, который, вместе с расстоянием Громова–Хаусдорфа, мы обозначим через $\mathcal{GH}$. Здесь мы используем понятие **класс** в смысле системы аксиом теории множеств фон Неймана–Бернаиса–Гёделя (NBG). Напомним некоторые положения этой системы, см. [5], а также [6].

1.1.5 Элементы теории множеств фон Неймана–Бернаиса–Гёделя

В NBG все объекты, аналоги обычных множеств, называются **классами**. Классы бывают двух типов: **множества** и **собственные классы**. Пример собственного класса — класс всех множеств. В соответствии с конструкцией Гёделя, отличить множество от собственного класса можно так: для множества всегда существует класс, содержащий это множество в качестве элемента. Для собственного класса такого класса не существует. Таким образом, элементы каждого класса — это множества. Примером собственного класса является класс, состоящий из всех множеств.

Для классов определены многие стандартные операции, например, пересечение, дополнение (для каждого класса существует класс, состоящий в точности из тех элементов, которые не входят в первый), произведения, отображения и др. Теорема фон Неймана утверждает, что класс является собственным, если и только если его можно отображать сюръективно на класс всех множеств.

Отметим, что такие понятия как **функция расстояния**, **(обобщенная) псевдометрика** и **(обобщенная) метрика** определяются для каждого класса, как являющегося множеством, так и собственного, так как произведения и отображения определены для всех классов. Однако с определением других структур на собственных классах могут возникнуть сложности. Так например, если пытаться определить топологию на некотором собственном классе $\mathcal{A}$ обычным образом, то, с одной стороны, класс $\mathcal{A}$ должен быть элементом топологии, но тогда, с другой стороны, $\mathcal{A}$ обязан быть множеством.

Чтобы обойти эту проблему, мы, для каждого класса $\mathcal{A}$, будем рассматривать “фильтрацию” на подклассы $\mathcal{A}_n$, каждый из которых состоит из всех элементов $\mathcal{A}$, имеющих мощность не большую, чем n , где n — кардинальное число. Напомним, что элементами класса являются множества и, значит, для них определено понятие мощности. Основными примерами классов будут для нас определенный выше класс $\mathcal{GH}$, а также класс $\mathcal{B}$, состоящий из всех ограниченных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 1.10. *Классы $\mathcal{GH}_n$ и $\mathcal{B}_n$ являются множествами для любого кардинального числа n .*

Доказательство. Действительно, семейство всех кардиналов, не превосходящих данного, представляет собой множество, а для каждого кардинала n семейство всех классов изометричности метрических пространств мощности n “не больше”, чем множество всех подмножеств в $X \times X \times \mathbb{R}$, где X — произвольное множество мощности n . $\square$

Определение 1.11. Класс $\mathcal{A}$, для которого все подклассы $\mathcal{A}_n$ являются множествами, назовем **фильтрующим множеством**.

Отметим следующий очевидный факт: если класс $\mathcal{A}$ является множеством, то он фильтруется множествами. До конца этого раздела, если не оговорено противное, $\mathcal{A}$ обозначает класс, фильтрующийся множествами. Говоря, что этот класс удовлетворяет тем или иным свойствам, мы будем иметь в виду следующее: каждое из этих свойств имеет место в каждом множестве $\mathcal{A}_n$.

Пример 1.12. Пусть на $\mathcal{A}$ задана обобщенная псевдометрика, тогда она индуцирует “обычную” обобщенную псевдометрику на каждом множестве $\mathcal{A}_n$. Таким образом, на каждом $\mathcal{A}_n$ определены и являются множествами все соответствующие объекты метрической геометрии (см. выше), например, открытые шары. Последнее позволяет задать на $\mathcal{A}_n$ “метрическую топологию” τ_n , взяв эти шары в качестве базы. Ясно, что если $m < n$, то τ_m — топология, индуцированная из τ_n .

Определение 1.13. *Топологией* на $\mathcal{A}$ будем называть такое сопоставление каждому $\mathcal{A}_n$ некоторой топологии τ_n , для которого выполняется **условие согласования**: если $m < n$, то τ_m — топология, индуцированная из τ_n . Класс $\mathcal{A}$, для которого задана топология, назовем **топологическим классом**. Если $\mathcal{A}$ является множеством некоторой мощности n , то $(\mathcal{A}, \tau_n)$ — обычное топологическое пространство, а все τ_m , $m < n$, — индуцированные из τ_n топологии на соответствующих подмножествах $\mathcal{A}_m$. Такой топологический класс $\mathcal{A}$ будем называть традиционно **топологическим пространством**.

Конструкция 1.14 (Сходимость последовательности в топологическом классе). Наличие топологии на классе $\mathcal{A}$ позволяет определить сходимость последовательности $x_1, x_2, \dots$ в $\mathcal{A}$. Это можно сделать следующим образом. Будем говорить, что последовательность $x_1, x_2, \dots$ элементов из $\mathcal{A}$ **сходится**, если существуют кардинал n и $x \in \mathcal{A}_n$ такие, что все x_i лежат в $\mathcal{A}_n$, и последовательность $x_1, x_2, \dots$ сходится к x в соответствующей топологии τ_n . Отметим также, что если топология задается обобщенной псевдометрикой, как в случае $\mathcal{A} = \mathcal{GH}$, то сходимость равносильна существованию $x \in \mathcal{A}$, для которого $|x_i x| \rightarrow 0$ (проверьте).

Для удобства изложения, будем пользоваться следующими обозначениями: если x_i — последовательность в топологическом классе $\mathcal{A}$, и x_i сходится к $x \in \mathcal{A}$, то будем писать $x_i \xrightarrow{\mathcal{A}} x$. В частности, сходимость в классе Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}$ будет записываться в виде $x_i \xrightarrow{\mathcal{GH}} x$.

Замечание 1.15. Для любой последовательности $x_1, x_2, \dots$ в топологическом классе $\mathcal{A}$, в силу аксиомы объединения (axiom of union), $\cup_{i \in \mathbb{N}} x_i$ — множество некоторой мощности n . Так как каждый x_i лежит в этом множестве, его мощность не превосходит n , поэтому все x_i лежат в $\mathcal{A}_n$. Тем не менее, предельная точка $x \in \mathcal{A}$ может не лежать в $\mathcal{A}_n$.

Например, стационарная последовательность, элементы которой — множества рациональных чисел, сходится в смысле расстояния Громова–Хаусдорфа и ко всей прямой $\mathbb{R}$, мощность которой больше, чем у всех элементов последовательности. Более общо, если определить расстояние Громова–Хаусдорфа для псевдометрических пространств, то предельное пространство можно выбрать сколь угодно большой мощности: действительно, вместо точки псевдометрического пространства можно рассмотреть произвольное множество точек, находящихся друг относительно друга на нулевом расстоянии, а от всех остальных — на том же расстоянии, что и замененная точка. Полученное псевдометрическое пространство будет находиться от исходного на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа.

Оказывается, в $\mathcal{GH}$ такого случиться не может. Отметим, что множество всех предельных точек последовательности в топологии, заданной псевдометрикой, состоит из всех точек, находящихся от любой предельной на нулевом расстоянии. Таким образом, ограниченность мощности всех предельных точек последовательности в $\mathcal{GH}$ вытекает из следующей теоремы, доказанной О.Б.Борисовой [8].

Теорема 1.16 ([8]). *Для любого метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ существует кардинал n такой, что мощность каждого $Z \in \mathcal{GH}$, $d_{GH}(X, Z) = 0$, не превосходит n . В частности, класс всех таких Z является множеством.*

Конструкция 1.17 (Непрерывное отображение в топологический класс). Также определенная выше топология на классе $\mathcal{A}$ дает возможность определить непрерывные отображения из некоторого топологического пространства Z в класс $\mathcal{A}$. Это определение основано на следующем результате.

Предложение 1.18. *Для произвольного отображения $f: Z \rightarrow \mathcal{A}$ из множества Z существует кардинальное число n такое, что $f(Z) \subset \mathcal{A}_n$. Таким образом, мы фактически имеем отображение из множества Z в множество $\mathcal{A}_n$.*

Доказательство. В соответствии с аксиомами NBG,

- образ $f(Z)$ является множеством (аксиома замены, axiom of replacement);
- так как все элементы из $f(Z)$ — множества, их объединение $\cup f(Z)$ — множество некоторой мощности n (аксиома объединения, axiom of union);
- таким образом, каждый элемент из $f(Z)$, являясь подмножеством в $\cup f(Z)$, также имеет мощность, не превосходящую n , потому, $f(Z) \subset \mathcal{A}_n$.

□

Определение 1.19. Отображение $f: Z \rightarrow \mathcal{A}$ из топологического пространства Z в топологический класс $\mathcal{A}$ назовем **непрерывным**, если f непрерывно как отображение из Z в $\mathcal{A}_n$.

Замечание 1.20. Из условия согласования вытекает, что для каждого $m \neq n$ такого, что $f(Z) \subset \mathcal{A}_m$, отображение f также является непрерывным.

Предыдущие рассуждения позволяют определить **непрерывные кривые в топологическом классе $\mathcal{A}$** . Если же топология порождается обобщенной псевдометрикой, то у каждой непрерывной кривой γ стандартным образом определяется ее длина $|\gamma|$ и, соответственно, понятие внутренней и строго внутренней псевдометрики. А именно, будем говорить, что эта обобщенная псевдометрика **внутренняя**, если для любых элементов из $\mathcal{A}$, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, расстояние между ними равно точной нижней грани длин кривых, их соединяющих. Если же каждая пара элементов из $\mathcal{A}$, находящихся на конечном расстоянии, соединяется (кратчайшей) кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами, то такая обобщенная псевдометрика называется **строго внутренней**, а класс $\mathcal{A}$ с этой функцией расстояния — **геодезическим**.

Отметим, что для упрощения обозначений, удобно не различать классы изометрии метрических пространств и конкретных их представителей. Выше мы уже пользовались таким соглашением, определяя $\mathcal{B}$ как класс ограниченных метрических пространств, **рассматриваемых с точностью до изометрии**. Ниже мы неоднократно будем использовать это отождествление и будем, например, писать $X \in \mathcal{GH}$, а понимать под X конкретное метрическое пространство.

1.1.6 Расстояние Громова–Хаусдорфа и соответствия

Как правило, вычислить расстояние Громова–Хаусдорфа между конкретными метрическими пространствами очень тяжело, и к настоящему времени оно известно лишь для немногих пар пространств, см. например [21]. Наиболее полезным для конкретных вычислений является другое (эквивалентное) определение расстояния Громова–Хаусдорфа, которое мы сейчас приведем. Напомним, что **отношением** между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Таким образом, $\mathcal{P}_0(X \times Y)$ — это множество всех непустых отношений между X и Y .

Определение 1.21. Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ и $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ назовем **искажением** $\text{dis } \sigma$ **отношения σ** величину

$$\text{dis } \sigma = \sup \left\{ \left| |xx'| - |yy'| \right| : (x, y), (x', y') \in \sigma \right\}.$$

Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y называется **соответствием**, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X: (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y: (x, y) \mapsto y$ сюръективны. Иными словами, соответствие — это сюръективное многозначное отображение. Множество всех соответствий между X и Y обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$.

Теорема 1.22 ([2]). Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ имеем

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \}.$$

Имеют место следующие оценки, которые легко проверить с помощью теоремы 1.22. Обозначим через Δ_1 одноточечное метрическое пространство. Также для пространства $X \in \mathcal{GH}$ и вещественного числа $\lambda > 0$ через λX обозначим то же самое множество, но с функцией расстояния, умноженной на λ . Если же $\lambda = 0$ и $\text{diam } X < \infty$, то положим $\lambda X = \Delta_1$.

Утверждение 1.23 ([2]). Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется

$$(1) \quad 2d_{GH}(\Delta_1, X) = \text{diam } X;$$

- (2) $2d_{GH}(X, Y) \leq \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$;
- (3) если диаметр X или Y конечен, то $|\text{diam } X - \text{diam } Y| \leq 2d_{GH}(X, Y)$.
- (4) если диаметр X конечен, то для любых $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \text{diam } X$, откуда мгновенно вытекает, что кривая $\gamma(t) := tX$ является кратчайшей между любыми своими точками, причем длина такого отрезка кривой равна расстоянию между его концами;
- (5) для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$. Если $X, Y \in \mathcal{B}$, то это же равенство определено и выполняется также при $\lambda = 0$. Заметим, что единственным пространством $X \in \mathcal{B}$, для которого λX изометрично X при всех $\lambda > 0$, является одноточечное пространство Δ_1 . Таким образом, операция умножения метрики на число $\lambda \geq 0$ является гомотетией пространства $\mathcal{B}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.

На рис. 1.1 изображена схема собственного класса Громова–Хаусдорфа.

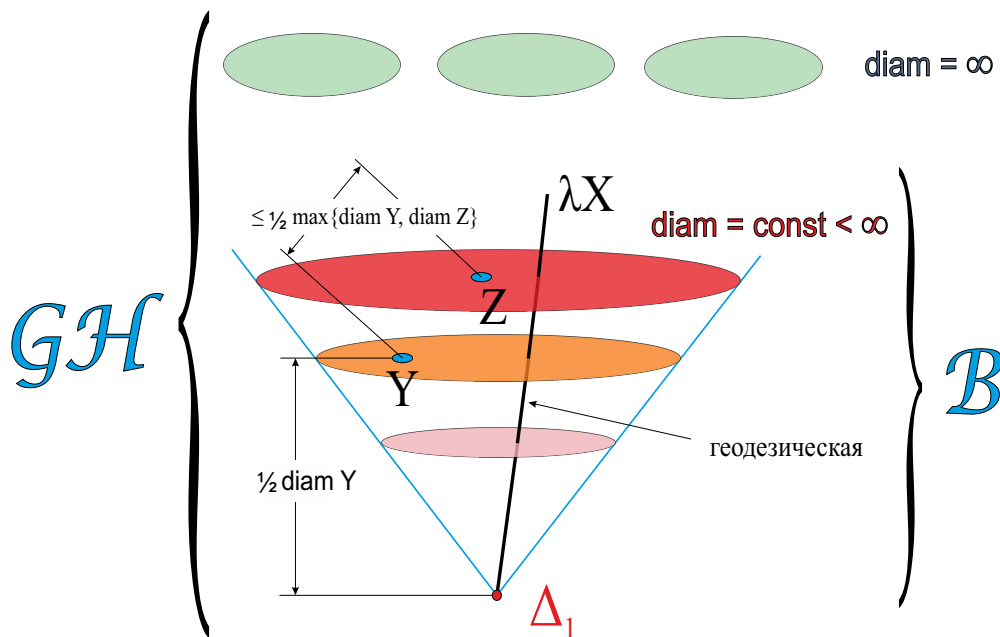


Рис. 1.1: Класс Громова–Хаусдорфа, общий вид.

Замечание 1.24. Если в пункте (4) утверждения 1.23 разрешить пространства бесконечного диаметра, то, скажем, для положительных $\lambda \neq \mu$ утверждение будет неверным: достаточно положить $X = \mathbb{R}^n$, $n > 0$. Действительно, λX и μX в этом случае изометричны $X = \mathbb{R}^n$, поэтому $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = 0$, но $\frac{1}{2}|\lambda - \mu| \text{diam } X = \infty$.

Замечание 1.25. В пункте (5) утверждения 1.23 говорится, что для пространств ограниченного диаметра умножение на $\lambda \neq 1$ не меняет лишь одноточечные пространства. Для неограниченных пространств это уже не так, например, $X = \mathbb{R}^n$ остается изометричным себе при умножении на любое $\lambda > 0$.

Задача 1.26. Остается ли верной формула из пункта (5) утверждения 1.23 в случае, когда диаметр X и Y бесконечен, но $d_{GH}(X, Y) < \infty$?

Задача 1.27. Для $X \in \mathcal{GH}$ обозначим облако, содержащее X , через $[X]$. Иными словами, $[X] = \{Y \in \mathcal{GH} : d_{GH}(X, Y) < \infty\}$. Выяснить, имеется ли предел у кривой λX при $\lambda \rightarrow 0+$. Если этот предел есть, то все кривые λY , $Y \in [X]$, сходятся к этому пределу при $\lambda \rightarrow 0+$, а сам предел не меняется при умножении на $\lambda > 0$ и является единственной точкой из облака, обладающей этим свойством (как Δ_1 в $\mathcal{B} = [\Delta_1]$). В частности, все кривые λY для $Y \in [\mathbb{R}^n]$ сходятся при $\lambda \rightarrow 0+$ к $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.28. Опишите все метрические пространства, остающиеся изометричными себе при умножении на любое $\lambda > 0$.

Пример 1.29. Проиллюстрируем, как “работает” теорема 1.22, доказав пункты (1) и (2) утверждения 1.23.

В первом случае, множество $\mathcal{R}(\Delta_1, X)$ состоит ровно из одного соответствия, а именно, из $R_0 = \Delta_1 \times X$, а у этого соответствия искажение $\text{dis } R_0$ равно $\text{diam } X$. Остается применить теорему 1.22.

Во втором случае, рассмотрим соответствие $R_0 = X \times Y$. Легко видеть, что искажение этого соответствия равно $\max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$. Следовательно, $\inf_{R \in \mathcal{R}(X, Y)} \text{dis } R \leq \text{dis } R_0$, и снова теорема 1.22 завершает доказательство.

Упражнение 1.30. Докажите оставшиеся пункты утверждения 1.23.

1.1.7 Обобщенная псевдометрика Громова–Хаусдорфа является внутренней

Пусть $\mathcal{A}$ — топологический класс, в котором топология порождена обобщенной псевдометрикой, $x, y \in \mathcal{A}$, $|xy| < \infty$, и $\varepsilon > 0$. Соединяющую x и y кривую γ назовем ε -**кратчайшей**, если $|\gamma| - |xy| \leq \varepsilon$. Легко видеть, что обобщенная псевдометрика на $\mathcal{A}$ является внутренней, если и только если для каждой пары элементов из $\mathcal{A}$, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, и каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε -кратчайшая кривая, соединяющая эти элементы.

Теорема 1.31 ([7]). Пусть $X, Y \in \mathcal{GH}$ — произвольные метрические пространства, для которых $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Пусть $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ — произвольное соответствие такое, что

$$\text{dis } R - 2d_{GH}(X, Y) \leq 2\varepsilon.$$

Тогда семейство R_t , $t \in [0, 1]$, метрических пространств, где $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0, 1)$ пространство R_t — это множество R с метрикой

$$|(x, y), (x', y')|_t = (1 - t)|xx'| + t|yy'|,$$

является ε -кратчайшей кривой в $\mathcal{GH}$, соединяющей X и Y . Более того, если X и Y — ограниченные пространства, то все R_t — также ограниченные пространства, т.е. R_t — это ε -кратчайшая в $\mathcal{B}$.

Доказательство. Положим $n = \#R$ и рассмотрим соответствия $R_X \subset X \times R$ и $R_Y \subset R \times Y$ между X и R_t и между R_t и Y следующего вида:

$$R_X = \{(x, (x, y)) : (x, y) \in R\}, \quad R_Y = \{((x, y), y) : (x, y) \in R\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{dis } R_X &= \inf \left\{ \left| |xx'| - |(x, y)(x', y')| \right|_t : (x, y), (x', y') \in R \right\} = \\ &= \inf \left\{ \left| |xx'| - (1 - t)|xx'| - t|yy'| \right| : (x, y), (x', y') \in R \right\} = \\ &= t \inf \left\{ \left| |xx'| - |yy'| \right| : (x, y), (x', y') \in R \right\} = t \text{dis } R. \end{aligned}$$

Аналогично, $\text{dis } R_Y = (1 - t) \text{dis } R$, откуда

$$2d_{GH}(X, R_t) = 2d_{GH}(R_0, R_t) \leq t \text{dis } R \quad \text{и} \quad 2d_{GH}(R_t, Y) = 2d_{GH}(R_t, R_1) \leq (1 - t) \text{dis } R.$$

Далее, взяв тождественное соответствие между пространствами R_t и R_s , $s, t \in (0, 1)$, получаем

$$2d_{GH}(R_t, R_s) \leq |t - s| \text{dis } R.$$

Из только что приведенных оценок вытекает, что γ является $(\text{dis } R)/2$ -липшицевым и, поэтому, непрерывным отображением из $[0, 1]$ в $\mathcal{GH}_n$, т.е. γ — спрямляемая кривая в $\mathcal{GH}$. Кроме того, $2|\gamma| \leq \text{dis } R$, поэтому $|\gamma| \leq d_{GH}(X, Y) + \varepsilon$, и, значит, γ является ε -кратчайшей, соединяющей X и Y . Осталось заметить, что $\text{diam } R_t \leq \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$, поэтому если $X, Y \in \mathcal{B}$, то и $R_t \in \mathcal{B}$ при всех t . $\square$

Следствие 1.32 ([7]). Расстояние Громова–Хаусдорфа на классе $\mathcal{GH}$ является внутренней обобщенной псевдометрикой, а на классе $\mathcal{B}$ — внутренней конечной псевдометрикой.

Задача 1.33. Выяснить, является ли расстояние Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{GH}$ строго внутренним.

1.1.8 Неприводимые соответствия

Для решения конкретных задач оказывается полезным рассматривать не все соответствия, а лишь минимальные по включению. Такие соответствия мы называем **неприводимыми**. Следующий результат показывает, что неприводимые соответствия всегда существуют и их “достаточно много”.

Теорема 1.34 ([9]). *Пусть X и Y — произвольные непустые множества, тогда для каждого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ существует неприводимое соответствие $R_0 \in \mathcal{R}(X, Y)$ такое, что $R_0 \subset R$.*

Замечание 1.35. Для доказательства можно было бы попробовать воспользоваться стандартной техникой, основанной на лемме Цорна, но тогда нужно гарантировать, что каждая цепочка $R_1 \supset R_2 \supset \dots$ имеет нижнюю грань, т.е. такое соответствие, которое принадлежит всем R_i . Однако это, вообще говоря, не так. В качестве примера рассмотрим $X = Y = \mathbb{N}$ и положим $R_k = \{(i, j) : \max(i, j) \geq k\}$. Ясно, что каждое R_k лежит в $\mathcal{R}(X, Y)$ и что эти R_k образуют убывающую цепочку. Однако $\cap R_k = \emptyset$, так как для любых i и j существует k , для которого $i < k$ и $j < k$, поэтому $(i, j) \notin R_k$.

Мы не будем доказывать теорему 1.34, а заинтересованных слушателей отсылаем к [9] или [10].

Выясним, как выглядит неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$. Будем рассматривать R как сюръективное многозначное отображение, тогда для него естественным образом определяются $R(x)$ и $R^{-1}(y)$:

$$R(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R\} \text{ и } R^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Лемма 1.36. *Если $\#R(x) > 1$ и $y \in R(x)$, то $R^{-1}(y) = \{x\}$.*

Доказательство. Действительно, если $R^{-1}(y) \ni x' \neq x$, то мы можем исключить пару (x, y) из соответствия R , при этом полученное отношение R' снова будет соответствием. Чтобы это увидеть, достаточно проверить, что в R' для x и для y имеются пары. Так как $\#R(x) > 1$, то, кроме y , в $R(x)$ входит и другой y' , так что $(x, y') \in R'$. Кроме того, $(x', y) \in R'$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1.37. Аналогично доказывается, что если $\#R^{-1}(y) > 1$, то для каждого $x \in R^{-1}(y)$ выполняется $R(x) = \{y\}$.

Лемма 1.38. *Если $x \neq x'$, то $R(x)$ и $R(x')$ или не пересекаются, или совпадают, причем в последнем случае $R(x) = R(x') = \{y\}$ для некоторого $y \in Y$.*

Доказательство. Пусть $R(x)$ и $R(x')$ пересекаются, и $y \in R(x) \cap R(x')$. Тогда $\{x, x'\} \subset R^{-1}(y)$, так что $\#R^{-1}(y) > 1$. По замечанию 1.37, имеем $R(x) = R(x') = \{y\}$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1.39. Аналогично доказывается, что для $y \neq y'$ или $R^{-1}(y) \cap R^{-1}(y') = \emptyset$, или же $R^{-1}(y) = R^{-1}(y') = \{x\}$ для некоторого $x \in X$.

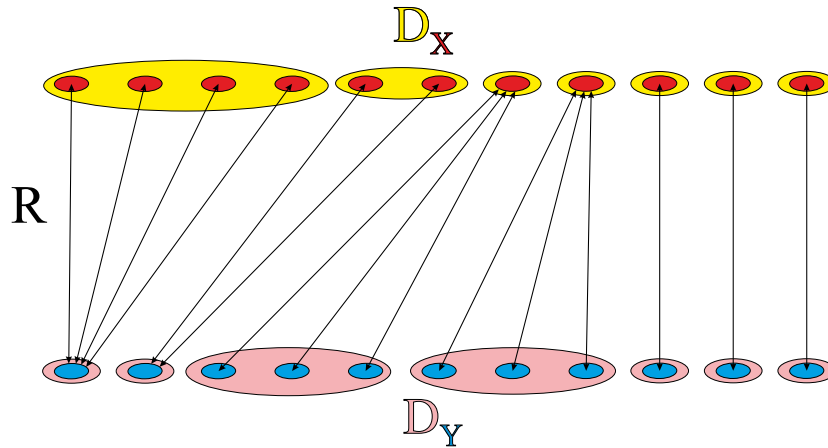
Замечание 1.40. Из леммы 1.38 и замечания 1.39 вытекает, покрытия $D_Y = \cup_{x \in X} \{R(x)\}$ и $D_X = \cup_{y \in Y} \{R^{-1}(y)\}$ являются разбиениями. При этом, между элементами этих разбиений соответствие R порождает следующую биекцию: элементы $X' \in D_X$ и $Y' \in D_Y$ соответствуют друг другу, если и только если для некоторых $x \in X'$ и $y \in Y'$ (и, значит, для любых таких x и y) выполняется $(x, y) \in R$. Эта биекция позволяет параметризовать оба разбиения одним и тем же множеством I , положив $D_X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $D_Y = \{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где X_α и Y_α соответствуют друг другу. В терминах таких разбиений соответствие R удобно записывается, а именно, $R = \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times Y_\alpha$. Более того, для каждого α выполняется $\min\{\#X_\alpha, \#Y_\alpha\} = 1$. Биекция между разбиениями D_X и D_Y проиллюстрирована на рис. 1.2.

Обозначим $\mathcal{R}^0(X, Y)$ множество всех неприводимых соответствий между X и Y . Из сказанного выше вытекает следующий результат.

Теорема 1.41 ([9]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}^0(X, Y) \}.$$

Пример 1.42. Так как каждое неприводимое соответствие между двухточечными метрическими пространствами $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ является биекцией, то $2d_{GH}(X, Y) = ||x_1x_2| - |y_1y_2||$.

Рис. 1.2: Неприводимое соответствие R : биекция между разбиениями D_X и D_Y .

Пример 1.43. Для двухточечного метрического пространства $X = \{x_1, x_2\}$, $\lambda = |x_1, x_2|$, и произвольного неодноточечного метрического пространства Y каждое неприводимое соответствие R задается так: Y разбивается на два непустых подмножества Y_1 и Y_2 , и $R = (\{x_1\} \times Y_1) \sqcup (\{x_2\} \times Y_2)$. Обозначим $\mathcal{D}_2(Y)$ множество всех разбиений Y на два непустых подмножества.

Для любых непустых подмножеств Z_1 и Z_2 произвольного метрического пространства через $|Z_1 Z_2|$ обозначим наименьшее расстояние между их точками, т.е. $|Z_1 Z_2| = \inf\{|z_1 z_2| : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}$. Для $D = \{Y_1, Y_2\} \in \mathcal{D}_2(Y)$ положим

$$\text{diam } D = \max\{\text{diam } Y_1, \text{diam } Y_2\} \quad \text{и} \quad \alpha(D) = |Y_1 Y_2|.$$

Упражнение 1.44. Используя неприводимые соответствия, покажите, что

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\left\{\max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } Y - \lambda\} : D \in \mathcal{D}_2(Y)\right\}.$$

Упражнение 1.45. Используя неприводимые соответствия, вычислите расстояние Громова–Хаусдорфа между трехточечными метрическими пространствами.

Приведем ряд полезных для дальнейшего результатов, доказательство которых существенно облегчается, если использовать неприводимые соответствия. Пусть $k \geq 1$ — произвольное кардинальное число, а Δ_k обозначает метрическое пространство мощности k , в котором все ненулевые расстояния равны 1. Такие Δ_k будем называть *симплексами* мощности k . Отметим, что симплекс Δ_1 был определен выше.

Предложение 1.46. Для кардинальных чисел $p, q \geq 2$ и вещественных $\lambda, \mu > 0$ имеем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_q) = \begin{cases} |\lambda - \mu| & \text{при } p = q, \\ \max\{\lambda, \mu - \lambda\} & \text{при } p > q, \\ \max\{\mu, \lambda - \mu\} & \text{при } p < q. \end{cases}$$

В частности, если $p \neq q$, то $2d_{GH}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_q) \geq \min\{\lambda, \mu\}$.

Доказательство. Пусть $p = q$. Выберем произвольную биекцию $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_q)$, тогда $\text{dis } R = |\lambda - \mu|$. Пусть теперь $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_q)$ — неприводимое соответствие, отличное от биекции. Рассмотрим соответствующие R' разбиения $D_{\lambda\Delta_p}$ и $D_{\mu\Delta_p}$. Как было отмечено в замечании 1.40, между этими разбиениями имеется естественная биекция. Так как $p, q \geq 2$, то и разбиения состоят не менее чем из двух элементов, поэтому в R' входят $X_1 \times Y_1$ и $X_2 \times Y_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Если $(x_i, y_i) \in X_i \times Y_i$, то $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, поэтому $\text{dis } R' \geq |\lambda - \mu|$.

Рассмотрим случай $p > q$. Тогда каждое неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_q)$ обладает следующими свойствами:

- существует $y \in \mu\Delta_q$, для которого $\#R^{-1}(y) > 1$, так что $\text{dis } R \geq \lambda$, и
- как и выше, в R имеются такие $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, поэтому $\text{dis } R \geq |\lambda - \mu|$.

Таким образом, $\text{dis } R \geq \max\{\lambda, |\lambda - \mu|\}$. Далее, пусть $\lambda\Delta_p = X \sqcup X'$, где $\#X = q$. Тогда X и X' непусты. Обозначим $\nu: X \rightarrow \mu\Delta_q$ произвольную биекцию, и выберем произвольный элемент $y_0 \in \mu\Delta_q$. Рассмотрим соответствие $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_q)$ вида

$$R' = \left\{ (x, \nu(y)) \right\}_{x \in X} \cup \left\{ (x', y_0) \right\}_{x' \in X'}.$$

Легко проверяется (сделайте это), что $\text{dis } R' = \max\{\lambda, |\lambda - \mu|\}$. Остается заметить, что

$$\max\{\lambda, |\lambda - \mu|\} = \max\{\lambda, \mu - \lambda\}.$$

Случай $p < q$ разбирается аналогично. □

1.1.9 Пространство Громова–Хаусдорфа

Наиболее хорошо изученным подмножеством в $\mathcal{GH}$ является множество классов изометрии компактных метрических пространств, которое называется *пространством Громова–Хаусдорфа* и часто обозначается через $\mathcal{M}$.

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *всюду плотным*, если замыкание этого подмножества совпадает со всем пространством. Если топологическое пространство содержит не более чем счетное всюду плотное подмножество, то оно называется *сепарабельным*. Полное сепарабельное метрическое пространство часто называют *польским*.

Теорема 1.47 ([2, 12]). *Ограничение расстояния Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{M}$ является метрикой, а само пространство $\mathcal{M}$ — польским и геодезическим.*

Задача 1.48. Выяснить, является ли класс Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}$ полным пространством, т.е. верно ли, что каждая фундаментальная последовательность сходится.

Доказательства геодезичности пространства $\mathcal{M}$ было впервые дано в [12]. Отметим, что явные кратчайшие геодезические были построены в [12] лишь для конечных пространств, а для других пар пространств было доказано (неявно) существование кратчайших геодезических. Последнее было проделано с помощью критерия Громова предкомпактности подмножества в $\mathcal{M}$. Приведем этот критерий. Начнем с необходимых определений.

Пусть X — произвольное метрическое пространство и $\varepsilon > 0$.

Определение 1.49. *Числом покрытия* $\text{cov}(X, \varepsilon)$ назовем наименьшее число открытых шаров радиуса ε , которыми можно покрыть пространство X . *Числом упаковки* $\text{pack}(X, \varepsilon)$ назовем максимальное число открытых попарно непересекающихся шаров радиуса $\varepsilon/2$ в пространстве X .

Упражнение 1.50. Пусть X, Y — метрические пространства. Докажите, что

- пространство X ограничено, если и только если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $\text{cov}(X, \varepsilon) < \infty$ (аналогичное утверждение для $\text{pack}(X, \varepsilon) < \infty$);
- пространство X — конечное, если и только если существует n такое, что $\text{cov}(X, \varepsilon) \leq n$ при всех $\varepsilon > 0$ (аналогичное утверждение для $\text{pack}(X, \varepsilon)$);
- функции $f(\varepsilon) = \text{cov}(X, \varepsilon)$ и $g(\varepsilon) = \text{pack}(X, \varepsilon)$ — монотонно убывающие;
- для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\text{cov}(X, \varepsilon) \leq \text{pack}(X, \varepsilon) \leq \text{cov}(X, \varepsilon/4)$;
- если $\text{pack}(X, \varepsilon) < \infty$, то $\text{cov}(X, \varepsilon) < \infty$;
- если $\text{cov}(X, \varepsilon) < \infty$, то $\text{pack}(X, 4\varepsilon) < \infty$;
- $\text{cov}(X, \varepsilon) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$, тогда и только тогда, когда $\text{pack}(X, \varepsilon) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$;
- следующие три условия эквивалентны:
 - $\text{cov}(X, \varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$,
 - $\text{pack}(X, \varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$,

- пространство X вполне ограничено;
- для $\delta > 0$ такого, что $d_{GH}(X, Y) < \delta$, имеем
 - $\text{cov}(X, \varepsilon) \geq \text{cov}(Y, \varepsilon + 2\delta)$,
 - $\text{pack}(X, \varepsilon) \geq \text{pack}(Y, 2\varepsilon + 4\delta)$.

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$ множество всех метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем n точек, а через $\mathcal{M}_{[n]} \subset \mathcal{M}$ — ровно n точек. Для $D \geq 0$ через $\mathcal{M}(D) \subset \mathcal{M}$ обозначим множество всех метрических компактов, диаметры которых не превосходят D . Положим также $\mathcal{M}_n(D) = \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}(D)$ и $\mathcal{M}_{[n]}(D) = \mathcal{M}_{[n]} \cap \mathcal{M}(D)$. Ясно, что $\mathcal{M}_n = \bigcup_{k \leq n} \mathcal{M}_{[k]}$ и $\mathcal{M}_n(D) = \bigcup_{k \leq n} \mathcal{M}_{[k]}(D)$.

Упражнение 1.51. Докажите, что

- множества $\mathcal{M}_{[n]}(D)$ и $\mathcal{M}_n(D)$ вполне ограничены;
- множество $\mathcal{M}_n(D)$ компактно, а $\mathcal{M}_{[n]}(D)$ при $n > 1$ — нет.

Теорема 1.52 (Критерий Громова предкомпактности, см. [2]). Пусть $\mathcal{C}$ — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Существует число $D \geq 0$ и функция $N: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\text{diam } X \leq D$ и $\text{pack}(X, \varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.
- (2) Существует число $D \geq 0$ и функция $N: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\text{diam } X \leq D$ и $\text{cov}(X, \varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.
- (3) Пространство $\mathcal{C}$ с метрикой d_{GH} вполне ограничено.

Замечание 1.53. Пункт (2) теоремы 1.52 означает, что для предкомпактности семейства непустых метрических пространств нужно потребовать две “равномерности”: ограниченность сверху диаметров всех метрических пространств одной и той же константой, а также возможность выбрать в этих пространствах ε -сети (для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$) так, чтобы количество элементов этих ε -сетей также были ограничены некоторой общей константой (зависящей, вообще говоря, от ε).

Одно из доказательств теоремы 1.52 использует возможность реализовать все метрические пространства, входящие во вполне ограниченное подмножество $\mathcal{M}$, в виде подмножеств некоторого компактного подмножества пространства ℓ^∞ всех ограниченных последовательностей вещественных чисел, наделенного max -нормой.

Теорема 1.54 (Громов, см. [2]). Для каждого вполне ограниченного подмножества $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ существует компакт $K \subset \ell^\infty$ такой, что каждое $X \in \mathcal{C}$ изометрично вкладывается в K .

Проиллюстрируем, как работает теорема 1.52 на примере приведенного в [12] доказательства геодезичности пространства Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$. Это доказательство состоит из двух частей: сначала показывается, что конечные метрические пространства соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами, а затем, с использованием этого факта и теоремы 1.52, доказывается существование середины между любыми непустыми компактными метрическими пространствами. Остается вспомнить, что пространство Громова–Хаусдорфа является полным и воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.55. Пусть X — полное метрическое пространство. Тогда если для любых двух точек из X существует середина, то пространство X геодезическое.

Идею построения кратчайшей геодезической [12], соединяющей конечные пространства, мы уже разбирали на примере построения ε -кратчайшей кривой в классе $\mathcal{GH}$. Напомним, что такая ε -геодезическая строилась по соответствию R с конечным искажением. Теперь же, пользуясь конечностью пространств, мы выберем **оптимальное соответствие** $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, т.е. такое, для которого $2d_{GH}(X, Y) = \text{dis } R$. Множество всех оптимальных соответствий между произвольными, не обязательно конечными метрическими пространствами X и Y , обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$ (это множество может оказаться пустым).

Теорема 1.56 ([12]). Для любых конечных $X, Y \in \mathcal{M}$ и каждого $R \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$ семейство R_t , $t \in [0, 1]$, конечных метрических пространств такое, что $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0, 1)$ пространство R_t — это множество R с метрикой

$$|(x, y), (x', y')|_t = (1 - t)|xx'| + t|yy'|,$$

является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y , причем длина этой кривой равна $d_{GH}(X, Y)$.

Доказательство. Как мы уже показали в доказательстве теоремы 1.31, для пространств однопараметрического семейства $\gamma(t) = R_t$ выполняется $2d_{GH}(R_t, R_s) \leq |t - s| \operatorname{dis} R$, так что отображение γ является $(\operatorname{dis} R)/2$ -липшицевым и, значит, непрерывной кривой, причем длина $|\gamma|$ этой кривой не превосходит $(\operatorname{dis} R)/2$ и, значит, в нашем случае, $|\gamma| \leq d_{GH}(X, Y)$. Так как γ соединяет X и Y , ее длина должна быть не меньше $d_{GH}(X, Y)$, откуда и вытекает требуемое. $\square$

Определение 1.57. Кривая $\gamma(t) = R_t$ из теоремы 1.56 называется *R-геодезической*, соответствующей оптимальному соответствию R .

Теорема 1.58 ([12]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ существует середина $Z \in \mathcal{M}$, т.е. такое компактное метрическое пространство, для которого $d_{GH}(X, Z) = d_{GH}(Z, Y) = d_{GH}(X, Y)/2$.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем некоторые конечные $(1/n)$ -сети $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$, и пусть $R_n \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(X_n, Y_n)$. Так как X_n и Y_n — конечные пространства, они соединяются R -геодезической, соответствующей оптимальному соответствию R_n . Обозначим Z_n середину этой R -геодезической, тогда точки множества Z_n — это все пары $(x_n, y_n) \in R_n$, а расстояние между точками (x_n, y_n) и (x'_n, y'_n) из Z_n задается так:

$$(1.1) \quad |(x_n, y_n)(x'_n, y'_n)| = \frac{1}{2}(|x_n x'_n| + |y_n y'_n|).$$

Отсюда заключаем, что $\operatorname{diam} Z_n \leq \max\{\operatorname{diam} X_n, \operatorname{diam} Y_n\} \leq \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$. Таким образом, диаметры всех Z_n ограничены одним и тем же числом.

Покажем теперь возможность выбрать во всех Z_n конечные ε -сети (при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$), количества точек в которых ограничены некоторой общей константой. Для этого заметим сначала, что последовательности X_n и Y_n сходятся по Грому–Хаусдорфу к X и Y соответственно, так как $d_H(X_n, X) \leq 1/n$ и $d_H(Y_n, Y) \leq 1/n$. Так как каждая сходящаяся последовательность предкомпактна, то, по теореме 1.52, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ во всех X_n и всех Y_n существуют ε -сети X'_n и Y'_n соответственно, количество точек в которых не превосходит некоторое конечное число $N(\varepsilon)$. Заметим, что множество $X'_n \times Y'_n$ является ε -сетью в $X_n \times Y_n$, если в последнем пространстве выбрать метрику, заданную по формуле (1.1), в силу чего определенная выше метрика на $Z_n \subset X_n \times Y_n$ является индуцированной. Осталось воспользоваться результатами следующего упражнения.

Упражнение 1.59. Пусть подмножество S некоторого метрического пространства X является ε -сетью, и $Y \subset X$ — непустое подмножество. Тогда в Y существует (2ε) -сеть, мощность которой не превосходит мощности S .

В силу упражнения 1.59, все Z_n содержат (2ε) -сети, состоящие не более чем из $N(\varepsilon)^2$ точек, что позволяет снова применить теорему 1.52 и, тем самым, установить предкомпактность семейства $\{Z_n\}$. Следовательно, некоторая подпоследовательность Z_{n_i} этого семейства сходится в некоторому пространству $Z \in \mathcal{M}$. Так как функция расстояния непрерывна, получаем

$$\begin{aligned} d_{GH}(X, Y)/2 &\leftarrow d_{GH}(X_{n_i}, Y_{n_i})/2 = d_{GH}(X_{n_i}, Z_{n_i}) \rightarrow d_{GH}(X, Z), \\ d_{GH}(X, Y)/2 &\leftarrow d_{GH}(X_{n_i}, Y_{n_i})/2 = d_{GH}(Z_{n_i}, Y_{n_i}) \rightarrow d_{GH}(Z, Y), \end{aligned}$$

откуда Z — середина между X и Y . $\square$

Теорема 1.60 ([12]). *Пространство $\mathcal{M}$ — геодезическое.*

Доказательство. Как было отмечено выше, пространство $\mathcal{M}$ — полное, поэтому, в силу теоремы 1.55, достаточно проверить, что для любых двух точек из $\mathcal{M}$ существует середина. Однако, это мы уже проверили в теореме 1.58. $\square$

Отметим, что приведенное выше доказательство теоремы 1.60 не конструктивно: мы доказали существование кратчайшей геодезической в $\mathcal{M}$, но не построили ее в явном виде. Явное построение геодезической было получено в дальнейшем, независимо, в работах [13] и [11]. Чтобы сформулировать соответствующий результат, приведем ряд наблюдений.

Лемма 1.61. *Если $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ — произвольное соответствие, и $\bar{R}$ — его замыкание в топологическом пространстве $X \times Y$, то $\operatorname{dis} \bar{R} = \operatorname{dis} R$. В частности, если R — оптимальное соответствие, то его замыкание $\bar{R}$ также оптимально.*

Подмножество в $\mathcal{R}(X, Y)$, состоящее из всех замкнутых соответствий, обозначим $\mathcal{R}^c(X, Y)$.

Следствие 1.62. Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ имеем

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}^c(X, Y) \}.$$

Легко проверяется, что для произвольного соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ метрика на R_t , $t \in (0, 1)$, определенная в теореме 1.31, порождает на R топологию, индуцированную из $X \times Y$. Поэтому если X и Y — компактные метрические пространства, а соответствие R замкнуто, то R является компактом в топологии, индуцированной из $X \times Y$ и, значит, все метрические пространства R_t , включая $R_0 = X$ и $R_1 = Y$, — компактны. Иными словами, каждое замкнутое соответствие R для компактных X и Y порождает кривую в $\mathcal{M}$. Если R оказывается еще и оптимальным, то $\gamma(t) = R_t$ — кратчайшая геодезическая в $\mathcal{M}$, длина которой равна $d_{GH}(X, Y)$.

Таким образом, для доказательства геодезичности $\mathcal{M}$ достаточно проверить, что для каждого $X, Y \in \mathcal{M}$ существует оптимальное соответствие. Это было сделано в [13] и [11]. Приведем соответствующий результат и докажем его. Множество всех замкнутых оптимальных соответствий между пространствами $X, Y \in \mathcal{GH}$ обозначим $\mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$.

Теорема 1.63 ([13, 11]). Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$ непусто.

Доказательство. Определим на $X \times Y$ метрику, заданную max-нормой:

$$|(x, y)(x', y')| = \max\{|xx'|, |yy'|\}.$$

Напомним, что все такие метрики (заданные нормами) порождают на $X \times Y$ стандартную топологию декартова произведения, поэтому так определенное метрическое пространство $X \times Y$ компактно. По теореме 1.7, пространство $\mathcal{H}(X \times Y)$ с метрикой Хаусдорфа, состоящее из всех непустых замкнутых отношений и, значит, содержащее $\mathcal{R}^c(X, Y)$, также компактно. Мы покажем, что $\mathcal{R}^c(X, Y)$ замкнуто и, следовательно, тоже компактно.

Лемма 1.64. Множество $\mathcal{R}^c(X, Y) \subset \mathcal{H}(X \times Y)$ замкнуто.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует отношение $\sigma \in \mathcal{H}(X \times Y)$, не являющееся соответствием, но входящее в замыкание $\mathcal{R}^c(X, Y)$.

Так как σ — не соответствие, без ограничения общности можно считать, что каноническая проекция $\pi_X : \sigma \rightarrow X$ не сюръективна, т.е. существует $x \in X$, не содержащийся в $\pi_X(\sigma)$. Так как σ — компакт, его образ при проекции π_X также компактен и, поэтому, $d := |x\pi_X(\sigma)| > 0$ и, значит, $U_d(\sigma) \cap [\{x\} \times Y] = \emptyset$. С другой стороны, так как σ входит в замыкание множества $\mathcal{R}^c(X, Y)$, существует последовательность $R_n \in \mathcal{R}^c(X, Y)$, сходящаяся к σ . В частности, для некоторого n выполняется $R_n \subset U_d(\sigma)$. Но $\pi_X(R_n) \subset \pi_X(U_d(\sigma))$ не содержит x , поэтому R_n не является соответствием, противоречие. $\square$

Заключительная часть доказательства основана на том, что искажение соответствия является непрерывной функцией на $\mathcal{H}(X \times Y)$ и, значит, она достигает своего минимума на компакте $\mathcal{R}^c(X, Y) \subset \mathcal{H}(X \times Y)$. Каждая точка этого минимума и есть оптимальное соответствие.

Упражнение 1.65. Функция $\text{dis} : \mathcal{H}(X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Доказательство теоремы закончено. $\square$

Следствие 1.66 ([13, 11]). Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) , на которой достигается расстояние Громова–Хаусдорфа между X и Y .

Доказательство. Если $d_{GH}(X, Y) = 0$, то полагаем $Z = X' = Y' = X$.

Пусть теперь $d_{GH}(X, Y) > 0$. Выберем произвольное оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$ и зададим на $X \sqcup Y$ функцию расстояния, продолжив метрики X и Y следующим образом: для $x \in X$ и $y \in Y$ положим

$$|xy| = \inf \left\{ |xx'| + |yy'| + \frac{1}{2} \text{dis } R : (x'y') \in R \right\}.$$

Упражнение 1.67. Докажите, что построенная функция расстояния является метрикой на $X \sqcup Y$.

Осталось показать, что $d_H(X, Y) \leq \frac{1}{2} \text{dis } R$. Но это мгновенно вытекает из того, что для каждого $x \in X$ существует y , и для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которых $(x, y) \in R$, но тогда $|xy| = \frac{1}{2} \text{dis } R$, откуда и вытекает требуемое. $\square$

Лекция 2

Изометричные отображения в классе Громова–Хаусдорфа

План. Изометричные отображения и изометричные автоморфизмы класса Громова–Хаусдорфа.

Следующая тема посвящена изометричным отображениям, как глобальным, так и локальным класса Громова–Хаусдорфа. Мы начнем с наиболее изученного пространства Громова–Хаусдорфа, в котором, как оказывается, нет нетривиальных глобальных изометрий, хотя имеется много локальных.

2.1 Группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа

В 2015 году, обсуждая со Ставросом Илиадисом геометрические задачи, связанные с пространством Громова–Хаусдорфа, мы обратили внимание на гипотезу, которую Ставрос сформулировал, как он нам сообщил, несколько лет назад: *группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа тривиальна*. Решив посмотреть, что известно на эту тему, мы наткнулись на [14], где Noah Schweber¹ формулировал эту же гипотезу. Несколько ниже мы обнаружили положительное “решение”, автором которого был Джордж Лаутер (George Lowther)². Конечно, мы с интересом стали разбирать работу, но достаточно быстро столкнулись с целым рядом проблем: безусловно, черновой вариант требовал существенной доработки, причем не только приведения аккуратных доказательств, но и исправления заведомо неверных утверждений. Наиболее яркий пример: утверждалось, что расстояние Громова–Хаусдорфа между конечными пространствами с одним и тем же числом точек достигается на биекции (простой компьютерный эксперимент показывает, что это не так).

В работе [15] мы критически переработали идеи, изложенные в [14] и, фактически, привели доказательство следующей теоремы Джорджа Лаутера.

Теорема 2.1 ([14, 15]). *Группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$ тривиальна.*

Доказательство теоремы 2.1 основано на ряде результатов, которые мы сформулируем прежде, чем переходить к самому доказательству. Некоторые из них имеют место в более общей ситуации, а именно, если $\mathcal{M}$ заменить на $\mathcal{B}$.

Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — изометрия. Покажем сначала, что f оставляет на месте все симплексы $\lambda\Delta_k$, $k \geq 1$. Для этого мы рассмотрим шар

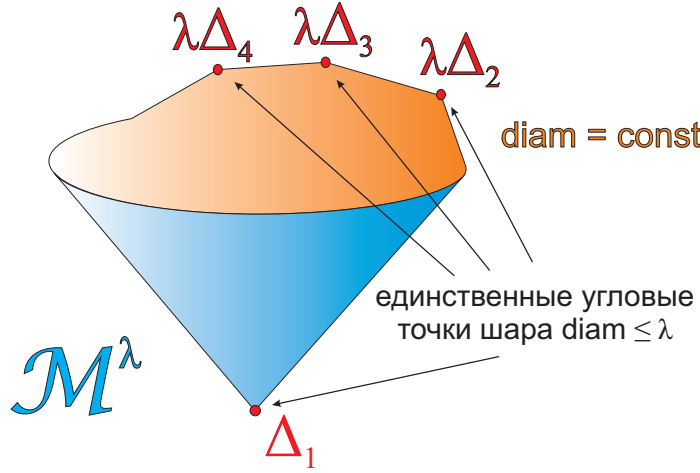
$$\mathcal{M}(\lambda) = \{X \in \mathcal{M} : \text{diam } X \leq \lambda\} = \{X \in \mathcal{M} : 2d_{GH}(\Delta_1, X) \leq \lambda\}$$

и покажем, что симплексы $\lambda\Delta_k$ являются единственными “угловыми точками” этого шара, т.е. у треугольников в шаре $\mathcal{M}(\lambda)$, одна из вершин которых попала в такой симплекс, противоположная сторона не может быть самой длинной. Зато все остальные точки шара $\mathcal{M}(\lambda)$ входят в некоторые треугольники с самой длинной противоположной стороной. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 2.1.³

¹Прочитываем краткую справку, взятую из этого блога: “Noah Schweber — a postdoc at UW-Madison (previously a grad student at UC-Berkeley), interested in mathematical logic — specifically, computability theory and reverse mathematics, set theory, and abstract model theory. I’m also interested in other Nifty Things, in mathematics and elsewhere”.

²Цитата из справки: “Apparently, this user prefers to keep an air of mystery about them”.

³На самом деле, эта иллюстрация неточна с тем смысле, что, в силу предложения 1.46, расстояние между любыми симплексами $\lambda\Delta_p$ и $\lambda\Delta_q$, $\lambda > 0$, $p > 1$, а также между Δ_1 и $\lambda\Delta_p$ одно и то же и равно $\lambda/2$. Таким образом, множество $\mathcal{M}(\lambda)$ больше похоже на бесконечный симплекс.

Рис. 2.1: Угловые точки шара с центром в Δ_1 .

Теорема 2.2. Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — изометрия, тогда для любого целого $k \geq 1$ и вещественного $\lambda > 0$ имеем $f(\lambda\Delta_k) = \lambda\Delta_k$.

Доказательство этой теоремы также предварим последовательностью вспомогательных результатов. Разберем сначала случай $k = 1$.

Лемма 2.3. Для изометрии $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ имеем $f(\Delta_1) = \Delta_1$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $f(\Delta_1) = X \neq \Delta_1$. По утверждению 1.23, пространство X является серединой между $(1/2)X$ и $(3/2)X$, поэтому симплекс Δ_1 должен быть серединой между f -прообразами точек $(1/2)X$ и $(3/2)X$. Тем не менее, не существует $Y, Z \in \mathcal{B}$, отличных от Δ_1 , для которых Δ_1 — середина. Предположим, что это не так. Рассмотрим два случая.

Пусть $d_{GH}(Y, Z) = 0$, но так как Y и Z отличны от Δ_1 , их диаметры положительны и, значит,

$$0 < d_{GH}(Y, \Delta_1) = d_{GH}(Y, Z)/2 = 0,$$

противоречие.

Пусть теперь $d_{GH}(Y, Z) > 0$, но тогда

$$0 < d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{d_{GH}(Y, \Delta_1), d_{GH}(Z, \Delta_1)\} = d_{GH}(Y, Z)/2,$$

противоречие. □

Следствие 2.4. Для каждой изометрии $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, сферы и шары в $\mathcal{B}$ с центром в Δ_1 переходят в себя.

Доказательство. По утверждению 1.23 и лемме 2.3, имеем

$$d_{GH}(\Delta_1, f(X)) = d_{GH}(f(\Delta_1), f(X)) = d_{GH}(\Delta_1, X),$$

что и требовалось. □

Так как неизвестно, верно ли, что каждая изометрия $\mathcal{M}$ продолжается до некоторой изометрии $\mathcal{B}$, доказательство леммы 2.3 и следствия 2.4 в случае, когда $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, нужно проводить отдельно. На самом деле, доказательства этих фактов ровно такие же. Итак, получаем следующие результаты.

Лемма 2.5. Для изометрии $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ имеем $f(\Delta_1) = \Delta_1$.

Следствие 2.6. Для каждой изометрии $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, сферы и шары в $\mathcal{M}$ с центром в Δ_1 переходят в себя.

Задача 2.7. Верно ли, что изометрия $f: \mathcal{GH} \rightarrow \mathcal{GH}$ всего класса Громова–Хаусдорфа оставляет Δ_1 на месте?

Чтобы перейти к случаю $k > 1$, докажем предварительно ряд вспомогательных результатов. Для удобства записи, положим $\mathcal{B}^\lambda = \mathcal{B}(\lambda) = \{X \in \mathcal{B} : \text{diam } X \leq \lambda\}$. Из следствия 2.4 и изометричности f^{-1} вытекает, что при изометрии $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ выполняется $f(\mathcal{B}^\lambda) = \mathcal{B}^\lambda$. Аналогично, положим $\mathcal{M}^\lambda = \mathcal{M}(\lambda)$, тогда из следствия 2.6 и изометричности f^{-1} выводим, что при изометрии $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ имеем $f(\mathcal{M}^\lambda) = \mathcal{M}^\lambda$.

Лемма 2.8. Пусть $k \geq 1$ — произвольное кардинальное число, $\lambda > 0$ — вещественное число и $\Delta = \lambda\Delta_k$. Тогда для любых $Y, Z \in \mathcal{B}^\lambda$ выполняется аналог пункта (1) утверждения 1.23, т.е.

$$d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{d_{GH}(Y, \Delta), d_{GH}(\Delta, Z)\}.$$

Иными словами, в треугольнике ΔYZ сторона YZ не может быть самой длинной.

Доказательство. Так как случай $k = 1$ разобран в утверждении 1.23, будем сразу предполагать, что $k > 1$.

Предположим противное, т.е. для некоторых $Y, Z \in \mathcal{B}^\lambda$ сторона YZ — самая длинная в треугольнике ΔYZ . Из утверждения 1.23 вытекает, что

$$2 \max\{d_{GH}(Y, \Delta), d_{GH}(\Delta, Z)\} < 2d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{\text{diam } Y, \text{diam } Z\} \leq \lambda.$$

Итак, обе величины $2d_{GH}(Y, \Delta)$ и $2d_{GH}(Z, \Delta)$ меньше λ . Положим $\delta_Y = \lambda - 2d_{GH}(Y, \Delta)$ и $\delta_Z = \lambda - 2d_{GH}(Z, \Delta)$, тогда обе эти величины положительны.

Пусть $R_Y \in \mathcal{R}(\Delta, Y)$ и $R_Z \in \mathcal{R}(\Delta, Z)$ — произвольные неприводимые соответствия, для которых $\text{dis } R_Y < 2d_{GH}(Y, \Delta) + \delta_Y/2$ и $\text{dis } R_Z < 2d_{GH}(Z, \Delta) + \delta_Z/2$. Если существует $y \in Y$, для которого $\#R_Y^{-1}(y) > 1$, то $\text{diam } R_Y^{-1}(y) = \lambda$, поэтому $\text{dis } R_Y \geq \text{diam } R_Y^{-1}(y) = \lambda$, однако

$$\lambda - \delta_Y = 2d_{GH}(Y, \Delta) > \text{dis } R_Y - \frac{\delta_Y}{2} \geq \lambda - \frac{\delta_Y}{2},$$

противоречие. Таким образом, $\#R_Y^{-1}(y) = 1$ для всех $y \in Y$. Аналогично, $\#R_Z^{-1}(z) = 1$ для каждого $z \in Z$. Вспоминая замечание 1.40, заключаем, что множества $R_Y(x)$ при разных $x \in \Delta$ не пересекаются и образуют разбиение $D_Y = \{R_Y(x)\}_{x \in \Delta}$ пространства Y на k частей. Аналогично, $D_Z = \{R_Z(x)\}_{x \in \Delta}$ — разбиение Z на k частей.

Положим $R = \sqcup_{x \in \Delta} R_Y(x) \times R_Z(x)$, тогда $R \in \mathcal{R}(Y, Z)$. Так как $\text{dis } R_Y < \lambda$ и $\text{dis } R_Z < \lambda$, то $\text{diam } R_Y(x) < \lambda$ и $\text{diam } R_Z(x) < \lambda$ при всех $x \in \Delta$.

Выберем произвольные $(y, z), (y', z') \in R$. Если y и y' лежат в одном и том же $R_Y(x)$, то $z, z' \in R_Z(x)$, поэтому

$$||yy'| - |zz'|| \leq \max\{\text{diam } R_Y(x), \text{diam } R_Z(x)\} \leq \max\{\text{dis } R_Y, \text{dis } R_Z\}.$$

Пусть теперь $y \in R_Y(x)$ и $y' \in R_Y(x')$, $x \neq x'$, тогда $z \in R_Z(x)$ и $z' \in R_Z(x')$. Так как $Y, Z \in \mathcal{B}^\lambda$, то $0 \leq |yy'| \leq \lambda$ и $0 \leq |zz'| \leq \lambda$.

Предположим, что $|yy'| \leq |zz'|$, тогда

$$||yy'| - |zz'|| = |zz'| - |yy'| = |zz'| - \lambda + \lambda - |yy'| = (\lambda - |yy'|) - (\lambda - |zz'|) \leq \text{dis } R_Y,$$

так как $\lambda - |yy'| \leq \text{dis } R_Y$ и $\lambda - |zz'| \geq 0$. Аналогично, если $|zz'| \leq |yy'|$, то $||yy'| - |zz'|| \leq \text{dis } R_Z$. Таким образом,

$$||yy'| - |zz'|| \leq \max\{\text{dis } R_Y, \text{dis } R_Z\}.$$

Из проведенных рассуждений следует, что $\text{dis } R \leq \max\{\text{dis } R_Y, \text{dis } R_Z\}$, поэтому, в силу произвольности выбора соответствий R_Y и R_Z , имеем $d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{d_{GH}(Y, \Delta), d_{GH}(\Delta, Z)\}$, противоречие. $\square$

Лемма 2.9. Для любого $X \in \mathcal{M}^\lambda$, отличного от каждого $\lambda\Delta_k$, существуют $Y, Z \in \mathcal{M}^\lambda$, для которых

$$d_{GH}(Y, Z) > \max\{d_{GH}(X, Y), d_{GH}(X, Z)\},$$

т.е. в таком треугольнике XYZ сторона YZ — самая длинная.

Доказательство. Если $\text{diam } X < \lambda$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ пространство X лежит на содержащейся в $\mathcal{M}^\lambda$ геодезической $t \mapsto tX$, $t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, так что взяв в качестве Y и Z концы этой геодезической, получаем требуемое.

Пусть теперь $\text{diam } X = \lambda$. Тогда все расстояния в X не превосходят λ , причем в X имеются расстояния, которые равны λ . Так как X отлично от всех $\lambda\Delta_k$, в нем есть расстояния строго меньшие λ .

Пусть сначала X — конечное пространство, состоящее из m точек. В качестве Y и Z возьмем соответственно $\lambda\Delta_{m-1}$ и $\lambda\Delta_m$, тогда $2d_{GH}(Y, Z) = \lambda$. Пусть $x, x' \in X$ таковы, что $0 < |xx'| < \lambda$. Рассмотрим соответствие $R_Y \in \mathcal{R}(Y, X)$, сопоставляющее некоторой точке $y \in Y$ пару $\{x, x'\}$, а $Y \setminus \{y\}$ — биективно отображающее на $X \setminus \{x, x'\}$. Тогда $\text{dis } R_Y < \lambda$ (убедитесь в этом), поэтому $2d_{GH}(X, Y) < \lambda$. В качестве $R_Z \in \mathcal{R}(X, Z)$ рассмотрим произвольную биекцию, тогда также $\text{dis } R_Z < \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(X, Z) < \lambda$, что и заканчивает рассмотрение случая конечного X .

Пусть теперь X бесконечно. Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, \lambda/4)$ и возьмем в качестве Y конечную ε -сеть. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_{m-1}\} \subset X$. Пространство Z построим так: оно будет состоять из $2m$ точек, $Z = \{z_1, \dots, z_{2m}\}$, причем для $1 \leq i < j \leq m$ пусть $|z_i z_j| = \lambda$, а все остальные расстояния положим равными $\lambda/2$. Покажем, что в треугольнике XYZ сторона YZ самая длинная.

Пусть $R \in \mathcal{R}(Y, Z)$ — произвольное неприводимое соответствие, тогда разбиение $\cup_{y \in Y} \{R(y)\}$ состоит не более чем из $(m-1)$ -ого элемента, поэтому в один из его элементов входят одновременно две разные точки z_i и z_j , где $1 \leq i, j \leq m$, поэтому $\text{dis } R \geq |z_i z_j| = \lambda$, откуда $2d_{GH}(Y, Z) \geq \lambda$ (на самом деле, $2d_{GH}(Y, Z) = \lambda$ так как $Y, Z \in \mathcal{M}^\lambda$, хотя этот факт для нас не важен).

Далее, так как Y является ε -сетью, то $2d_{GH}(X, Y) \leq 2\varepsilon < \lambda/2$. Наконец, выберем в качестве $R_Z \in \mathcal{R}(X, Z)$ следующее соответствие. Пусть $y_m \in X$ — произвольная точка, отличная от выбранных $y_i \in Y$. Положим

$$R_Z = \{(y_i, z_i)\}_{i=1}^m \cup \{U_\varepsilon(y_k) \times \{z_{m+k}\}\}_{k=1}^m.$$

Покажем, что $\text{dis } R_Z < \lambda$, что и завершает доказательство. Для этого рассмотрим три случая.

(1) Пусть выбранные два элемента соответствия R_Z имеют вид (y_i, z_i) и (y_j, z_j) , $1 \leq i < j \leq m$, тогда $0 < |y_i y_j| \leq \lambda$, а $|z_i z_j| = \lambda$, поэтому эти две величины отличаются друг от друга меньше чем на λ .

(2) Пусть один из элементов имеет вид (y_i, z_i) , $1 \leq i \leq m$, а другой выглядит так: (y, z_{m+k}) , где $y \in U_\varepsilon(y_k)$, $1 \leq k \leq m$. Тогда $0 \leq |y_i y| \leq \lambda$, а $|z_i z_{m+k}| = \lambda/2$, поэтому эти две величины отличаются друг от друга не больше чем на $\lambda/2$.

(3) Пусть два выбранных элемента имеют вид (y, z_{m+k}) и (y', z_{m+l}) , $1 \leq k, l \leq m$, $y \in U_\varepsilon(y_k)$, $y' \in U_\varepsilon(y_l)$. Тогда $0 \leq |yy'| \leq \lambda$, а $|z_{m+k} z_{m+l}| = \lambda/2$, поэтому эти две величины отличаются друг от друга не больше чем на $\lambda/2$.

Осталось заметить, что все $\text{diam } U_\varepsilon(y_k)$ не превышают $\lambda/2$. □

Таким образом, из лемм 2.5, 2.8 и 2.9 вытекает, что при $\lambda > 0$ семейство симплексов $\{\lambda\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ переходит в себя при изометрии f . Более того, так как f биективно, а $f(\Delta_1) = \Delta_1$, то ни одно $\lambda\Delta_k$ при $k \geq 2$ не переходит в Δ_1 . Таким образом, f переводит $\{\lambda\Delta_k\}_{k=2}^\infty$ в себя. Наконец, так как f^{-1} — тоже изометрия, ограничение f на $\{\lambda\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ является перестановкой (биективным отображением множества на себя).

Замечание 2.10. Лемма 2.9 не может быть непосредственно перенесена на все ограниченные пространства. Чтобы это увидеть, докажем следующий результат.

Лемма 2.11. Пусть $\lambda > 0$ — вещественное число и X — бесконечное пространство мощности k , в котором все ненулевые расстояния кроме одного равны λ , а одно, скажем $|x_1 x_2|$, — меньше λ . Тогда для любых $Y, Z \in \mathcal{B}^\lambda$ выполняется аналог пункта (1) утверждения 1.23, т.е.

$$d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{d_{GH}(X, Y), d_{GH}(X, Z)\}.$$

Иными словами, в треугольнике XYZ сторона YZ не может быть самой длинной.

Доказательство. Предположим противное, т.е. для некоторых $Y, Z \in \mathcal{B}^\lambda$ сторона YZ — самая длинная в треугольнике XYZ . Из утверждения 1.23 вытекает, что

$$2 \max\{d_{GH}(X, Y), d_{GH}(X, Z)\} < 2d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{\text{diam } Y, \text{diam } Z\} \leq \lambda.$$

Итак, обе величины $2d_{GH}(X, Y)$ и $2d_{GH}(X, Z)$ меньше λ . Положим $\delta_Y = \lambda - 2d_{GH}(X, Y)$ и $\delta_Z = \lambda - 2d_{GH}(X, Z)$, тогда обе эти величины положительны.

Пусть $R_Y \in \mathcal{R}(X, Y)$ и $R_Z \in \mathcal{R}(X, Z)$ — произвольные неприводимые соответствия, для которых $\text{dis } R_Y < 2d_{GH}(X, Y) + \delta_Y/2$ и $\text{dis } R_Z < 2d_{GH}(X, Z) + \delta_Z/2$. Если существует $y \in Y$, для которого $\#R_Y^{-1}(y) > 1$, причем $R_Y^{-1}(y)$ отлично от $\{x_1, x_2\}$, то $\text{diam } R_Y^{-1}(y) = \lambda$, поэтому $\text{dis } R_Y \geq \text{diam } R_Y^{-1}(y) = \lambda$, однако

$$\lambda - \delta_Y = 2d_{GH}(X, Y) > \text{dis } R_Y - \frac{\delta_Y}{2} \geq \lambda - \frac{\delta_Y}{2},$$

противоречие. Таким образом, $\#R_Y^{-1}(y) = 1$ для всех $y \in Y$ кроме, возможно, одного y_0 , для которого $R_Y^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2\}$. Аналогично, $\#R_Z^{-1}(z) = 1$ для всех $z \in Z$ кроме, возможно, одного z_0 , для которого $R_Z^{-1}(z_0) = \{x_1, x_2\}$. Вспоминая замечание 1.40, заключаем, что множества $R_Y(x)$ при разных $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ не пересекаются. Если $R_Y(x_1) = R_Y(x_2) = \{y_0\}$, то y_0 не содержится в $R_Y(x)$ для всех $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, и $D_Y = \{R_Y(x)\}_{x \in X \setminus \{x_1, x_2\}} \sqcup \{y_0\}$ — разбиение пространства Y на k частей. Если же $R_Y(x_1) \neq R_Y(x_2)$, то $\{R_Y(x)\}_{x \in X}$ — разбиение Y на k частей. Последнее разбиение мы также обозначим D_Y . Аналогично определяется разбиение D_Z пространства Z на k частей.

Пусть $\varphi: D_Y \rightarrow D_Z$ — произвольная биекция. Используя φ , перенумеруем D_Y и D_Z соответствующие образом: если $D_Y = \{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$, то положим $Z_\alpha = \varphi(Y_\alpha)$, так что $D_Z = \{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Пусть $R = \sqcup_{\alpha \in I} Y_\alpha \times Z_\alpha$, тогда $R \in \mathcal{R}(Y, Z)$. Так как $\text{dis } R_Y < \lambda$ и $\text{dis } R_Z < \lambda$, то $\text{diam } Y_\alpha < \lambda$ и $\text{diam } Z_\alpha < \lambda$ при всех $\alpha \in I$.

Выберем произвольные $(y, z), (y', z') \in R$. Если y и y' лежат в одном и том же Y_α , то $z, z' \in Z_\alpha$, поэтому

$$||yy'| - |zz'|| \leq \max\{\text{diam } Y_\alpha, \text{diam } Z_\alpha\} \leq \max\{\text{dis } R_Y, \text{dis } R_Z\}.$$

Пусть теперь $y \in Y_\alpha$ и $y' \in Y_{\alpha'}$, $\alpha \neq \alpha'$, тогда $z \in Z_\alpha$ и $z' \in Z_{\alpha'}$. Так как $Y, Z \in \mathcal{B}^\lambda$, то $0 \leq |yy'| \leq \lambda$ и $0 \leq |zz'| \leq \lambda$.

Предположим, что $|yy'| \leq |zz'|$, тогда

$$||yy'| - |zz'|| = |zz'| - |yy'| = |zz'| - \lambda + \lambda - |yy'| = (\lambda - |yy'|) - (\lambda - |zz'|) \leq \text{dis } R_Y,$$

так как $\lambda - |yy'| \leq \text{dis } R_Y$ и $\lambda - |zz'| \geq 0$. Аналогично, если $|zz'| \leq |yy'|$, то $||yy'| - |zz'|| \leq \text{dis } R_Z$. Таким образом,

$$||yy'| - |zz'|| \leq \max\{\text{dis } R_Y, \text{dis } R_Z\}.$$

Из проведенных рассуждений следует, что $\text{dis } R \leq \max\{\text{dis } R_Y, \text{dis } R_Z\}$, поэтому, в силу произвольности выбора соответствий R_Y и R_Z , имеем $d_{GH}(Y, Z) \leq \max\{d_{GH}(X, Y), d_{GH}(X, Z)\}$, противоречие. $\square$

Задача 2.12. Описать все пространства $X \in \mathcal{B}^\lambda$, являющиеся “угловыми точками”, т.е. для которых выполняется условие леммы 2.11.

Лемма 2.13. Пусть $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ — изометрия, $\lambda > 0$ — вещественное, а $p \geq 2$ и $q \geq 2$ — кардинальные числа, для которых $f(\lambda\Delta_p) = \lambda\Delta_q$. Тогда при всех $\mu > 0$ имеет место $f(\mu\Delta_p) = \mu\Delta_q$.

Доказательство. Рассмотрим отображение g , сопоставляющее каждому положительному вещественному числу t некоторое кардинальное число следующим образом: если $f(t\Delta_p) = t\Delta_r$, то положим $g(t) = r$. Тогда $g(\lambda) = q$. Мы должны показать, что отображение g постоянно.

Предположим противное, т.е. для некоторого $\mu > 0$ выполняется $g(\mu) = r \neq q$. Иными словами, $f(\mu\Delta_p) = \mu\Delta_r$, $r \neq q$. По предложению 1.46, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_p) = |\lambda - \mu|$. Так как f — изометрия, то $2d_{GH}(\lambda\Delta_q, \mu\Delta_r) = |\lambda - \mu|$.

Пусть $r > q$. Тогда, по предложению 1.46, $2d_{GH}(\lambda\Delta_q, \mu\Delta_r) = \max\{\lambda, \mu - \lambda\}$, так что $|\lambda - \mu| = \max\{\lambda, \mu - \lambda\}$. Однако при $\mu \in (\lambda/2, 3\lambda/2)$ предыдущее равенство неверно. В случае $r < q$ имеем $|\lambda - \mu| = \max\{\mu, \lambda - \mu\}$, но и здесь при $\mu \in (\lambda/2, 3\lambda/2)$ равенство неверно. Значит, отображение g локально постоянно, поэтому, в силу связности луча $(0, \infty)$, отображение g постоянно на всем луче $(0, \infty)$. $\square$

Предыдущее доказательство дословно переносится на случай $\mathcal{M}$.

Лемма 2.14. Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — изометрия, $\lambda > 0$ — вещественное, а $p \geq 2$ и $q \geq 2$ — целые числа, для которых $f(\lambda\Delta_p) = \lambda\Delta_q$. Тогда при всех $\mu > 0$ имеет место $f(\mu\Delta_p) = \mu\Delta_q$.

Лемма 2.15. Пусть $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ — изометрия, а $p \geq 2$ и $q \geq 2$ — кардинальные числа, для которых $f(\Delta_p) = \Delta_q$. Тогда для каждого кардинального числа $1 \leq i < p$ имеем $f(\Delta_i) = \Delta_j$, где кардинальное число j удовлетворяет $1 \leq j < q$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть $j \geq q$. Так как f биективно, то $j \neq q$, поэтому $j > q$. По лемме 2.13, для всех $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ имеем $f(\lambda\Delta_p) = \lambda\Delta_q$ и $f(\mu\Delta_i) = \mu\Delta_j$. Из предложения 1.46 и изометричности f вытекает, что

$$\max\{\lambda, \mu - \lambda\} = 2d_{GH}(\lambda\Delta_p, \mu\Delta_i) = 2d_{GH}(f(\lambda\Delta_p), f(\mu\Delta_i)) = 2d_{GH}(\lambda\Delta_q, \mu\Delta_j) = \max\{\mu, \lambda - \mu\},$$

т.е. $\max\{\lambda, \mu - \lambda\} = \max\{\mu, \lambda - \mu\}$, что неверно при $\mu = \lambda/2$. $\square$

Снова предыдущее доказательство дословно переносится на случай $\mathcal{M}$.

Лемма 2.16. Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — изометрия, а $p \geq 2$ и $q \geq 2$ — целые числа, для которых $f(\Delta_p) = \Delta_q$. Тогда для каждого целого $1 \leq i < p$ имеем $f(\Delta_i) = \Delta_j$, где целое число j удовлетворяет $1 \leq j < q$.

Доказательство теоремы 2.2. Предположим противное, т.е. что $f(\lambda\Delta_p) = \lambda\Delta_q$, $q \neq p$. Выберем произвольное $i < q$ и применим изометрию f несколько раз, пока, в силу леммы 2.16, не придем в ситуацию, когда $\lambda\Delta_j$ уже некуда отображать. $\square$

Следующий шаг — показать, что n -точечные пространства переходят при изометрии f в n -точечные пространства.

Прежде всего, для любого обобщенного псевдометрического пространства M и его точек x, y определим множество $\text{Mid}(M, x, y)$ как множество всех точек из M , равноудаленных от x и y :

$$\text{Mid}(M, x, y) = \{z \in M : |xz| = |zy|\}.$$

Ясно, что если при изометрии точки x и y остаются на месте, то $\text{Mid}(M, x, y)$ переводится этой изометрией в себя.

Для натурального n и вещественного $\lambda > 0$ определим подмножество $\mathcal{E}_n(\lambda) \subset \mathcal{M}$ так:

$$\mathcal{E}_n(\lambda) = \text{Mid}(\mathcal{M}, \Delta_1, \lambda\Delta_n) \cap \{X \in \mathcal{M} : \text{diam } X \geq 2\lambda\}.$$

Множество $\mathcal{E}_n(\lambda)$ изображено на рис. 2.2.

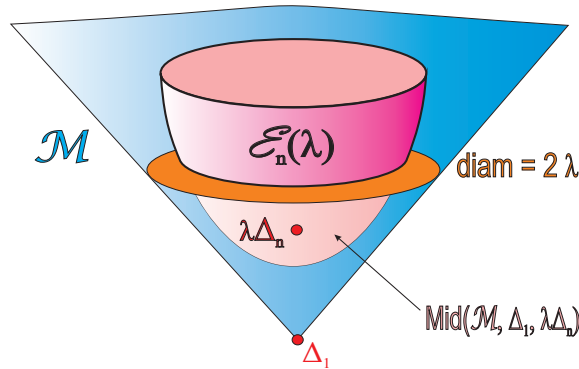


Рис. 2.2: Множество $\mathcal{E}_n(\lambda)$.

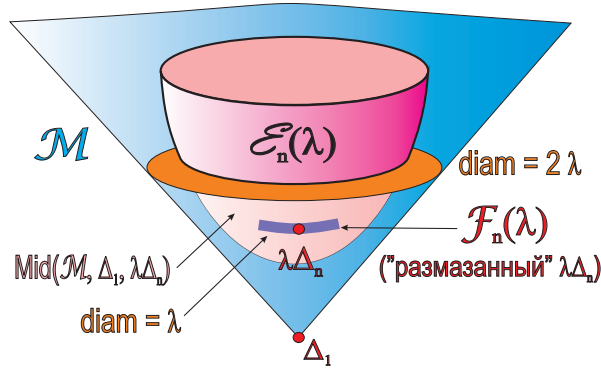
В силу сказанного выше, при изометрии f множество $\text{Mid}(\mathcal{M}, \Delta_1, \lambda\Delta_n)$ переходит в себя. С другой стороны, как мы уже показали, при изометрии f диаметры метрических пространств не меняются. Таким образом, учитывая, что f^{-1} также является изометрией, мы получаем следующий результат.

Предложение 2.17. Во введенных обозначениях, $f(\mathcal{E}_n(\lambda)) = \mathcal{E}_n(\lambda)$.

Определим теперь еще одно семейство компактных метрических пространств, положив

$$\mathcal{F}_n(\lambda) = \{X \in \mathcal{M} : \text{diam } X = \text{diam } \lambda\Delta_n = \lambda \text{ \& } \mathcal{E}_n(\lambda) \subset \text{Mid}(\mathcal{M}, \Delta_1, X)\}.$$

Иными словами, $\mathcal{F}_n(\lambda)$ состоит из всех $X \in \mathcal{M}$, на которые “можно заменить” $\lambda\Delta_n$: у них то же самый диаметр и соответствующее множество $\mathcal{E}$ содержит $\mathcal{E}_n(\lambda)$, построенное для $\lambda\Delta_n$. На рис. 2.3 мы условно назвали множество $\mathcal{F}_n(\lambda)$ результатом “размазывания” симплекса $\lambda\Delta_n$.

Рис. 2.3: Множество $\mathcal{F}_n(\lambda)$.

Предложение 2.18. Во введенных обозначениях, $f(\mathcal{F}_n(\lambda)) = \mathcal{F}_n(\lambda)$.

Доказательство. Для $r \geq 2\lambda$ положим $\mathcal{E}_n(\lambda, r) = \mathcal{E}_n(\lambda) \cap \{Y \in \mathcal{M} : \text{diam } Y = r\}$ и отметим, что это множество переходит в себя при изометрии f как пересечение двух инвариантных множеств.

Далее, для произвольного обобщенного псевдометрического пространства Z , любого его непустого подмножества A и вещественного числа $s \geq 0$ положим

$$C_s(A) = \{z \in Z : |za| = s \text{ для всех } a \in A\}$$

и назовем его множеством s -*центров*. Ясно, что если изометрия переводит множество A в себя, то и множество всех s -центров также переходит в себя. Отсюда вытекает, что при каждом s множество $C_s(\mathcal{E}_n(\lambda, r))$ переходит в себя при изометрии f (это множество может быть пустым). Заметим, что каждая точка $X \in \mathcal{F}_n(\lambda)$ является $(r/2)$ -центром множества $\mathcal{E}(\lambda, r)$ при всех $r \geq 2\lambda$, так что X содержится в пересечении всех $C_{r/2}(\mathcal{E}(\lambda, r))$. Обратно, каждая точка из этого пересечения, имеющая диаметр λ , входит в $\mathcal{F}_n(\lambda)$. Таким образом, мы доказали, что

$$\mathcal{F}_n(\lambda) = \left[\bigcap_{r \geq 2\lambda} C_{r/2}(\mathcal{E}(\lambda, r)) \right] \cap \{X \in \mathcal{M} : \text{diam } X = \lambda\}.$$

Так как все множества, входящие в правую часть предыдущего равенства, являются f -инвариантными, то же самое верно и для $\mathcal{F}_n(\lambda)$. $\square$

Введенное нами множество $\mathcal{F}_n(\lambda)$ важно для нас в связи со следующей теоремой. Положим $\mathcal{M}_n[\lambda] = \{X \in \mathcal{M}_n : \text{diam } X = \lambda\}$.

Теорема 2.19. Для натурального $n \geq 2$ и вещественного $\lambda > 0$ множество $\mathcal{F}_n(\lambda)$ совпадает с множеством $\mathcal{M}_n[\lambda]$ всех непустых конечных пространств мощности не больше n и диаметра λ .

Из теоремы 2.19, предложения 2.18 и того, что f^{-1} тоже является изометрией вытекает следующий результат.

Следствие 2.20. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ изометрия $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ переводит n -точечные пространства в n -точечные того же диаметра.

Для доказательства теоремы 2.19 нам понадобится научиться вычислять расстояние Громова–Хаусдорфа не только между симплексами, но и для некоторых пар пространств, в которых одно пространство — симплекс, а другое — нет. Полностью эта проблема до сих пор не решена, но имеется ряд продвижений, которые нам и понадобятся в дальнейшем.

2.1.1 Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов

Мы начнем со случая симплексов с меньшим числом точек, чем у заданного метрического пространства.

2.1.2 Симплексы большей мощности

Теорема 2.21. Для метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$, кардинального числа $m > \#X$ и вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\}.$$

Доказательство. Если пространство X неограничено, то, по утверждению 1.23, равенство имеет место. Предположим теперь, что пространство X ограничено.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$. Так как $\#X < m$, то существует $x \in X$ такое, что $\#R^{-1}(x) \geq 2$, поэтому $\text{dis } R \geq \text{diam } R^{-1}(x) = \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geq \lambda$.

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_i, y_i) \in X \times X$ такую, что $|x_i y_i| \rightarrow \text{diam } X$. Если в ней существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}) , для которой при каждом i_k можно найти такое $z_k \in \lambda\Delta_m$, что $(z_k, x_{i_k}), (z_k, y_{i_k}) \in R$, то $\text{dis } R \geq \text{diam } X$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geq \max\{\lambda, \text{diam } X\}$.

Если такой подпоследовательности нет, то, начиная с некоторого k , существуют $z_k, w_k \in \lambda\Delta_m$, $z_k \neq w_k$, такие, что $(z_k, x_k), (w_k, y_k) \in R$, и тогда $\text{dis } R \geq |\text{diam } X - \lambda|$, откуда $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\}$.

Так как

$$\max\{\lambda, \text{diam } X\} \geq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\},$$

то в любом случае $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\} = \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\}$.

Так как $m > \#X$, в $\lambda\Delta_m$ существует подмножество Δ' , равномощное X . Пусть $g: \Delta' \rightarrow X$ — произвольная биекция, и $x_0 \in X$ — произвольная точка. Построим следующее соответствие:

$$R' = \left\{ (z', g(z')) \right\}_{z' \in \Delta'} \cup \left[(\lambda\Delta_m \setminus \Delta') \times \{x_0\} \right].$$

Тогда $\text{dis } R' \leq \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\}$, откуда $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\}$, что и требовалось. $\square$

2.1.3 Симплексы не большей мощности

Для метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ и любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\{|ab| : (a, b) \in A \times B\} \quad \text{и} \quad |AB|' = \sup\{|ab| : (a, b) \in A \times B\}.$$

Для кардинального числа $1 \leq m \leq \#X$ через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим множество всевозможных разбиений пространства X на m непустых подмножеств. Для $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, где $\#I = m$, положим

$$\text{diam } D = \sup_{i \in I} \text{diam } X_i, \quad \alpha(D) = \inf\{|X_i X_j| : i, j \in I, i \neq j\}, \quad \beta(D) = \sup\{|X_i X_j|' : i, j \in I, i \neq j\}.$$

Снова в предположениях $1 \leq m \leq \#X$ и $\lambda > 0$, рассмотрим любое разбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$, любую биекцию $g: \lambda\Delta_m \rightarrow D$, и зададим соответствие $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$ следующим образом:

$$(2.1) \quad R_D = \bigcup_{z \in \lambda\Delta_m} \{z\} \times g(z).$$

Следующее упражнение непосредственно проверяется исходя из определения искажения и структуры соответствия R_D .

Упражнение 2.22. Покажите, что для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$, кардинального числа $1 \leq m \leq \#X$, разбиения $D \in \mathcal{D}_m(X)$, вещественного числа $\lambda > 0$ и соответствия $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$, определенного формулой (2.1), выполняется

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \beta(D) - \lambda\}.$$

Следствие 2.23. Для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$, кардинального числа $1 \leq m \leq \#X$, разбиения $D \in \mathcal{D}_m(X)$, вещественного числа $\lambda > 0$ и соответствия $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$, определенного формулой (2.1), выполняется

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Доказательство. Отметим, что $\text{diam } D \leq \text{diam } X$ и $\beta(D) \leq \text{diam } X$. При этом, если $\text{diam } D < \text{diam } X$, а $(x_i, y_i) \in X \times X$ — последовательность, для которой $|x_i y_i| \rightarrow \text{diam } X$, то, начиная с некоторого номера i , точки x_i и y_i лежат в разных элементах разбиения D , следовательно, в этом случае $\beta(D) = \text{diam } X$, и формула доказана.

Пусть теперь $\text{diam } D = \text{diam } X$, тогда $\beta(D) - \lambda < \text{diam } X$ и $\text{diam } X - \lambda < \text{diam } X$, поэтому

$$\max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \beta(D) - \lambda\} = \max\{\text{diam } X, \lambda - \alpha(D)\} = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Доказательство закончено. $\square$

Предложение 2.24. Для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$, кардинального числа $1 \leq m \leq \#X$ и вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{dis } R_D,$$

где соответствие $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$ определяется формулой (2.1).

Доказательство. По теореме 1.41, $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_m, X)} \text{dis } R$, поэтому достаточно показать, что для любого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_m, X)$ существует такое $D \in \mathcal{D}_m(X)$, что $\text{dis } R_D \leq \text{dis } R$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_m, X)$, не представимое в виде R_D , тогда разбиение $D_{\lambda\Delta_m}$, порожденное R , — не точечное, т.е. существует $x \in X$, для которого $\#R^{-1}(x) \geq 2$, поэтому $\text{dis } R \geq \text{diam } R^{-1}(x) = \lambda$.

Зададим на множестве $D_{\lambda\Delta_m}$ метрику, положив расстояние между различными элементами равным λ , тогда это метрическое пространство изометрично некоторому симплексу $\lambda\Delta'_k$. Соответствие R порождает естественным образом соответствие $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta'_k, X)$: если $D_{\lambda\Delta_m} = \{\Delta_i\}_{i \in I}$ и $f_R: D_{\lambda\Delta_m} \rightarrow D_X$ — биекция, порожденная R , то

$$R' = \bigcup_{i \in I} \{\Delta_i\} \times f_R(\Delta_i).$$

Легко видеть, что $\text{dis } R = \max\{\lambda, \text{dis } R'\}$. Кроме того, R' порождается разбиением $D' = D_X$, т.е. $R' = R_{D'}$, поэтому, в силу следствия 2.23, имеем

$$\text{dis } R' = \max\{\text{diam } D', \lambda - \alpha(D'), \text{diam } X - \lambda\},$$

откуда

$$\text{dis } R = \max\{\lambda, \text{diam } D', \lambda - \alpha(D'), \text{diam } X - \lambda\} = \max\{\lambda, \text{diam } D', \text{diam } X - \lambda\}.$$

Так как $\#D' \leq m$, у разбиения D' существует подразбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Ясно, что $\text{diam } D \leq \text{diam } D'$, поэтому

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\} \leq \max\{\text{diam } D', \lambda, \text{diam } X - \lambda\} = \text{dis } R,$$

что и требовалось. $\square$

В рассматриваемом случае $1 \leq m \leq \#X$ положим $d_m(X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{diam } D$. Отметим одно важное для дальнейшего свойство.

Замечание 2.25. Функция $m \mapsto d_m(X)$ монотонно убывает с ростом m .

Теорема 2.26. Для ограниченного метрического пространства $X \in \mathcal{B}$, кардинального числа $1 \leq m \leq \#X$ и вещественного числа $0 < \lambda \leq (\text{diam } X)/2$ выполняется

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\{d_m(X), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Доказательство. По предложению 2.24, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{dis } R_D$. По следствию 2.23,

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Так как $0 < \lambda \leq (\text{diam } X)/2$, то $\text{diam } X - \lambda \geq (\text{diam } X)/2 \geq \lambda - \alpha(D)$, откуда $\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \text{diam } X - \lambda\}$ и, значит,

$$\begin{aligned} 2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) &= \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \max\{\text{diam } D, \text{diam } X - \lambda\} = \\ &= \max\left\{\inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{diam } D, \text{diam } X - \lambda\right\} = \max\{d_m(X), \text{diam } X - \lambda\}, \end{aligned}$$

что и требовалось $\square$

2.1.4 Равномощные симплексы

Для произвольного метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ положим $s(X) = \inf\{|xx'| : x, x' \in X, x \neq x'\}$. Отметим, что если D — разбиение пространства X , все элементы которого — одноточечные, то $s(X) = \alpha(D)$.

Предложение 2.27. Для произвольного метрического пространства X мощности $n \geq 2$ и вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \leq \max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную биекцию $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_n, X)$, тогда

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \text{dis } R &= \sup\{||xx'| - \lambda| : x, x' \in X, x \neq x'\} = \\ &= \max \left[\sup_{||xx'| \leq \lambda} \{||xx'| - \lambda| : x, x' \in X, x \neq x'\}, \sup_{||xx'| \geq \lambda} \{||xx'| - \lambda| : x, x' \in X, x \neq x'\} \right] = \\ &= \max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\}, \end{aligned}$$

поэтому $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \leq \text{dis } R = \max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\}$, что и требовалось. $\square$

Следствие 2.28. Для конечного метрического пространства X мощности $n = \#X \geq 2$ и вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Доказательство. По предложению 2.24, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_n(X)} \text{dis } R_D$. Так как $n = \#X$ — конечное число, то множество всех R_D — это множество всех биекций между $\lambda\Delta_n$ и X . Оставшаяся часть доказательства получается выкладкой (2.2), что и требовалось. $\square$

Замечание 2.29. Отметим, что следствие 2.28 перестает быть верным, если отказаться от условия конечности. Действительно, рассмотрим счетный симплекс $\lambda\Delta_n$ и счетное пространство X , в котором одно расстояние $|xx'|$ равно 1, а все остальные равны 4. Положим $\lambda = 3$. Тогда $\text{diam } X = 4$, $s(X) = 1$, и, значит, $\max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\} = \max\{2, 1\} = 2$. Выберем в $3\Delta_n$ произвольную точку a , положим $\Delta' = 3\Delta_n \setminus \{a\}$, рассмотрим произвольную биекцию $g: \Delta' \rightarrow X \setminus \{x, x'\}$ и определим соответствие $R \in \mathcal{R}(3\Delta_n, X)$ следующим образом:

$$\{(a, x), (a, x')\} \cup \{(a', g(a'))\}_{a' \in \Delta'}.$$

Легко видеть, что $\text{dis } R = 1$, так что $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \leq 1 < \max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\}$.

2.2 Пространства $\mathcal{E}_n(\lambda)$ и $\mathcal{F}_n(\lambda)$ для произвольной мощности $n \geq 2$

В данном разделе мы частично обобщим результаты из [15], касающиеся свойств множеств $\mathcal{E}_n(\lambda)$ и $\mathcal{F}_n(\lambda)$ на случай, когда вместо $\mathcal{M}$ рассматривается собственный класс $\mathcal{B}$ всех ограниченных множеств, а в качестве n — произвольное кардинальное число. Итак, положим

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{B}}(\lambda) = \text{Mid}(\mathcal{B}, \Delta_1, \lambda\Delta_n) \cap \{X \in \mathcal{B} : \text{diam } X \geq 2\lambda\} = \{X \in \mathcal{B} : d_{GH}(\Delta_1, X) = d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \geq \lambda\},$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^{\mathcal{B}}(\lambda) &= \{A \in \mathcal{B} : \text{diam } A = \lambda \text{ \& } \mathcal{E}_n^{\mathcal{B}}(\lambda) \subset \text{Mid}(\mathcal{B}, \Delta_1, A)\} = \\ &= \{A \in \mathcal{B} : \text{diam } A = \lambda \text{ \& } \forall X \in \mathcal{B} : d_{GH}(\Delta_1, X) = d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \geq \lambda \Rightarrow d_{GH}(\Delta_1, X) = d_{GH}(A, X)\}. \end{aligned}$$

Предложение 2.30. Для конечного $n \geq 2$ имеем

$$(2.3) \quad \mathcal{E}_n(\lambda) = \mathcal{E}_n^{\mathcal{B}}(\lambda) \cap \mathcal{M},$$

$$(2.4) \quad \mathcal{F}_n^{\mathcal{B}}(\lambda) \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{F}_n(\lambda).$$

Доказательство. Пространство X содержится в $\mathcal{E}_n(\lambda)$, если и только если $X \in \mathcal{M}$ и

$$d_{GH}(\Delta_1, X) = d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \geq \lambda$$

. Но это есть в точности определение из правой части формулы (2.3).

Докажем теперь второе равенство. Пусть $A \in \mathcal{F}_n^B(\lambda) \cap \mathcal{M}$, тогда $A \in \mathcal{M}$, $\text{diam } A = \lambda$ и для всех $X \in \mathcal{E}_n^B(\lambda)$ выполняется $d_{GH}(\Delta_1, X) = d_{GH}(A, X) \geq \lambda$. В силу доказанного выше, $\mathcal{E}_n(\lambda) = \mathcal{E}_n^B(\lambda) \cap \mathcal{M}$, поэтому условие $d_{GH}(\Delta_1, X) = d_{GH}(A, X) \geq \lambda$ выполняется также для всех $X \in \mathcal{E}_n(\lambda)$, что и требовалось. $\square$

Задача 2.31. Верно ли, что $\mathcal{F}_n^B(\lambda) \cap \mathcal{M} = \mathcal{F}_n(\lambda)$?

Предложение 2.32. Пусть $n \geq 2$ — кардинальное и $\lambda > 0$ — вещественное числа. Тогда

- (1) для каждого $r \geq 2\lambda$ и кардинального числа $m > n$ множество $\mathcal{E}_n^B(\lambda)$ содержит симплекс $r\Delta_m$, в частности, $\mathcal{E}_n^B(\lambda)$ непусто;
- (2) для любого $X \in \mathcal{E}_n^B(\lambda)$ имеем $\#X > n$;
- (3) для любого $X \in \mathcal{E}_n^B(\lambda)$ выполняется $d_n(X) = \text{diam } X$.

Доказательство. (1) По предложению 1.46, имеем $2d_{GH}(r\Delta_m, \lambda\Delta_n) = \max\{r, \lambda - r\} = r$. С другой стороны, по утверждению 1.23, выполняется $2d_{GH}(r\Delta_m, \Delta_1) = r$, откуда $r\Delta_m \in \mathcal{E}_n^B(\lambda)$.

(2) Предположим противное, т.е. существует $X \in \mathcal{E}_n^B(\lambda)$ такой, что $\#X \leq n$. Если $\#X < n$, то по теореме 2.21,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\} < \text{diam } X.$$

Если же $\#X = n$, то предложению 2.27,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) \leq \max\{\lambda - s(X), \text{diam } X - \lambda\} < \text{diam } X.$$

Однако, по определению $\mathcal{E}_n^B(\lambda)$, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = 2d_{GH}(\Delta_1, X) = \text{diam } X$, противоречие.

(3) Из пункта (2) вытекает, что $\#X > n$. Так как $\text{diam } X \geq 2\lambda$, то применима теорема 2.26, в соответствии с которой $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \max\{d_n(X), \text{diam } X - \lambda\}$. С другой стороны, по определению $\mathcal{E}_n^B(\lambda)$, имеем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = 2d_{GH}(\Delta_1, X) = \text{diam } X$$

откуда $d_n(X) = \text{diam } X$, что и требовалось. $\square$

Замечание 2.33. В случае $\mathcal{E}_n(\lambda)$ предложение 2.32 модифицируется лишь так: теперь по n и m нужно понимать натуральные числа.

Для кардинального числа n положим

$$\mathcal{B}_n = \{X \in \mathcal{B} : \#X \leq n\} \text{ и } \mathcal{B}_n[\lambda] = \{X \in \mathcal{B}_n : \text{diam } X = \lambda\}.$$

Предложение 2.34. Для кардинального числа $n \geq 2$ и вещественного числа $\lambda > 0$ множество $\mathcal{F}_n^B(\lambda)$ содержит множество $\mathcal{B}_n[\lambda]$ всех непустых метрических пространств мощности не больше n и диаметра λ .

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{B}_n[\lambda]$. Выберем произвольное $X \in \mathcal{E}_n^B(\lambda)$. По предложению 2.32, выполняется $\#X > n$, поэтому множество $\mathcal{D}_n(X)$ непусто. По предложению 2.32, $d_n(X) = \text{diam } X$, поэтому для любого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(A, X)$ и соответствующего ему разбиения $D_X = \cup_{a \in A} \{R(a)\} \in \mathcal{D}_m(X)$, $m \leq n$, в силу замечания 2.25, имеем $\text{diam } D_X \geq d_m(X) \geq d_n(X)$, откуда

$$\text{dis } R \geq \text{diam } D_X \geq d_n(X) = \text{diam } X$$

и, следовательно, $2d_{GH}(A, X) \geq \text{diam } X$. Но $\text{diam } X > \lambda = \text{diam } A$ и $2d_{GH}(A, X) \leq \max\{\text{diam } A, \text{diam } X\} = \text{diam } X$, откуда $2d_{GH}(A, X) = \text{diam } X = 2d_{GH}(\Delta_1, X)$, так что $A \in \mathcal{F}_n^B(\lambda)$. $\square$

Почти дословное повторение доказательства предложения 2.34 приводит к следующему результату.

Предложение 2.35. Для натурального числа $n \geq 2$ и вещественного числа $\lambda > 0$ множество $\mathcal{F}_n(\lambda)$ содержит множество $\mathcal{M}_n[\lambda]$ всех непустых метрических пространств мощности не больше n и диаметра λ .

Доказательство теоремы 2.19. В предложении 2.35 мы показали, что $\mathcal{M}_n[\lambda] \subset \mathcal{F}_n(\lambda)$. Докажем теперь обратное включение, т.е. что если $A \in \mathcal{F}_n(\lambda)$, то $\#A \leq n$. Предположим противное, т.е. что существует $A \in \mathcal{F}_n(\lambda)$, для которого $\#A > n$.

Положим $\varepsilon = \lambda/3$ и выберем в A конечную ε -сеть $S = \{a_1, \dots, a_m\}$, состоящую из $m \geq n+1$ точек. Положим $A_i = B_\varepsilon(a_i)$, тогда $\text{diam } A_i \leq 2\varepsilon < \lambda$ и $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Рассмотрим множество $X = \{x_1, \dots, x_{2m}\}$ и превратим его в метрическое пространство, положив $|x_i x_j| = 2\lambda$ для $1 \leq i < j \leq m$, а все остальные расстояния между различными точками зададим равными λ . Так как $n < m$, то $d_n(X) = 2\lambda = \text{diam } X$, поэтому, в силу теоремы 2.26, имеем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \max\{d_n(X), \text{diam } X - \lambda\} = \text{diam } X = 2d_{GH}(\Delta_1, X),$$

так что $X \in \mathcal{E}_n(\lambda)$.

Определим $R \in \mathcal{R}(A, X)$ следующим образом:

$$R = \{(a_i, x_i)\}_{i=1}^m \cup (A_1 \times \{x_{m+1}\}) \cup \dots \cup (A_m \times \{x_{2m}\}),$$

тогда $2d_{GH}(A, X) \leq \text{dis } R < 2\lambda = \text{diam } X$, противоречие. Таким образом, $\#A \leq n$. $\square$

Итак, мы доказали, см. следствие 2.20, что изометрия f пространства $\mathcal{M}$ переводит подмножество $\mathcal{M}_{[n]}$ всех конечных n -точечных пространств в себя. Следующий шаг будет состоять в построении разветвленного накрытия π пространства $\mathcal{M}_{[n]}$ некоторым конусом C в $\mathbb{R}^N$, где $N = n(n-1)/2$. Мы выделим в $\mathcal{M}_{[n]}$ пространства общего положения, в окрестности которых накрытие π является локальной изометрией, если $\mathbb{R}^N$ рассматривать как пространство с тах-нормой. Мы покажем, что изометрия f переводит подпространство $\mathcal{M}_{[n]}^g \subset \mathcal{M}_{[n]}$, состоящее из всех пространств общего положения, в себя. Отсюда мы получим, что f порождает локальную изометрию части C^g конуса C , соответствующей пространствам общего положения. Этот факт позволит нам применить обобщение знаменитой теоремы Мазура–Улама, которая утверждает, что локальная изометрии такого типа задается аффинным отображением. Тем самым, изометрия f порождает в малых окрестностях пространств общего положения аффинные отображения. Из связности пространства C^g вытекает, что все эти аффинные отображения порождаются одним и тем же аффинным отображением всего нормированного пространства $\mathbb{R}^N$. Пользуясь тем, что 0 является предельной точкой множества C^g и соответствует, при естественном непрерывном продолжении, одноточечному метрическому пространству, мы покажем, что аффинное отображение на самом деле является линейной изометрией. Так как единичная сфера в пространстве с тах-нормой представляет собой куб, то группа линейных изометрий этой нормы совпадает с группой S_N перестановок базисных векторов. В этой группе содержится подгруппа G , соответствующая перестановкам точек метрических пространств из $\mathcal{M}_{[n]}$. Мы покажем, что G совпадает со своим нормализатором, т.е. с подгруппой из всех $g \in S_N$, для которых $g^{-1}Gg = G$. Наконец мы выясним, что каждая перестановка $g \in S_N$, порожденная изометрией f , содержится в нормализаторе G и, значит, в самой G , а отсюда вытекает, что изометрия f оставляет каждое метрическое пространство на месте. В заключение воспользуемся тем, что $\mathcal{M}_{[n]}^g$ всюду плотно в $\mathcal{M}_{[n]}$, а $\bigcup_{n \geq m} \mathcal{M}_{[n]}$ — всюду плотно в $\mathcal{M}$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

2.3 Представление конечных метрических пространств векторами расстояний

Пусть $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ — конечное метрическое пространство, состоящее из $n \geq 2$ точек. Занумеруем точки из X начальным отрезком натурального ряда, т.е. рассмотрим произвольную биекцию $\eta: \{1, \dots, n\} \rightarrow X$, и пусть $B(X)$ — множество всех таких биекций η . Для удобства положим $x_i = \eta(i)$, так что $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $\rho_{ij} = \rho_{ji} = |x_i x_j|$. Рассмотрим вектор

$$\rho_X^\eta = (\rho_{12}, \dots, \rho_{1n}, \rho_{23}, \dots, \rho_{2n}, \dots, \rho_{(n-1)n}) \in \mathbb{R}^N,$$

где $N = n(n-1)/2$. Иными словами, мы рассматриваем множество пар (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, упорядочиваем это множество лексикографически, и в этом порядке выписываем расстояния ρ_{ij} , получая в результате вектор ρ_X^η .

Положим

$$C = \{\rho_X^\eta : X \in \mathcal{M}_{[n]}, \eta \in B(X)\}.$$

Обозначим координаты в $\mathbb{R}^N$ через v_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, так что v_{ij} -ая координата вектора ρ_X^η равна ρ_{ij} . Для удобства записи положим $v_{ji} = v_{ij}$, тогда множество C задается системой неравенств $v_{ij} > 0$ (положительная

определенность) и $v_{ij} + v_{jk} \geq v_{ik}$ (неравенство треугольника) для всех $i \neq j \neq k \neq i$. Отметим, что C выпукло и инвариантно относительно умножения на любое положительное число, и в этом смысле C является конусом.

Если для вектора $v \in C$ через $\pi(v)$ обозначить метрическое пространство $X \in \mathcal{M}_{[n]}$, состоящее из n занумерованных точек $\{x_1, \dots, x_n\}$, в котором $|x_i x_j| = v_{ij}$, то мы получим сюръективное отображение $\pi: C \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}$. При этом $\pi^{-1}(X)$ состоит в точности из ρ_X^η по всем нумерациям $\eta \in B(X)$, т.е. $\pi^{-1}(X) = \bigcup_{\eta \in B(X)} \{\rho_X^\eta\}$.

Введем на $\mathbb{R}^N$ расстояние, заданное $\max$ -нормой: если $v = (v_{12}, \dots, v_{(n-1)n}) \in \mathbb{R}^N$, то $\|v\|_\infty = \max_{i < j} |v_{ij}|$, а для $v, w \in \mathbb{R}^N$ расстояние $|vw|$ зададим равным половине соответствующего расстояния: $|vw| = \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty$.

Предложение 2.36. *Отображение $\pi: C \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}$ является 1-липшицевым, т.е.*

$$d_{GH}(\pi(v), \pi(w)) \leq |vw|.$$

Доказательство. Действительно, если $X = \pi(v)$, где $v = \rho_X^\eta$ для соответствующего $\eta \in B(X)$, $x_i = \eta(i)$, и, аналогично, $Y = \pi(w)$, где $w = \rho_Y^\mu$ для соответствующего $\mu \in B(Y)$, $y_i = \mu(i)$, то для биективного соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, $R = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, имеем

$$2|vw| = \max_{i < j} |v_{ij} - w_{ij}| = \max_{i < j} ||x_i x_j| - |y_i y_j|| = \text{dis } R \geq 2d_{GH}(X, Y),$$

что и требовалось. $\square$

Опишем некоторые свойства конуса C .

Предложение 2.37. *Пусть C — определенный выше конус.*

- (1) Точка $v \in C$ является граничной, если и только если для некоторых $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n$ выполняется равенство $v_{ij} + v_{jk} = v_{ik}$, т.е. одно из неравенств треугольника является вырожденным. Такие v назовем **вырожденными**. Множество всех вырожденных точек конуса C обозначим $\partial_d C$. Топологическая граница ∂C множества $C \subset \mathbb{R}^N$ содержит, кроме $\partial_d C$, еще и точки, в которых все v_{ij} неотрицательны, выполняются все неравенства треугольника, но некоторые v_{ij} обращаются в ноль (метрическое пространство вырождается в псевдометрическое).
- (2) Множество $\text{Int } C$ всех внутренних точек конуса C совпадает с множеством тех v , где все неравенства треугольника являются строгими, т.е. для любых $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n$ выполняется $v_{ij} + v_{jk} > v_{ik}$. Как и принято в топологии, точки из $\text{Int } C$ будем называть **внутренними**.
- (3) Для каждого $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ все точки из $\pi^{-1}(X)$ или одновременно вырожденные, или же — внутренние. В первом случае также назовем X **вырожденным**, а во втором — **внутренним**. Множество всех вырожденных точек из $\mathcal{M}_{[n]}$ обозначим $\partial_d \mathcal{M}_{[n]}$, а внутренних — через $\text{Int } \mathcal{M}_{[n]}$.
- (4) Множества вырожденных точек $\partial_d C$ и $\partial_d \mathcal{M}_{[n]}$ лежат в замыканиях соответствующих множеств внутренних точек $\text{Int } C$ и $\text{Int } \mathcal{M}_{[n]}$.

Доказательство. (1) — (2) Пусть точка $v \in C$ является вырожденной, так что выполняется одно из равенств $v_{ij} + v_{jk} = v_{ik}$. Уменьшая в таком векторе v его координаты v_{ij} , v_{jk} и v_{ik} на одно и то же сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, мы получим вектор $v^{-\varepsilon}$, который не содержится в C , так как $v_{ij} - \varepsilon + v_{jk} - \varepsilon < v_{ik} - \varepsilon$, т.е. неравенство треугольника не выполняется. Таким образом, все вырожденные точки конуса C являются граничными. Пусть теперь всегда выполняется $v_{ij} + v_{jk} > v_{ik}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $v' = (v'_{12}, \dots, v'_{(n-1)n})$, удовлетворяющего $|v_{ij} - v'_{ij}| < \varepsilon$ для всех $i < j$, этот вектор v' лежит в C . Таким образом, точка v является внутренней для C .

(3) Условия вырожденности неравенства треугольника и его строгости — это условия на расстояния в X , поэтому наличие вырожденного неравенства в X равносильно присутствию такого неравенства у всех π -образов.

(4) Пусть $v \in C$ является вырожденной. Увеличивая в таком векторе v его координаты v_{ij} , v_{jk} и v_{ik} на одно и то же сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, мы получим вектор v^ε , в котором все неравенства треугольника строгие, так что $v^\varepsilon \in C$. Тем самым, v — граничная точка для $\text{Int } C$. Для $\text{Int } \mathcal{M}_{[n]}$ утверждение вытекает из непрерывности проекции π , см. предложение 2.36. $\square$

Обозначим S_m группу перестановок множества $\{1, \dots, m\}$. Группа S_N действует на $\mathbb{R}^N$ линейными преобразованиями, переставляющими базисные векторы e_{ij} . А именно, мы упорядочиваем двойные индексы ij векторов e_{ij} лексикографически, так что в новой нумерации вектор e_{ij} имеет вид e_k , $k \in \{1, \dots, N\}$. Теперь для $\sigma \in S_N$ действие $\sigma: e_k \mapsto e_{\sigma(k)}$ мы продолжаем до линейного преобразования $\mathbb{R}^N$.

Группа S_n также действует на $\mathbb{R}^N$, а именно, если $g \in S_n$, то $g(e_{ij}) = e_{g(i)g(j)}$. Таким образом, S_n можно реализовать в виде подгруппы G группы S_N .

Заметим, что точки из $\pi^{-1}(X)$ получаются друг из друга применением действия перестановок из группы G . Таким образом, описанное выше действие группы G на $\mathbb{R}^N$ переводит конус C в себя, и орбиты этого действия совпадают в прообразах $\pi^{-1}(X)$ для всевозможных $X \in \mathcal{M}_{[n]}$. Иными словами, отображение π уважает действие группы G .

Пусть $v \in C$ и $\text{St}_G(v) \subset G$ — стационарная подгруппа для v , т.е. множество всех таких перестановок $g \in G$, что $g(v) = v$. Такие перестановки — это в точности биекции, сохраняющие расстояния, т.е. они соответствуют изометриям пространства $X = \pi(v)$ на себя. Отсюда вытекает, что максимальное количество элементов в $\pi^{-1}(X)$ (равное $n!$) будет в точности у **вполне несимметричных** пространств, т.е. у таких X , чья группа изометрий $\text{Iso}(X)$ тривиальна (состоит только из тождественного отображения). Соответствующие векторы $v \in \pi^{-1}(X)$ также будем называть **вполне несимметричными**.

Следующее простое утверждение остается в качестве упражнения.

Упражнение 2.38. Множества $\mathcal{M}_{[n]}^a$ и C^a вполне несимметричных пространств — открытые всюду плотные подмножества соответственно в $\mathcal{M}_{[n]}$ и C .

Отметим, что отображение π не является локально изометричным для всех точек из C . Тем не менее, для открытого всюду плотного множества точек из C отображение π изометрично на достаточно малых окрестностях. В действительности, это выполняется в точности для вполне несимметричных пространств. Тем не менее, со всеми такими пространствами работать не очень удобно, а лучше ограничиться внутренними (всевозможные их малые деформации оставляют их внутренними и сохраняют свойство полной несимметричности). Такие пространства мы называем пространствами общего положения. Итак, говорят, что пространство X и каждый вектор $v \in \pi^{-1}(X)$ находятся в **общем положении**, если $\text{Iso}(X)$ тривиальна и все неравенства треугольника строгие.

Оказывается, для таких пространств вычисление расстояния между достаточно близкими к ним пространствами из $\mathcal{M}$ существенно упрощается. Этот факт также имеет место и для более широкого класса пространств, не обязательно конечных. В следующем разделе мы приведем фрагмент соответствующей теории.

2.4 Векторы расстояний общих метрических пространств

Пусть I — произвольное множество мощности $n \geq 2$ (не обязательно конечной). Через $\mathcal{N} = I^{(2)}$ обозначим семейство всевозможных двухэлементных подмножеств множества I . Элемент $\{i, j\} \in \mathcal{N}$ будем обозначать как ij , так и ji . Отметим, что мощность N множества $\mathcal{N}$ равна n , если и только если n — конечно и равно 3, или же n — бесконечно.

Пусть $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ — множество всех вещественных функций на $\mathcal{N}$, рассматриваемое как линейное пространство. Для $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ числа $v(ij) = v(ji)$ — **координаты вектора** v — будем обозначать $v_{ij} = v_{ji}$. Вектор $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ назовем **метрикой**, если $v_{ij} > 0$ при всех $ij \in \mathcal{N}$ (положительная определенность), а также $v_{ij} + v_{jk} \geq v_{ik}$ при всех $ij, jk, ik \in \mathcal{N}$ (неравенства треугольника). Подмножество $C_n \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, состоящее из всех метрик, будем называть **метрическим конусом**. Это название оправдано тем, что множество C_n инвариантно при умножении на положительные числа.

Пусть X — произвольное метрическое пространство мощности n и $\eta: I \rightarrow X$ — некоторая биекция. Эти биекции будем называть **нумерациями** X , а множество всех таких биекций обозначим $B(X)$. Положим $\rho_X^\eta(ij) = |\eta(i)\eta(j)|$, тогда, в силу свойств метрики, имеем $\rho_X^\eta \in C_n$. Функцию ρ_X^η назовем **вектором расстояний пространства X , соответствующим нумерации η** .

Обратно, для вектора $v \in C_n$, множества Z , равномощного I , и нумерации $\eta: I \rightarrow Z$ множества Z , функция на $Z \times Z$, равная нулю на диагонали $\{(z, z)\}_{z \in Z}$ и сопоставляющая каждой паре (z, z') , $z \neq z'$, число $v_{\eta^{-1}(z)\eta^{-1}(z')}$, является метрикой, причем $v = \rho_Z^\eta$. Таким образом, конус C_n состоит в точности из векторов расстояний всевозможных метрических пространств мощности n , построенных по всевозможным нумерациям точек этих пространств.

Замечание 2.39. Если для конечного n в качестве I взять $\{1, \dots, n\}$, и каждому подмножеству $\{i, j\} \subset I$, $i \neq j$, поставить в соответствие базисный вектор $e_{ij} = e_{ji}$ пространства $\mathbb{R}^N$, то получим естественное отождествление

пространства $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^N$. При таком взгляде то, чтобы было проделано в предыдущем разделе, является частным случаем приводимой здесь конструкции.⁴

Наделим $\mathbb{R}^N$ расстоянием, положив $|vw| = \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} |v_{ij} - w_{ij}|$ для каждого $v, w \in \mathbb{R}^N$. Это расстояние является обобщенной метрикой. Вектор $v \in \mathbb{R}^N$ назовем **ограниченным**, если существует число $c > 0$, для которого $|v_{ij}| < c$ для всех $ij \in \mathcal{N}$. В противном случае, вектор v назовем **неограниченным**. Облако, содержащее начало координат $0 \in \mathbb{R}^N$, состоит из всех ограниченных векторов и будет обозначаться $\mathbb{R}_\infty^N$. Ясно, что $\mathbb{R}_\infty^N$ является линейным подпространством в $\mathbb{R}^N$, и на нем расстояние до 0 равно половине $\sup$ -нормы $\|v\|_\infty = \sup_{ij \in \mathcal{N}} |v_{ij}|$.⁵

Как выглядят остальные облака?

Предложение 2.40. *Каждое облако, отличное от $\mathbb{R}_\infty^N$, является аффинным подпространством вида $v + \mathbb{R}_\infty^N$, где v — некоторый неограниченный вектор. Если v — неограниченный вектор, то для каждого $\lambda \neq 1$, векторы v и λv лежат в разных облаках.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что условие $|vw| = \sup_{ij \in \mathcal{N}} |v_{ij} - w_{ij}| < \infty$ равносильно ограниченности вектора с координатами $v_{ij} - w_{ij}$, т.е. условию $v - w \in \mathbb{R}_\infty^N$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть $v \in \mathbb{R}^N$ — неограниченный вектор, тогда существует последовательность $v_{i_k j_k}$, стремящаяся к бесконечности. Следовательно,

$$2|(\lambda v)v| \geq |\lambda - 1| \cdot |v_{i_k j_k}| \rightarrow \infty,$$

что и требовалось. $\square$

Пусть $\mathcal{GH}_{[n]} \subset \mathcal{GH}$ состоит из всех метрических пространств мощности n . Как было отмечено выше, $\mathcal{GH}_n$ является множеством, а, значит, множеством также является и $\mathcal{GH}_{[n]} \subset \mathcal{GH}_n$. Как и в случае конечных пространств, для $C_n \subset \mathbb{R}^N$ определим отображение $\pi: C_n \rightarrow \mathcal{GH}_{[n]}$, положив $\pi(v)$ равным выбранному для $\mathcal{GH}_{[n]}$ представителю класса изометрии метрического пространства I мощности n , в котором v_{ij} — расстояние между $i, j \in I$, $i \neq j$, а все $|ii|$ равны нулю. Отображение π будем называть **канонической проекцией**.

Предложение 2.41. *Отображение $\pi: C_n \rightarrow \mathcal{GH}_{[n]}$ является 1-липшицевым, т.е.*

$$d_{GH}(\pi(v), \pi(w)) \leq |vw|.$$

Доказательство. Если $v, w \in \mathbb{R}^N$ лежат в одном облаке, то доказательство дословно повторяет рассуждения в доказательстве предложения 2.36. Если же $|vw| = \infty$, то утверждение также имеет место, не зависимо от того, чему равно $d_{GH}(\pi(v), \pi(w))$. $\square$

Пусть $\mathcal{B}_{[n]}$ обозначает множество всех ограниченных пространств мощности n .

Предложение 2.42. *Имеем $\pi(C_n \cap \mathbb{R}_\infty^N) = \mathcal{B}_{[n]}$. Более того, для любого облака $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$, отличного от $\mathbb{R}_\infty^N$, выполняется $\pi(C_n \cap \mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_{[n]} = \emptyset$.*

Доказательство. Ограниченность метрического пространства X равносильна ограниченности в совокупности всех расстояний и, значит, всех компонент вектора ρ_X^η для произвольной нумерации $\eta \in B(X)$. $\square$

Замечание 2.43. Облака, отличные от $\mathbb{R}_\infty^N$, могут отображаться в одно и то же облако в $\mathcal{GH}_{[n]}$. Действительно, пусть $X = \mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел с естественным расстоянием. Обозначим ν биективное отображение множества $A = \{2^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ и множества $B \subset \mathbb{N}$ нечетных чисел: $\nu(2^{n-1}) = 2n - 1$. Пусть $\mu: \mathbb{N} \setminus A \rightarrow \mathbb{N} \setminus B$ — произвольная биекция. Обозначим $\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ нумерацию, совпадающую с ν на A и с μ на $\mathbb{N} \setminus A$. Пусть $\text{id}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — тождественная нумерация. Положим $v = \rho_{\mathbb{N}}^{\text{id}}$ и $w = \rho_{\mathbb{N}}^\eta$. Тогда

$$|vw| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| ((2n+1) - (2n-1)) - (2^n - 2^{n-1}) \right| = \infty,$$

поэтому v и w лежат в разных облаках соответствующего пространства $\mathbb{R}^N$, но отображаются в одно и то же облако в $\mathcal{GH}_{[\aleph_0]}$, где $\aleph_0$ — счетный кардинал.

⁴Для тех, кто знаком с понятием ординалов, отметим, что еще большая аналогия может быть достигнута, если отождествить I с ординалом мощности n . Тогда такое I будет иметь вид $\{1, 2, \dots\}$, на нем будет задан линейный порядок, и в качестве $\mathcal{N}$ можно рассматривать все упорядоченные пары (i, j) , $i, j \in I$, $i < j$.

⁵Эту $\sup$ -норму можно задать и на всем пространстве $\mathbb{R}^N$. При этом, полученная функция будет принимать также значения ∞ . Такие функции называют **обобщенными нормами**. Имеется сложность с заданием аксиомы положительной однородности $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, так как при $\lambda = 0$ и $\|v\| = \infty$ возникает неопределенность. В одном из подходов эту проблему решают, полагая $0 \cdot \infty = 0$, как это иногда делается в теории меры. При таком подходе отображение $(\lambda, v) \rightarrow \|\lambda v\|$ перестает быть непрерывным в $(0, v)$, где $\|v\| = \infty$. Другой подход состоит в том, что аксиому однородности задают только для $\lambda \neq 0$.

Возникает следующий естественный вопрос: верно ли, что если два равномоощных метрических пространства X и Y находятся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, то между ними существует биекция с конечным искажением? Иными словами, верно ли, что для некоторых нумераций $\eta \in B(X)$ и $\mu \in B(Y)$ векторы ρ_X^η и ρ_Y^μ находятся на конечном расстоянии? Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 2.44. Пусть $X = \{2^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ и $Y = X \cup \{2^n + 1\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ вида $\{(2^n, 2^n), (2^n, 2^n + 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$, тогда $\text{dis } R = 1$, так что $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Пусть $R' \in \mathcal{R}(X, Y)$ — произвольная биекция. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют такие $(2^m, 2^n), (2^p, 2^n + 1) \in R'$, что $m, n, p > k$. Так как R' биективно, то $p \neq m$, откуда $\text{dis } R' \geq |2^p - 2^m| - 1 \geq 2^{\min(p, m)} - 1 \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, для каждой биекции R' выполняется $\text{dis } R' = \infty$.

Чтобы корректно перенести на случай бесконечных пространств понятия граничных и внутренних пространств, а также пространств общего положения, нам понадобится ввести ряд числовых характеристик метрических пространств.

Пусть X — метрическое пространство, $\#X \geq 3$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биекций множества X на себя, и через $\text{id} \in S(X)$ — тождественную биекцию. Положим

$$\begin{aligned} s(X) &= \inf \left\{ |xx'| : x \neq x', x, x' \in X \right\}, \\ t(X) &= \inf \left\{ |xx'| + |x'x''| - |xx''| : x \neq x' \neq x'' \neq x, x, x', x'' \in X \right\}, \\ e(X) &= \inf \left\{ \text{dis } f : f \in S(X), f \neq \text{id} \right\}. \end{aligned}$$

Метрическое пространство $M \in \mathcal{GH}$, $\#M \geq 3$, назовем *пространством общего положения*, если все три его характеристики $s(M)$, $t(M)$ и $e(M)$ положительны.

Замечание 2.45. Положительность первой характеристики $s(M)$ означает, что расстояния между разными точками в M отделены от нуля, в частности, пространство M дискретно. Пространства M , у которых $s(M) > 0$, назовем *вполне дискретными*. Вторая характеристика $t(M)$ показывает, насколько все треугольники в M далеки от вырожденных. Пространства M , у которых $t(M) > 0$, назовем *вполне невырожденными*. Наконец, третья характеристика $e(M)$ отвечает за степень несимметричности пространства M . Пространства M , у которых $e(M) > 0$, назовем *вполне несимметричными*. Итак, *пространства общего положения* — это вполне дискретные, вполне невырожденные и вполне несимметричные метрические пространства.

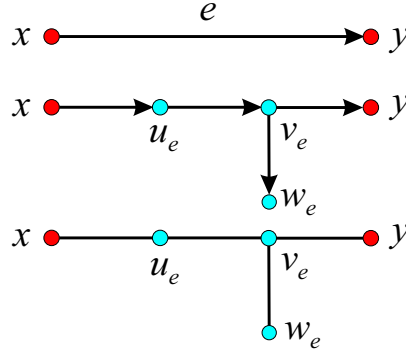
Нетрудно построить пример метрического пространства M общего положения любой конечной мощности $n \geq 3$. Для этого мы можем начать с симплекса Δ_n , и ко всем его расстояниям прибавить разные вещественные числа, по модулю меньшие, чем $1/3$. Тогда $s(M) > 2/3$, $t(M) > 0$ и $e(M) > 0$, так что M — пространство общего положения. Покажем теперь, как построить метрические пространства общего положения произвольной бесконечной мощности. Эта конструкция была предложена Константином Шрамовым.

Конструкция 2.46. Пусть X — произвольное бесконечное множество. Хорошо известно, что каждое множество может быть вполне упорядочено, т.е. существует линейный порядок, в котором каждое подмножество содержит наименьший элемент. Введем на X какой-нибудь полный порядок “ $<$ ” и покажем, что не существует биекций $\sigma: X \rightarrow X$, отличных от тождественного отображения и сохраняющих этот порядок.

Рассмотрим произвольную биекцию $\sigma: X \rightarrow X$, сохраняющую порядок. Обозначим 0 наименьший элемент из X . Так как наименьший элемент единственный, то $\sigma(0) = 0$. Пусть $x \in X$ — такой элемент, что биекция σ неподвижна на всех элементах $y < x$. Рассмотрим множество $Z = \{z \in X : z \geq x\}$. Это множество также вполне упорядочено, а x — его наименьший элемент. Так как σ — биекция, то σ переводит Z биективно на себя и сохраняет порядок. Но тогда, как и выше, $\sigma(x) = x$. Таким образом, по трансфинитной индукции, σ — тождественное отображение.

Отметим, что линейный порядок на X можно задать в виде ориентированного графа G_σ , в котором ребра — это все упорядоченные пары (x, y) , где $x < y$. Из сказанного выше вытекает, что единственным автоморфизмом графа G_σ является тождественное отображение. Построим теперь новый ориентированный граф H_σ , заменив каждое ребро $e = (x, y)$ графа G_σ на три вершины u_e, v_e, w_e и четыре ребра (x, u_e) , (u_e, v_e) , (v_e, y) , (v_e, w_e) , см. рис. 2.4.

Пусть H — соответствующий H_σ неориентированный граф. Покажем, что у графа H не существует нетривиальных автоморфизмов. Отметим, что X — это в точности все вершины в H , имеющие бесконечную степень,

Рис. 2.4: Построение графа H .

поэтому каждый автоморфизм ν графа H переводит X в себя. Пусть $e = (x, y)$ — ребро графа G_o . Мы покажем, что $(\nu(x), \nu(y))$ также является ребром графа G_o . Предположим противное, т.е. ребром графа G_o является пара $f = (\nu(y), \nu(x))$. Автоморфизм ν переводит путь $xu_e v_e y$ в графе H в путь $\nu(x)\nu(u_e)\nu(v_e)\nu(y)$. Так как в H имеется единственный путь длины 3, соединяющий $\nu(x)$ и $\nu(y)$, и этот путь есть $\nu(y)u_f v_f \nu(x)$, то получаем $\nu(v_e) = u_f$ и $\nu(u_e) = v_f$. Однако вершина v_e имеет степень 3 в графе H , а вершина u_f — степень 2, противоречие. Таким образом, $(\nu(x), \nu(y))$ — ребро графа G_o . Таким образом, ограничение каждого автоморфизма ν графа H на X сохраняет порядок, поэтому, в силу сказанного выше, ограничение ν на X — тождественное отображение. Но тогда вершины путей $xu_e v_e y$ также неподвижны и, значит, w_e тоже переходят в себя.

Пусть V — множество вершин графа H . Заметим, что для бесконечного X множество V равномощно X . Зададим на V метрику, положив расстояние между разными несмежными вершинами равным 1, а между смежными равным $1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Ясно, что $s(V) = 1$ и $t(V) = 1 - \varepsilon > 0$. Заметим, что искажение каждой биекции множества V на себя, не являющейся автоморфизмом графа H , равно ε , поэтому, в силу отсутствия у H нетождественных автоморфизмов, заключаем, что $e(V) = \varepsilon$, следовательно, V — пространство общего положения.

Теорема 2.47. Пусть $M \in \mathcal{GH}$ — вполне дискретное пространство, т.е. $\#M \geq 3$ и $s(M) > 0$. Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, s(M)/2]$. Тогда для каждого пространства $X \in \mathcal{GH}$ такого, что $r := d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, выполняются следующие утверждения.

- (1) Существует соответствие $R \in \mathcal{R}(M, X)$, у которого $\text{dis } R < 2\varepsilon$.
- (2) Для каждого такого соответствия R , если $i, j \in M$, $i \neq j$, то $R(i) \cap R(j) = \emptyset$, так что семейство $D_R = \{X_i := R(i)\}_{i \in M}$ является разбиением пространства X .
- (3) Для любых $i, j \in M$, $i \neq j$, и произвольных $x_i \in X_i$ и $x_j \in X_j$ выполняется $||x_i x_j| - |ij|| < 2\varepsilon$.
- (4) При всех $i \in M$ имеем $\text{diam } X_i < 2\varepsilon$.
- (5) Если $\varepsilon \leq s(M)/4$, то разбиение D_R однозначно определено, т.е. если $R' \in \mathcal{R}(M, X)$ таково, что $\text{dis } R' < 2\varepsilon$, то $D_{R'} = D_R$.
- (6) Если пространство M еще и вполне несимметрично, т.е. $e(M) > 0$, и, кроме того, $\varepsilon \leq s(M)/4$ и $\varepsilon < e(M)/4$, то соответствие $R \in \mathcal{R}(M, X)$, у которого $\text{dis } R < 2\varepsilon$, определено однозначно и, значит, R — оптимальное соответствие.

Доказательство. (1) Так как

$$d_{GH}(M, X) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(M, X) \} < \varepsilon,$$

то существует соответствие $R \in \mathcal{R}(M, X)$, для которого $\text{dis } R < 2\varepsilon$.

- (2) Если существует $x \in X$ такой, что $x \in R(i) \cap R(j)$, $i \neq j$, то $\#R^{-1}(x) > 1$, поэтому

$$\text{dis } R \geq \text{diam } R^{-1}(x) \geq s(M) \geq 2\varepsilon,$$

противоречие. Следовательно, различные X_i не пересекаются и образуют разбиение $\{X_i := R(i)\}_{i \in M}$ пространства X .

(3) Так как $\text{dis } R < 2\varepsilon$, то для любых $i, j \in M$, $i \neq j$, и произвольных $x_i \in R(i)$, $x_j \in R(j)$ имеем

$$||x_i x_j| - |ij|| \leq \text{dis } R < 2\varepsilon.$$

(4) Так как $\text{dis } R < 2\varepsilon$, то для каждого $i \in M$ выполняется $\text{diam } X_i \leq \text{dis } R < 2\varepsilon$.

(5) Если $\varepsilon \leq s(M)/4$ и $R' \in \mathcal{R}(M, X)$ — еще одно соответствие, для которого $\text{dis } R' < 2\varepsilon$, то $\{X'_i := R'(i)\}_{i \in M}$ — также некоторое разбиение X , удовлетворяющее перечисленным выше свойствам. Если $D_R \neq D_{R'}$, то или существует X'_i , пересекающий одновременно некоторые неравные X_j и X_k , или существует X_i , пересекающий одновременно некоторые неравные X'_j и X'_k . Действительно, если такого X'_i не существует, то каждый X'_i содержится в некотором X_j , поэтому $\{X'_p\}$ является подразбиением $\{X_q\}$. Так как эти разбиения не совпадают, то некоторый элемент X_i содержит сразу несколько разных X'_j и X'_k .

Итак, без ограничения общности предположим, что X'_i пересекает одновременно некоторые неравные X_j и X_k . Выберем произвольные $x_j \in X_j \cap X'_i$ и $x_k \in X_k \cap X'_i$. Тогда

$$2\varepsilon > \text{diam } X'_i \geq |x_j x_k| > |jk| - 2\varepsilon \geq s(M) - 2\varepsilon,$$

откуда $\varepsilon > s(M)/4$, противоречие.

(6) Пусть, как и в предыдущем пункте, $R' \in \mathcal{R}(M, X)$ удовлетворяет $\text{dis } R' < 2\varepsilon$, тогда, как было показано, $D_R = D_{R'}$. Осталось проверить, что $X_i = X'_i$ при каждом $i \in M$. Предположим противное, т.е. существует нетривиальная биекция $\sigma: M \rightarrow M$, для которой $X_i = X'_{\sigma(i)}$. По условию, $\text{dis } \sigma \geq e(M) > 4\varepsilon$. Последнее означает, что существуют такие $i, j \in M$, для которых

$$||ij| - |\sigma(i)\sigma(j)|| > 4\varepsilon.$$

Положим $p = \sigma(i)$, $q = \sigma(j)$ и выберем произвольные $x_i \in X_i = X'_p$ и $x_j \in X_j = X'_q$. Тогда

$$4\varepsilon < ||pq| - |ij|| = ||pq| - |x_i x_j| + |x_i x_j| - |ij|| \leq ||pq| - |x_i x_j|| + ||x_i x_j| - |ij|| < 2\varepsilon + 2\varepsilon,$$

противоречие. Тем самым, мы доказали, что соответствие R , искажение которого достаточно близко к $2d_{GH}(M, X)$, определено однозначно. Отсюда вытекает оптимальность R . $\square$

Определение 2.48. Семейство $\{X_i\}$ из теоремы 2.47 назовем **каноническим разбиением пространства X относительно M** .

Предложение 2.49. Пусть M — вполне дискретное пространство, т.е. $\#M \geq 3$ и $s(M) > 0$. Выберем любое $\varepsilon \in (0, s(M)/8]$. Тогда для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$, удовлетворяющих $d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, $d_{GH}(M, Y) < \varepsilon$, однозначно определены соответствующие канонические разбиения $\{X_i\}_{i \in M}$ и $\{Y_i\}_{i \in M}$ относительно M , и существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, удовлетворяющее $\text{dis } R < 4\varepsilon$, причем для каждого такого соответствия имеется биекция $\sigma: M \rightarrow M$ такая, что R представимо в виде $R = \sqcup_{i \in M} R_i$ для некоторых $R_i \in \mathcal{R}(X_i, Y_{\sigma(i)})$.

Доказательство. По неравенству треугольника, $d_{GH}(X, Y) \leq d_{GH}(X, M) + d_{GH}(M, Y) < 2\varepsilon$, откуда и вытекает существование R .

Далее, выберем произвольные $x, x' \in X_i$, $y \in R(x)$, $y' \in R(x')$ и покажем, что y и y' принадлежат одному и тому же Y_j . Предположим противное, тогда для некоторых $j \neq k$ имеем $y \in Y_j$, $y' \in Y_k$, откуда, по теореме 2.47,

$$|xx'| \leq \text{diam } X_i < 2\varepsilon, \quad |yy'| > |jk| - 2\varepsilon \geq s(M) - 2\varepsilon \geq 6\varepsilon,$$

так что $\text{dis } R \geq ||xx'| - |yy'|| > 4\varepsilon$, противоречие.

Меняя местами X и Y , заключаем, что для любых $(x, y), (x', y') \in R$ точки x и x' лежат в одном элементе канонического разбиения $\{X_i\}$, если и только если точки y и y' лежат в одном и том же элементе канонического разбиения $\{Y_i\}$, что и завершает доказательство. $\square$

Предложение 2.50. Пусть пространство $M \in \mathcal{GH}$ — вполне дискретное и вполне несимметричное, т.е. $\#M \geq 3$, $s(M) > 0$ и $e(M) > 0$. Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, s(M)/8]$ такое, что $\varepsilon < e(M)/8$. Тогда для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$, удовлетворяющих $d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, $d_{GH}(M, Y) < \varepsilon$, однозначно определены соответствующие канонические разбиения $\{X_i\}_{i \in M}$ и $\{Y_i\}_{i \in M}$ относительно M , и существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, удовлетворяющее $\text{dis } R < 4\varepsilon$, причем все такие R представимы в виде $R = \sqcup_{i \in M} R_i$ для некоторых $R_i \in \mathcal{R}(X_i, Y_i)$.

Доказательство. По предложению 2.49, существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, удовлетворяющее $\text{dis } R < 4\varepsilon$, и для каждого такого соответствия существуют биекция $\sigma: M \rightarrow M$ и $R_i \in \mathcal{R}(X_i, Y_{\sigma(i)})$ такие, что $R = \sqcup_{i \in M} R_i$. Мы должны доказать, что σ — тождественное отображение.

Предположим противное, тогда $\text{dis } \sigma \geq e(M) > 8\varepsilon$, поэтому существуют $i, j \in M$ такие, что для $k = \sigma(i)$ и $l = \sigma(j)$ выполняется $||ij| - |kl|| > 8\varepsilon$. Но, по условию, для любых $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$, $y_k \in R(x_i) \subset Y_k$, $y_l \in R(x_j) \subset Y_l$ выполняется $||y_k y_l| - |kl|| < 2\varepsilon$, $||x_i x_j| - |ij|| < 2\varepsilon$, $||x_i x_j| - |y_k y_l|| \leq \text{dis } R < 4\varepsilon$. Из сказанного выше получаем следующую оценку:

$$||ij| - |kl|| = ||ij| - |x_i x_j| + |x_i x_j| - |y_k y_l| + |y_k y_l| - |kl|| \leq ||ij| - |x_i x_j|| + ||x_i x_j| - |y_k y_l|| + ||y_k y_l| - |kl|| < 8\varepsilon,$$

противоречие. $\square$

Теорема 2.51. Пусть $n \geq 3$ — кардинальное число, I — множество мощности n , $\mathcal{N} = I^{(2)}$ — множество всех двухэлементных подмножеств I , $C_n \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ — метрический конус, а $\pi: C_n \rightarrow \mathcal{GH}_{[n]}$ — каноническая проекция. Предположим, что $\mathcal{GH}_{[n]}$ содержит вполне дискретное и вполне несимметричное пространство M , и пусть $w \in \pi^{-1}(M)$. Выберем $\varepsilon \in (0, s(M)/8]$ такое, что $\varepsilon < e(M)/8$, и пусть $U_\varepsilon(w) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ — соответствующий открытый шар в $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$. Тогда ограничение канонической проекции π на $U_\varepsilon := U_\varepsilon(w) \cap C_n$ изометрично.

Доказательство. Пусть $w = \rho_M^\eta$ для некоторой нумерации $\eta \in B(M)$. Для $i \in I$ положим $m_i = \eta(i)$.

Выберем произвольные $a, b \in U_\varepsilon$ и пусть $X = \pi(a)$, $Y = \pi(b)$. Так как отображение π , в силу предложения 2.41, является 1-липшицевым, то $d_{GH}(X, M) \leq |aw| < \varepsilon$ и $d_{GH}(Y, M) \leq |bw| < \varepsilon$, поэтому, в силу теоремы 2.47, для пространств X и Y однозначно определены соответствующие канонические разбиения $\{X_i\}_{m_i \in M}$ и $\{Y_i\}_{m_i \in M}$. Пусть $R_X \in \mathcal{R}(M, X)$ и $R_Y \in \mathcal{R}(M, Y)$ — соответствия, удовлетворяющие $\text{dis } R_X < 2\varepsilon$, $\text{dis } R_Y < 2\varepsilon$ и задающие эти разбиения. По теореме 2.47, соответствия R_X и R_Y однозначно определены и оптимальны, т.е. $2d_{GH}(M, X) = \text{dis } R_X$ и $2d_{GH}(M, Y) = \text{dis } R_Y$.

Заметим, что $s(X) = s(a) \geq s(w) - 2\varepsilon = s(M) - 2\varepsilon \geq 6\varepsilon$ и аналогично $s(Y) \geq 6\varepsilon$. С другой стороны, по теореме 2.47, $\text{diam } X_i < 2\varepsilon$ и $\text{diam } Y_i < 2\varepsilon$ при всех $m_i \in M$, поэтому все X_i и Y_i — одноточечные, т.е. $X_i = \{x_i\}$ и $Y_i = \{y_i\}$. Таким образом, $R_X = \{(m_i, x_i)\}_{i \in I}$ и $R_Y = \{(m_i, y_i)\}_{i \in I}$.

По предложению 2.50, существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, удовлетворяющее $\text{dis } R < 4\varepsilon$, и каждое такое соответствие имеет вид $R = \sqcup_{m_i \in M} R_i$, где $R_i \in \mathcal{R}(X_i, Y_i)$. Так как X_i и Y_i — одноточечные, то R — биекция, состоящая из всех пар (x_i, y_i) . Таким образом, R определено однозначно. Следовательно, если соответствие из $\mathcal{R}(X, Y)$ имеет искажение меньше 4ε , то оно совпадает с R , поэтому R — оптимальное соответствие и, значит, $2d_{GH}(X, Y) = \text{dis } R$.

Заметим, что отображение $\eta_X: i \mapsto x_i$ и $\eta_Y: i \mapsto y_i$ являются нумерациями X и Y . Таким образом, определены векторы $\rho_X := \rho_X^{\eta_X}$ и $\rho_Y := \rho_Y^{\eta_Y}$ из конуса C_n . Покажем, что $a = \rho_X$ и $b = \rho_Y$. Для этого отметим сначала, что $|aw| < \varepsilon$ и

$$|\rho_X w| = \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} ||x_i x_j| - |m_i m_j|| = \frac{1}{2} \text{dis } R_X = d_{GH}(M, X) < \varepsilon.$$

Если η'_X — нумерация X , отличная от η , а $\rho'_X := \rho_X^{\eta'_X}$, то $|\rho_X \rho'_X| = \frac{1}{2} \text{dis } \sigma_X$ для не тождественной биекции $\sigma_X: X \rightarrow X$, соответствующей перенумерации, т.е. $\sigma_X = \eta'_X \circ \eta_X^{-1}$. Пусть $\sigma_X(x_i) = x_{i'}$. Тогда определена соответствующая биекция $\sigma_M: M \rightarrow M$, $\sigma_M: m_i \mapsto m_{i'}$. По условию, $\text{dis } \sigma_M \geq e(M) > 8\varepsilon$. Но тогда

$$\begin{aligned} |\rho'_X w| &= \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} ||x_{i'} x_{j'}| - |m_i m_j|| = \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} ||x_{i'} x_{j'}| - |m_{i'} m_{j'}| + |m_{i'} m_{j'}| - |m_i m_j|| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} ||m_{i'} m_{j'}| - |m_i m_j|| - \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} ||x_{i'} x_{j'}| - |m_{i'} m_{j'}|| = \frac{1}{2} (\text{dis } \sigma_M - \text{dis } R_X) > \frac{1}{2} (8\varepsilon - 2\varepsilon) = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая точка из $\pi^{-1}(X)$, отличная от ρ_X , лежит вне U_ε . Аналогично для Y .

Итак, мы показали, что из всех точек, содержащихся в $\pi^{-1}(X)$ и $\pi^{-1}(Y)$, лишь ρ_X и ρ_Y лежат в U_ε , поэтому $a = \rho_X$ и $b = \rho_Y$. Осталось заметить, что

$$|ab| = |\rho_X \rho_Y| = \frac{1}{2} \sup_{ij \in \mathcal{N}} ||x_i x_j| - |y_i y_j|| = \frac{1}{2} \text{dis } R = d_{GH}(X, Y),$$

что и требовалось. $\square$

Для бесконечных n пространство $Z \in \mathcal{GH}_{[n]}$, достаточно близкое к вполне дискретному и вполне несимметричному пространству M , может не быть вполне дискретным (раздутье точек до малых подпространств той же мощности не меняет расстояния от Z до M). Поэтому образ при канонической проекции окрестности $U_\varepsilon(w) \cap C_n$ из теоремы 2.51 не совпадает с открытым шаром $U_\varepsilon(M) \cap \mathcal{GH}_{[n]}$. В случае конечных n каждое такое пространство $Z \in \mathcal{M}_{[n]}$ должно состоять ровно из n точек, а расстояние $d_{GH}(M, Z)$ достигается на биекции. Эта биекция фактически переносит нумерацию с M на Z , поэтому соответствующий ρ_Z попадает в $U_\varepsilon(w) \cap C$ и, значит, каноническая проекция π изометрично отображает $U_\varepsilon(w) \cap C_n$ на $U_\varepsilon(M) \cap \mathcal{M}_{[n]}$.

Следствие 2.52. Пусть $n \geq 3$ — натуральное число, $N = n(n-1)/2$, $C \subset \mathbb{R}^N$ — метрический конус, а $\pi: C \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}$ — каноническая проекция. Пусть $M \in \mathcal{M}_{[n]}$ — вполне дискретное и вполне несимметричное пространство M , и пусть $w \in \pi^{-1}(M)$. Выберем $\varepsilon \in (0, s(M)/8]$ такое, что $\varepsilon < e(M)/8$, и пусть $U_\varepsilon(w) \subset \mathbb{R}^N$ — соответствующий открытый шар в $\mathbb{R}^N$. Тогда ограничение канонической проекции π на $U_\varepsilon(w) \cap C$ изометрично. Более того, если M — пространство общего положения, т.е. $t(M)$ также положительно, и $\varepsilon \leq t(M)/6$, то $U_\varepsilon(w)$ лежит во внутренней части конуса C .

Доказательство. Все, кроме последнего утверждения, мгновенно вытекает из теоремы 2.51 и рассуждений после нее. Докажем последнее утверждение.

Мы должны показать, что каждый $v \in U_\varepsilon(w)$ лежит во внутренней части конуса C , т.е. что все координаты вектора v положительны, и все неравенства треугольника строгие. Так как $|vw| < \varepsilon$, то при каждом $1 \leq i < j \leq n$ выполняется $|v_{ij} - w_{ij}| < 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon \leq s(M)/8$, то для любых попарно различных $i, j \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$v_{ij} > w_{ij} - 2\varepsilon \geq s(M) - 2\varepsilon \geq 8\varepsilon - 2\varepsilon = 6\varepsilon > 0,$$

так что все координаты вектора v положительны.

Далее, для любых попарно различных $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$v_{ij} + v_{jk} - v_{ik} > w_{ij} - 2\varepsilon + w_{jk} - 2\varepsilon - (w_{ik} + 2\varepsilon) = w_{ij} + w_{jk} - w_{ik} - 6\varepsilon \geq t(M) - 6\varepsilon \geq 6\varepsilon - 6\varepsilon = 0,$$

так что в v все неравенства треугольника строгие. □

2.5 Пространства общего положения и изометрии: случай $\mathcal{M}$

Выше мы выяснили, что каждая изометрия переводит множество $\mathcal{M}_{[n]}$, состоящее из n -точечных метрических пространств, в себя. Имеет место более сильное утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Теорема 2.53 ([15]). Пусть $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — изометрия, тогда для каждого $n \geq 3$ выполняется $f(\mathcal{M}_{[n]}^g) = \mathcal{M}_{[n]}^g$, где, напомним, $\mathcal{M}_{[n]}^g$ обозначает множество всех n -точечных пространств общего положения.

Напомним, что через $C^g \subset \mathbb{R}^N$, $N = n(n-1)/2$, мы обозначали подмножество метрического конуса $C \subset \mathbb{R}^N$, составленное из всех пространств общего положения, а через G — подгруппу в группе перестановок S_N множества $\{1, 2, \dots, n(n-1)\}$, соответствующую всем перестановкам множества $\{1, \dots, n\}$. Как мы уже отмечали, группа G действует на C , причем пространства общего положения — это в точности все внутренние точки из C , у которых стабилизатор действия G тривиален. Точки из C , у которых стабилизатор отличен от единичной подгруппы, будем называть **симметричными**. Таким образом, условие симметричности $\rho \in C$ состоит в существовании не единичного $\sigma \in G$ такого, что $\sigma(\rho) = \rho$.

Будем обозначать той же буквой π ограничение канонической проекции $\pi: C \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}$ на C^g .

Теорема 2.54. Подмножества $C^g \subset \mathbb{R}^N$ при всех $n \geq 3$ инвариантны относительно умножения на вещественные $\lambda > 0$, открыты в $\mathbb{R}^N$, всюду плотны в C , а при $n \geq 4$ — линейно связны; более того, при $n \geq 4$ каждая пара точек из C^g соединяется двузвенной ломаной, лежащей в C^g . При $n = 3$ подмножество $C^g \subset \mathbb{R}^3$ не является линейно связным. Подмножества $\mathcal{M}_{[n]}^g \subset \mathcal{M}_{[n]}$ всюду плотны и линейно связны при всех $n \geq 3$.

Доказательство. Инвариантность при умножении на $\lambda > 0$ вытекает из того, что характеристики $s(X)$, $t(X)$ и $e(X)$ положительно однородны.

По предложению 2.37, внутренность $\text{Int } C$ конуса C состоит в точности из всех невырожденных векторов ρ . Условия симметричности состоит из некоторого конечного количества равенств $\rho_{ij} = \rho_{kl}$, $\{i, j\} \neq \{kl\}$, так что эти условия задают линейные подпространства ненулевой коразмерности и, значит, оставшиеся ρ , после выкидывания всех таких подпространств (а их — конечное число) — также открытое подмножество $\mathbb{R}^N$ и

всюду плотное подмножество C . То, что множества $\mathcal{M}_{[n]}^g$ всюду плотны в $\mathcal{M}_{[n]}$ вытекает из непрерывности проекции $\pi: C \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}$.

Пусть $n \geq 4$. Покажем, что множество C^g линейно связно. Отметим, что конус C — выпуклый, так как он является пересечением полупространств, соответствующих условиям положительности компонент метрики и неравенствам треугольника, поэтому для любых $\rho_0, \rho_1 \in C$ отрезок $\rho_t = (1-t)\rho_0 + t\rho_1$, $t \in [0, 1]$, лежит в C . Далее, если $\rho_0, \rho_1 \in C$ — невырождены, то и все ρ_t также невырождены. Таким образом, внутренность $\text{Int } C$ конуса C , состоящая в точности из всех невырожденных $\rho \in C$, — выпукла.

Выясним теперь, как устроено множество симметричных $\rho \in C$. Как мы уже отмечали, условие симметричности $\rho \in C$ означает, что для некоторого $\sigma \in G$, отличного от тождественного преобразования, выполняется $\sigma(\rho) = \rho$. Положим $X = \pi(\rho)$, и пусть $\rho := \rho_X^\eta$ для некоторой нумерации $\eta: \{1, \dots, n\} \rightarrow X$, т.е. $\rho_{ij} = |\eta(i)\eta(j)|$. Так как перестановка σ отлична от тождественного отображения, существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $j = \sigma(i) \neq i$. Так как $n \geq 4$, в $\{1, \dots, n\}$ имеется по крайней мере два разных элемента p и q , отличных от i , для которых $r = \sigma(p) \neq i$, $s = \sigma(q) \neq i$. Отсюда вытекает, что $\{i, p\} \neq \{j, r\}$ и $\{i, q\} \neq \{j, s\}$, поэтому, так как $\sigma(\rho_{ip}) = \rho_{jr}$ и $\sigma(\rho_{iq}) = \rho_{js}$, условие $\sigma(\rho) = \rho$ влечет два нетождественных условия, а именно, $\rho_{ip} = \rho_{jr}$ и $\rho_{iq} = \rho_{js}$.

Покажем, что эти условия также являются независимыми. Действительно, если это не так, то $\{i, p\} = \{j, s\}$ и $\{i, q\} = \{j, r\}$, но, по предположению, i отличается j , r , и s , противоречие. Следовательно, множество тех $\rho \in C$, для которых существует отличное от тождественного преобразование $\sigma \in G$, удовлетворяющее $\sigma(\rho) = \rho$, содержится в объединении конечного числа линейных подпространств $\mathbb{R}^N$, каждое из которых имеет коразмерность не меньше 2. Эти линейные подпространства будем называть **подпространствами симметричности**.

Выберем теперь два произвольных $\rho_1, \rho_2 \in C^g$, и для ρ_1 и каждого подпространства симметричности рассмотрим их линейную оболочку. Получим пучок $\{W_i\}_{i \in I}$ из конечного числа линейных пространств ненулевой коразмерности, проходящих через ρ_1 . Так как объединение $W := \bigcup_{i \in I} W_i \subset \mathbb{R}^N$ элементов этого пучка — замкнутое и звездное с центром в ρ_1 , то для каждой точки $\rho \in \mathbb{R}^N \setminus W$ открытый луч $\rho_1\rho$ не пересекает W . В частности, если ρ_2 не лежит в W , то полуинтервал $(\rho_1, \rho_2]$ не пересекает W и, значит, отрезок $[\rho_1, \rho_2]$ содержится в C^g .

Если же $\rho_2 \in W$, то покажем, что существует $\rho \in C^g \setminus W$, для которого $(\rho_1, \rho]$ не пересекает W . Действительно, так как точка ρ_2 лежит в объединении $W_J := \bigcup_{i \in J \subset I} W_i$ конечного семейства линейных подпространств ненулевой коразмерности, а C^g — открыто в $\mathbb{R}^N$, то существует $\rho' \in C^g$ такое, что открытый луч $\rho_2\rho'$ не пересекает объединение W_J . Так как множество $I \setminus J$ конечно, то расстояние a от ρ_2 до $\bigcup_{i \in I \setminus J} W_i$ положительно, поэтому, выбрав $\rho \in \rho_2\rho'$ такое, что $|\rho_2\rho| < a$, получим искомую точку. В этом случае ломаная $\rho_2\rho\rho_1$ лежит в C^g . Линейная связность $\mathcal{M}_{[n]}^g$ вытекает из того, что непрерывный образ линейно связного пространства также линейно связан.

Пусть теперь $n = 3$. Покажем, что C^g не линейно связно. Возьмем, например, две точки $\rho_0 = (3, 4, 5)$ и $\rho_1 = (4, 3, 5) \in C^g$ и предположим, что в C^g они соединяются непрерывной кривой $\rho_t = (\rho_{12}(t), \rho_{13}(t), \rho_{23}(t))$, $t \in [0, 1]$. Тогда непрерывная функция $f(t) = \rho_{12}(t) - \rho_{13}(t)$ удовлетворяет $f(0) < 0$ и $f(1) > 0$, поэтому существует такое $s \in (0, 1)$, что $\rho_{12}(s) = \rho_{13}(s)$. Но тогда стабилизатор точки ρ_s нетривиален, так что $\rho_s \notin C^g$.

Покажем теперь, что $\mathcal{M}_{[3]}^g$ линейно связно. Заметим сначала, что три вещественных числа $a \leq b \leq c$ являются ненулевыми расстояниями в некотором $X \in \mathcal{M}_{[3]}^g$, если и только если $0 < a < b < c < a + b$. Выберем $X_0, X_1 \in \mathcal{M}_{[3]}^g$, и пусть $0 < a_i < b_i < c_i < a_i + b_i$ — ненулевые расстояния в X_i . Тогда для каждого $t \in [0, 1]$ тройка $(a_t, b_t, c_t) := (1-t)(a_0, b_0, c_0) + t(a_1, b_1, c_1)$ также удовлетворяет $0 < a_t < b_t < c_t < a_t + b_t$ и, поэтому, задает метрическое пространство X_t , причем также лежащее в $\mathcal{M}_{[3]}^g$. Легко видеть, что $t \mapsto X_t$ является непрерывной кривой в $\mathcal{M}_{[3]}^g$, что и доказывает линейную связность $\mathcal{M}_{[3]}^g$. $\square$

Напомним некоторые определения и результаты из алгебраической топологии.

Пусть T и B — линейно связные, а F — дискретное топологические пространства, $n = \#F$. Тогда непрерывное сюръективное отображение $\pi: T \rightarrow B$ называется **n -листным накрытием с тотальным пространством T , базой B и слоем F** , если для каждой точки $b \in B$ существует ее окрестность U и гомеоморфизм $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ такие, что для проекции $\pi_1: U \times F \rightarrow U$, $\pi_1: (u, f) \mapsto u$, выполняется $\pi = \pi_1 \circ \varphi$, см. рис. 2.5. Если при этом пространства T и B — метрические, и для достаточно малых окрестностей U отображения $\pi: \varphi^{-1}(U \times \{f\}) \rightarrow U$ — изометрии при всех $f \in F$, то такие накрытия называются **локально изометричными**.

Следствие 2.55. При $n \geq 4$ отображение $\pi: C^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ является $n!$ -листным локально изометричным накрытием, причем накрытие π уважает действие группы $G \subset S_N$, порожденной перестановками на $\{1, \dots, n\}$, т.е. постоянно на орбитах этого действия.

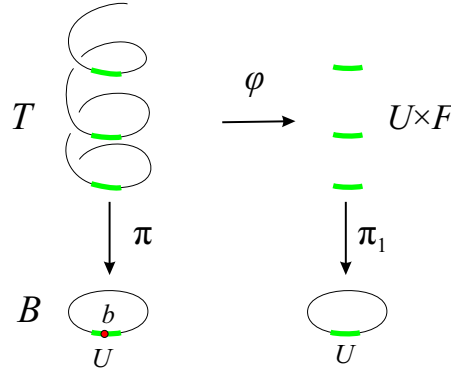


Рис. 2.5: Накрытие.

Замечание 2.56. Если отказаться от линейной связности пространств T и B , то получим определение **обобщенного накрытия**. В этом случае следствие 2.55 можно расширить и на случай $n = 3$: отображение $\pi: C^g \rightarrow \mathcal{M}_{[3]}^g$ является 3-листным локально изотричным обобщенным накрытием. Впрочем, для доказательства основной теоремы этот результат нам не понадобится.

Локальная изотричность отображения $\pi: C^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ позволяет локально поднять изотрию $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ до отображений соответствующих окрестностей в C^g . А именно, выберем произвольное $X \in \mathcal{M}_{[n]}^g$, положим $Y = f(X)$, тогда, в силу теоремы 2.53, имеем $Y \in \mathcal{M}_{[n]}^g$. Выберем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы заключительная часть следствия 2.52 выполнялась одновременно для X и Y . Выберем произвольные $\rho_X \in \pi^{-1}(X)$ и $\rho_Y \in \pi^{-1}(Y)$, тогда ограничения $\pi_X: U_\varepsilon(\rho_X) \rightarrow U_\varepsilon(X)$ и $\pi_Y: U_\varepsilon(\rho_Y) \rightarrow U_\varepsilon(Y)$ накрытия π — изотрии. Положим

$$h = \pi_Y^{-1} \circ f \circ \pi_X: U_\varepsilon(\rho_X) \rightarrow U_\varepsilon(\rho_Y).$$

Следующий результат был получен Ф. Джоном [16] как обобщение знаменитой теоремы Мазура–Улама [17].

Теорема 2.57 ([16]). Пусть X и Y — полные нормированные пространства, $U \subset X$ и $V \subset Y$ — связные открытые подмножества, и $h: U \rightarrow V$ — изотрия. Тогда существует единственная аффинная изотрия $H: X \rightarrow Y$ такая, то h является ограничением H .

Следствие 2.58. Построенная выше изотрия $h: U_\varepsilon(\rho_X) \rightarrow U_\varepsilon(\rho_Y)$ является ограничением некоторой аффинной изотрии $H: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$ пространства $\mathbb{R}^N$, наделенного тах-нормой.

Итак, мы показали, что изотрия $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ локально поднимается до изотрии h соответствующих окрестностей в C^g , а изотрия h является ограничением некоторой аффинной изотрии $H: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$. Оказывается, все такие H совпадают. Покажем это.

Нам понадобится следующий результат, являющийся простым упражнением по линейной алгебре.

Упражнение 2.59. Покажите, что если два аффинных отображения совпадают на открытом множестве, то они совпадают и на всем пространстве.

Теорема 2.60. Пусть $n \geq 4$ и $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ — изотрия. Выберем произвольные $X \in \mathcal{M}_{[n]}^g$, $\rho_X \in \pi^{-1}(X)$, и столь малую окрестность $V \subset \mathbb{R}_\infty^N$ точки ρ_X , что $V \subset C^g$, а ограничение на V накрытия π — изотрия с образом. Пусть h — поднятие изотрии f на окрестность V , и $H: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$ — аффинная изотрия, ограничение которой на V совпадает с h . Выберем произвольно еще одну точку $X' \in \mathcal{M}_{[n]}^g$ и аналогично построим для нее $\rho_{X'}$, V' , h' и H' . Тогда $H = H'$.

Доказательство. По теореме 2.54, множество C^g линейно связно, поэтому существует непрерывная кривая $\Gamma: [a, b] \rightarrow C^g$, для которой $\gamma(a) = \rho_X$ и $\gamma(b) = \rho_{X'}$. Для каждой точки $t \in [a, b]$ выберем такую окрестность $V_t \subset C^g$ точки $\gamma(t)$, что ограничение на нее накрытия π является изотрией с образом. Семейство открытых множеств $\{V_t\}$ покрывает компакт $\text{im } \Gamma$, поэтому из него можно выбрать конечное подпокрытие $\{V_1, \dots, V_k\}$.

Без ограничения общности можно считать, что $V_1 = V_a$ и $V_k = V_b$, а последовательные V_i и V_{i+1} пересекаются (последнее вытекает из связности множества $\text{im } \Gamma$).

Пусть h_i — поднятие изометрии f на окрестность V_i , $i = 1, \dots, k$, и $H_i: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$ — соответствующая аффинная изометрия. Из упражнения 2.59 вытекает, что последовательные аффинные изометрии H_i и H_{i+1} совпадают, а также $H_1 = H$ и $H_k = H'$. Доказательство закончено. $\square$

Единственную аффинную изометрию H из теоремы 2.60, соответствующую изометрии $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$, будем обозначать H_f . Итак, мы получили следующий результат.

Следствие 2.61. *Ограничение $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ каждой однозначно поднимается до аффинной изометрии $H_f: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$ такой, что ограничение H_f на тотальное пространство накрытия $\pi: C^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ согласовано с f , а именно, $\pi \circ H_f = f \circ \pi$. В частности, для каждого $X \in \mathcal{M}_{[n]}^g$ отображение H_f переводит слой $\pi^{-1}(X)$ биективно на слой $\pi^{-1}(f(X))$.*

Следствие 2.62. *Пусть $n \geq 4$, $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ — ограничение на $\mathcal{M}_{[n]}^g$ некоторой изометрии $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, и $H_f: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$ — соответствующая f аффинная изометрия. Тогда H_f — линейное преобразование (вектор сдвига равен нулю).*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $H_f(\rho) = A\rho + b$, где $b \neq 0$. По теореме 2.54, для любых $\rho \in C^g$ и $\lambda > 0$ верно $\lambda\rho \in C^g$. Так как для $X = \pi(\rho)$ выполняется $\text{diam } X = \|\rho\|_\infty$, а изометрия F , в силу леммы 2.5 и утверждения 1.23, сохраняет диаметры метрических пространств, имеем $\|H_f(\rho)\|_\infty = \|\rho\|_\infty$. С другой стороны,

$$\|\rho\|_\infty = \|H_f(\rho)\|_\infty = \|A\rho + b\|_\infty \geq \|b\|_\infty - \|A\rho\|_\infty \geq \|b\|_\infty - \|A\|_\infty \|\rho\|_\infty.$$

Выбрав ρ столь малым, чтобы выполнялось $\|\rho\|_\infty < \|b\|_\infty / (1 + \|A\|_\infty)$, приходим к противоречию. $\square$

Как устроены линейные изометрии пространства $\mathbb{R}_\infty^N$?

Предложение 2.63. *Каждая линейная изометрия $H: \mathbb{R}_\infty^d \rightarrow \mathbb{R}_\infty^d$ имеет вид $H(x) = (S \cdot P)x$, где P — матрица перестановки векторов стандартного базиса, а S — диагональная матрица с ± 1 на диагонали. Обратно, каждое линейное преобразование $H(x) = (S \cdot P)x$ является изометрией.*

Доказательство. Отметим, что линейное преобразование нормированного пространства является изометрией, если и только если оно переводит единичный шар B (равносильно, единичную сферу) в себя. Для тах-нормы единичный шар B — это куб с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. Если $x^1, \dots, x^d$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^d$, то плоскости гиперграней куба B задаются уравнениями вида $x^i = \pm 1$ и переводятся линейным отображением H друг в друга.

Центр гиперграней $x^i = \pm 1$ — это вектор $\pm e_i$, где e_i — вектор стандартного базиса в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^d$. Центр гиперграней равен сумме радиус-векторов всех ее вершин, деленной на 2^{d-1} . Поэтому отображение H переводит каждый вектор e_i в вектор $\pm e_j$, т.е. H — это композиция перестановки базисных векторов и замены их знаков. Обратно, каждая такая композиция переводит куб B в себя. $\square$

Следствие 2.64. *Пусть $n \geq 4$, $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ — ограничение на $\mathcal{M}_{[n]}^g$ некоторой изометрии $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, и $H_f: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$ — соответствующая f линейная изометрия. Тогда $H_f(\rho) = P\rho$, где P — матрица перестановки векторов стандартного базиса.*

Доказательство. По предложению 2.63, имеем $H_f(\rho) = (S \cdot P)\rho$, где S — диагональная матрица с ± 1 на диагонали, поэтому образ вектора ρ получается перестановкой его координат и заменой некоторых ρ_{ij} на $-\rho_{ij}$, если в S встречаются -1 . Но у вектора $H_f(\rho)$ также все координаты положительны, поэтому S — единичная матрица. $\square$

2.6 Алгебраическое завершение доказательства

Итак, мы показали, что линейная изометрия $H_f: \mathbb{R}_\infty^N \rightarrow \mathbb{R}_\infty^N$, соответствующая ограничению $f: \mathcal{M}_{[n]}^g \rightarrow \mathcal{M}_{[n]}^g$ некоторой изометрии $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, индуцируется перестановкой P векторов стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^N$. Напомним, что эти базисные векторы мы нумеруем парами индексов $e_{ij} = e_{ji}$, где $1 \leq i < j \leq n$, группу все перестановок этих векторов мы обозначаем S_N , а подгруппу S_N , соответствующую перестановкам одинарных индексов $1 \leq i \leq n$, — через G .

Предложение 2.65. *Перестановка $P \in S_N$, задающая аффинное преобразование H_f , входит в нормализатор группы G , т.е. $P^{-1}GP = G$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $g \in G$ перестановка $P^{-1}gP$ содержится в G . Для этого напомним, что перед конструкцией 2.46 мы показали как можно построить конечные пространства общего положения любой мощности, причем в этой конструкции все расстояния между различными точками пространства были разные. Пусть X — такое пространство, и ρ_X — вектор расстояний, соответствующий некоторой нумерации точек из X . Тогда каждая перестановка $Q \in S_N$ однозначно задается тем, куда она переводит ρ_X .

Напомним, что каждая перестановка $g \in G$ порождает изометрию $\mathbb{R}_\infty^N$, так что определена изометрия $H := P^{-1}gP = H_f^{-1}gH_f$. Так как, в силу следствия 2.61, изометрия H_f переводит слой $\pi^{-1}(X)$ биективно на слой $\pi^{-1}(f(X))$, а g переводит каждый слой накрытия π в себя, то H задает некоторую перестановку точек слоя $\pi^{-1}(\rho_X)$. Как было отмечено в начале раздела 2.3, каждая точка слоя $\pi^{-1}(X)$ соответствует некоторой нумерации точек пространства X , поэтому определена некоторая перенумерация $g' \in G$ точек из X , для которой $g'(\rho_X) = H(\rho_X) = (P^{-1}gP)(\rho_X)$. Но, в силу сказанного выше, имеем $g' = P^{-1}gP$, что и требовалось. $\square$

Покажем теперь, что при достаточно больших n перестановка P , в действительности, принадлежит G . Это вытекает из следующую теорему.

Теорема 2.66. *При $n \geq 8$ нормализатор группы G совпадает с G .*

Доказательство. Нам понадобятся два вспомогательных результата. Рассуждения удобно вести в терминах теории графов. Пусть K_n — полный граф с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множеством ребер $E = \{ij = ji : 1 \leq i < j \leq n\}$. Тогда S_N фактически действует на E , а S_n , действуя на V , порождает соответствующее действие на E и, тем самым, вкладывается в S_N в виде подгруппы G . Говоря про элементы G , мы отождествляем их с соответствующими элементами из S_n , так что каждый $g \in G$ действует как на E , так и на V .

Лемма 2.67. *Пусть $n \geq 5$. Перестановка $\alpha \in S_N$ принадлежит подгруппе G , если и только если α переводит смежные ребра K_n в смежные.*

Доказательство. Легко видеть, что каждая перестановка $\alpha \in G$ переводит смежные ребра в смежные. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что α переводит все пары смежных ребер графа K_n в смежные. Рассмотрим все ребра, инцидентные некоторой фиксированной вершине $v \in V$ (таких ребер $n - 1$ штука, в частности, их не меньше 4). Тогда, по предположению, их образы — попарно смежные ребра. Покажем, что эти ребра имеют общую вершину.

Рассмотрим образы трех различных ребер из выбранных. Их образы образуют связный трехреберный подграф H в K_n . Каждый такой подграф — это или цикл, или звезда, или простой путь. Последний случай невозможен, так как первое и последнее ребра простого трехреберного пути не смежны друг с другом.

Рассмотрим теперь образ четвертого ребра. Он должен пересекаться со всеми тремя ребрами подграфа H . Поэтому H не может быть трехреберным циклом, и, значит, H — звезда, а образ четвертого ребра инцидентен общей вершине этой звезды.

Рассуждая аналогично, заключаем, что образы всех ребер, выходящих из вершины v , инцидентны некоторой общей вершине. Тем самым, определено отображение g множества V в себя, сопоставляющее вершине $v \in V$ единственную общую вершину α -образов всех ребер, инцидентных v . Это отображение инъективно, так как если v и w переходят в одну и ту же вершину, то по их образу пересекается $2n - 2$ ребра, что невозможно. Кроме того, индуцированное g отображение ребер графа K_n совпадает с α , так что $g \in G$. $\square$

Лемма 2.68. *При $n \geq 8$ каждая перестановка $P \in S_N$ переводит некую пару несмежных ребер графа K_n в пару несмежных ребер.*

Доказательство. Обозначим F множество пар различных ребер графа K_n , тогда $F = F_0 \sqcup F_1$, где F_0 состоит из пар непересекающихся ребер, а F_1 — из пар пересекающихся (по общей вершине) ребер графа K_n . Найдем, чему равны $\#F_0$ и $\#F_1$.

Для этого рассмотрим реберный граф $E(K_n)$ графа K_n , т.е. граф, вершины которого суть ребра графа K_n , причем две вершины смежны, если и только если смежны соответствующие ребра графа K_n . Тогда $E(K_n) = (E, F_1)$. Каждое ребро ij полного графа K_n смежно в $E(K_n)$ с $n - 2$ ребрами по вершине i и с $n - 2$ ребрами

по вершине j , поэтому степень каждой вершины графа $E(K_n)$ равна $2n - 4$. Так как количество вершин графа $E(K_n)$ равно $N = n(n - 1)/2$, получаем:

$$\#F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n - 1)}{2} \cdot (2n - 4) = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

Формула для несмежных пар ребер получается как разность общего числа пар и $\#F_1$:

$$\begin{aligned} \#F_0 &= \#F - \#F_1 = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{4} - \frac{1}{2} - (n-2) \right) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n^2 - 5n + 6}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}. \end{aligned}$$

В частности,

$$\#F_0 = \frac{(n-3)}{4} \cdot \#F_1.$$

поэтому, так как $(n-3)/4 > 1$ при $n > 7$, заключаем, что $\#F_0 > \#F_1$ при $n \geq 8$ и, значит, в этом случае элементов в F_1 просто не хватит, чтобы отобразить в них все элементы из F_0 . $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим противное, т.е. пусть существует перестановка $P \in S_N$ из нормализатора группы G , не входящая в G . Так как G и ее нормализатор — группы, то и P^{-1} также принадлежит нормализатору для G и не входит в G . По лемме 2.68, существуют попарно различные $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $P^{-1}(ij) = i'j'$, $P^{-1}(kl) = k'l'$, причем $i', j', k', l' \in \{1, \dots, n\}$ — тоже четыре попарно различных индекса.

По лемме 2.67, некоторая пара $e, e' \in E$ смежных ребер в K_n переходит при перестановке P в несмежные ребра, скажем, в ab и cd , где $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ — попарно различны. Выберем произвольную перестановку $g \in S_n$, для которой $g(a) = i$, $g(b) = j$, $g(c) = k$, $g(d) = l$, тогда g , рассматриваемая как элемент G , переводит ab в ij , а cd — в kl . Но тогда перестановка $P^{-1}gP$ переводит смежные ребра $e, e' \in E$ в несмежные $i'j'$ и $k'l'$, поэтому, в силу леммы 2.67, перестановка $P^{-1}gP$ не принадлежит G , противоречие с предложением 2.65. $\square$

Итак, мы показали, что перестановка P базисных векторов $\mathbb{R}^N$, задающая изометрию H_f , лежит в группе G , а это означает, что она индуцируется перестановкой индексов, нумерующих элементы каждого пространства X общего положения. Но при таком H_f слой $\pi^{-1}(X)$ переходит в себя, а это означает, в силу следствия 2.61, что $f(X) = X$. Таким образом, заключаем, что изометрия f неподвижна на всех точках из $\mathcal{M}_{[n]}^g$ при каждом $n \geq 8$. В силу теоремы 2.54, $\mathcal{M}_{[n]}^g$ всюду плотны в $\mathcal{M}_{[n]}$, поэтому f также неподвижно на всех точках из $\mathcal{M}_{[n]}$. Осталось заметить, что множество $\cup_{n=8}^{\infty} \mathcal{M}_{[n]}$ всюду плотно в $\mathcal{M}$. Действительно, каждый компакт $X \in \mathcal{M}$ имеет конечные ε -сети для любого $\varepsilon > 0$, а расстояние Громова–Хаусдорфа от ε -сети до X не превосходит ε . Следовательно, множество всех конечных метрических пространств всюду плотно в $\mathcal{M}$. С другой стороны, конечные пространства с $n \leq 7$ точками также сколь угодно хорошо приближаются пространствами с большим 7 числом точек (объясните почему). Таким образом, f — тождественное отображение, что и заканчивает доказательство теоремы 2.1.

Литература

- [1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.
- [2] Бурого Д.Ю., Бурого Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
- [3] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).
- [4] Ghanaat P. *Gromov-Hausdorff distance and applications*. In: Summer school “Metric Geometry”, Les Diablerets, August 25–30, 2013, <https://math.cuso.ch/fileadmin/math/document/gromov-hausdorff.pdf>
- [5] Мендельсон Э. *Введение в математическую логику*. М., Наука, 1984.
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann\T2A\textendashBernays\T2A\textendashG\T2A\cyr%2Dset_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann%2A%2DtextendashBernays%2A%2DtextendashG%2A%2Dcyr%2Dset_theory)
- [7] Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance*. 2020, ArXiv e-prints, arXiv:2009.00458.
- [8] Borisova O.B. *Metric Segments in Gromov-Hausdorff Class*, arXiv:2009.13273.
- [9] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov-Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116.
- [10] Tuzhilin A.A. *Lectures on Hausdorff and Gromov-Hausdorff Distance Geometry*. 2020, ArXiv e-prints, arXiv:2012.00756.
- [11] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance*. ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.
- [12] Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А. *Метрика Громова-Хаусдорфа на пространстве метрических компактов – строго внутренняя*. Математические заметки, **100** (6), 947–950 (2016); Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic*. ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.
- [13] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces*. ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.
- [14] <http://mathoverflow.net/questions/212364/on-the-global-structure-of-the-gromov-hausdorff-metric-space>
- [15] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Isometry Group of Gromov-Hausdorff Space*. 2018, ArXiv e-prints, arXiv:1806.02100.
- [16] John F. *On quasi-isometric mappings, I*, Commun. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, pp. 77–110.
- [17] Mazur S., Ulam S. *Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1932, v. 194, pp. 946–948.
- [18] Фоменко А.Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии*. М.: Наука, 1989.

- [19] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Local Structure of Gromov-Hausdorff Space near Finite Metric Spaces in General Position*. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1611.04484.
- [20] Ji Y., Tuzhilin A.A. *Gromov-Hausdorff Distance Between Segment and Circle*. 2021, ArXiv e-prints, arXiv:2101.05762.
- [21] Григорьев Д.С., Иванов А.О., Тужилин А.А. *Расстояние Громова-Хаусдорфа до симплексов*. Чебышевский сборник, **20** (2), 100–114 (2019); Grigor'ev D.S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov-Hausdorff Distance to Simplexes*. ArXiv e-prints, arXiv:1906.09644, 2019.