Лемма Шпернера: приложения и обобщения

О. Р. Мусин

Литература

Ю. А. Шашкин, Популярные лекции по математике: Неподвижные точки. — Москва: Наука, 1989

Ю. А. Шашкин, Комбинаторные леммы и симплициальные отображения, Екатеринбург: УрГУ, 1999.

Теорема Брауэра (1910, 1912)

Теорема Брауэра о неподвижной точке.
У всякого непрерывного отображения $f : B^n \to B^n$ *найдется неподвижная точка* x, *т. е.* $f(x) = x$.

Здесь B^n обозначает n-мерный шар.

Лемма Шпернера (1928)

Теорема

(Лемма Шпернера) *При любой Шпернеровской раскраске вершин триангуляции* n*-мерного симплекса найдется ячейка триангуляции, вершины которой покрашены во все цвета*

Лемма Шпернера

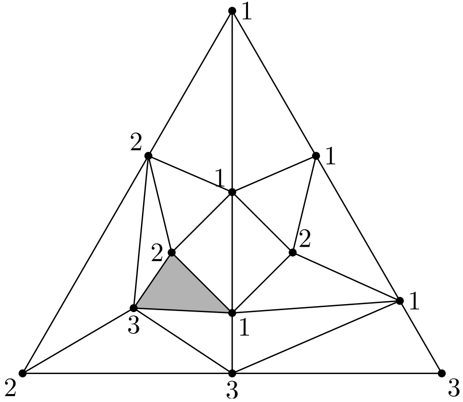


Рис.: 2-мерная иллюстрация Леммы Шпернера

Другое доказательство леммы Шпернера

McLennan, Tourky (2008) + С. Л. Табачников

Лемма

$$area(\Delta) = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{2}$$

Другое доказательство леммы Шпернера

$$p(t) := (x + (a - x)t, y + (b - y)t),\ p(0) = (x, y),\ p(1) = (a, b).$$

$\mathrm{area}(\Delta, t)$ - квадратный многочлен.

$$S(t) = \sum_{\Delta \in T} \mathrm{area}(\Delta, t)$$

$S(t)$ =const=площадь треугольника $A_1 A_2 A_3$=1.

$$1 = S(1) = \sum_i \mathrm{area}(Sp_i)$$

Лемма KKM (1929)

Лемма KKM (Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz)
Предположим, что d-симплекс Δ^d с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{d+1}$ покрыт $d+1$ замкнутым множеством $\{C_i\}$ при $i \in I := \{1, 2, \ldots, d+1\}$, так что если $I_k \subset I$ грань Δ^d с вершинами A_i, $i \in I_k$, то она должна быть покрыта C_i, где $i \in I_k$. Тогда у всех множеств C_i имеется общая точка пересечения.

В частности, если треугольник Δ покрыт замкнутыми множествами C_1, C_2, C_3 так что $A_i \in C_i$ и A_iA_j покрыто $C_i \cup C_j$, то у всех множеств C_i имеется общая точка.

New York Times' article: April 28, 2014

The New York Times

Science

To Divide the Rent, Start With a Triangle

By ALBERT SUN

APRIL 28, 2014

Last year, two friends and I moved into a small three-bedroom apartment in Manhattan. We chose it for its relatively reasonable price — around $3,000 a month — and its convenient location. Just finding it was a challenge, but then we faced another one: deciding who would get each bedroom.
The bedrooms were different sizes, ranging from small to very small. Two faced north toward the street and had light; the third and smallest faced an alley. The largest had two windows; the midsize room opened onto the fire escape.
Every month, unrelated people move into apartments together to save on rent. Many decide to simply divide the rent evenly, or to base it on bedrooms' square footage or perhaps even on each resident's income.
But as it turns out, a field of academics is dedicated to studying the subject of fair division, or how to divide good and bad things fairly among groups of people. To the researchers, none of the typical methods are satisfactory. They have better ways.

****

After his paper on the method was published, Dr. Su worked with one of his students, Elisha Peterson, to create a calculator to promote fair division.

Need to divide your rent? Try our updated version of the rent division calculator implementing Dr. Su's method.

New York Times' article: April 28, 2014

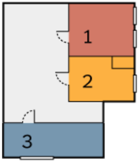
Sperner's Lemma and Rental Harmony

A mathematical theorem called Sperner's Lemma can be used to divide unequal assets fairly.

The Problem

Three friends **Ashwin**, **Bret** and **Chad** want to share an apartment.

The total rent is $3,000 but the rooms are different sizes. How can they choose rooms and divide the rent fairly?



The Solution

This triangle represents every possible combination of prices.

At each **corner**, one room costs $3,000 and the others are free. Not a good solution.

In the **center** the rent is split evenly.

At each point, either **A**shwin, **B**ret or **C**had is asked to choose which room he prefers at the given price.

Sperner's Lemma

Sperner's lemma guarantees that there is a small triangle where every roommate has picked a different room. The "fair" price lies somewhere between the prices at those three corners.

For more price choices, divide the triangle into smaller pieces:

Теорема Какутани (1941)

Многозначным отображением из множества X в Y называется всякое отображение $F : X \to 2^Y$. Пусть $\Omega(Y) \subset 2^Y$, состоящее из непустых компактных подмножеств множества $Y \subset \mathbb{R}^m$, то есть $F : X \to \Omega(Y)$.

Теорема Какутани: *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное, выпуклое подмножество и многозначное отображение $F : X \to \Omega(X)$ имеет своими значениями компактные, выпуклые множества и является полунепрерывным сверху по включению. Тогда отображение F имеет неподвижную точку $x_* \in X$, то есть $x_* \in F(x_*)$.*

Теорема Нэша о равновесии (1950)

Игрой называется набор множеств (стратегий) $S_1, \ldots, S_n$ и набор функций (выигрыша) $u_1, \ldots, u_n$ на $X = S_1 \times \ldots \times S_n$.

Теорема

Предположим, что каждое множество S_i – выпуклый компакт, а функции выигрыша u_i непрерывны по всем переменным и вогнуты по s_i. Тогда существует равновесие Нэша. То есть найдутся $s_1^*, \ldots, s_n^*$ такие что для любого i и $s_i \in S_i$:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, s_n^*) \leq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, s_n^*).$$

Теорема Люстерника–Шнирельмана (1930)

Предположим, что $F_1, \ldots, F_{n+1}$ является покрытием сферы $\mathbb{S}^n$ $n+1$ замкнутым множеством. Тогда найдется F_i, которое содержит пару антиподальных точек $(x, -x)$. Иными словами, $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.

(Покрытие замкнутыми множествами можно заменить на покрытие открытыми.)

Теорема Борсука–Улама (1933)

(1) *Для всякого непрерывного отображения* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *найдется точка* $x \in \mathbb{S}^n$ *такая, что* $f(x) = f(-x)$.

Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *антиподально*, если $f(-x) = -f(x)$.

(2) *Для всякого непрерывного антиподального отображения* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ *найдется точка* $x \in \mathbb{S}^n$ *такая, что* $f(x) = 0$, *т.е. множество нулей* $Z_f = \{f^{-1}(0)\}$ *не пусто.*

J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Теорема Борсука–Улама

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]. *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]. *Ist $f \in R^{n^{S_n}}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Лемма Таккера (1945)

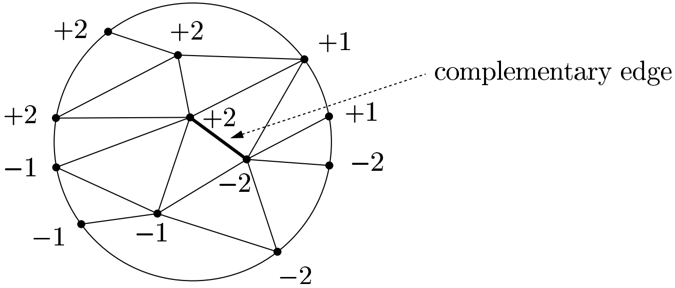
Теорема (Таккер)

Пусть Λ – триангуляция шара $\mathbb{B}^d$, которая является антиподальной на границе. У любой раскраски

$$L : V(\Lambda) \to \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$$

являющейся антиподальной на границе, т. е. $L(-v) = -L(v)$ для любой вершины v на границе шара $\mathbb{B}^d$ найдется "диполь" ("complementary edge"): ребро с метками имеющими одинаковую абсолютную величину и противоположные знаки.

Лемма Таккера



Лемма Таккера для сферы

Теорема

Пусть Λ – антиподальная триангуляция $\mathbb{S}^d$. Предположим, что

$$L : V(\Lambda) \to \{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$$

является антиподальным, т. е. для всех вершин Λ: $L(-v) = -L(v)$. Тогда найдется диполь (complimentary edge).

Лемма Ю. А. Шашкина

Теорема

Пусть T триангуляция ц. с. многоугольника, которая является ц. с. на его границе. Предположим, что разметка

$$L : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, +3, -3\}$$

на границе является антиподальной, т. е. $L(-v) = -L(v)$ для любой вершины v на границе. Предположим также, что у этой разметки на нет диполей. Тогда для любых a, b, c, где $|a| = 1,\ |b| = 2,\ |c| = 3$, общее число треугольников в T с метками (a, b, c) и $(-a, -b, -c)$ – нечетно.

Лемма Ю. А. Шашкина

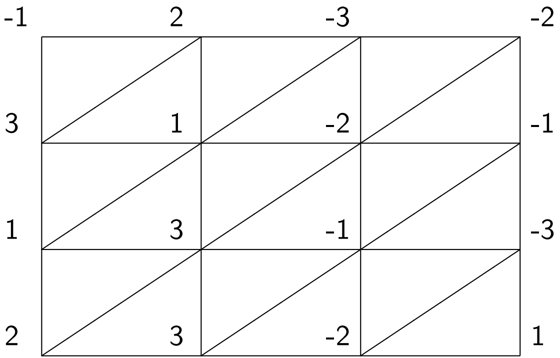


Рис.: Иллюстрация леммы Шашкина

Лемма Ю. А. Шашкина

$(a, b, c) = (1, 2, 3)$, $(1, -2, 3)$, $(1, 2, -3)$ и $(1, -2, -3)$
Лемма утверждает, что число треугольников с метками (a, b, c) и $(-a, -b, -c)$ – нечетно. Обозначим его $\mathrm{SN}(a, b, c)$. Тогда на картинке:

$$\mathrm{SN}(1, 2, 3) = 3,\ \mathrm{SN}(1, -2, 3) = 1,$$

$$\mathrm{SN}(1, 2, -3) = 3,\ \mathrm{SN}(1, -2, -3) = 3.$$

Доказательство леммы Шашкина

$$p(1,-2)+p(-2,3)+p(3,-1)+p(-1,2)+p(2,-3)+p(-3,1) \equiv 1(2)$$

$$d(1,-2)+d(-2,3)+d(3,-1) \equiv 1 \pmod 2 \qquad (*)$$

$+$ 7 равенств при замене (a,b) на $(-a,-b)$

Если в $(*)$ “открыть двери” $(1,-2),(-2,3),(3,-1)$, то тупиками будут $(1,-2,-3)$ и $(-1,2,3)$.

Лемма Шпернера для многогранника

J. A. De Loera, E. Peterson, and F. E. Su, A Polytopal Generalization of Sperner's Lemma, *J. of Combin. Theory Ser. A*, **100** (2002), 1-26.

Теорема

Пусть T триангуляция выпуклого многогранника P в $\mathbb{R}^d$ у которого n вершин. Тогда у любой Шпернеровской разметки $L : V(T) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется не менее $(n - d)$ п. к. d–симплексов.

papers

O. R. Musin, Borsuk–Ulam type theorems for manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012)

O. R. Musin, Extensions of Sperner and Tucker's lemma for manifolds, *J. of Combinatorial Theory Series A*, **132** (2015)

O. R. Musin, Sperner type lemma for quadrangulations, *Mosc. J. of Combinatorics and Number Theory*, **5** (2015).

O. R. Musin and A. Yu. Volovikov, Borsuk–Ulam type spaces, *Mosc. Math. J.*, **15:4** (2015)

O. R. Musin, Homotopy invariants of covers and KKM type lemmas, *Algebraic & Geometric Topology*, **16** (2016)

papers

O. R. Musin, Generalizations of Tucker–Fan–Shashkin lemmas, *Arnold Math J.*, **2:3** 2016

O. R. Musin, KKM type theorems with boundary conditions, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **19** (2017)

O. R. Musin and Jie Wu, Cobordism classes of maps and covers for spheres, *Topology Appl.*, **237** (2018)

O. R. Musin and A. Yu. Volovikov, Tucker type lemmas for G-spaces, preprint, arXiv:1612.07314

A. V. Malyutin and O. R. Musin, Neighboring mapping points theorem, preprint, arXiv:1812.10895

O. R. Musin, Homotopy groups and quantitative Sperner–type lemma, preprint, arXiv: 2007.08715

Möbius band

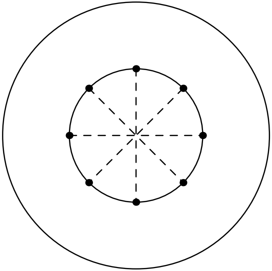
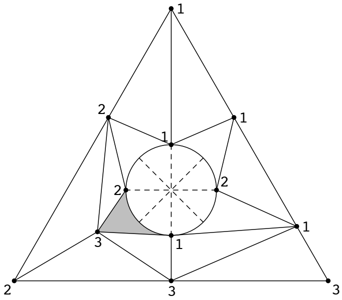


Рис.: Möbius band. Diametrically opposite points of the inner boundary circle are to be identified. The outer circle is the boundary of the Möbius band.

Sperner's lemma for the Möbius band



Degree and Sperner's lemma

Теорема

Let P be a convex polytope in $\mathbb{R}^d$ with vertices $p_1, \ldots, p_n$. Let X be a finite orientable d-dimensional simplicial complex. Let $L : V(X) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ be a labelling such that $f_{L,P}(\partial X) \subset \partial P$. Then there are at least $(n-d)|\deg(f_{L,P})|$ fully labelled d-simplices.

Degree and Sperner's lemma

Corollary

Let X be a finite orientable d-dimensional simplicial complex. Let $L : V(X) \to \{1, 2, \ldots, d+1\}$ be any labelling. Then X contains at least $|\deg(f_{L,P})|$ fully labelled d-simplices.

For Sperner's labelling $\deg(f_{L,P}) = 1$.

The theorem also implies Tucker's lemma. In this case P is a crosspolytope and $\deg(f_{L,P})$ is odd.

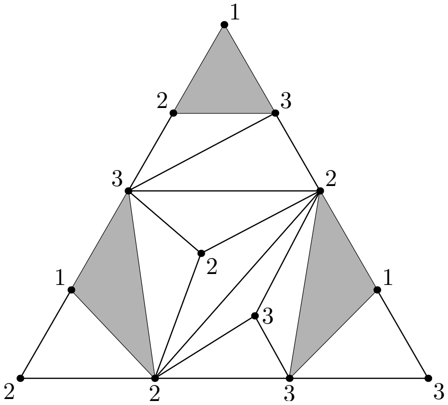


Рис.: $\deg(L, \partial T) = 3$. There are three fully labelled triangles.

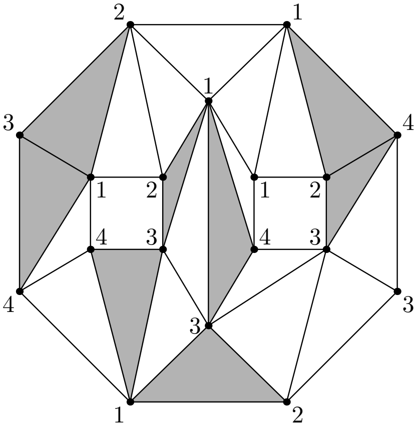


Рис.: Octagon with two square holes. Here $n = 4$, $\deg(L, \partial T)| = 4$ and there are eight fully labelled triangles

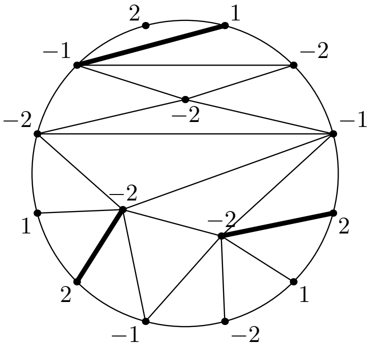
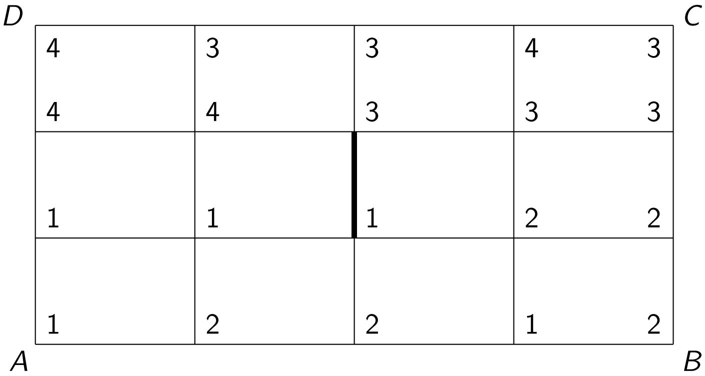
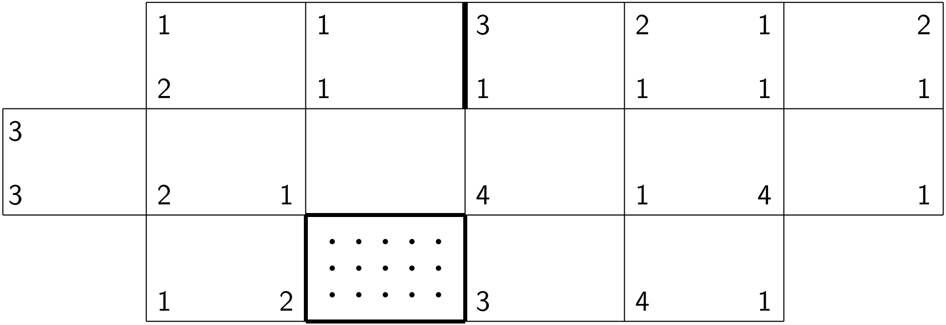


Рис.: Since $\deg(L, \partial T) = 3$, there are three complementary edges.



Sperner's labelling of $\Pi_2(4,3)$. One edge is colored with $(1,3)$.



Since $\deg(L, \partial Q) = 2$, there are two centrally labelled cells.

Sperner type lemma for quadrangulations

Let C^d denote the d-dimensional cube.

Theorem

Let Q be a quadrangulation of an oriented d-dimensional manifold M. Suppose $L : V(Q) \to V(C^d)$ be a labelling such that $f_L(\partial Q) \subset \partial C^d$. Then Q contains at least $|\deg(L, \partial Q)|$ centrally labelled cells.

Shapley's KKMS theorem

Theorem

Let $\mathcal{K}$ be the collection of all non-empty subsets of $I_{k+1} := \{1, \ldots, k+1\}$. Consider a simplex S in $\mathbb{R}^k$ with vertices $x_1, \ldots, x_{k+1}$. Let $V := \{v_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{K}\} \subset \mathbb{R}^k$, where v_σ denotes the center of mass of $S_\sigma := \{x_i,\ i \in \sigma\}$.
Let $\mathcal{C} := \{C_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{K}\}$ be a cover of $|\Delta^k|$ such that for every $J \subset I_{k+1}$ the simplex Δ_J that is spanned by vertices from J is covered by $\{C_\sigma,\ \sigma \in J\}$. Then there exists a balanced collection $\mathcal{B}$ in $\mathcal{K}$ with respect to V such that

$$\bigcap_{\sigma \in \mathcal{B}} C_\sigma \neq \emptyset.$$

Shapley's KKMS theorem

L. S. Shapley On balanced games without side payments, in *Mathematical Programming,* Hu, T.C. and S.M. Robinson (eds), Academic Press, New York, 261–290, 1973.

L. S. Shapley and R. Vohra, On Kakutani's fixed point theorem, the KKMS theorem and the core of a balanced game, *Economic Theory*, **1** (1991), 108–116.

H. Komiya, A simple proof of the K–K–M–S theorem, *Economic Theory*, **4** (1994), 463–466.

P. J. J. Herings, An extremely simple proof of the K–K–M–S theorem, *Economic Theory*, **10** (1997), 361–367.

KKMS theorem

Definition

Let I be a set of labels of cardinality m. Let $V := \{v_i,\ i \in I\}$, be a set of points in $\mathbb{R}^n$. Then a nonempty subset $\mathcal{B} \subset I$ is said to be balanced with respect to V if for all $i \in \mathcal{B}$ there exist non-negative λ_i such that

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} \lambda_i v_i = c_V, \quad \text{where} \quad \sum_{i \in \mathcal{B}} \lambda_i = 1 \ \text{ and } \ c_V := \frac{1}{m} \sum_{i \in I} v_i.$$

In other words, $c_V \in \{v_i,\ i \in \mathcal{B}\}$, where (Y) denote the convex hull of Y in $\mathbb{R}^n$.

KKMS theorem

Theorem

Let $V := \{v_1, \ldots, v_m\}$ *be a set of points in* $\mathbb{R}^n$. *Let* A *be a subspace of a space* X. *Let* $(X, A) \in_{n-1}$. *Let* $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ *be a cover of* (X, A). *Suppose* $\mathcal{S} := \mathcal{F}|_A$ *is not null–homotopic. Then there is a balanced subset* $\mathcal{B}$ *in* I_m *with respect to* V *such that*

$$\bigcap_{i \in \mathcal{B}} F_i \neq \emptyset.$$

KKMS theorem

Corollary

Let $V := \{v_1, \dots, v_m\}$ be a set of points in $\mathbb{R}^n$. Let $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ be a cover of $\mathbb{B}^k$ that is not null–homotopic on the boundary. Then there is a balanced with respect to V subset $\mathcal{B}$ in $I_m := \{1, \dots, m\}$ such that the intersection of all F_i, $i \in \mathcal{B}$, is not empty.

If $V = \mathrm{Vert}(\Delta^n)$, then this corollary implies the KKM theorem.

Let $\mathcal{K}$ be the collection of all non-empty subsets of I_{k+1}. If $V := \{v_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{K}\} \subset \mathbb{R}^k$, where v_σ denotes the center of mass of $S_\sigma := \{x_i,\ i \in \sigma\}$, then the corollary implies the KKMS theorem.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ