Вопросы по спецкурсу “Геометрия пространств компактов с метриками Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. Метрические тройки Громова”

(1) Польские пространства: определение и примеры.

(2) G_δ-подмножества, их свойства и примеры. Теорема Александрова о G_δ-подмножестве польского пространства. Следствие.

(3) Теорема Лаврентьева о продолжении гомеоморфизма на G_δ-надмножества. Критерий того, что подмножество польского пространства является польским.

(4) Категория Бэра, теорема Бэра, следствие.

(5) Теорема о топологическом вложении метризуемого сепарабельного пространства в гильбертов куб. Критерий того, что пространство является польским.

(6) Изометричное вложение сепарабельного метрического пространства в ℓ_∞. Пространство Урысона: определение и основные свойства (без доказательства).

(7) Пространство Урысона. Теорема об однозначной определенности пространства Урысона с точностью до изометрии. Теорема о продолжении на все пространство Урысона каждой изометрии между конечными подмножествами этого пространства.

(8) Одноточечные расширения метрических пространств. Теорема Макшейна–Уитни. Продолжение Макшейна–Уитни 1-липшицевой функции, заданной на подмножестве метрического пространства, носитель такого продолжения.

(9) Пространство $E(X)$ и его свойства.

(10) Функции общего положения, лежащие в пространстве $E(X)$, их свойства.

(11) Аппроксимация функции из пространства $E(X)$ функцией, носитель которой лежит в заданном всюду плотном подмножестве, а значения на носителе рациональны. Доказательство того, что для сепарабельного X пространство $E(X)$ также сепарабельно.

(12) Теорема существования пространства Урысона. Геодезичность пространства Урысона.

(13) Измеримые пространства и измеримые отображения. Достаточное условие измеримой изоморфности.

(14) Борелевость непрерывных отображений топологических пространств. Приложения достаточного условия измеримой изоморфности. Условие, гарантирующее борелевость образа топологического вложения.

(15) Доказательство борелевской изоморфности отрезка и канторова дисконтинуума.

(16) Схема как обобщение построения канторова дисконтинуума. Определение схем Суслина, Лузина и Кантора.

(17) Основные свойства схем Суслина, Лузина и Кантора.

(18) Теорема о топологическом вложении канторова дисконтинуума в плотное в себе польское пространство. Теорема Кантора–Бендиксона. Следствие предыдущих теорем.

(19) Борелевские множества и топология. Достаточное условие того, что наименьшая топология, содержащая последовательность польских топологий, также является польской. Следствие для хаусдорфовых пространств.

(20) Теоремы о превращении борелевских множеств в открыто-замкнутые. Следствие о превращении борелевского отображения в непрерывное.

(21) Стандартное борелевское пространство. Результаты об изоморфности стандартных борелевских пространств.

(22) Пространства с мерой, разные типы мер, примеры. Основные свойства меры.

(23) Меры на алгебрах, теорема о продолжении меры с алгебры на наименьшую содержащую эту алгебру σ-алгебру, следствие. Мера Лебега, вычисление меры Лебега канторова дисконтинуума.

(24) Атомы σ-алгебры и p-атомы меры. Представление меры в виде суммы мер, одна из которых не содержит p-атомов, а другая представляет собой (бесконечную) линейную комбинацию обобщенных мер Дирака с центрами в p-атомах. Следствие для топологического пространства, в котором одноточечные подмножества замкнуты.

(25) Непрерывность меры. Функция распределения меры, определенной на отрезке. Связь непрерывности меры и непрерывности ее функции распределения. Образ меры, заданной на отрезке, под действием функции распределения, и мера Лебега.

(26) Теорема Рохлина об изоморфизме пространств с мерой, следствие.

(27) *-слабая сходимость конечных мер. Формулировка теоремы Портманто–Александрова.

(28) Меры и непрерывные линейные функционалы, знакопеременные меры, полная вариация знакопеременной меры, формулировка теоремы Рисса–Маркова–Какутани.

(29) Связь *-слабой топологии подмножества и топологии, индуцированной из *-слабой топологии объемлющего пространства. Формулировки теоремы Банаха–Алаоглу; теоремы о метризуемости *-слабой топологии единичного шара; теоремы Стоуна–Вейерштрасса. Следствия.

(30) Метрические тройки Громова (mm-пространства). Индуцирование σ-алгебры на подмножество. Внешние меры и индуцирование меры на подмножество. Индуцирование структуры mm-пространства на подмножество.

(31) Открытые и замкнутые шары, сферы, открытые и замкнутые окрестности подмножеств метрических пространств, их границы, свойства. Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа, основные свойства гиперпространств и пространства Громова–Хаусдорфа.

(32) Расстояние Прохорова между конечными мерами. Доказательство того, что расстояние Прохорова является метрикой. Сходимость по Прохорову, пространство Прохорова.

(33) Упрощение определения расстояния Прохорова для вероятностных мер. Теорема о том, что сходимость по Прохорову последовательности вероятностных мер влечет *-слабую сходимость этой последовательности.

(34) Теорема о том, что для сепарабельного метрического пространства *-слабая сходимость последовательности вероятностных мер влечет сходимость по Прохорову.

(35) Теорема о том, что пространство Прохорова для сепарабельного метрического пространства само сепарабельное.

(36) Теорема о том, что пространство Прохорова для компактного метрического пространства само компактное.

(37) Плотные меры и равномерно плотные семейства вероятностных мер. Теорема о том, что каждая конечная мера равномерно плотна, а конечная последовательность конечных мер — равномерно плотна.

(38) Теорема о том, что фундаментальная последовательность вероятностных мер равномерно плотна.

(39) Теорема о том, что предкомпактное подмножество пространства Прохорова для польского пространства является равномерно плотным.

(40) Теорема Прохорова об эквивалентности предкомпактности и равномерной плотности подмножества пространства Прохорова для польского пространства.

(41) Теорема о том, что пространство Прохорова для польского пространства само является польским. Теорема об локально изометричном вложении исходного метрического пространства в пространство Прохорова. Следствие.