Тема 5

Метрические тройки Громова.

В настоящем разделе мы приступаем к изучению *метрических троек Громова* или *mm-пространств*, а именно, метрических пространств (X, d), на которых заданы борелевские меры μ. Обычно эти тройки записываются в виде (X, d, μ) или в более краткой форме, если понятно, о какой метрике или мере идет речь, например, просто (X, μ) или даже X. Имеются разные варианты теории. Мы, как правило, будем ограничивать себя сепарабельными пространствами. Также, в качестве меры будем брать конечную (например, вероятностную), σ-конечную или локально-конечную меру (мера достаточно малой окрестности каждой точки конечна). Начальная часть нашего изложения следует [13]. Впрочем, некоторые детали становятся более ясными поле обращения к [12] и [14].

Приведем ряд простых, но полезных свойств mm-пространств. Напомним, что на каждом подмножестве топологического пространства индуцируется топология: нужно взять все открытые множества и пересечь их с подмножеством. Таким образом, на подмножестве возникает и соответствующая борелевская σ-алгебра. Следующее предложение утверждает, что эту σ-алгебру можно получить и другим способом: достаточно пересечь все борелевские множества объемлющего пространства с подмножеством.

Предложение 5.1. *Пусть $Y \subset X$ — подпространство топологического пространства X, тогда*

$$\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_X \cap Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_X\},$$

где $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ — соответствующие борелевские σ-алгебры. Более того, $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_X$, если и только если $Y \in \mathcal{B}_X$.

Доказательство. Легко видеть, что $\mathcal{B}_X \cap Y$ является σ-алгеброй в Y, содержащей все открытые в Y множества, поэтому $\mathcal{B}_X \cap Y \supset \mathcal{B}_Y$. Докажем теперь обратное включение.

Положим

$$\mathcal{C} = \{B \sqcup (D \setminus Y) : B \in \mathcal{B}_Y,\ D \in \mathcal{B}_X\}.$$

Так как $X \cap Y$ — открыто в Y и, значит, принадлежит $\mathcal{B}_Y$, а также $X \in \mathcal{B}_X$, то $X = (X \cap Y) \sqcup (X \setminus Y) \in \mathcal{C}$. Далее, если $E = B \sqcup (D \setminus Y) \in \mathcal{C}$, то $X \setminus E = (Y \setminus B) \sqcup \big((X \setminus D) \setminus Y\big)$, но $(Y \setminus B) \in \mathcal{B}_Y$ и $(X \setminus D) \in \mathcal{B}_X$, поэтому $X \setminus E \in \mathcal{C}$. Аналогично проверяется, что $\mathcal{C}$ замкнуто относительно не более чем счетны объединений. Наконец, каждое открытое множество $U \subset X$ имеет вид $(U \cap Y) \sqcup (U \setminus Y)$, причем $U \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ и $U \in \mathcal{B}_X$, поэтому $U \in \mathcal{C}$, так что $\mathcal{C}$ содержит топологию τ_X пространства X. Таким образом, $\mathcal{C}$ является σ-алгеброй на X, содержащей τ_X, откуда $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{C}$ и, следовательно, $\mathcal{B}_X \cap Y \subset \mathcal{C} \cap Y$. Однако, $\mathcal{C} \cap Y = \mathcal{B}_Y$, поэтому $\mathcal{B}_X \cap Y \subset \mathcal{B}_Y$, что и требовалось. $\square$

В качестве следующего шага мы хотели бы, начав с mm-пространства (X, μ), построить соответствующее mm-пространство на подмножестве $Y \subset X$. Конечно, индуцировать борелевскую σ-алгебру мы можем, но что делать с мерой μ? Если $Y \in \mathcal{B}_X$, то, как было отмечено в предложении 5.1, $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_X$, поэтому мы можем просто ограничить меру μ на $\mathcal{B}_Y$. Такое ограничение будем обозначать через μ_Y. Если же $Y \notin \mathcal{B}_X$, то этот подход не работает. Чтобы и в этом случае добиться успеха, мы напомним понятие внешней меры и продолжения обычной меры до внешней.

Внешней мерой μ на множестве X называется функция $\mu\colon 2^X \to [0, \infty]$, для которой $\mu(\emptyset) = 0$ и которая является *σ-субаддитивна*: если $(A_1, A_2, \ldots)$ — последовательность подмножеств в X и $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ то

$$\mu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Подмножество $A \subset X$ называется *измеримым по Каратеодери* для внешней меры μ на X, если для всякого $T \subset X$ выполняется $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ (т.е. A делит каждое множество T на μ-аддитивные части). Множество всех μ-измеримых по Каратеодори подмножеств X обозначим через $\sigma(\mu)$. Заметим, что каждое множество $A \subset X$, для которого $\mu(A) = 0$, измеримо по Каратеодори.

Следующее утверждение хорошо известно.

Теорема 5.2. *Для каждой внешней меры μ семейство $\sigma(\mu)$ является σ-алгеброй, а ограничение μ на $\sigma(\mu)$ представляет собой обычную меру.*

На внешние меры естественно переносятся многие свойства, относящиеся к обычным мерам. Так, например, внешняя мера на топологическом пространстве X называется *борелевской*, если $\mathcal{B}_X \subset \sigma(\mu)$.

Если μ — мера, определенная на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, то естественным образом определяется ее *продолжение Лебега* на 2^X до некоторой внешней меры μ^*:

$$\mu^*(T) = \inf\bigl\{\mu(A) : T \subset A,\ A \in \mathcal{A}\bigr\}.$$

Отметим, что σ-алгебра $\sigma(\mu^*)$ включает $\mathcal{A}$, но может быть больше, чем $\mathcal{A}$.

Упражнение 5.3. Покажите, что для внешней меры λ^*, продолжающей меру Лебега λ, заданную на отрезке $I = [0, 1]$, существует измеримое по Каратеодори множество $T \subset I$, не являющееся борелевским.

Используя внешнюю меру μ^*, продолжающую некоторую меру μ, заданную на измеримом пространстве X, мы можем индуцировать внешнюю меру уже на произвольном подмножестве $Y \subset X$, ограничив μ^* на 2^Y. Полученную внешнюю меру вновь обозначим через μ^*_Y.

Упражнение 5.4. Пусть Y — измеримое подмножество измеримого пространства X. Докажите, что μ_Y^* совпадает с продолжением Лебега меры μ_Y, т.е. $\mu_Y^* = (\mu_Y)^*$.

Предложение 5.5. *Пусть μ — борелевская мера на топологическом пространстве X, и Y — произвольное подмножество X. Тогда внешняя мера μ_Y^* также является борелевской, т.е. $\mathcal{B}_Y \subset \sigma(\mu_Y^*)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждое открытое подмножество Y измеримо по Каратеодори. Пусть $U \subset Y$ — такое подмножество, тогда $U = Y \cap V$, где V — открытое подмножество X. Для произвольного $T \subset Y$ имеем

$$\mu_Y^*(T\cap U)+\mu_Y^*(T\setminus U) = \mu^*(T\cap U)+\mu^*(T\setminus U) = \mu^*(T\cap V)+\mu^*(T\setminus V) = \mu^*(T) = \mu_Y^*(T),$$

где предпоследнее равенство вытекает из того, что $V \in \mathcal{B}_X \subset \sigma(\mu^*)$. $\square$

Из сказанного выше вытекает следующий результат, позволяющий строить по известным mm-пространствам много других.

Следствие 5.6. *Пусть (X, μ) — некоторое mm-пространство, и $Y \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда (Y, μ_Y^*) — тоже mm-пространство.*

5.1 Гиперпространство метрических троек Громова

Напомним, что различие между метрическими пространствами можно измерять с помощью расстояния Громова–Хаусдорфа, которое строится на базе расстояния Хаусдорфа, определенного на подмножествах метрического пространства. В силу того, что в литературе используются разные обозначения для окрестностей точек, а также для окрестностей подмножеств метрического пространства, фиксируем здесь обозначения, привычные для нас.

Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$, $s > 0$ и $r \ge 0$. Подмножество

- $U_s(x) = \big\{y \in X : |xy| < s\big\}$ назовем *открытым шаром с центром в x радиуса s*;
- $B_r(x) = \big\{y \in X : |xy| \le r\big\}$ — *замкнутым шаром с центром в x радиуса r*;
- $S_r(x) = \big\{y \in X : |xy| = r\big\}$ — *сферой с центром в x радиуса r*, причем если $r = 0$,

причем если $r = 0$, то соответствующие замкнутый шар и сфера называются *вырожденными.*

Упражнение 5.7. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, $r \ge 0$ и $s > 0$. Покажите, что

(1) $\partial U_s(x)$ и $\partial B_s(x)$ не связаны никаким включением,

(2) $\partial U_s(x) \subset S_s(x)$,

(3) $\partial B_r(x) \subset S_r(x)$,

причем оба предыдущих включения могут быть строгими.

Напомним, что для подмножеств $Z \subset [0,\infty]$ функции inf и sup естественным образом определяются и для $Z = \emptyset$, а именно, $\inf\emptyset = \infty$ и $\sup\emptyset = 0$. Для произвольного $A \subset X$, возможно пустого, и $x \in X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf_{a\in A}|xa|$. Отметим, что $|x\emptyset| = |\emptyset x| = \infty$. Определим теперь открытые и замкнутые окрестности подмножеств $A \subset X$:

- $U_s(A) = \big\{y \in X : |xA| < s\big\}$ назовем *открытой s-окрестностью множества A*;
- $B_r(A) = \big\{y \in X : |xA| \le r\big\}$ назовем *замкнутой r-окрестностью множества A*.

Отметим, что
$$U_s(\emptyset) = \{x \in X : |x\emptyset| = \infty < s\} = \emptyset.$$
Аналогично, $B_r(\emptyset) = \emptyset$.

Отметим также, что $U_s(A) = \cup_{a\in A}U_s(a)$, а $B_r(A)$ равно замыканию множества $\cup_{a\in A}B_r(a)$, причем оба этих равенства имеют место и для $A = \emptyset$ (убедитесь).

В дальнейшем нам понадобится следующий простой результат.

Предложение 5.8. *Для произвольного замкнутого подмножества F метрического пространства X и конечной меры μ на X выполняется*
$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty}\mu\big(B_{1/k}(F)\big) = \lim_{k\to\infty}\mu\big(U_{1/k}(F)\big).$$

Пусть теперь A и B — произвольные подмножества метрического пространства X. Тогда *расстоянием Хаусдорфа* между A и B называется величина
$$d_H(A,B) = \inf\big\{\varepsilon > 0 : A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\big\}.$$

Замечание 5.9. Если $A = B = \emptyset$, то каждое из включений в определении $d_H(A,B)$ имеет место при всех ε, так что $d_H(A,B) = 0$. Если же только одно из A, B пусто, пусть например $A = \emptyset$, то включение $B \subset U_\varepsilon(A)$ не выполняется ни при каком ε, поэтому $d_H(A,B) = \infty$.

В дальнейшем мы не будем применять d_H к пустым множества, а **все рассматриваемые метрические пространства предполагаются непустыми**.

Хорошо известно [10], что на множестве $\mathcal{H}(X)$ всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства X расстояние Хаусдорфа является метрикой. Более того, если пространство X — полное, то $\mathcal{H}(X)$ тоже полное; если X — вполне ограниченное, то $\mathcal{H}(X)$ — вполне ограниченное; если X — компактное, то $\mathcal{H}(X)$ — компактное.

Пусть теперь X и Y — метрические пространства, тогда *расстоянием Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ между X и Y* называется точная нижняя грань тех $\varepsilon > 0$, для которых существует метрическое пространство Z и $X', Y' \subset Z$, изометричные X и Y соответственно, такие, что $d_H(X',Y') < \varepsilon$. Хорошо известно [10], что на семействе компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой, а полученное метрическое пространство, называемое *пространством Громова–Хаусдорфа*, — польское, геодезическое и стягиваемое по себе (гомеоморфно конусу).

Пусть теперь имеются два mm-пространства (X, d, μ) и (Y, ρ, ν). Используем аналогичную конструкцию, чтобы определить, насколько эти пространства различны. Конечно, мы можем изометрически вложить X и Y в некоторое метрическое пространство Z, но теперь, кроме расстояния между образами X и Y, нам нужно измерить еще расстояния между мерами μ и ν. Если $f\colon X \to Z$ и $g\colon Y \to Z$ — изометричные вложения, то определены борелевские меры $f_*\mu$ и $g_*\nu$. Как померить расстояние между этими мерами? Тут имеется много разных вариантов.

5.1.1 Расстояния Прохорова

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Обозначим через $\mathcal{M}(X)$ множество всех конечных (борелевских) мер на X, а через $\mathcal{P}(X)$ — подмножество в $\mathcal{M}(X)$, состоящее из всех вероятностных мер. Построим естественную функцию расстояния на $\mathcal{M}(X)$, называемую *расстоянием Прохорова*. Пусть, как и выше, $\mathcal{B}_X$ обозначает борелевскую σ-алгебру на X. Тогда для $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ положим

$$d_P(\mu,\nu) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \mu(A) \le \nu\big(U_\varepsilon(A)\big) + \varepsilon \ \&\ \nu(A) \le \mu\big(U_\varepsilon(A)\big) + \varepsilon \ \ \forall A \in \mathcal{B}_X\Big\}. \tag{5.1}$$

Ясно, что d_P — неотрицательная симметричная функция от пар мер, причем $d_P(\mu,\mu) = 0$ при всех $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

Теорема 5.10. *Функция расстояния d_P является метрикой на $\mathcal{M}(X)$.*

Доказательство. Проверим положительную определенность функции d_P. Предположим, что $d_P(\mu,\nu) = 0$, тогда для любых $\varepsilon > 0$ и замкнутого F выполняется $\mu(F) \le \nu\big(U_\varepsilon(F)\big) + \varepsilon$. По предложению 5.8, имеем $\nu\big(U_{1/k}(F)\big) \to \nu(F)$ при $k \to \infty$ и, значит, $\mu(F) \le \nu(F)$. Симметричное неравенство дает $\mu(F) = \nu(F)$. В силу следствия 4.28, заключаем, что $\mu = \nu$, откуда и вытекает положительная определенность функции d_P.

Проверим теперь неравенство треугольника. Пусть $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$. Выберем произвольные $s \ge d_P(\lambda,\mu)$ и $t \ge d_P(\mu,\nu)$, тогда для любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполняется

$$\lambda(A) \le \mu\big(U_s(A)\big) + s \le \nu\Big(U_t\big(U_s(A)\big)\Big) + s + t \le \nu\big(U_{s+t}(A)\big) + s + t,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $U_t\big(U_s(A)\big) \subset U_{s+t}(A)$ (проверьте). Аналогично проверяется, что $\nu(A) \le \lambda\big(U_{s+t}(A)\big) + s + t$, поэтому $d_P(\lambda,\nu) \le s + t$. Из произвольности s и t заключаем, что $d_P(\lambda,\nu) \le d_P(\lambda,\mu) + d_P(\mu,\nu)$, что и требовалось. $\square$

Определение 5.11. Функция d_P называется *метрикой Прохорова*. Если для последовательности $(\mu_1, \mu_2, \dots) \subset \mathcal{M}(X)$ и $\mu \in \mathcal{M}(X)$ выполняется $d_P(\mu_n,\mu) \to 0$ при $n \to \infty$, то будем говорить, что эта последовательность *сходится к μ по Прохорову* и обозначать $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$. Множество $\mathcal{P}(X)$ вероятностных мер на метрическом пространстве X, наделенное метрикой Прохорова, будем называть *пространством Прохорова на X*.

На самом деле, в некоторых случаях для определения метрики Прохорова достаточно одного из двух неравенств (5.1).

Предложение 5.12. *Пусть для вероятностных мер $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, произвольного $\varepsilon > 0$ и любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполняется $\mu(A) \le \nu\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) + \varepsilon$. Тогда $\nu(A) \le \mu\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) + \varepsilon$ и, значит,*

$$d_P(\mu, \nu) = \inf\Bigl\{\varepsilon > 0 : \mu(A) \le \nu\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) + \varepsilon \ \ \forall A \in \mathcal{B}_X\Bigr\}.$$

Тем самым, при определении метрики Прохорова на пространстве вероятностных мер можно ограничиться одним из двух неравенств (5.1).

Доказательство. Положим $B = X \setminus U_\varepsilon(A)$. По условию, $\mu(B) \le \nu\bigl(U_\varepsilon(B)\bigr) + \varepsilon$, откуда

$$\mu\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) = \mu(X \setminus B) = 1 - \mu(B) \ge 1 - \Bigl(\nu\bigl(U_\varepsilon(B)\bigr) + \varepsilon\Bigr) = \nu\bigl(X \setminus U_\varepsilon(B)\bigr) - \varepsilon.$$

Покажем, что $A \subset X \setminus U_\varepsilon(B)$. Последнее равносильно тому, что для каждого $a \in A$ выполняется $a \notin U_\varepsilon(B)$. Предположим противное, тогда для некоторого $b \in B$ выполняется $|ab| < \varepsilon$, так что $b \in U_\varepsilon(A)$. Но $b \in X \setminus U_\varepsilon(A)$, противоречие.

Теперь, воспользовавшись монотонностью меры, заключаем, что $\mu\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) \ge \nu(A) - \varepsilon$, что и требовалось. □

Разберем теперь, как связаны *-слабая сходимость и сходимость по Прохорову на пространстве вероятностных мер. Для этого мы воспользуемся теоремой Портманто.

Теорема 5.13. *Если последовательность $(\mu_1, \mu_2, \ldots) \subset \mathcal{P}(X)$ сходится к $\mu \in \mathcal{P}(X)$ по Прохорову, то также имеет место и *-слабая сходимость $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon_n = d_P(\mu_n, \mu) + 1/n$, тогда $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\mu_n(A) \le \mu\bigl(U_{\varepsilon_n}(A)\bigr) + \varepsilon_n$ для любого непустого $A \in \mathcal{B}_X$. Выберем в качестве A непустое замкнутое множество F, тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} \Bigl[\mu\bigl(U_{\varepsilon_n}(F)\bigr) + \varepsilon_n\Bigr] = \mu(F),$$

поэтому, в силу теоремы 4.33, имеем $\mu_n \Rightarrow \mu$, что и требовалось. □

В случае сепарабельного пространства имеет место и обратный результат. Введем предварительно ряд обозначений.

Теорема 5.14. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mu_n \Rightarrow \mu$, если и только если $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$.*

Доказательство. В силу теоремы 5.13, нам осталось показать, что слабая сходимость влечет сходимость по Прохорову.

Лемма 5.15. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует покрывающая X последовательность $(A_1, A_2, \ldots)$ открытых (замкнутых) μ-непрерывных шаров, радиусы которых меньше δ.*

Доказательство. Пусть $S = (s_1, s_2, \ldots) \subset X$ — всюду плотная последовательность в X. В силу упражнения 5.7, для каждого (открытого или замкнутого) шара A радиуса r с центром в x выполняется $\partial A \subset S_r(x)$.

Для $x \in X$ рассмотрим семейство сфер $\mathcal{S} = \{S_r(x) : \delta/2 < r < \delta\}$. Так как это семейство дизъюнктно, а мера μ конечна, то, в силу упражнения 4.18, существует не более чем счетное множество r_j, $\delta/2 < r_j < \delta$, таких, что $\mu\bigl(S_{r_j}(x)\bigr) > 0$. Следовательно, найдется такое $\delta/2 < r(x) < \delta$, для которого $\mu\bigl(S_{r(x)}(x)\bigr) = 0$.

Выберем в качестве A_i или шары $U_{r(s_i)}(s_i)$, или шары $B_{r(s_i)}(s_i)$. Так как радиусы эти шаров отделены от нуля (больше $\delta/2$), последовательность $(A_1, A_2, \ldots)$ — покрытие X. Кроме того, радиусы этих шаров меньше δ и μ-меры границ равны нулю. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует такое N, что при каждом $n \ge N$ выполняется $d_P(\mu_n, \mu) < \varepsilon$ или, что, в силу предложения 5.12, равносильно $\mu(A) < \mu_n\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) + \varepsilon$ при всех непустых $A \in \mathcal{B}_X$.

Выберем произвольное $0 < \delta < \varepsilon/2$ и, используя лемму 5.15, построим покрытие $(A_1, A_2, \ldots)$ пространства X открытыми μ-непрерывными шарами, радиусы которых меньше δ.

По пункту (5) упражнения 4.3, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для $C = \cup_{i=1}^k A_k$ выполняется $\mu(X \setminus C) \le \delta$. Положим $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_k)$.

Пусть B — объединение произвольного набора шаров из $\mathcal{A}$. Так как $\partial B \subset \cup \partial A_i$, то $\mu(\partial B) \le \sum \mu(\partial A_i) = 0$, т.е. каждое B является μ-непрерывным подмножеством X.

Так как $\mu_n \Rightarrow \mu$, то, в силу пункта (5) теоремы 4.33, имеем $\mu_n(B) \to \mu(B)$, поэтому существует N_B такое, что при всех $n \ge N_B$ выполняется $\bigl|\mu_n(B) - \mu(B)\bigr| < \delta$. Положим $N = \max_B N_B$, тогда при всех $n \ge N$ и всех B имеем $\bigl|\mu_n(B) - \mu(B)\bigr| < \delta$.

Выберем теперь произвольное $A \in \mathcal{B}_X$ и положим $\mathcal{B} = \{A_i \in \mathcal{A} : A \cap A_i \ne \emptyset\}$ и $B = \cup \mathcal{B}$. Ясно, что $A \cap C \subset B$, поэтому $A \subset B \cup (X \setminus C)$, откуда $\mu(A) \le \mu(B) + \mu(X \setminus C)$.

Заметим, что диаметр каждого A_i меньше ε, поэтому все $A_i \in \mathcal{B}$ лежат в $U_\varepsilon(A)$, откуда $B \subset U_\varepsilon(A)$. Таким образом, для всех $n \ge N$ и всех $A \in \mathcal{B}_X$ имеем

$$\mu(A) \le \mu(B) + \mu(X \setminus C) \le \mu(B) + \delta < \mu_n(B) + 2\delta < \mu_n\bigl(U_\varepsilon(A)\bigr) + \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

5.1.2 Сепарабельность и пространство Прохорова

В настоящем разделе мы покажем, что из сепарабельности метрического пространства вытекает сепарабельность пространства вероятностных мер, определенных на этом пространстве. Прежде чем приступить к доказательству, мы напомним определения нескольких нужных нам понятий.

Пусть X — произвольное множество, $Y \subset X$ и $f\colon X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Напомним, что *колебание функции f на подмножестве Y* — это следующая величина:

$$\omega(f, Y) = \sup_{x, x' \in Y} \bigl|f(x) - f(x')\bigr|.$$

С учетом сделанных выше распространений функций inf и sup на $\emptyset$, имеем $\omega(f, \emptyset) = 0$. Отметим за одно, что, по аналогичным соображениям, $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.

Замечание 5.16. В терминах колебания естественно определяются равномерно непрерывные функции. А именно, если X — метрическое пространство, то $f \in C_{ub}(X)$, если и только если функция f — ограничена, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $Y \subset X$, $\operatorname{diam} Y < \delta$, выполняется $\omega(f, Y) < \varepsilon$.

Еще одно необходимое для дальнейшего понятие — индикатор множества. Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. Функция $I_Y : X \to \{0,1\}$, равная 1 на Y и 0 на $X \setminus Y$, называется *индикатором множества* Y. Напомним, что для конечной меры μ, заданной на некотором измеримом пространстве, множество интегрируемых по Лебегу функций включает все индикаторы измеримых множеств, а также замкнуто относительно линейных комбинаций и произведений (образует алгебру). Интеграл Лебега по мере μ от интегрируемой функции f будем обозначать $\mu(f)$ — так же, как это мы делали для непрерывных ограниченный функций f.

Теорема 5.17. *Если метрическое пространство X сепарабельно, то и пространство Прохорова $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ также сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $(s_1, s_2, \dots) \subset X$ — всюду плотная последовательность в X. Рассмотрим следующее счетное семейство вероятностных мер на X:

$$\mathcal{D} = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{s_i} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ k = 1, 2, \dots \Big\}.$$

Мы покажем, что $\mathcal{D}$ всюду плотно в $\mathcal{P}(X)$, чем и завершим доказательство. Для этого достаточно, в силу сепарабельности X и теоремы 5.14, выбрать произвольное $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и построить последовательность $\mu_n \in \mathcal{D}$, которая *-слабо сходится к μ.

Фиксируем некоторое $t > 0$, тогда последовательность шаров $U_i := U_{t/2}(s_i)$ покрывает X. Перестроим это семейство в дизъюнктное покрытие $(V_1, V_2, \dots)$: пусть $V_1 = U_1$, а при каждом $n > 1$ положим $V_n = U_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} U_i$. Заметим, что диаметры множеств V_i, как и шаров U_i, не превосходят t, и что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i)$ сходится к 1, в частности, существует такое k, для которого $\sum_{i=1}^{k-1} \mu(V_i) > 1 - t$. Положим $Z_i = V_i$ при $i = 1, \dots, k-1$ и $Z_k = X \setminus \cup_{i=1}^{k-1} V_i$, тогда $(Z_1, \dots, Z_k)$ — покрытие X такое, что $\operatorname{diam} Z_i \le t$ при $1 \le i \le k-1$, и $\mu(Z_k) < t$.

Положим $z_i = \mu(Z_i)$, $z = (z_1, \dots, z_k)$, $\nu_t = \sum_{i=1}^{k} z_i \delta_{s_i}$. Так как $\sum_{i=1}^{k} z_i = 1$, то $\nu_t \in \mathcal{P}(X)$.

Следующая лемма тривиальна.

Лемма 5.18. *Рассмотрим гиперплоскость Π в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$, заданную уравнением $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, тогда множество точек, лежащих в этой плоскости и имеющих только рациональные координаты, всюду плотно. В частности, для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Pi$ и любого $\varepsilon > 0$ существует точка $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi$ такая, что $y_i \in \mathbb{Q}$ при всех i и $\|x-y\|_1 = \sum_i |x_i - y_i| < \varepsilon$. При этом, если все x_i неотрицательны, то точку y можно выбрать так, чтобы все y_i также были неотрицательными.*

В силу леммы 5.18, существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, в котором $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и $\alpha_i \ge 0$ при всех i, а также $\sum_i \alpha_i = 1$ и $\|z - \alpha\|_1 < t$. Положим $\eta_t = \alpha_1 \delta_{s_1} + \dots + \alpha_k \delta_{s_k}$, и в качестве последовательности μ_n возьмем $\eta_{1/n}$. Проверим, что $\mu_n \Rightarrow \mu$. Чтобы показать последнее, достаточно, в силу пункта (2) теоремы 4.33, выбрать произвольную равномерно непрерывную ограниченную функцию $g \in C_{ub}(X)$ и выяснить, что $\mu_n(g) \to \mu(g)$.

Выберем такую функцию g, фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть N столь велико, что при всех $n \ge N$ выполняется

- $\omega(g, Z_i) < \varepsilon/3$ для любого $1 \le i \le k-1$ (такое N существует в силу равномерной непрерывности функции g);
- $\omega(g, X)\mu(Z_k) < \varepsilon/3$ (это возможно, так как $\mu(Z_k) < 1/n$);
- $\|z-\alpha\|_1\,\|g\|_\infty < \varepsilon/3$ (это можно сделать, так как $\|z-\alpha\|_1 < 1/n$).

Возьмем произвольное $n \ge N$ и положим $t = 1/n$. Тогда

$$\bigl|\nu_t(g) - \eta_t(g)\bigr| = \left|\sum_{i=1}^k \bigl(z_i - \alpha_i\bigr) g(s_i)\right| \le \|z-\alpha\|_1\,\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее,

$$\inf_{x\in Z_i} g(x)\,\mu(Z_i) \le \mu(g\,I_{Z_i}) \le \sup_{x\in Z_i} g(x)\,\mu(Z_i),$$

поэтому при $1 \le i < k$ имеем

$$\Bigl|\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu(Z_i) g(s_i)\Bigr| = \Bigl|\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu\bigl(g(s_i)\,I_{Z_i}\bigr)\Bigr| \le \omega(g, Z_i)\,\mu(Z_i) < \frac{\varepsilon}{3}\,\mu(Z_i),$$

а при $i = k$ выполняется

$$\Bigl|\mu(g\,I_{Z_k}) - \mu(Z_k) g(s_k)\Bigr| \le \omega(g, X)\,\mu(Z_k) < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$\begin{aligned}\bigl|\mu(g) - \nu_t(g)\bigr| = \left|\sum_{i=1}^k \bigl[\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu(Z_i) g(s_i)\bigr]\right| \le& \\ \le \sum_{i=1}^k \bigl|\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu(Z_i) g(s_i)\bigr| < \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{3}\,\mu(Z_i) + \frac{\varepsilon}{3} \le \frac{2\varepsilon}{3}.&\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bigl|\mu(g) - \mu_n(g)\bigr| \le \bigl|\mu(g) - \nu_t(g)\bigr| + \bigl|\nu_t(g) - \eta_t(g)\bigr| < \varepsilon,$$

что и требовалось. □

5.1.3 Компактность и пространство Прохорова

Цель это раздела — доказать следующий результат.

Теорема 5.19. *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда пространство Прохорова $\bigl(\mathcal{P}(X), d_P\bigr)$ также компактно.*

Доказательство. Обозначим через Φ множество всех неотрицательных линейных функционалов $\varphi\colon C(X) \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(1) = 1$. По теореме 4.34, отображение Ψ, сопоставляющее каждой мере $\mu \in \mathcal{P}(X)$ линейный функционал $\varphi := \Psi(\mu)$ по правилу

$\varphi(f) = \mu(f) = \int_X f\,d\mu$, является изометрией между $\mathcal{P}(X)$ и Φ, где на $\mathcal{P}(X)$ и Φ рассматриваются метрики, порожденные соответственно полной вариацией и двойственной нормой к sup-норме на $C(X)$.

Обозначим через B^* единичный (относительно двойственной нормы) шар с центром в нуле в пространстве $C(X)^*$, тогда $\Phi \subset B^*$, так как полная вариация $\|\mu\|$ каждой вероятностной меры μ равна $\mu(X) = 1$, поэтому, в силу изометричности отображения Ψ, имеем $\big\|\Psi(\mu)\big\| = 1$.

По теореме 4.39, шар B^* компактен в *-слабой топологии.

Лемма 5.20. *Множество Φ замкнуто в *-слабой топологии на $C(X)^*$.*

Доказательство. Действительно,

$$\Phi = \big\{\varphi \in C(X)^* : \varphi(1) = 1 \text{ и } \varphi(f) \ge 0 \text{ для всех } f \in C(X),\ f \ge 0\big\}.$$

Для произвольного $f \in C(X)$ рассмотрим отображение $\theta_f\colon C(X)^* \to \mathbb{R}$, $\theta_f(\varphi) = \varphi(f)$. Заметим, что, по определению *-слабой топологии, для каждых $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ множество $\Big\{\varphi \in C(X)^* : \big|\varphi(f) - a\big| < \varepsilon\Big\}$ открыто в этой топологии, поэтому такое отображение θ_f непрерывно и, следовательно, множества

$$\big\{\varphi \in C(X)^* : \varphi(1) = 1\big\} = \theta_1^{-1}(1) \quad \text{и} \quad \big\{\varphi \in C(X)^* : \varphi(f) \ge 0\big\} = \theta_f^{-1}\big([0,\infty)\big)$$

замкнуты в *-слабой топологии. Осталось заметить, что Φ совпадает с пересечением таких множеств и, поэтому, также замкнуто. $\square$

По предложению 4.36, *-слабая топология на B^* совпадает с топологией, индуцированной из *-слабой топологии на $C(X)^*$, поэтому множество $\Phi \subset B^*$ — замкнуто в шаре B^* со *-слабой топологией. Так как каждое замкнутое подмножество компактного пространства само компактно, мы заключаем, что Φ — компакт в топологии, индуцированной из *-слабой топологии пространства $C(X)^*$. Снова, по предложению 4.36, эта индуцированная топология совпадает со *-слабой топологией самого пространства Φ. Тем самым, Φ — компакт и в *-слабой топологии.

Лемма 5.21. *Метрическое пространство $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ и топологическое пространство Φ со *-слабой топологией гомеоморфны.*

Доказательство. Мы покажем, что построенное выше отображение $\Psi\colon \mathcal{P}(X) \to \Phi$ является гомеоморфизмом и в топологиях из условия леммы. По следствию 4.43, *-слабая топология шара B^* метризуема. Таким образом, Ψ является отображением метризуемых пространств, поэтому достаточно проверить, что Ψ и Ψ^{-1} сохраняют сходимость последовательностей. Так как метрическое пространство X компактно, то оно также и сепарабельно, поэтому, в силу теоремы 5.17, пространство Прохорова $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ — сепарабельно. Но, по теореме 5.14, сходимость последовательности в таком $\mathcal{P}(X)$ относительно метрики Прохорова d_P равносильна *-слабой сходимости, а это и означает сохранение сходимости отображениями Ψ и Ψ^{-1}. $\square$

Предыдущая лемма и завершает доказательство теоремы. $\square$

5.1.4 Плотные семейства мер и теорема Прохорова о предкомпактности

Пусть X — топологическое пространство. Конечная мера μ на X называется *плотной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$.

Пусть теперь $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ — семейство вероятностных мер на топологическом пространстве X. Говорят, что семейство Γ — *равномерно плотное*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$ для всех $\mu \in \Gamma$.

Следующий технический результат будет неоднократно использован в доказательствах разных утверждений.

Предложение 5.22. *Пусть X — полное метрическое пространство и $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ — семейство вероятностных мер. Предположим, что для каждых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует конечная последовательность $(a_1, \ldots, a_n) \subset X$ такая, что для $U = \cup_{i=1}^n U_\delta(a_i)$ выполняется $\mu(U) \ge 1 - \varepsilon$ при каждом $\mu \in \Gamma$. Тогда семейство Γ — равномерно плотное.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует такое $U_m = \cup_{i=1}^{n_m} U_{1/m}(a_i)$, что $\mu(U_m) \ge 1 - \varepsilon/2^m$. Положим $K_m = \cup_{i=1}^{n_m} B_{1/m}(a_i)$, тогда, в силу монотонности меры, будем также иметь $\mu(K_m) \ge 1-\varepsilon/2^m$ для всех $\mu \in \Gamma$.

Пусть $K = \cap_{m=1}^{\infty} K_m$. Тогда K — замкнутое подмножество X, так как замкнуто каждое K_m. Кроме того, K — вполне ограничено в силу того, что для каждого $\delta > 0$ при $1/m < \delta/2$ точки $\{a_i\}_{i=1}^{n_m}$ образуют конечную $(\delta/2)$-сеть в K_m, а, значит, в $K \subset K_m$ имеемся δ-сеть, состоящая не более чем из n_m точек (убедитесь в этом). Таким образом, K — компакт. Покажем, что K — искомый компакт. Имеем

$$\mu(X \setminus K) = \mu(X \setminus \cap_m K_m) = \mu\big(\cup_m (X \setminus K_m)\big) \le \sum_m \mu(X \setminus K_m) < \sum_m \varepsilon/2^m = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Теорема 5.23. *Каждая конечная мера на польском пространстве плотна.*

Доказательство. Пусть X — польское пространство и μ — конечная мера на нем. Если μ — нулевая мера, то утверждение очевидно. Если же мера μ не нулевая, то, поделив ее на $\mu(X)$, получим вероятностную меру. Легко видеть, утверждение одновременно выполняется или нет для меры μ и $\mu/\mu(X)$. Таким образом, теорему достаточно доказать для вероятностных мер μ. Пусть μ — именно такая мера.

Выберем в X всюду плотную последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$, метризуем X полной метрикой, и заметим, что для каждого $\delta > 0$ последовательность открытых шаров $\big(U_\delta(a_1), U_\delta(a_2), \ldots\big)$ покрывает X. В силу пункта (5) упражнения 4.3, для каждых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для $U = \cup_{i=1}^n B_\delta(a_i)$ выполняется $\mu(U) \ge 1 - \varepsilon$. Но тогда, по предложению 5.22, семейство $\Gamma = \{\mu\}$ — равномерно плотное, т.е. μ — плотная мера. □

Из теоремы 5.23 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 5.24. *Каждая конечная последовательность конечных мер на польском пространстве равномерно плотна.*

Теорема 5.25. *Каждая фундаментальная в метрике Прохорова последовательность вероятностных мер на польском метрическом пространстве равномерно плотна.*

Доказательство. Пусть X — польское пространство, метризованное полной метрикой, и $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность в пространстве $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$. Пусть $(a_1, a_2, \ldots) \subset X$ — всюду плотная последовательность. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, положим $\gamma = \min\{\delta, \varepsilon\}/2$, и найдем такое N, что при всех $p, q \geq N$ выполняется $d_P(\mu_p, \mu_q) < \gamma$. Последнее означает, что для любого измеримого $A \subset X$ имеем

$$\mu_p(A) \leq \mu_q\big(U_\gamma(A)\big) + \gamma \ \text{ и } \ \mu_q(A) \leq \mu_p\big(U_\gamma(A)\big) + \gamma. \tag{5.2}$$

Так как последовательность $\big(U_{\delta/2}(a_1), U_{\delta/2}(a_2), \ldots\big)$ образует покрытие X, по пункту (5) упражнения 4.3 существует n такое, что для $V = \cup_{i=1}^n U_{\delta/2}(a_i)$ выполняется $\mu_k(V) \geq 1 - \gamma$ для всех $k \in \{1, \ldots, N\}$.

Далее, заметим, что

$$U_\gamma(V) = U_\gamma\Big(\cup_{i=1}^n U_{\delta/2}(a_i)\Big) \subset \cup_{i=1}^n U_{\delta/2+\gamma}(a_i) \subset \cup_{i=1}^n U_\delta(a_i) =: U,$$

поэтому, учитывая уравнения (5.2), для $k \geq N$ получим

$$\mu_N(V) \leq \mu_k\big(U_\gamma(V)\big) + \gamma \leq \mu_k(U) + \gamma,$$

откуда $\mu_k(U) \geq \mu_N(V) - \gamma \geq 1 - 2\gamma \geq 1 - \varepsilon$.

С другой стороны, при $k < N$ имеем

$$\mu_k(U) \geq \mu_k(V) \geq 1 - \gamma \geq 1 - \varepsilon.$$

Итак, для каждых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ мы нашли конечную последовательность $(a_1, \ldots, a_n) \subset X$ такую, что для $U = \cup_{i=1}^n U_\delta(a_i)$ выполняется $\mu_k(U) \geq 1 - \varepsilon$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. По предложению 5.22, последовательность $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ равномерно плотна. $\square$

Теорема 5.26. *Пусть X — польское метрическое пространство и Γ — предкомпактное подмножество метрического пространства $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$. Тогда семейство Γ — равномерно плотное.*

Доказательство. Пусть $(U_1, U_2, \ldots)$ — последовательность открытых подмножеств пространства X, являющаяся покрытием X. Положим $V_k = \cup_{i=1}^k U_i$.

Лемма 5.27. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu(V_m) \geq 1 - \varepsilon$ для всех $\mu \in \Gamma$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого k найдется $\mu_k \in \Gamma$, для которого $\mu_k(V_k) < 1 - \varepsilon$. Так как Γ — предкомпактно, то, по теореме 5.13, существует подпоследовательность μ_{k_i}, которая *-слабо сходится к некоторому $\mu \in \mathcal{P}(X)$. По теореме 4.33, для каждого n выполняется

$$\mu(V_n) \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_{k_i}(V_n) \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_{k_i}(V_{k_i}) \leq 1 - \varepsilon,$$

где среднее неравенство вытекает из того, что при больших k_i выполняется $V_n \subset V_{k_i}$ и, значит, $\mu_{k_i}(V_n) \leq \mu_{k_i}(V_{k_i})$. Но $\cup_{n=1}^\infty V_n = X$, поэтому, в силу пункта (3) упражнения 4.3, заключаем, что $\mu(V_n) \to \mu(X) = 1$, противоречие. $\square$

Пусть $(a_1, a_2, \ldots)$ — всюду плотная последовательность точек в X. Фиксируем произвольное $\delta > 0$, и возьмем в качестве U_i открытые шары $U_\delta(a_1)$. Тогда, в силу леммы 5.27, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для множества $U = \cup_{i=1}^m U_\delta(a_i)$ выполняется $\mu(U) \geq 1 - \varepsilon$ при каждом $\mu \in \Gamma$. В силу предложения 5.22, семейство Γ — равномерно плотное. $\square$

Идея доказательства следующей теоремы существенно опирается на [27].

Теорема 5.28 (Прохоров Ю.В. [25])**.** *Пусть X — польское метрическое пространство и Γ — произвольное подмножество метрического пространства $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$. Тогда семейство Γ предкомпактно, если и только если Γ — равномерно плотное.*

Доказательство. То, что из предкомпактности семейства Γ вытекает равномерная плотность этого семейства, доказано в теореме 5.26. Покажем, что и обратное утверждение справедливо.

Пусть $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ — равномерно плотное семейство вероятностных мер на X. По теореме 2.1, существует топологическое вложение $f\colon X \to \mathcal{H}$ топологического пространства X в гильбертов куб $\mathcal{H}$, причем такое, что $Y := f(X)$ — борелевское подмножество $\mathcal{H}$. Для каждой меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ положим $\nu_\mu = f_*\mu$.

Лемма 5.29. *Для каждого измеримого $A \subset \mathcal{H}$ и любого $\mu \in \mathcal{P}(X)$ имеем*

$$\nu_\mu(A) = \nu_\mu(A \cap Y),$$

в частности, для каждого $A \subset \mathcal{H} \setminus Y$ выполняется $\nu_\mu(A) = 0$.

Доказательство. По определению отображения f_*, для каждого измеримого $A \subset \mathcal{H}$ имеет место

$$\nu_\mu(A) = \mu\big(f^{-1}(A)\big) = \mu\big(f^{-1}(A \cap Y)\big) = \nu_\mu(A \cap Y),$$

что и требовалось. $\square$

Из леммы 5.29 вытекает, что $\nu_\mu(\mathcal{H}) = \nu_\mu(Y) = \mu(X) = 1$, т.е. $\nu_\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Лемма 5.30. *Семейство $\{\nu_\mu\}_{\mu\in\Gamma} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$ — равномерно плотное.*

Доказательство. Действительно, так как Γ — равномерно плотно в $\mathcal{P}(X)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $Z \subset X$ такой, что $\mu(X \setminus Z) < \varepsilon$ для всех $\mu \in \Gamma$. Положим $K = f(Z)$, тогда K — компакт в $\mathcal{H}$ как непрерывный образ компакта. Осталось заметить, что, в силу леммы 5.29,

$$\nu_\mu(\mathcal{H} \setminus K) = \nu_\mu(Y \setminus K) = \mu(X \setminus Z) < \varepsilon$$

для всех $\mu \in \Gamma$. $\square$

По теореме 5.19, пространство $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ с метрикой Прохорова — компактно, поэтому в любой последовательности $\nu_i := \nu_{\mu_i}$ существует подпоследовательность ν_{i_k}, сходящаяся по метрике Прохорова в некоторой мере $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Лемма 5.31. *Имеем $\nu(Y) = 1$.*

Доказательство. Так как X — сепарабельное пространство, то, в силу теоремы 5.14, сходимость по метрике Прохорова равносильна *-слабой сходимости, а последняя равносильна условию (3) из теоремы 4.33, чем мы сейчас и воспользуемся. Напомним, что последовательность $(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \ldots)$ — равномерно плотная, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $Z \subset X$, для которого $\mu_{i_k}(Z) \geq 1-\varepsilon$ для всех μ_{i_k}, откуда, положив $K = f(Z)$, получим $\nu_{i_k}(K) = \mu_{i_k}(Z) \geq 1 - \varepsilon$. Так как множество K также является компактом в метрическом пространстве $\mathcal{H}$, то K — замкнутое подмножество $\mathcal{H}$. По теореме 4.33,

$$1 - \varepsilon \leq \limsup_{k\to\infty} \nu_{i_k}(K) \leq \nu(K) \leq \nu(Y),$$

откуда $\nu(Y) \geq 1$, и так как $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, имеем $\nu(Y) = 1$. □

Обозначим через f_Y отображение из X в Y, совпадающее с f (ограничение f на Y), тогда f_Y — гомеоморфизм. Положим $\mu = (f_Y^{-1})_*(\nu_Y)$, тогда $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Теперь доказательство теоремы завершает следующая лемма.

Лемма 5.32. *Имеем* $\mu_{i_k} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$.

Доказательство. Снова воспользуемся тем, что *-слабая сходимость мер на X равносильна сходимости по метрике Прохорова. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и любое замкнутое $A \subset X$. Положим $B = f(A)$, тогда B — замкнутое подмножество в индуцированной на Y топологии. Последнее означает, что существует замкнутое $C \subset \mathcal{H}$, для которого $B = Y \cap C$. В силу леммы 5.29, $\nu_{i_k}(B) = \nu_{i_k}(C)$, и так как множество Y — измеримо, а $\nu(C \setminus Y) = 0$ в силу леммы 5.31, имеем

$$\nu(C) = \nu(Y \cap C) + \nu(C \setminus Y) = \nu(B).$$

По теореме 4.33, примененной к *-слабо сходящейся последовательности ν_{i_k}, получим

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_{i_k}(A) = \limsup_{k\to\infty} \nu_{i_k}(B) = \limsup_{k\to\infty} \nu_{i_k}(C) \leq \nu(C) = \nu(B) = \nu_Y(B) = \mu(A).$$

В силу все той же теоремы 4.33, заключаем, что $\mu_{i_k} \Rightarrow \mu$. □

Доказательство теоремы закончено. □

5.1.5 Полнота и пространство Прохорова

Теорема 5.33. *Пусть X — польское метрическое пространство. Тогда метрическое пространство $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ также является польским.*

Доказательство. По теореме 5.17, пространство $\mathcal{P}(X)$ сепарабельно. Таким образом, остается доказать его полноту.

Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность мер $(\mu_1, \mu_2, \ldots) \subset \mathcal{P}(X)$. По теореме 5.25, эта последовательность равномерно плотна. По теореме 5.28, эта последовательность предкомпактна в $\mathcal{P}(X)$, так что в ней существует сходящаяся подпоследовательность. Но тогда и вся последовательность сходится, что и доказывает полноту пространства $\mathcal{P}(X)$. □

5.1.6 Локально изометричное вложение метрического пространства в пространство вероятностных мер

Цель данного раздела — доказать следующий результат.

Теорема 5.34. *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Рассмотрим отображение $\delta\colon X \to \mathcal{P}(X)$ из метрического пространства X в метрическое пространство $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$: $\delta\colon x \mapsto \delta_x$, где δ_x — мера Дирака с центром в x. Тогда*

(1) *для любых $x, y \in X$ выполняется $d_P(\delta_x, \delta_y) = \min\big\{|xy|, 1\big\}$;*

(2) *отображение δ — топологическое вложение;*

(3) *множество $\delta(X)$ — замкнуто.*

Доказательство. (1) Пусть $|xy| \ge 1$. Мы должны показать, что $d_P(\delta_x, \delta_y) = 1$. Так как для любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполняется $\delta_x(A) \le 1 \le \delta_y\big(U_1(A)\big) + 1$, то $d_P(\delta_x, \delta_y) \le 1$. Покажем, что $d_P(\delta_x, \delta_y) \ge 1$. Предположим противное, тогда для некоторого $d < 1$ и каждого $A \in \mathcal{B}_X$ должно выполняться $\delta_x(A) \le \delta_y\big(U_d(A)\big) + d$. Положим $A = \{x\}$, тогда $U_d(A) \not\ni y$, так что $\delta_x(A) = 1$ и $\delta_y\big(U_d(A)\big) = 0$, поэтому неравенство не выполняется.

Пусть теперь $|xy| < 1$. Покажем, что $d_P(\delta_x, \delta_y) = |xy|$. Если $r < |xy|$, то для $A = \{x\}$ множество $U_r(A)$ не содержит y, поэтому $\delta_x(A) = 1$, $\delta_y\big(U_r(A)\big) = 0$, и неравенство $\delta_x(A) \le \delta_y\big(U_r(A)\big) + r$ не выполняется, поэтому $d_P(\delta_x, \delta_y) \ge |xy|$. Пусть переть $r > |xy|$. Если $x \notin A \in \mathcal{B}_X$, то неравенство $\delta_x(A) \le \delta_y\big(U_r(A)\big) + r$ очевидно выполняется. Если же $x \in A$, то $U_r(A) \supset U_r(x) \ni y$, поэтому $\delta_x(A) = 1$ и $\delta_y\big(U_r(A)\big) = 1$, так что предыдущее неравенство также выполняется. Следовательно, $d_P(\delta_x, \delta_y) \le |xy|$ и, значит, $d_P(\delta_x, \delta_y) = |xy|$.

(2) Так как при $x \ne y$ значения мер δ_x и δ_y на $\{x\} \in \mathcal{B}_X$ различаются, то $\delta_x \ne \delta_y$, поэтому отображение δ инъективно.

Далее, в силу пункта (1), отображение δ непрерывно. Покажем, что отображение $\delta^{-1}|_{\delta(X)}$ также непрерывно. Для этого достаточно проверить, что для каждых $x \in X$ и $r < 1$ в окрестность $U_r(x)$ не попадает ни одного $z = \delta^{-1}(\delta_z)$ такого, что $d_P(\delta_x, \delta_z) \ge r$ (если это доказать, то получим $U_r(x) = \delta^{-1}\big(U_r(\delta_x)\big)$, откуда и вытекает непрерывность обратного отображения). Но это так в силу того, что условие $d_P(\delta_x, \delta_z) \ge r$ влечет $|xz| \ge r$.

(3) Докажем теперь замкнутость образа $\delta(X)$. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in X$, для которой последовательность мер δ_{x_n} сходится в $\mathcal{P}(X)$ в некоторой мере μ. Мы должны показать, что μ имеет вид δ_x для некоторого $x \in X$. Если в последовательности x_n имеется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторому $x \in X$, то, в силу доказанной локальной изометричности отображения δ, меры $\delta_{x_{n_k}}$ сходятся к δ_x, откуда и вся последовательность δ_{x_k} сходится к δ_x.

Пусть теперь x_n не содержит сходящихся подпоследовательностей, в частности, каждая точка может встречаться в этой последовательности не более чем конечное число раз. Без ограничения общности, предположим, что все точки x_n различны. Положим $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда каждое подмножество S — замкнуто. По теореме 5.13, имеем $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$, поэтому, в силу теоремы 4.33, выполняется

$$\limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(C) \le \mu(C)$$

для всех подмножеств $C \subset S$. Обозначим через C_0 подмножество в S, составленное из всех точек x_n с четными номерами n, и пусть $C_1 = S \setminus C_0$. Тогда $\limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(S) = 1$ и $\limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(C_i) = 1$, поэтому $\mu(S) \ge 1$ и $\mu(C_i) \ge 1$, а так как μ — вероятностная мера, имеем $\mu(C_0) = \mu(C_1) = \mu(S) = 1$. Но $S = C_0 \sqcup C_1$, противоречие. $\square$

Из теоремы 5.34 вытекает, что предыдущие результаты о связи свойства метрического пространства и пространства вероятностных мер на нем можно превратить в критерии.

Следствие 5.35. *Пусть X — метрическое пространство и $\mathcal{P}(X)$ — соответствующее пространство Прохорова. Тогда $\mathcal{P}(X)$ — сепарабельное (компактное, польское), если и только если таким является X.*

Благодарности

Курс поддержан Фондом развития теоретической физики и математики БАЗИС.