Тема 4

Пространства с мерой.

Выше мы рассматривали пространства, наделенные σ-алгебрами. Теперь мы добавим в рассмотрение и некоторые функции на этих σ-алгебрах, называемые мерами. *Мерой на σ-алгебре* $\mathcal{A}$ называется функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ такая, что $\mu(\emptyset) = 0$ и для произвольной дизъюнктной последовательности $A_1, A_2, \ldots$ элементов из $\mathcal{A}$ выполняется

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Если из контекста ясно, какая σ-алгебра $\mathcal{A}$ выбрана на множестве X (например, X — топологическое пространство, и, значит, $\mathcal{A}$ — борелевская σ-алгебра), то мы говорим, что мера μ *задана на* X.

Мера μ на X называется

(1) *конечной*, если $\mu(X) < \infty$;

(2) *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$;

(3) *σ-конечной*, если $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, $X_i \in \mathcal{A}$ и $\mu(X_i) < \infty$ при всех i;

(4) *борелевской*, если X — топологическое пространство и μ определена на соответствующей борелевской σ-алгебре.

Пространством с мерой называется тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где $\mathcal{A}$ — некоторая σ-алгебра на X, а μ — мера на $\mathcal{A}$. Если μ — вероятностная мера, то $(X, \mathcal{A}, \mu)$ называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathcal{B})$ — измеримое пространство и $f\colon X \to Y$ — измеримое отображение. Определим отображение $f_*\mu\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ следующим образом: $(f_*\mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$. Легко проверяется, что $f_*\mu$ — мера на $\mathcal{B}$, которая называется *образом меры μ при отображении f.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерой. Эти пространства называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f\colon X \to Y$ измеримых пространства $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ такой, что $\nu = f_*\mu$. При этом f называется *изоморфизмом пространств с мерой.* Ниже мы приведем результаты Рохлина [17], полностью описывающие классы изоморфизма стандартных борелевских пространств, наделенных борелевскими мерами.

Пример 4.1. Тривиальными примерами меры является функция, тождественно равная нулю, а также функция, равная ∞ на каждом непустом множестве. Еще один стандартный пример меры сопоставляет каждому конечному измеримому множеству его мощность, а каждому бесконечному — символ ∞. Последняя мера называется *считающей*.

Пример 4.2. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Выберем некоторое $x \in X$ и зададим функцию $\delta_x \colon \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ так:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Легко проверяется, что δ_x — мера, которая называется *мерой Дира́ка с центром в x*.

В следующем упражнение формулируются хорошо известные фундаментальные свойства меры.

Упражнение 4.3. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Докажите следующие утверждения.

(1) **Монотонность**: если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \le \mu(B)$.

(2) **Счетная субаддитивность**: $\mu\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $(A_1, A_2, \ldots)$ измеримых множеств.

(3) **Непрерывность снизу**: пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — неубывающая последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая и

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(\cup A_i).$$

(4) **Непрерывность сверху**: пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — невозрастающая последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая. Если при этом $\mu(A_k) < \infty$ для некоторого k, то

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(\cap A_i).$$

(5) Предположим, что мера μ конечна, и пусть $(A_1, A_2, \ldots)$ — покрытие X измеримыми множествами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при всех $n \ge N$ выполняется $\mu\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) > \mu(X) - \varepsilon$. Последнее эквивалентно $\mu\big(X \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i\big) < \varepsilon$.

В действительности, в ряде случаев, чтобы задать меру на всей σ-алгебре, достаточно определить ее на некотором подмножестве σ-алгебры, а потом канонически распространить на всю σ-алгебру. В связи с этим нам будет удобно использовать несколько понятий и обозначений.

Обозначение 4.4. Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное семейство подмножеств множества X. Через $\sigma(\mathcal{P})$ будем обозначать наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{P}$.

Например, если (X, τ) — топологическое пространство, то $\sigma(\tau) = \mathcal{B}_\tau$.

Другим популярным семейством, используемым в этом контексте, является алгебра множеств. Напомним, что семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется *алгеброй*, если $\mathcal{A}$ содержит X, а также замкнуто относительно дополнений и конечных объединений (или конечных пересечений).

На алгебре $\mathcal{A}$ также определяется мера: это такая функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, что $\mu(\emptyset) = 0$ и для любой дизъюнктной последовательности $(A_1, A_2, \ldots)$ элементов из $\mathcal{A}$, удовлетворяющей условию $\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, выполняется

$$\mu(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Также на алгебры дословно переносятся данные выше определения конечной, вероятностной и σ-конечной мер.

Следующий стандартный результат будет нам полезен.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра на множестве X, и $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ — некоторая σ-конечная мера. Тогда существует и единственна мера $\nu\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$, продолжающая μ: $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$.*

Из теоремы 4.5 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 4.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра на множестве X, а μ_1 и μ_2 — некоторые σ-конечные меры на $\sigma(\mathcal{A})$, совпадающие на $\mathcal{A}$. Тогда $\mu_1 = \mu_2$.*

Пример 4.7. Пусть $X = \mathbb{R}$, и в качестве алгебры $\mathcal{A}$ возьмем семейство всевозможных конечных объединений полуинтервалов вида $(a, b]$, лучей вида $(-\infty, b]$ и лучей вида (a, ∞), где $a, b \in \mathbb{R}$. Определим функцию λ на этих полуинтервалах, положив $\lambda\big((a, b]\big) = b - a$, а на лучах зададим ее равной ∞. Продолжим λ по аддитивности на $\mathcal{A}$, тогда λ будет мерой на $\mathcal{A}$ (проверьте). Легко видеть, что все элементы из $\mathcal{A}$ — борелевские подмножества прямой $\mathbb{R}$, и что $\sigma(\mathcal{A})$ содержит все открытые множества, поэтому $\sigma(\mathcal{A})$ совпадает с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Продолжение меры λ на $\sigma(\mathcal{A})$, существующее и единственное в силу теоремы 4.5, называется *мерой Лебега*. Ясно, что мера Лебега инвариантна относительно движений прямой. Кроме того, если $A \subset \mathbb{R}$ — борелевское подмножество, то ограничение меры λ на A также будем называть *мерой Лебега на* A. В частности, так получается мера Лебега на стандартном отрезке $I = [0, 1]$. В дальнейшем мы, как правило, будем обозначать меру Лебега через λ. Отметим, что в качестве алгебры $\mathcal{A}$ можно взять и многие другие семейства, например, полуинтервалы $(a, b]$ можно заменить на $[a, b)$, а в качестве лучей взять $(-\infty, b)$ и $[a, \infty)$. При этом, описанная выше конструкция приведет к той же борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ и той же мере Лебега λ.

Пример 4.8. Пусть $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ — канторов дисконтинуум. Легко видеть, что при построении $\mathcal{C}$ мы на n-ом шаге выбрасываем из $[0, 1]$ конечное дизъюнктное семейство интервалов суммарной длины $2^{n-1}/3^n$. Таким образом, сумма длин всех выброшенных интервалов равна $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}/3^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1-2/3} = 1$, так что, в силу σ-аддитивности меры Лебега λ, имеем $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.

4.1 Атомы и обобщенная мера Дирака

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная σ-алгебра на множестве X. *Атомом σ-алгебры* $\mathcal{A}$ называется такое непустое множество $A \in \mathcal{A}$, которое не содержит отличных от пустого множества и от самого A подмножеств $B \in \mathcal{A}$. Возможно, более удачным был бы термин неделимый элемент σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть теперь $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой.

Определение 4.9. Измеримое множество $A \in \mathcal{A}$ назовем *p-атомом для меры* μ, если A — атом σ-алгебры $\mathcal{A}$, имеющий положительную меру, $\mu(A) > 0$.

Отметим, что p-атом можно определить и следующим эквивалентным образом: множество $A \in \mathcal{A}$ назовем *p-атомом меры* μ, если для каждого измеримого $B \subset A$, $B \neq A$, имеем $\mu(B) = 0$. Следующий результат очевиден.

Предложение 4.10. *Каждое измеримое подмножество, пересекающее p-атом, содержит этот p-атом, поэтому разные p-атомы пересекаться не могут. У борелевской меры на топологическом пространстве, в котором все одноточечные подмножества замкнуты, каждый p-атом состоит ровно из одной точки.*

Упражнение 4.11. Покажите, что каждая σ-конечная мера содержит не более чем счетное число p-атомов.

Замечание 4.12. Приведем близкое понятие — классическое определение атома меры, см. например [11]. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Измеримое подмножество $A \in \mathcal{A}$ называется *атомом меры* μ, если $\mu(A) > 0$, и мера $\mu(B)$ каждого измеримого $B \subset A$ или равна 0, или $\mu(A)$.

Приведем пример, демонстрирующий отличие понятий атома σ-алгебры, p-атома и атома меры.

Пример 4.13. Пусть X — несчетное множество, а σ-алгебра $\mathcal{A}$ на X состоит из всех не более чем счетных подмножеств X и всех их дополнений. В качестве меры μ рассмотрим отображение $\mu\colon \mathcal{A} \to \{0, 1\}$, для которого $\mu(A) = 1$, если и только если $A \in \mathcal{A}$ — несчетно. Тогда атомами меры μ являются всевозможные измеримые несчетные подмножества X; p-атомов мера μ не содержит; наконец, атомы σ-алгебры $\mathcal{A}$ — это все одноточечные подмножества X.

Упражнение 4.14. Верно ли, что множество атомов σ-алгебры на множестве X является дизъюнктным покрытием X? (Известно, что для σ-алгебр, порожденных счетными семействами, ответ положительный, см. например [3]. А что можно сказать про общие σ-алгебры?)

Пример 4.15. Обобщим меру Дирака, выбрав в σ-алгебре $\mathcal{A}$ произвольный атом A, и для $B \in \mathcal{A}$ положим $\mu(B) = 1$, если $B \supset A$, и $\mu(B) = 0$ иначе. Эту меру будем обозначать через δ_A и называть *мерой Дирака с центром в* A. Ясно, что A является единственным p-атомом меры δ_A, хотя атомов мера δ_A может содержать много: к ним относятся все множества $B \in \mathcal{A}$, содержащие A.

Пример 4.16. Пусть μ и ν — меры на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, и a, b — неотрицательные вещественные числа. Тогда $a\mu + b\nu$ — мера на $(X, \mathcal{A})$.

Пусть μ и ν — меры на измеримом пространства $(X, \mathcal{A})$. Будем говорить, что *мера μ не превосходит меры ν* и писать $\mu \le \nu$, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $\mu(A) \le \nu(A)$.

Упражнение 4.17. Пусть μ и ν — меры на измеримом пространства $(X, \mathcal{A})$, причем $\mu \le \nu$ и мера μ конечна. Покажите, что функция $(\nu - \mu)\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ является мерой.

Ниже мы будем использовать суммирования любого, не обязательного не более чем счетного семейства неотрицательных чисел. Напомним соответствующее определение. Пусть $\{c_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — произвольное семейство неотрицательных чисел. Тогда точную верхнюю грань сумм $\sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma$ по всем конечным подмножествам Δ семейства индексов Γ назовем *суммой этого семейства* и будем обозначать через $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma$.

Упражнение 4.18. Покажите, что если семейство $\{c_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ содержит несчетное число ненулевых слагаемых, то $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma = \infty$.

Предложение 4.19. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство всех p-атомов для μ. Положим $\mu_\gamma := \mu(A_\gamma)$ и предположим, что $\sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma < \infty$. Тогда $\nu := \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma \delta_{A_\gamma}$ — конечная мера на $\mathcal{A}$, причем $\nu \le \mu$, поэтому функция $\mu - \nu$ также является мерой на $\mathcal{A}$. Более того, мера $\mu - \nu$ не содержит p-атомов.*

Доказательство. Ясно, что $\nu(\emptyset) = 0$. Проверим σ-аддитивность. Так как все μ_γ положительны и $\sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma < \infty$, множество Γ, в силу упражнения 4.18, содержит не более чем счетное число элементов. Теперь σ-аддитивность функции ν вытекает из σ-аддитивности всех δ_{A_γ} и из обычной коммутативности сложения. Таким образом, мы показали, что ν — мера. Так как $\nu(X) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma < \infty$, то мера ν — конечна.

Покажем теперь, что $\nu \le \mu$. Выберем произвольное $B \in \mathcal{A}$, тогда если $\mu(B) = \infty$, то $\nu(B) \le \mu(B)$. Пусть теперь $\mu(B) < \infty$. Обозначим через Γ_B множество всех $\gamma \in \Gamma$ таких, что $A_\gamma \subset B$, и положим $A = \cup_{\gamma\in\Gamma_B} A_\gamma$. Так как множество $\Gamma_B \subset \Gamma$ не более чем счетно, то, в силу σ-аддитивности меры, выполняется

$$\nu(B) = \nu(B \setminus A) + \nu(A) = \nu(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma \delta_{A_\gamma}(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma_B} \mu_\gamma \delta_{A_\gamma}(A) =$$
$$= \sum_{\gamma\in\Gamma_B} \mu_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma_B} \mu(A_\gamma) = \mu(A) \le \mu(B),$$

что и требовалось.

Сказанное выше, вместе с упражнением 4.17, показывает, что функция $\mu - \nu$ является мерой. Нам осталось проверить, что мера $\mu - \nu$ не содержит p-атомов. Так как $\mu(A_\gamma) = \mu_\gamma = \nu(A_\gamma)$ при каждом $\gamma \in \Gamma$, то A_γ не являются p-атомами меры $\mu - \nu$. Предположим, что у меры $\mu - \nu$ имеется p-атом $A \in \mathcal{A}$, отличный от всех A_γ. Тогда A не пересекает $\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\alpha$, так как A не содержит собственных измеримых подмножеств в силу предложения 4.10, поэтому $\nu(A) = 0$, так что $\mu(A) > 0$ и A не содержит непустых измеримых подмножеств, т.е. A — p-атом μ, противоречие. □

Замечание 4.20. В [26] приводится теорема, аналогичная предложению 4.19, утверждающая, что каждая конечная мера на множестве X единственным образом раскладывается в сумму мер, одна из которых не содержит атомов, а другая является *чисто* *атомной* в том смысле, что X представимо в виде не более чем счетного объединения атомов. Отметим, что мера из примера 4.13 является чисто атомной, но она не имеет ни одного p-атома.

Меру μ, не имеющую p-атомов, назовем *непрерывной.*

Следствие 4.21. *Пусть X — топологическое пространство, в котором все одноточечные подмножества замкнуты, и μ — конечная борелевская мера на X. Тогда существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ точек в X и последовательность неотрицательных чисел $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$, такие, что $\mu - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \delta_{x_i}$ — непрерывная конечная мера на X. Если X бесконечно, то последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ можно выбрать состоящей из различных точек (мы допускаем нулевые μ_i).*

Замечание 4.22. Если X — топологическое пространство, в котором все одноточечные подмножества замкнуты, и $\mu\colon \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ — непрерывная борелевская мера, причем $\mu(X) > 0$, то X — несчетно, так как иначе, в силу σ-аддитивности меры, мы бы имели $\mu(X) = 0$. Если при этом $(X, \mathcal{B}_X)$ — стандартное борелевское пространство, то, в силу теоремы 3.30, X борелевски изоморфно отрезку I.

4.2 Функция распределения

При изучении борелевских мер на прямой или на отрезке бывает полезно ввести в рассмотрение специальные измеримые функции, которые эти меры порождают. Мы проделаем соответствующие построения для нужного нам в дальнейшем случая отрезка I.

Пусть μ — конечная борелевская мера на отрезке $I = [0, 1]$. Определим *функцию распределения* $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ *меры* μ, положив $F(x) = \mu\bigl([0, x]\bigr)$. Ясно, что функция F — неубывающая.

Предложение 4.23. *Функция распределения F меры μ непрерывна справа. Более того, μ — непрерывная мера, если и только если F — непрерывная функция.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $x \in [0, 1)$ и покажем, что F непрерывна в x справа. Положим $a_k = x + (1 - x)/k$, $A_k = (a_{k+1}, a_k]$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что A_k — непересекающиеся полуинтервалы, причем $(x, a_n] = \sqcup_{k=n}^{\infty} A_k$, откуда $\mu\bigl((x, 1]\bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что

$$F(a_n) - F(x) = \mu\bigl([0, a_n]\bigr) - \mu\bigl([0, x]\bigr) = \mu\bigl((x, a_n]\bigr) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon,$$

откуда, в силу монотонности функции F, вытекает ее непрерывность справа.

Докажем теперь вторую часть предложения. Пусть сначала μ — непрерывная мера. Это означает, что для каждого $x \in [0, 1]$ выполняется $\mu\bigl(\{x\}\bigr) = 0$. Достаточно показать, что в каждом $x \in (0, 1]$ функция F непрерывна слева. Положим $b_k = x - x/k$, $B_k = (b_k, b_{k+1}]$, тогда семейство полуинтервалов B_k дизъюнктно, и $(b_n, x) = \sqcup_{k=n}^{\infty} B_k$, откуда

$\mu\big((0,x)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) < \infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что

$$\begin{aligned}(4.1)\quad F(x) - F(b_n) = \mu\big([0,x]\big) - \mu([0,b_n]\big) = \mu\big((b_n,x]\big) = \\ = \mu\big(\{x\}\big) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) < \varepsilon,\end{aligned}$$

а это, с учетом монотонности F, влечет непрерывность F слева.

Обратно, если функция F непрерывна, то она непрерывна слева в каждой точке $x \in (0,1]$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $F(x) - F(b_n) < \varepsilon$, но, в силу цепочки соотношений (4.1), этого не может быть, если $\mu\big(\{x\}\big) > 0$. □

Предложение 4.24. *Пусть μ — непрерывная конечная борелевская мера на отрезке $I = [0,1]$ и F — функция распределения меры μ. Тогда $F_*\mu = \lambda$, где λ — мера Лебега.*

Доказательство. По предложению 4.23, функция F непрерывна. Кроме того, F — монотонная, $F(0) = 0$ и $F(1) = \mu(I) =: a$, поэтому $F(I) = [0,a]$, и для любого $x \in [0,a]$ множество $F^{-1}(x)$ является связным и замкнутым подмножеством отрезка I, т.е. само является отрезком.

Пусть сначала $a = 0$, тогда $\mu(I) = 0$, так что $\mu = 0$, откуда $F_*\mu = 0$. С другой стороны, мера Лебега на одноточечном множестве также тождественно равна нулю, так что в этом случае $F_*\mu = \lambda$.

Пусть теперь $a > 0$. Выберем произвольный полуинтервал $(\alpha,\beta] \subset [0,a]$, тогда $F^{-1}(\alpha) = [\alpha_1,\alpha_2]$, $F^{-1}(\beta) = [\beta_1,\beta_2]$ и поэтому $F^{-1}\big((\alpha,\beta]\big) = (\alpha_2,\beta_2]$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(F_*\mu)\big((\alpha,\beta]\big) = \mu\Big(F^{-1}\big((\alpha,\beta]\big)\Big) = \\ = \mu\big((\alpha_2,\beta_2]\big) = \mu\big([0,\beta_2]\big) - \mu\big([0,\alpha_2]\big) = F(\beta_2) - F(\alpha_2) = \beta - \alpha,\end{aligned}$$

поэтому $F_*\mu$ совпадает с мерой Лебега λ на всех полуинтервалах $(\alpha,\beta]$.

Далее, выясним, чему равно значение меры $F_*\mu$ на $\{0\}$. Так как $F(0) = 0$, то $F^{-1}(0) = [0,\alpha]$, откуда

$$(F_*\mu)\big(\{0\}\big) = \mu\big(F^{-1}(0)\big) = \mu\big([0,\alpha]\big) = F(\alpha) = 0 = \lambda\big(\{0\}\big),$$

так что и здесь обе меры совпадают. Так как обе меры аддитивны, они также совпадают и на конечных дизъюнктных объединениях рассмотренных выше полуинтервалов и одноточечного множества $\{0\}$. Заметим, что семейство всех таких объединений образует алгебру $\mathcal{A}$ на отрезке I, причем $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_I$. Кроме того, легко видеть, что $\sigma(\mathcal{A})$ содержит все открытые подмножества отрезка I (проверьте), поэтому $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_I$ и, в силу следствия 4.6, получаем $F_*\mu = \lambda$. □

4.3 Теорема об изоморфизме пространств с мерой

Здесь мы приведем результаты Рохлина [17], описывающие классы изоморфизма стандартных борелевских пространств, наделенных борелевскими мерами.

Теорема 4.25. *Пусть X — стандартное борелевское пространство и μ — непрерывная конечная борелевская мера на X. Предположим, что $a := \mu(X) > 0$. Тогда пространство $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ изоморфно $(I, \mathcal{B}_I, a\lambda)$, где $I = [0,1]$ и λ — мера Лебега.*

Доказательство. Заметим сначала, что если пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ изоморфны, то для любого $c \geq 0$ изоморфны пространства $(X, \mathcal{A}, c\mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, c\nu)$. Таким образом, достаточно показать, что пространство $(X, \mathcal{B}_X, \mu/a)$ изоморфно $(I, \mathcal{B}_I, \lambda)$. Иными словами, достаточно доказать теорему для случая вероятностных мер μ.

Итак, пусть $a = \mu(X) = 1$. Так как мера μ конечна, не имеет p-атомов и $\mu(X) > 0$, то, в силу замечания 4.22, измеримое пространство $(X, \mathcal{B}_X)$ борелевски изоморфно $(I, \mathcal{B}_I)$. Таким образом, будем сразу считать, что мера μ задана на I.

Обозначим через F функцию распределения меры μ, тогда $F(I) = [0,1] = I$. Положим

$$N = \big\{ y \in I : \#F^{-1}(y) > 1 \big\}.$$

Так как F монотонна, то N — не более чем счетно.

Если $N = \emptyset$, то F — гомеоморфизм и, в силу предложения 3.4, F — борелевский изоморфизм. Кроме того, по предложению 4.24, имеем $\lambda = F_*\mu$, поэтому F — изоморфизм пространств с мерой $(I, \mathcal{B}_I, \mu)$ и $\big(I, \mathcal{B}_I, \lambda\big)$.

Пусть теперь $N \neq \emptyset$. Положим $M = \mathcal{C} \setminus N$, где $\mathcal{C} \subset I$ — канторов дисконтинуум, тогда M — несчетное борелевское подмножество отрезка I. Так как F однозначно на $F^{-1}(I \setminus N)$, то $F^{-1}(M)$ — несчетно. Положим $Q = M \cup N = \mathcal{C} \cup N$, тогда и $P := F^{-1}(Q)$ — несчетное борелевское подмножество отрезка и, значит, — несчетное стандартное борелевское пространство.

В силу примера 4.8, выполняется $\lambda(\mathcal{C}) = 0$. Кроме того, так как N не более чем счетно, то $\lambda(N) = 0$, откуда $\lambda(Q) = 0$. По предложению 4.24, имеем $\lambda = F_*\mu$, поэтому

$$\mu(P) = \mu\big(F^{-1}(Q)\big) = (F_*\mu)(Q) = \lambda(Q) = 0.$$

По теореме 3.30, существует борелевский изоморфизм $g \colon P \to Q$. Так как $\mu(P) = \lambda(Q) = 0$, то g является также изоморфизмом пространств с мерой $(P, \mathcal{B}_P, \mu)$ и $(Q, \mathcal{B}_Q, \lambda)$.

С другой стороны, ограничение F на $I \setminus P$ является гомеоморфизмом с $I \setminus Q$ (докажите), поэтому это ограничение, в силу предложения 3.4, — борелевский изоморфизм. Вспоминая, что $\lambda = F_*\mu$, заключаем: отображение $F|_{I \setminus P}$ является изоморфизмом пространств с мерой $(I \setminus P, \mathcal{B}_{I \setminus P}, \mu)$ и $(I \setminus Q, \mathcal{B}_{I \setminus Q}, \lambda)$.

Положим

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in P, \\ F(x), & \text{если } x \in I \setminus P. \end{cases}$$

Из сказанного выше вытекает, что h — изоморфизм пространств с мерой $(I, \mathcal{B}_I, \mu)$ и $(I, \mathcal{B}_I, \lambda)$, что и завершает доказательство. □

Следствие 4.26. *Пусть X — стандартное борелевское пространство и μ — произвольная конечная борелевская мера на X. Положим $a = \mu(X)$.*

(1) *Если X — не более чем счетно, то*

$$\mu = \sum_{x \in X} \mu_x \delta_x,$$

где μ_x — неотрицательные числа такие, что $\sum_{x\in X}\mu_x = a$.

(2) *Если X — несчетно, то пространство с мерой $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ изоморфно $(I, \mathcal{B}_I, \nu)$, где*

$$\nu = b\,\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \delta_{y_n}$$

для некоторых $b \geq 0$, последовательности $(y_1, y_2, \ldots)$ различных точек отрезка I, и последовательности $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ неотрицательных чисел, удовлетворяющей $b + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = a$.

Доказательство. Если X не более чем счетно, то результат вытекает из σ-аддитивности меры.

Пусть теперь X несчетно, тогда, в силу теоремы 3.30, пространства X и I борелевски изоморфны. Если $a = 0$, то положим $b = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = 0$.

Пусть теперь $a > 0$. В силу следствия 4.21, для некоторой последовательности $(x_1, x_2, \ldots)$ различных точек пространства X и последовательности $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ неотрицательных чисел такой, что $\sum_n \mu_n < \infty$, функция $\nu := \mu - \sum_n \mu_n \delta_{x_n}$ является непрерывной мерой на X.

Если $\nu = 0$, то снова воспользуемся теоремой 3.30, построим борелевский изоморфизм $f\colon X \to I$ и положим $b = 0$, $y_n = f(x_n)$.

Если же $\nu \neq 0$, то, в силу теоремы 4.25, существует борелевский изоморфизм $f\colon X \to I$, при котором $f_*\nu = b\,\lambda$, где λ — мера Лебега на I и $b = \nu(X) > 0$. Так как борелевский изоморфизм сохраняет как линейные комбинации, так и меры Дирака, имеем $f_*\mu = b\,\lambda + \sum_n \mu_n \delta_{y_n}$, где $y_n = f(x_n)$, что и требовалось. □

4.4 Некоторые напоминания

В этом разделе мы приведем ряд нужных нам фактов из общей теории меры. Напомним, что все меры, рассматриваемые на топологических, в частности, на метрических пространствах предполагаются борелевскими. Детали см. в [12].

Теорема 4.27. *Каждая конечная мера μ на метрическом пространстве X удовлетворяет следующему условию: для любого $A \in \mathcal{B}_X$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутое $F \subset X$ и открытое $G \subset X$, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$. Иными словами,*

$$\mu(A) = \sup\bigl\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ — замкнуто в } X\bigr\},$$
$$\mu(A) = \inf\bigl\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ — открыто в } X\bigr\}.$$

Следствие 4.28. *Конечные меры λ, μ на метрическом пространстве X совпадают, если и только если $\lambda(A) = \mu(A)$ для всех замкнутых (всех открытых) множеств $A \subset X$.*

Пусть X — топологическое пространство и μ — мера на нем. *Носителем* $\operatorname{supp}\mu$ *меры* μ называется множество всех $x \in X$, у которых каждая окрестность имеет ненулевую меру.

Ясно, что если $x \in X \setminus \operatorname{supp}\mu$, то у точки x есть окрестность U нулевой меры. Но тогда и все точки из U также не лежат в $\operatorname{supp}\mu$. Таким образом, $\operatorname{supp}\mu$ — замкнутое подмножество X.

Упражнение 4.29. Покажите, что носитель конечной линейной комбинации мер с положительными коэффициентами равен объединению носителей этих мер.

Упражнение 4.30. Покажите, что носитель ненулевой меры на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве всегда непуст.

Упражнение 4.31. Приведите пример ненулевой меры на топологическом пространстве, у которой носитель пустой.

Теорема 4.32. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и μ — конечная мера на X. Тогда носитель $\operatorname{supp}\mu$ меры μ — единственно замкнутое подмножество в X, удовлетворяющее следующим свойствам*:

(1) $\mu(\operatorname{supp}\mu) = \mu(X)$,

(2) *если $F \subset X$ — замкнутое, причем $\mu(F) = \mu(X)$, то $\operatorname{supp}\mu \subset F$.*

4.4.1 *-слабая сходимость мер

Пусть X — метрическое пространство и $C_b(X)$ — нормированное векторное пространство всех непрерывных ограниченных функций на X, где в качестве нормы выбрана $\|f\| = \sup_{x\in X}\big|f(x)\big|$. Хорошо известно, что пространство $C_b(X)$ — банахово. Каждая конечная мера μ на X задает непрерывный линейный функционал на $C_b(X)$ по формуле

$$\mu(f) = \int_X f\,d\mu,$$

где в правой части равенства стоит интеграл Лебега.

Последовательность $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ конечных мер на X называется **-слабо сходящейся к конечной мере μ на X* и этот факт обозначается через $\mu_i \Rightarrow \mu$, если для каждой функции $f \in C_b(X)$ выполняется $\mu_n(f) \to \mu(f)$ при $n \to \infty$.

Следующий результат принято называть теоремой Портманто (краткий исторический обзор см. в [15]). Чтобы его сформулировать, введем еще пару понятий.

Пусть X — метрическое пространство. Через $C_{ub}(X)$ обозначим подпространство в $C_b(X)$, состоящее из равномерно непрерывных ограниченных функций.

Пусть μ — мера на X, и A — произвольное подмножество X. Напомним, что через $\bar A$, $\operatorname{Int} A$ и ∂A мы обозначаем замыкание, внутренность и границу множества A. Так как замкнутые и открытые множества измеримы, и $\partial A = \bar A \setminus \operatorname{Int} A$, то ∂A измеримо не зависимо от измеримости A. Измеримое множество $A \subset X$ называется *μ-непрерывным*, если $\mu(\partial A) = 0$.

Теорема 4.33 (“Portmanteau”, А.Д.Александров [18])**.** *Пусть X — произвольное метрическое пространство, а μ_n, $n \in \mathbb{N}$, и μ — вероятностные меры на X. Тогда следующие пять условий эквивалентны*:

(1) $\mu_n \Rightarrow \mu$;

(2) $\mu_n(f) \to \mu(f)$ *для всех* $f \in C_{ub}(X)$;

(3) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F)$ *для всех замкнутых множеств* $F \subset X$;

(4) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G)$ *для всех открытых множеств* $G \subset X$;

(5) $\mu_n(A) \to \mu(A)$ *для всех* μ*-непрерывных множеств* $A \subset X$.

4.4.2 Меры и функционалы: теорема Рисса

В разделе 4.4.1 мы использовали интеграл Лебега по конечной мере, определенной на метрическом пространстве X, чтобы определить непрерывный линейный функционал на пространстве $C_b(X)$ всех ограниченных непрерывных функций. Ясно, что если функция $f \in C_b(X)$ всюду неотрицательна, то $\mu(f) \ge 0$. Непрерывный линейный функционал $\varphi\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ называется *неотрицательным*, если для любой $f \in C_b(X)$, $f \ge 0$, выполняется $\varphi(f) \ge 0$. Итак, каждая конечная мера μ на X может быть представлена в виде неотрицательного линейного функционала на $C_b(X)$. Если пространство X достаточно хорошее, то верно и обратное утверждение.

Мы приведем соответствующий результат для компактного X. Кроме того, для полноты картины, мы введем в рассмотрение обобщение понятия меры, а именно, знакопеременную меру, которая определяется так же, как и мера, но без условия неотрицательности. Мы не будем излагать соответствующую теорию в общем виде, а определим знакопеременную меру в интересующем нас случае конечных мер эквивалентным образом: назовем *конечной знакопеременной мерой на измеримом пространстве* $(Z, \mathcal{A})$ функцию $\xi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, равную разности двух конечных мер μ и ν на $\mathcal{A}$: $\xi = \mu - \nu$. Отметим, что такое представление меры ξ не единственно, так как для любой конечной меры λ на $\mathcal{A}$ мы можем заменить μ и ν на $\mu' = \mu + \lambda$ и $\nu = \nu' + \lambda$, тогда $\xi - \mu' - \nu'$. Среди всех таких представлений выделяется особое, которое описывается теоремой Хана (см. подробности в [11]).

Конечные знакопеременные меры на измеримом пространстве $(Z, \mathcal{A})$ образуют векторное пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{S}(Z)$. На этом пространстве вводится норма следующим образом:

$$\|\xi\| = \|\mu - \nu\| = \sup_{A \in \mathcal{A}} \bigl|\mu(A) - \nu(A)\bigr|.$$

Определенная только что норма называется *полной вариацией знакопеременной меры* ξ. Отметим, что для обычной (неотрицательной) конечной меры μ на измеримом пространстве $(Z, \mathcal{A})$ ее полная вариация $\|\mu\|$ равна $\mu(Z)$ в силу монотонности меры. Для обычных мер полная вариация естественно определяется и без предположения о конечности меры.

Пусть X — метрическое пространство, тогда каждая конечная знакопеременная мера $\xi = \mu - \nu \in \mathcal{S}(X)$ задает непрерывный линейный функционал на $C_b(X)$:

$$\xi(f) = \int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu. \tag{4.2}$$

Далее, рассмотрим нормированное линейное пространство V и двойственное пространство V^* непрерывных линейных функционалов на V. Напомним, что норма $\|\cdot\|$

пространства V порождает двойственную норму на V^*:

$$\|\varphi\| = \sup\Big\{\big|\varphi(v)\big| : v \in V,\ \|v\| \le 1\Big\}.$$

Хорошо известно, что двойственное пространство V^* с рассмотренной только что нормой является банаховым, в частности, банаховым является и пространство $C_b(X)^*$.

Напомним также, что изоморфизм нормированных пространств, сохраняющий норму, называется *изометрическим изоморфизмом*, так как он сохраняет метрики, порожденные нормами. Детали относительно следующей теоремы можно найти, например, в [21] или [24].

Теорема 4.34 (Рисса–Маркова–Какутани)**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда*

(1) *отображение $\Psi\colon \mathcal{S}(X) \to C(X)^*$ нормированных пространств, сопоставляющее каждой конечной знакопеременной норме ξ непрерывный линейный функционал $\xi\colon C(X) \to \mathbb{R}$, определенный формулой* (4.2)*, является изометричным изоморфизмом*;

(2) *функционал $\varphi \in C(X)^*$ является образом конечной меры, если и только если φ — неотрицательный.*

В частности, функционал $\varphi \in C(X)^*$ является образом вероятностной меры, если и только если φ — неотрицательный и $\varphi(1) = 1$, где через 1 мы обозначили постоянное отображение $1\colon X \to \mathbb{R}$, переводящее X в 1.

Замечание 4.35. Теорема 4.34 имеет различные обобщения. Например, ее вариант [24], называемый теоремой Александрова–Маркова, имеет место для нормального топологического пространства X. При этом, как оказывается, счетно-аддитивных мер уже не достаточно, и приходится рассматривать конечно-аддитивные меры. Кроме того, при замене метрического пространства на топологическое требуется добавить еще и условие регулярности меры, т.е. возможности сколько угодно точного приближения ее значений на измеримых множествах A значениями на содержащихся в A замкнутых множествах и содержащих A открытых множеств. Также можно обобщить 4.34 и на произвольные топологические пространства (теорема Александрова, см.[24]).

4.4.3 Теорема Банаха–Ала́оглу

Выше мы определили *-слабую сходимость линейных функционалов как поточечную сходимость. Для дальнейшего изучения этой сходимости мы напомним, как можно естественно определить топологию, в которой сходимость означает *-слабую сходимость.

Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — некоторое семейство отображений из X в топологическое пространство Y с топологией τ_Y. Каждое $x \in X$ задает отображение $x\colon \mathcal{F} \to Y$ естественным образом: $x(f_\alpha) = f_\alpha(x)$. Для каждого $x \in X$ семейство $x^{-1}(\tau_Y)$ образует топологию на $\mathcal{F}$, причем из всех топологий на $\mathcal{F}$, для которых отображение x непрерывно, топология $x^{-1}(\tau_Y)$ — наименьшая. Пусть τ — наименьшая топология на $\mathcal{F}$, содержащая все топологии $x^{-1}(\tau_Y)$, т.е. τ —

наименьшая топология, для которой все отображения $x \in X$ непрерывны. Ясно, что предбаза топологии τ состоит из элементов $x^{-1}(U)$, где $U \in \tau_Y$ и $x \in X$; элементы соответствующей базы представляют собой все возможные конечные пересечения вида $\cap_{k=1}^n x_k^{-1}(U_k)$, $U_k \in \tau_Y$ и $x_k \in X$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Построенная топология τ называется **-слабой.*

Приведем один важный технический результат.

Предложение 4.36. *Пусть X — произвольное множество, Y — топологическое пространство, $\mathcal{F} = \{f_\alpha \colon X \to Y\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — некоторое семейство отображений, и $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Тогда топология, индуцированная на $\mathcal{G}$ из *-слабой топологии на $\mathcal{F}$, совпадает со *-слабой топологией, определенной непосредственно на $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Пусть $V \subset \mathcal{G}$ — открытое множество в индуцированной из $\mathcal{F}$ топологии, тогда существует такое открытое в $\mathcal{F}$ множество W, что $V = W \cap \mathcal{G}$. В силу того, как выглядит база *-слабой топологии, см. выше, критерий открытости множества W состоит в том, что вместе с каждой точкой f это множество содержит $U = \cap_{k=1}^n x_k^{-1}(U_k) \ni f$, где $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы X, а U_k — некоторые открытые множества в Y. По определению,

$$U = \big\{f_\alpha \in \mathcal{F} : f_\alpha(x_k) \in U_k,\, k = 1, \ldots, n\big\}.$$

Но тогда $V = W \cap \mathcal{G}$ содержит

$$U \cap \mathcal{G} = \big\{f_\alpha \in \mathcal{G} : f_\alpha(x_k) \in U_k,\, k = 1, \ldots, n\big\},$$

а последнее множество входит в базу *-слабой топологии на $\mathcal{G}$, поэтому, в силу произвольности выбора $f \in V$, множество V открыто в *-слабой топологии на $\mathcal{G}$. $\square$

Упражнение 4.37. Докажите, что последовательность $(f_1, f_2, \ldots) \subset \mathcal{F}$ сходится в топологии τ к некоторой функции $f \in \mathcal{F}$, $f_i \to f$, тогда и только тогда, когда отображения f_i сходятся к f поточечно, т.е. для каждого $x \in X$ выполняется $f_i(x) \to f(x)$.

Пример 4.38. Пусть V — линейное нормированное пространство, тогда каждое $v \in V$ можно представить как линейное отображение на V^*: $v(\varphi) := \varphi(v)$ для всех $\varphi \in V^*$. Таким образом, определяется **-слабая топология на V^**. По упражнению 4.37, сходимость $\varphi_i \to \varphi$, $\varphi_i, \varphi \in V^*$, в *-слабой топологии — это поточечная сходимость функционалов φ_i к функционалу φ.

Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [21].

Теорема 4.39 (Банах–Ала́оглу)**.** *Пусть V — произвольное банахово пространство, и $B^* \subset V^*$ — шар с центром в нуле и радиусом* 1 *относительно двойственной нормы. Тогда шар B^* компактен в $*$-слабой топологии.*

Следствие 4.40. *Для любого метрического пространства X, пусть*

$$B^* = \big\{\varphi \in C_b(X)^* : \|\varphi\| \le 1\big\}$$

*— единичный шар в $C_b(X)^*$ относительно двойственной нормы. Тогда B^* компактен в *-слабой топологии.*

В случае общих топологических пространств компактность не влечет существование сходящихся подпоследовательностей в любой последовательности (секвенциальная компактность). Если же пространство метрическое, то компактность и секвенциальная компактность равносильны. Это — одна из причин важности следующего результата (доказательство см. например в [21] или [22]).

Теорема 4.41. *Пусть V — банахово пространство, и $B^* \subset V^*$ — шар с центром в нуле и радиусом 1 относительно двойственной нормы. Тогда *-слабая топология на B^* метризуема, если и только если пространство V — сепарабельно.*

Доказательство следующей теоремы можно найти в [19].

Теорема 4.42 (Стоун–Вейерштрасс). *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда пространство $C(X)$ — сепарабельно.*

Следствие 4.43. *Пусть X — компактное метрическое пространство, и $B^* \subset C(X)^*$ — шар с центром в нуле и радиусом 1 относительно двойственной нормы. Тогда шар B^*, наделенный *-слабой топологией, — метризуемый компакт.*