Тема 3

Борелевские множества и пространства.

Напомним, что множество X, для которого задана некоторая σ-алгебра $\mathcal{A}_X$, называется *измеримым пространством.* Иногда бывает удобно записывать измеримое пространство в виде $(X, \mathcal{A}_X)$. Если $Y \subset X$ — произвольное подмножество измеримого пространства $(X, \mathcal{A}_X)$, то на Y естественным образом определяется σ-алгебра

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}_X\},$$

называемая *индуцированной.* Отображение $f\colon X \to Y$ измеримого пространства $(X, \mathcal{A}_X)$ в измеримое пространство $(Y, \mathcal{A}_Y)$ называется *измеримым*, если для любого $A \in \mathcal{A}_Y$ выполняется $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$ (*прообраз измеримого множества измерим*, сравните с определением непрерывного отображения топологических пространств). *Измеримым вложением* одного измеримого пространства в другое назовем измеримую инъекцию, для которой образ каждого измеримого множества также измерим в объемлющем пространстве (а не в образе). Биективное отображение измеримых пространств, измеримое вместе со своим обратным, называется *изоморфизмом* измеримых пространств.

Замечание 3.1. Отметим, что изоморфизм с образом, вообще говоря, не является измеримым вложением. Например, отображение включения неизмеримого множества не переводит измеримые множества в измеримые (в объемлющем пространстве). Изоморфизм с образом будет измеримым вложением, если и только если образ — измеримое подмножество объемлющего пространства.

Идея доказательства следующей теоремы взята из [3].

Теорема 3.2. *Пусть X и Y — измеримые пространства, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ — измеримые вложения. Тогда X и Y измеримо изоморфны.*

Доказательство. Применим конструкцию из доказательства теоремы Кантора–Бернштейна–Шредера, утверждающей, что отношение сравнения мощностей множеств антисимметрично.

Пусть 2^X обозначает множество всех подмножеств X. Определим отображение $H\colon 2^X \to 2^X$ так:

$$H\colon A \to X \setminus g\bigl(Y \setminus f(A)\bigr).$$

Лемма 3.3. *Если* $(A_1, A_2, \ldots)$ *— последовательность подмножеств* X*, то*

$$H\bigl(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr) = \cup_{n=1}^{\infty} H(A_n).$$

Доказательство. Заметим, что для инъективного отображения образ пересечения равен пересечению образов. Исходя их этого, получаем

$$\begin{aligned} H\bigl(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr) &= X \setminus g\Bigl(Y \setminus f\bigl(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\bigr)\Bigr) = X \setminus g\bigl(Y \setminus \cup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\bigr) = \\ &= X \setminus g\Bigl(\cap_{n=1}^{\infty}\bigl(Y \setminus f(A_n)\bigr)\Bigr) = X \setminus \cap_{n=1}^{\infty} g\bigl(Y \setminus f(A_n)\bigr) = \\ &= \cup_{n=1}^{\infty}\Bigl(X \setminus g\bigl(Y \setminus f(A_n)\bigr)\Bigr) = \cup_{n=1}^{\infty} H(A_n), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Определим последовательность A_n, положив $A_1 = \emptyset$, и если определено A_n, то $A_{n+1} = H(A_n)$. Тогда для $E = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, в силу леммы леммы 3.3, имеем

$$H(E) = \cup_{n=1}^{\infty} H(A_n) = \cup_{n=2}^{\infty} A_n = E.$$

Далее, отображение H переводит каждое измеримое в X множество в измеримое в X, поэтому каждое A_n и, вместе с ними, и E измеримы в X.

Заметим теперь, что E переводится отображением f биективно в $f(E)$. С другой стороны, так как $X \setminus g\bigl(Y \setminus f(E)\bigr) = E$, то $g\bigl(Y \setminus f(E)\bigr) = X \setminus E$, поэтому $X \setminus E$ переводится биективным отображением g^{-1} в $Y \setminus f(E)$. Таким образом, отображение $h\colon X \to Y$, заданное так:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \text{ и} \\ g^{-1}(x), & \text{если } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

является измеримой биекцией, переводящей измеримые множества в измеримые, т.е. задает изоморфизм измеримых пространств X и Y. □

Пусть X — топологическое пространство. Напомним, что наименьшая σ-алгебра, содержащая топологию τ пространства X, называется *борелевской* и обозначается через $\mathcal{B}_X$ или $\mathcal{B}_\tau$. Элементы борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}_X$ называются *борелевскими множествами*. Пусть X и Y — топологические пространства. Измеримые отображения из пространства $(X, \mathcal{B}_X)$ в пространство $(Y, \mathcal{B}_Y)$ называются *борелевскими*, измеримое вложение — *борелевским вложением*, а измеримый изоморфизм таких пространств — *борелевским изоморфизмом*. **В дальнейшем, рассматривая топологические пространства как измеримые, мы, если не оговорено противное, всегда будем предполагать, что заданные на них σ-алгебры — борелевские.**

Выясним, как связаны непрерывность отображения и его борелевость.

Предложение 3.4. *Непрерывное отображение топологических пространств является борелевским. В частности, гомеоморфизм — борелевский изоморфизм. Топологическое вложение является борелевским, если и только если образ отображения — борелевское подмножество.*

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3.5. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, Y — множество, и $f\colon X \to Y$ — отображение. Тогда множество $\mathcal{B} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. Так как $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, то $Y \in \mathcal{B}$. Далее, если $B \in \mathcal{B}$, то $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, так что $X \setminus B \in \mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B}$ замкнуто относительно перехода к дополнениям. Осталось проверить, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно счетных объединений. Пусть $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathcal{B}$, тогда $f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$, что и требовалось. □

Вернемся к доказательству предложения. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Положим $\mathcal{B} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X\right\}$. По лемме 3.5, $\mathcal{B}$ является σ-алгеброй, причем, в силу непрерывности f и определения борелевской σ-алгебры, $\mathcal{B}$ содержит все открытые подмножества Y, поэтому $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}$ и, значит, прообраз любого борелевского множества — борелевское множество, т.е. f — борелевское отображение.

Второе утверждение мгновенно следует из первого. Третье утверждение вытекает из замечания 3.1. □

Пример 3.6. Покажем, как работают предложение 3.4 и теорема 3.2. Напомним, что отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) не гомеоморфны. Тем не менее, они являются борелевски изоморфными. Действительно, интервал топологически вкладывается в отрезок в виде открытого и, значит, борелевского подмножества, а отрезок — в интервал в виде замкнутого и, тем самым, также борелевского подмножества. В силу предложения 3.4, оба топологических вложения являются борелевскими вложениями. Остается применить теорему 3.2.

В следующем утверждении приводится пример ситуации, в которой образ при топологическом вложении является борелевским подмножеством. В качестве приложения получается описание всех польских пространств в терминах борелевских множеств.

Следствие 3.7. *Пусть X и Y — топологические пространства, метризуемые полными метриками (например, польские), и $f\colon X \to Y$ — топологическое вложение. Тогда $f(X)$ — борелевское подмножество Y. В частности, каждое польское пространство борелевски вкладывается в гильбертов куб.*

Доказательство. Так как f — гомеоморфизм с образом, подпространство $f(X) \subset Y$ также метризуемо полной метрикой. В силу следствия 1.12, множество $f(X)$ относится к классу G_δ, т.е. является не более чем счетным пересечением открытых множеств и, значит, является борелевским. Второе утверждение вытекает из первого, теоремы 2.1 и предложения 3.4. □

Следующий пример борелевского изоморфизма непосредственно не вытекает теоремы 3.2.

Пример 3.8. Покажем, что отрезок $I = [0,1]$ и канторов дисконтинуум $\mathcal{C}$ борелевски изоморфны. В силу упражнения 1.5, канторов дисконтинуум можно представить как $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ с тихоновской топологией. Обозначим через $D \subset I$ множество всех конечных двоичных дробей, т.е. всех чисел вида $\sum_{i=1}^{n} a_i/2^i$, где каждое a_i равно 0 или 1. Также добавим в это множество 1. Через $E \subset \mathcal{C}$ обозначим множество всех стационарных последовательностей. Отметим, что оба множества D и E счетны, поэтому между ними имеется некоторая биекция $g\colon E \to D$.

Далее, каждое из оставшихся чисел однозначно представимо в виде ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/2^i$, где последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ бесконечна и не стационарна. Именно такие последовательности входят в $\mathcal{C} \setminus E$, поэтому имеется биекция $f\colon \mathcal{C} \setminus E \to I \setminus D$, которая сопоставляет последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ число $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/2^i$. Непосредственно проверяется, что f — гомеоморфизм (см. также раздел 3.1).

Определим отображение $h\colon \mathcal{C} \to I$, положив

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in \mathcal{C} \setminus E, \\ g(x) & \text{для } x \in E. \end{cases}$$

Покажем, что h — борелевский изоморфизм. Берем произвольное $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, тогда

$$h(B) = f\big(B \cap (\mathcal{C} \setminus E)\big) \sqcup g(B \cap E).$$

Множество $g(B \cap E)$ не более чем счетно, поэтому оно борелевское (как не более чем счетное объединение одноточечных множеств, являющихся замкнутыми и, значит, борелевскими). Эти же рассуждения показывают, что E — борелевское и, значит, $\mathcal{C} \setminus E$ и $B \cap (\mathcal{C} \setminus E)$ — борелевские. Так как f — гомеоморфизм, то, в силу предложения 3.4, f — борелевский изоморфизм между $\mathcal{C} \setminus E$ и $I \setminus D$, так что $f\big(B \cap (\mathcal{C} \setminus E)\big)$ — борелевское подмножество $I \setminus D$, и так как $I \setminus D$ — борелевское подмножество I, то $f\big(B \cap (\mathcal{C} \setminus E)\big)$ является борелевским и в I. Аналогичные рассуждения показывают, что для каждого $A \in \mathcal{B}_I$ множество $h^{-1}(A)$ — борелевское в $\mathcal{C}$. Доказательство закончено.

Имеется ряд утверждений, дающих достаточные условия того, что данное семейство подмножеств топологического пространства является борелевской σ-алгеброй. Приведем одно из них, нужное нам в дальнейшем.

Предложение 3.9. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{B}$ — наименьшее семейство подмножеств X, содержащее все замкнутые множества, а также замкнутое относительно дополнений и счетных объединений. Тогда $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра.*

Доказательство. Так как $\mathcal{B}$ содержит $\emptyset$ и замкнуто относительно счетных объединений и дополнений, то $\mathcal{B}$ является σ-алгеброй. С другой стороны, $\mathcal{B}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все замкнутые множества и, значит, $\mathcal{B}$ также является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые множества, т.е. $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра. $\square$

Для построения более тонких, чем в примере 3.6, измеримых вложений нам понадобится техника схем, к описанию которой мы сейчас и перейдем.

3.1 Схемы

Напомним, как строится стандартный канторов дисконтинуум. На начальном шаге рассматривается пространство $X_0 = [0,1]$, и на каждом следующем шаге из предыдущего пространства выкидывают некоторое количество интервалов так, чтобы получить семейство равных отрезков. А именно, из каждого имеющегося отрезка выбрасывают среднюю треть. Так получаются пространства X_n, представляющие собой дизъюнктное объединение 2^n отрезков одинаковой длины, равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$. Кантором дисконтинуум определяется как пересечение $\mathcal{C} = \cap_{n=0}^{\infty} X_n$ всех построенных пространств. Чтобы описать точки канторова дисконтинуума, отрезки пространства X_n, $n \geq 1$, нумеруют последовательностями из 0 и 1 длины n. Если на $(n-1)$-ом шаге некоторый отрезок S получил номер $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, то отрезок, получающийся из S выбрасыванием средней трети и находящийся слева (ближе к 0) нумеруется последовательностью $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$, а находящийся справа — последовательностью $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)$. Точки канторова дисконтинуума соответствуют бесконечным последовательностям, которые указывают, пересечением каких отрезков получаются соответствующие точки. Ясно, что все последовательности из $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ реализуются, причем каждой последовательности соответствует ровно одна точка. Итак, канторов дисконтинуум биективен множеству $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Эту биекцию можно задать явно, учитывая то, что каждая точка из $\mathcal{C}$ является пределом левых концов отрезков, которым она принадлежит, поэтому последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ ставится в соответствие точка $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} a_n$. Покажем, что эта функция, обозначим ее через f, отображает пространство $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ с топологией произведения (тихоновской топологией) гомеоморфно на $\mathcal{C}$. Так как пространство $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ компактно по теореме Тихонова, достаточно проверить непрерывность отображения f. Выбираем произвольную точку $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ и любую окрестность U точки $f(a)$. По определению индуцированной топологии и топологии прямой, U содержит некоторое множество $\mathcal{C} \cap (\alpha, \beta) \ni f(a)$, поэтому U также содержит некоторый отрезок S, построенный на n-ом шаге и содержащий $f(a)$. Но тогда U также содержит и все отрезки, полученные из S на шагах, следующих за n-ым, а это означает, что U содержит образы всех точек из $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, отличающиеся от a координатами a_k, $k > n$. Но множество таких точек образует открытую окрестность точки a в тихоновской топологии, что и завершает проверку непрерывности отображения f.

Как мы видим, при работе с подобными конструкциями нам приходится пользоваться несколькими вещами, а именно, работать как с конечными, так и с бесконечными последовательностями, дополнять конечную последовательность (конкатенация) и выбирать начальный отрезок последовательности. Введем соответствующие обозначения. Приводимое далее изложение следует [16].

Пусть A — произвольное непустое множество (как правило, конечное или равное $\mathbb{N}$). Через $A^{<\mathbb{N}}$ обозначим семейство всевозможных конечных последовательностей на множестве A, включающее пустую последовательность $\emptyset$. Отметим, что $A^{\mathbb{N}}$ — это множество всевозможных бесконечных последовательностей на A. Для $a \in A^{<\mathbb{N}}$ и $b \in A^{<\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$, через $a\hat{\ }b$ обозначим конкатенацию этих последовательностей (приписываем b после a). Отметим, что $a\hat{\ }\emptyset = \emptyset\hat{\ }a = a$. Через $|a|$ обозначим длину последовательности a (если $a \in A^{\mathbb{N}}$, то $|a| = \infty$; кроме того, $|\emptyset| = 0$), а для целого $0 \leq n \leq |a|$ обозначим через $a|n$ начальный отрезок a длины n (отметим, что $a|0 = \emptyset$). Определим на $A^{<\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$ частичный порядок, положив $a \leq b$, если и только если a является начальным отрезком b. Если a и b несравнимы, то этот факт будем обозначать через $a \perp b$.

Далее, будем считать, что на A задана дискретная топология, а на $A^{\mathbb{N}}$ — тихоновская. Для $s \in A^{<\mathbb{N}}$ положим

$$\Sigma(s) = \{\alpha \in A^{\mathbb{N}} \colon s \leq \alpha\}.$$

Таким образом, у всех последовательностей $\alpha \in \Sigma(s)$ начальный отрезок s фиксирован, а все остальные элементы произвольны, поэтому $\Sigma(s) \subset A^{\mathbb{N}}$ — открытое множество, являющееся окрестностью любой последовательности α с начальным отрезком s.

Определим теперь несколько типов схем на польском метрическом пространстве X конечного диаметра.

(1) *Схемой Суслина* назовем семейство $\{F_s \subset X : s \in A^{<\mathbb{N}}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- при всех $s, a \in A^{<\mathbb{N}}$, $a \neq \emptyset$, выполняется $\bar{F}_{s\hat{\ }a} \subset F_s$;
- для каждого $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ имеем $\operatorname{diam} F_{\alpha|n} \to 0$ при $n \to \infty$.

(2) Схема Суслина называется *схемой Лузина*, если для любых $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ таких, что $s \perp t$, выполняется $F_s \cap F_t = \emptyset$.

(3) Схема Лузина называется *схемой Кантора*, если $A = \{0, 1\}$ и все F_s замкнуты и непусты.

Отметим, что при построении канторова дисконтинуума мы фактически пользовались схемой Кантора.

Приведем ряд полезных свойств схемы Суслина.

Положим
$$D = \big\{\alpha \in A^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (F_{\alpha|n} \neq \emptyset)\big\} \subset A^{\mathbb{N}}.$$

Предложение 3.10. *Тогда множество D замкнуто.*

Доказательство. Выберем произвольное $\alpha \in A^{\mathbb{N}} \setminus D$, тогда существует $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $F_{\alpha|n} = \emptyset$. Но тогда ни одно $\beta \in A^{\mathbb{N}}$ с начальным отрезком $\alpha|n$ не входит в D, откуда $\alpha \in \Sigma(\alpha|n) \subset A^{\mathbb{N}} \setminus D$, так что $A^{\mathbb{N}} \setminus D$ открыто. □

Заметим, что для каждого $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ имеем $\cap_{n=0}^{\infty} F_{\alpha|n} = \cap_{n=0}^{\infty} \bar{F}_{\alpha|n}$. Если $\alpha \in D$, то это пересечение состоит из одной точки, которую мы обозначим через $f(\alpha)$. Таким образом, мы определили отображение $f \colon D \to X$, которое называется *ассоциированным со схемой Суслина*.

Предложение 3.11. *Отображение f непрерывно.*

Доказательство. Действительно, выберем произвольное $\alpha \in D$, $\varepsilon > 0$ и покажем, что некоторая окрестность последовательности $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ переводится отображением f в $U_\varepsilon\big(f(\alpha)\big)$. Для этого выберем n столь большим, чтобы выполнялось $\operatorname{diam} F_{\alpha|n} < \varepsilon$ (такое n существует в силу определения схемы Суслина). Также, по определению схемы

Суслина, для каждого $b \in A^{<\mathbb{N}}$ такого, что $b > (\alpha|n)$, выполняется $\bar{F}_b \subset F_{\alpha|n}$, поэтому для каждого $\beta \in \Sigma(\alpha|n) \cap D$ точка $f(\beta)$, как и точка $f(\alpha)$, лежит в $F_{\alpha|n}$, откуда $\big|f(\alpha)f(\beta)\big| < \varepsilon$ и, значим,

$$f\big(\Sigma(\alpha|n) \cap D\big) \subset U_\varepsilon\big(f(\alpha)\big).$$

□

Предложение 3.12. *Предположим, что $F_\emptyset = X$, и при всех $s \in A^{<\mathbb{N}}$ выполняется*

$$F_s = \cup\big\{F_{s\hat{\ }a} : a \in A\big\}.$$

Тогда ассоциированное отображение f сюръективно.

Доказательство. Берем произвольную точку $x \in X$, тогда $x \in F_\emptyset$. Если $x \in F_s$ для некоторого s, то, по условию, существует $a \in A$ такое, что $x \in F_{s\hat{\ }a}$. Последнее позволяет построить последовательность $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ такую, что для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется $x \in F_{\alpha|n}$. Но тогда $\{x\} = \cap_{n=0}^{\infty} F_{\alpha|n}$, поэтому $f(\alpha) = x$. □

Предложение 3.13. *Для схемы Лузина ассоциированное отображение инъективно.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in D$ — две различные последовательности. Это означает, что для некоторого n выполняется $(\alpha|n) \neq (\beta|n)$, но тогда $(\alpha|n) \perp (\beta|n)$ и, по определению схемы Лузина, имеем $F_{\alpha|n} \cap F_{\beta|n} = \emptyset$. Но $f(\alpha) \in F_{\alpha|n}$, а $f(\beta) \in F_{\beta|n}$, откуда $f(\alpha) \neq f(\beta)$. □

Предложение 3.14. *Для схемы Кантора имеем $D = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{C}$ и f является топологическим вложением.*

Доказательство. Действительно, для схемы Кантора, в силу того, что все $F_{\alpha|n}$ непусты, множество D совпадает с $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ и, как было показано выше, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$. По предложению 3.13, ассоциированное отображение взаимно-однозначно с образом. По предложению 3.11, f непрерывно. Так как канторово множество компактно, f — гомеоморфизм с образом, т.е. топологическое вложение. □

Применим конструкцию схем для доказательства важных свойств польских пространств.

Теорема 3.15. *Каждое плотное в себе польское пространство X содержит подмножество, гомеоморфное канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Достаточно построить схему Кантора для пространства X и применить предложение 3.14. Зададим на X произвольную полную ограниченную метрику, согласованную с топологией.

Мы начнем с построения схемы Суслина $\{U_s : s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\}$, состоящей из непустых открытых множеств, для которых выполняется усиленное условие из определения схемы Лузина: если $s \perp t$, то $\bar{U}_s \cap \bar{U}_t = \emptyset$. Построение проведем по индукции. Положим $U_\emptyset = X$. Предположим теперь, что для некоторого s непустое открытое множество U_s уже построено. Так как X плотно в себе, множество U_s содержит по крайней мере две различные точки x_0 и x_1. Построим два открытых множества $U_{s\hat{\ }0}$ и $U_{s\hat{\ }1}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $x_0 \in U_{s\hat{}0}$ и $x_1 \in U_{s\hat{}1}$,

(2) $\operatorname{diam} U_{s\hat{}0} < 2^{-|s|}$ и $\operatorname{diam} U_{s\hat{}1} < 2^{-|s|}$,

(3) $\bar{U}_{s\hat{}0} \cap \bar{U}_{s\hat{}1} = \emptyset$,

(4) $\bar{U}_{s\hat{}0} \cup \bar{U}_{s\hat{}1} \subset U_s$.

Для завершения доказательства, превратим построенную схему Суслина в схему Кантора $\{F_s : s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\}$, положив $F_s = \bar{U}_s$. □

Теорема 3.16 (Кантор–Бендиксон)**.** *Каждое сепарабельное метрическое пространство X представимо в виде $X = Y \sqcup Z$, где Z — не более чем счетное множество, а Y — замкнутое подмножество, не имеющее изолированных точек, т.е. плотное в себе.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — не более чем счетная база. Положим

$$Z = \cup\{U_n : \#U_n = 1\},$$

тогда множество Z не более чем счетно и открыто. Пусть $Y = X \setminus Z$, тогда Y замкнуто и не имеет изолированных точек, так как каждая изолированная точка, точнее, соответствующее одноточечное множество, входит в каждую базу и, значит, содержится в Z. □

Теоремы 3.15 и 3.16 мгновенно приводят к следующему результату.

Следствие 3.17. *Каждое несчетное польское пространство содержит подмножество, гомеоморфное канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$, в частности, такое пространство континуально.*

3.2 Борелевские множества и топология

Этот раздел представляет как самостоятельный интерес, так и играет важную роль в доказательстве теоремы 3.30. Мы начнем с технического результата.

Предложение 3.18. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $F \subset X$ — замкнутое подмножество. Обозначим через τ' наименьшую топологию, содержащую τ и F. Тогда (X, τ') гомеоморфно $F \sqcup (X \setminus F)$.*

Доказательство. Обозначим через τ'' семейство всех открытых подмножеств в $F \sqcup (X \setminus F)$, отождествляемых с подмножествами X. Для каждого $U \in \tau$ имеем $U = (U \cap F) \sqcup \big(U \cap (X \setminus F)\big)$, поэтому $U \in \tau''$. Кроме того, $F \in \tau''$, поэтому $\tau' \subset \tau''$.

Обратно, берем произвольное $U \in \tau''$, тогда существуют $V, W \in \tau$ такие, что $U = (F \cap V) \cup \big((X \setminus F) \cap W\big)$. Имеем $(F \cap V) \in \tau'$ и $\big((X \setminus F) \cap W\big) \in \tau'$, поэтому $U \in \tau'$, так что $\tau'' \subset \tau'$. □

Следствие 3.19. *Пусть (X, τ) — польское пространство и $F \subset X$ — замкнутое подмножество. Обозначим через τ' наименьшую топологию, содержащую τ и F. Тогда*

(1) *пространство* (X, τ') — *польское*;

(2) *борелевские σ-алгебры пространств* (X, τ) *и* (X, τ') *совпадают*;

(3) *множество* F *является открыто-замкнутым в* (X, τ').

Доказательство. (1) По предложению 3.18, (X, τ') гомеоморфно $F \sqcup (X \setminus F)$. Пространство F польское в соответствии с примером 1.1. Пространство $X \setminus F$ польское в силу следствия 1.12. Осталось вновь воспользоваться примером 1.1.

(2) Открытые множества топологии τ' могут быть трех типов: U, $F \cap U$, или $F \cup U$, где $U \in \tau$. Так как $F \in \mathcal{B}_\tau$, имеем $\tau' \subset \mathcal{B}_\tau$ и, значит, $\mathcal{B}_{\tau'} \subset \mathcal{B}_\tau$. С другой стороны, $\tau \subset \tau'$, откуда $\mathcal{B}_\tau \subset \mathcal{B}_{\tau'}$, что и требовалось.

(3) Имеем $X \setminus F \in \tau \subset \tau'$ и $F \in \tau'$, так что F — открыто-замкнуто в τ'. □

Предложение 3.20. *Пусть* $(\tau_1, \tau_2, \ldots)$ — *последовательность польских топологий на множестве* X. *Предположим, что для любых различных* $x, y \in X$ *существуют такие* $U, V \in \cap_{n=1}^{\infty} \tau_n$, *что* $x \in U$, $y \in V$ *и* $U \cap V = \emptyset$. *Обозначим через* τ_∞ *наименьшую топологию, содержащую* $\cup_{n=1}^{\infty} \tau_n$. *Тогда топология* τ_∞ — *польская.*

Доказательство. Рассмотрим диагональное отображение

$$f\colon (X, \tau_\infty) \to \prod_n (X, \tau_n) =: Y,$$

а именно, положим $f(x) = (x, x, \ldots)$. Легко видеть, что это отображение инъективно.

Лемма 3.21. *Отображение* f *непрерывно.*

Доказательство. Покажем непрерывность этого отображения в произвольной точке $x \in X$. Выберем произвольную окрестность U точки $f(x)$, тогда эта окрестность равна $\prod_n U_n$, где $U_n \in \tau_n$, причем все эти U_n, кроме некоторых $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}\}$, равны X. Положим $V = \cap_{i=1}^{k} U_{n_i}$, тогда $V \in \tau_\infty$ и $f(V) \subset U$, что и требовалось. □

Лемма 3.22. *Отображение* f *является гомеоморфизмом с образом.*

Доказательство. Напомним, что, в силу примера 1.1, пространство Y — польское, поэтому $f(X) \subset Y$ — метризуемо, и, значит, для доказательства непрерывности f^{-1} достаточно проверить, что $f^{-1}\colon f(X) \to X$ переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся. Обозначим через ρ_n полную метрику на X, задающую топологию τ_n и такую, что диаметр (X, ρ_n) не превосходит 1, тогда топология на Y задается метрикой $\sum_n \rho_n / 2^n$. Пусть $(x_1, x_1, \cdots), (x_2, x_2, \cdots), \ldots$ — сходящаяся последовательность точек из $f(X)$, тогда $\sum_n \rho_n(x_p, x_q)/2^n \to 0$ при $p, q \to \infty$. Но тогда и при каждом n имеем $\rho_n(x_p, x_q) \to 0$, так что эта последовательность фундаментальна в каждом (X, τ_n) и, в силу полноты, сходится к y_n. Покажем, что все y_n равны между собой. Пусть это не так, тогда для некоторых $n \neq m$ выполняется $y_n \neq y_m$. По условию, y_n и y_m содержатся в некоторых непересекающихся множествах $U_n, U_m \subset X$, открытых сразу во всех топологиях τ_k. Отсюда вытекает, что, начиная с некоторого момента, последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ лежит одновременно в U_n и U_m, противоречие. □

Лемма 3.23. *Множество* $f(X)$ *замкнуто в* Y.

Доказательство. Выберем произвольную точку $(x_1, x_2, \ldots) \in Y$, не лежащую в $f(X)$. Это означает, что для некоторых $m \neq n$ выполняется $x_m \neq x_n$. По условию, существуют непересекающиеся множества $U_m, U_n \subset X$, содержащие соответственно x_m и x_n, и являющиеся открытыми во всех топологиях τ_k. Обозначим через $\pi_k \colon Y \to X$ каноническую проекцию Y на k-ый сомножитель. Так как все π_k непрерывны, множество $\pi_m^{-1}(U_m) \cap \pi_n^{-1}(U_n)$ открыто в Y, содержит $(x_1, x_2, \ldots)$ и не пересекает $f(X)$, так как $U_m \cap U_n = \emptyset$. Таким образом, $Y \setminus f(X)$ — открыто. □

В силу примера 1.1, пространство $f(X)$ — польское, поэтому польской является и топология τ_∞. □

Следствие 3.24. *Пусть (X, τ) — хаусдорфово топологическое пространство, и предположим, что на X задана последовательность $(\tau_1, \tau_2, \ldots)$ польских топологий, каждая из которых содержит τ. Обозначим через τ_∞ наименьшую топологию, содержащую $\cup_{n=1}^{\infty} \tau_n$. Тогда топология τ_∞ — польская.*

Теорема 3.25. *Пусть (X, τ) — польское пространство и $B \in \mathcal{B}_\tau$. Тогда на X существует топология $\tau_B \supset \tau$ такая, что (X, τ_B) — польское пространство, B — открыто-замкнутое множество в топологии τ_B, и $\mathcal{B}_{\tau_B} = \mathcal{B}_\tau$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство всех борелевских подмножеств $B \in \mathcal{B}_\tau$ пространства (X, τ), для которых существует польская топология $\tau_B \supset \tau$ такая, что в ней B — открыто-замкнутое множество и $\mathcal{B}_{\tau_B} = \mathcal{B}_\tau$. Мы должны показать, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\tau$. Применим предложение 3.9. По следствию 3.19, в $\mathcal{B}$ входят все замкнутые подмножества X. Далее, если $B \in \mathcal{B}$, то $X \setminus B$ также является открыто-замкнутым в τ_B, так что топологию τ_B можно взять в качестве $\tau_{X \setminus B}$, откуда $(X \setminus B) \in \mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B}$ замкнуто относительно операции перехода к дополнению. Остается показать, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно счетных объединений.

Пусть $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathcal{B}$, и $B = \cup_n B_n$. Мы должны показать, что $B \in \mathcal{B}$. Обозначим через $\tau_n \supset \tau$ польскую топологию, в которой B_n открыто-замкнуто и $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_\tau$. Положим $\tau_\infty = \cup_n \tau_n$, тогда $B \in \tau_\infty$ и, по следствию 3.24, топология τ_∞ — польская. Так как $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_\tau$ при всех n, то $\mathcal{B}_{\tau_\infty} = \mathcal{B}_\tau$.

Заметим, что в топологии τ_∞ множество B открыто, но может не быть замкнуты. Чтобы сделать его замкнутым, рассмотрим наименьшую топологию τ', содержащую $\tau_\infty \cup \{X \setminus B\}$. По следствию 3.19, τ' — польская, $\mathcal{B}_{\tau'} = \mathcal{B}_\tau$, а B в этой топологии уже открыто-замкнуто. Таким образом, $B \in \mathcal{B}$, что и завершает доказательство. □

Следствие 3.26. *Пусть (X, τ) — польское пространство, и $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность борелевских подмножеств X. Тогда на X существует польская топология $\tau' \supset \tau$, в которой все B_i — открыто-замкнуты, и $\mathcal{B}_{\tau'} = \mathcal{B}_\tau$.*

Доказательство. Построим “башню” топологий $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \cdots$ следующим образом. В качестве τ_1 возьмем польскую топологию, содержащую τ, в которой B_1 открыто-замкнуто и $\mathcal{B}_{\tau_1} = \mathcal{B}_\tau$ (эта топология существует в силу теоремы 3.25). Если построена τ_{n-1}, то в качестве τ_n возьмем польскую топологию, содержащую τ_{n-1}, в которой B_n открыто-замкнуто и $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_{\tau_{n-1}} = \mathcal{B}_\tau$ (эта топология также существует в силу теоремы 3.25). Топологию τ' положим равной $\cup_{n=1}^{\infty} \tau_n$. По следствию 3.24, топология τ' — польская. Так как $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_\tau$, то $\tau_n \subset \mathcal{B}_\tau$ при всех n и, значит, $\tau' \subset \mathcal{B}_\tau$, откуда $\mathcal{B}_{\tau'} = \mathcal{B}_\tau$. □

Следствие 3.27. *Пусть (X, τ) — польское пространство, Y — сепарабельное метрическое пространство, а $f: X \to Y$ — борелевское отображение. Тогда на X существует польская топология $\tau' \supset \tau$ с той же борелевской σ-алгеброй, для которой отображение f — непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим на Y счетную базу $(U_1, U_2, \ldots)$, положим $B_i = f^{-1}(U_i)$, тогда все B_i — борелевские. По следствию 3.26, существует польская топология $\tau' \supset \tau$ с той же борелевской σ-алгеброй, в которой все B_i — открыто-замкнуты. Но тогда для такой топологии f — непрерывно. □

3.3 Стандартные борелевские пространства

Стандартным борелевским пространством называется измеримое пространство, изоморфное некоторому борелевскому подмножеству польского пространства.

Следствие 3.28. *Каждое стандартное борелевское пространство изоморфно некоторому борелевскому подмножеству гильбертова куба.*

Доказательство. По следствию 3.7, каждое польское пространство X изоморфно некоторому борелевскому подмножеству гильбертова куба $\mathcal{H}$. Обозначим этот изоморфизм через f. Таким образом, для каждого борелевского $A \subset X$ множество $f(A)$ — борелевское в $f(X)$. Но так как $f(X)$ — борелевское подмножество в $\mathcal{H}$, то и $f(A)$ — борелевское подмножество в $\mathcal{H}$. □

Предложение 3.29. *Каждое стандартное борелевское пространство изоморфно борелевскому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$.*

Доказательство. В силу примера 3.8, отрезок $I = [0, 1]$ и канторов дисконтинуум $\mathcal{C}$ борелевски изоморфны. Отсюда вытекает, что гильбертов куб $I^{\mathbb{N}}$ борелевски изоморфен $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$. Но так как $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, то $\mathcal{C}^{\mathbb{N}} = \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно $\mathcal{C}$. Таким образом, гильбертов куб борелевски изоморфен канторову дисконтинууму по предложению 3.4. В силу следствия 3.28, стандартное борелевское пространство изоморфно борелевскому подмножеству гильбертова куба, поэтому оно также изоморфно борелевскому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$. □

Теорема 3.30 (Куратовский)**.** *Любые два несчетных стандартных борелевских пространства изоморфны.*

Доказательство. Пусть B — несчетное стандартное борелевское пространство. Без ограничения общности, предположим, что B — борелевское подмножество некоторого польского пространства (X, τ). По предложению 3.29, B изоморфно некоторому борелевскому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$, так что этот изоморфизм — измеримое вложение.

Далее, по теореме 3.25, топологию τ можно расширить до некоторой топологии τ_B так, чтобы пространство (X, τ_B) осталось польским, B стало открыто-замкнутым, а борелевская σ-алгебра для τ_B была бы равна борелевской σ-алгебре для τ, в частности, B как измеримое пространство не изменилось, но теперь стало относиться к классу

G_δ. По следствию 1.12, подмножество B польского пространства (X, τ_B) само является польским. Теперь мы можем применить следствие 3.17, в силу которого существует топологическое вложение $f\colon \mathcal{C} \to B$. Так как $\mathcal{C}$ — компакт, непрерывный образ компакта — тоже компакт, а компакт в хаусдорфовом пространстве — замкнутое множество, то $f(\mathcal{C})$ — борелевское подмножество B и, значит, f — измеримое вложение. Осталось воспользоваться теоремой 3.2 и заключить, что B изоморфно $\mathcal{C}$ и, значит, любые два таких B изоморфны друг другу. □

Следствие 3.31. *Два стандартных борелевских пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они равномощны.*

Доказательство. Несчетный случай разбирается в теореме 3.30. Для не более чем счетного пространства борелевская σ-алгебра совпадает с множеством всех подмножеств, поэтому любая биекция — борелевский изоморфизм. □