Тема 2

Универсальные пространства.

Под универсальными пространствами обычно понимают пространства, в которые вкладываются (топологически, изометрично, и т.д.) пространства из некоторого семейства. Мы рассмотрим здесь два типа пространств: универсальные для топологических и изометрических вложений. В следующем разделе мы коснемся также борелевских вложений.

2.1 Универсальные пространства для топологических вложений

В настоящем разделе мы покажем, что все польские пространства топологически вкладываются в гильбертов куб. На самом деле, имеет место даже более общий результат.

Теорема 2.1. *Любое сепарабельное метризуемое пространство X топологически вкладывается в гильбертов куб $\mathcal{H}$.*

Доказательство. В случае одноточечного X утверждение очевидно. Пусть теперь X содержит более одной точки. Выбираем произвольную счетную базу $U_1, U_2, \ldots$ пространства X. Тогда для каждой точки $x \in X$ и каждого $U_j \ni x$ существуют такое $U_i \ni x$, что

$$x \in U_i \subset \bar{U}_i \subset U_j \neq X,$$

(докажите это). Отсюда вытекает, что $\bar{U}_i$ и $X \setminus U_j$ — непустые непересекающиеся замкнутые подмножества метризуемого пространства X.

Лемма 2.2 (Лемма Урысона)**.** *Пусть X — произвольное метризуемое топологическое пространство, а A_0 и A_1 — замкнутые непустые непересекающиеся подмножества X, тогда на X существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, равная 0 на A_0, и 1 на A_1.*

Доказательство. Достаточно положить

$$f(x) = \frac{|xA_0|}{|xA_0| + |xA_1|}.$$

Отметим, что замкнутость и метризуемость гарантирует не обращение в 0 знаменателя в выражении для f. $\square$

В соответствии с леммой 2.2, для каждой пары U_i, U_j такой, что $\bar{U}_i \subset U_j \neq X$ построим непрерывную функцию $f_{ij}\colon X \to [0,1]$, которая на $\bar{U}_i$ равна 0, а на $X \setminus U_j$ равна 1. Так как множество выбранных пар (i,j) счетно, перенумеруем его некоторым образом, и соответствующие функции f_{ij} будем обозначать через f_k, где k — номер пары (i,j).

Рассмотрим отображение

$$F\colon X \to \mathcal{H}, \quad F\colon x \mapsto \bigl(f_1(x), f_2(x), \ldots\bigr).$$

Так как все координатные функции f_i непрерывны, само отображение F тоже непрерывно (проверьте). Далее, для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует $U_j \ni x$, не содержащее y. Как было отмечено выше, существует $U_i \ni x$ такое, что $\bar{U}_i \subset U_j$. Отсюда вытекает, что функция $f_k = f_{ij}$ различает точки x и y, точнее, $f_k(x) = 0$ и $f_k(y) = 1$. Таким образом, отображение F является инъекцией.

Докажем теперь, что обратное к F отображение $G\colon F(X) \to X$ также непрерывно. Предположим противное, т.е. в некоторой точке $y = F(x)$ отображение G разрывно. Введем на X метрику ρ, согласованную с топологией. Напомним, что на гильбертовом кубе $\mathcal{H}$ имеется стандартная метрика d: если $y = (y^1, y^2, \ldots)$ и $z = (z^1, z^2, \ldots)$ — точки из $\mathcal{H}$, то $d(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} |y^n z^n|/2^n$. Напомним, что для метрических пространств непрерывность отображения равносильна сохранению сходимости последовательностей. Таким образом, разрывность в точке y означает, что образ некоторой сходящейся к y последовательности точек из $F(X)$ переходит при отображении G в последовательность, содержащую расходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности, будем считать, что существует последовательность $y_p \in F(X)$, $y_p \to y$, такая, что последовательность $x_p \in X$, $y_p = F(x_p)$, лежит от x на расстоянии большем, чем некоторое $\delta > 0$. Выбираем $U_j \ni x$ так, чтобы все x_p лежали вне U_j; выбираем $U_i \ni x$ такую, что $\bar{U}_i \subset U_j$; рассматриваем соответствующую функцию $f_k = f_{ij}$. Имеем $f_k(x) = 0$ и $f_k(x_p) = 1$ для всех p. Таким образом, у точек $y_p = F(x_p)$ и $y = F(x)$ их k-ые координаты различаются на 1, поэтому $d(y_p, y) \geq 1/2^k$, что противоречит сходимости последовательности y_p к y. $\square$

Теорема 2.1, вместе со следствием 1.12 и упражнением 1.6, приводит к следующему результату.

Следствие 2.3. *Топологическое пространство — польское, если и только если оно гомеоморфно G_δ-подмножеству гильбертова куба $\mathcal{H}$.*

2.2 Универсальные пространства для изометрических вложений

Выше мы показали, что гильбертов куб является универсальным пространством для польских пространств: каждое польское пространство топологически вкладывается в гильбертов куб. Тем не менее, если фиксировать на польском пространстве некоторую полную метрику, согласованную с топологией, то про изометричное вложение приведенные выше результаты ничего не говорят.

Для таких вложений вполне подходит банахово пространство ℓ_∞, составленное из всех ограниченных последовательностей, расстояние между которыми задается sup-нормой: если $x = (x^1, x^2, \ldots)$, то $\|x\| = \sup_n |x^n|$. Приводимое ниже вложение было построено Фреше.

Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Выбираем в всюду плотную последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ (некоторые x_i могут совпадать). Также фиксируем некоторую точку x_0. Тогда, как оказывается (проверьте), отображение $x \mapsto \big(|xx_1| - |x_0x_1|, |xx_2| - |x_0x_2|, \ldots\big)$ задает изометричное вложение X в ℓ_∞.

Теорема 2.4. *Каждое сепарабельное метрическое пространство изометрично вкладывается в ℓ_∞.*

Сейчас мы опишем еще одно универсальное пространство, в которое изометрично вкладываются все польские пространства. Это пространство было построено Урысоном и, по сравнению с ℓ_∞, имеет существенно большую группу изометрий: если в это пространство изометрично вложить некоторое компактное метрическое пространство, то каждая изометрия между образами этого пространства продолжается до изометрии всего пространства Урысона. Кроме того, пространство Урысона — сепарабельное, в отличие от ℓ_∞.

2.2.1 Пространство Урысона

Начнем с аксиоматического определения пространства Урысона.

Определение 2.5. Польское пространство $\mathcal{U}$ называется *универсальным пространством Урысона* (или, короче, *пространством Урысона*), если оно обладает свойством *конечной инъективности*: для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждой пары (X_n, X_{n+1}), где X_{n+1} — произвольное $(n+1)$-точечное метрическое пространство, X_n — любое его n-точечное подмножество, а также любого изометричного отображения $f_n \colon X_n \to \mathcal{U}$, существует продолжающее f_n изометричное отображение $f_{n+1} \colon X_{n+1} \to \mathcal{U}$.

Ниже мы докажем, что универсальное пространство Урысона существует и единственно с точностью до изометрии.

Упражнение 2.6. Докажите следующие утверждения:

(1) каждое не более чем счетное метрическое пространство изометрично вкладывается в пространство Урысона;

(2) каждое сепарабельное, в частности, польское метрическое пространство, изометрично вкладывается в пространство Урысона.

Докажем теперь, что пространство Урысона, если существует, то определено однозначно с точностью до изометрии, см. [2].

Теорема 2.7. *Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — пространства Урысона, тогда они изометричны.*

Доказательство. Выберем в $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ всюду плотные последовательности $(x_1, x_2, \ldots)$ и $(y_1, y_2, \ldots)$ соответственно. Будем шаг за шагом определять отображения f и g. Положим $f(x_1) = y_1$ и $g(y_1) = x_1$. Продолжим f до изометричного отображения из $\{x_1, x_2\}$ в $\mathcal{U}_2$. Отображение g определим на $\big\{y_1, f(x_2)\big\}$ равным f^{-1}. Продолжим g до изометричного отображения из $\big\{y_1, f(x_2), y_2\big\}$ в $\mathcal{U}_1$. Ясно, что ограничение нового g^{-1} на $\{x_1, x_2\}$ совпадает с f. Продолжим это f на $g(y_2)$ до g^{-1}, а затем еще продолжим f до изометричного отображения из $\{x_1, x_2, g(y_2), x_3\}$ в $\mathcal{U}_2$. И так далее. В результате мы построим изометрию между некоторой последовательностью $(x_1', x_2', \ldots)$ из $\mathcal{U}_1$, содержащей подпоследовательность $(x_1, x_2, \ldots)$, и некоторой последовательностью $(y_1', y_2', \ldots)$ из $\mathcal{U}_2$, содержащей подпоследовательность $(y_1, y_2, \ldots)$. Ясно, что обе штрихованные последовательности всюду плотны, поэтому, так как оба пространства $\mathcal{U}_i$ полные, мы можем продолжить построенные отображения до взаимно обратных изометричных отображений $f\colon \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ и $g\colon \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$, т.е. до изометрий. □

Аналогичным образом доказывается следующее свойство пространства Урысона.

Теорема 2.8. *Пусть $X, Y \subset \mathcal{U}$ — изометричные конечные подмножества пространства Урысона $\mathcal{U}$, и $f\colon X \to Y$ — некоторая изометрия. Тогда f продолжается до изометрии $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.*

Замечание 2.9. Как мы уже отмечали, теорема 2.8 останется верной, если в качестве X и Y выбрать произвольные компакты, см. [6] и [7].

Докажем теперь существование пространства Урысона. Приводимые здесь построения были предложены Катетовым [8]. Приводимое нами изложения существенно опирается на [5].

Мы начнем с более удобной переформулировки конструкции одноточечного расширения метрического пространства. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Мы хотим добавить одну точку y и продолжить метрику с X до метрики на $X \sqcup \{y\}$. Для этого нужно задать расстояния от y до точек из X так, чтобы полученная функция $f\colon X \to (0, \infty)$ *удовлетворяла неравенствам треугольника*: для любых $x, x' \in X$ имеем

$$\big|f(x) - f(x')\big| \le |xx'| \le f(x) + f(x'). \tag{2.1}$$

Отметим, что первое условие есть ни что иное как 1-липшицевость функции f.

Замечание 2.10. Семейство всех функций на метрическом пространстве X, удовлетворяющих условиям (2.1), выпукло, т.е. замкнуто относительно линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами, равными в сумме 1 (проверьте).

Таким образом, множество всех одноточечных расширений метрического пространства X отождествляется с семейством функций, удовлетворяющих условиям (2.1). Однако для построения пространства Урысона нам понадобятся не все такие расширения, а лишь те, которые можно построить каноническим образом по значениям функции f на некоторых конечных подмножествах X, называемых (не совсем удачно) носителями функции f. Такое каноническое продолжение используется в доказательстве знаменитой теоремы Макшейна–Уитни, описывающей продолжения липшицевых отображений.

Теорема 2.11 (Макшейн, Уитни)**.** *Пусть $A \subset X$ — непустое подмножество метрического пространства, $L \ge 0$, и $f\colon A \to \mathbb{R}$ — некоторая L-липшицева функция. Тогда f может быть продолжена до L-липшицевой функции $F\colon X \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для каждого $a \in A$ определим функцию $f_a\colon X \to \mathbb{R}$, положив

$$f_a(x) = f(a) + L\,|xa|.$$

Лемма 2.12. *Каждая функция f_a является L-липшицевой.*

Доказательство. Имеем

$$\bigl|f_a(x) - f_a(y)\bigr| = L\bigl||xa| - |ya|\bigr| \le L\,|xy|,$$

что и требовалось. □

Из определения функции f_a и L-липшицевости функции f вытекает, что $f_a(a) = f(a)$, и для каждого $b \in A$ выполняется

$$f_b(a) = f(b) + L\,|ab| \ge f(a) = f_a(a),$$

т.е. в точке $a \in A$ значение функции f_a не превосходит значений всех остальных функций f_b, $b \in A$.

Положим $F(x) = \inf_{a\in A} f_a(x)$. Из сказанного выше вытекает, что для каждого $a \in A$ выполняется $F(a) = \inf_{b\in A} f_b(a) = f_a(a) = f(a)$, т.е. F действительно продолжает f.

Лемма 2.13. *Пусть на множестве W заданы две функции $g, h\colon W \to \mathbb{R}$, причем их инфимумы конечны. Тогда*

$$\inf_W g - \inf_W h \le \sup_W (g - h).$$

Доказательство. Действительно,

$$\inf_W g - \inf_W h = \sup_{w'\in W}\Bigl(\inf_{w\in W} g(w) - h(w')\Bigr) \le \sup_{w'\in W}\bigl(g(w') - h(w')\bigr).$$

□

Применим лемму 2.13 к нашему случаю. Имеем

$$F(x) - F(y) = \inf_{a\in A} f_a(x) - \inf_{a\in A} f_a(y) \le \sup_{a\in A}\bigl(f_a(x) - f_a(y)\bigr) \le L\,|xy|,$$

где последнее неравенство вытекает из леммы 2.12. Таким образом, функция F является L-липшицевой, что и требовалось. □

Запишем в явном виде продолжение $F\colon X \to \mathbb{R}$ для 1-липшицевой функции $f\colon A \to \mathbb{R}$, определенной на непустом $A \subset X$:

$$F(x) = \inf_{a\in A}\bigl(f(a) + |ax|\bigr). \tag{2.2}$$

Как видно из формулы (2.2), продолжение F определяется по значениям функции f на множестве A однозначно. Множество A будем называть *носителем функции F*, а функцию F — *продолжением Макшейна–Уитни функции f*.

Упражнение 2.14. Докажите, что если $A \subset X$ — носитель некоторой 1-липшицевой функции $F\colon X \to \mathbb{R}$, то каждое $B \subset X$, $B \supset A$, также является носителем F.

Предложение 2.15. *Пусть A — непустое конечное подмножество метрического пространства X, и $f\colon A \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая неравенствам треугольника* (2.1). *Обозначим через F продолжение Макшейна–Уитни функции f на все X. Тогда F также удовлетворяет неравенствам треугольника* (2.1).

Доказательство. То, что F является 1-липшицевой, следует из теоремы 2.11. Проверим теперь выполнение второго неравенства. Выберем произвольные $x, x' \in X$ и предположим, без ограничения общности, что $F(x) \ge F(x')$. Пусть $a \in A$ и $b \in A$ — точки, на которых достигаются инфимумы в формуле (2.2) для $F(x)$ и $F(x')$ соответственно, тогда

$$F(x) + F(x') = \big(f(a) + |ax|\big) + \big(f(b) + |bx'|\big) \ge |ax| + |bx'| + |ab| \ge |xx'|,$$

где предпоследнее неравенство имеет место в силу того, что функция f удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1). □

Упражнение 2.16. Докажите предложение 2.15 для произвольного, не обязательно конечного A.

Итак, пусть X — произвольное метрическое пространство. Через $E(X)$ обозначим множество функций $F\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (2.1) и имеющих конечные носители, т.е. задающихся по формуле (2.2) для некоторых конечных множеств $A \subset X$, где f — ограничение F на A.

Определим на $E(X)$ функцию расстояния с помощью sup-нормы: для $F, G \in E(X)$ положим

$$|FG| = \sup_{x \in X} \big|F(x) - G(x)\big|.$$

Предложение 2.17. *Определенная только что функция расстояния на $E(X)$ конечна и является метрикой.*

Доказательство. Пусть A и B — носители соответственно функций F и G из $E(X)$. Так как A и B конечны, для каждого конкретного $x \in X$ инфимум в формуле (2.2) для функций F и G достигается на некоторых $a_x \in A$ и $b_x \in B$ соответственно. Имеем

$$F(x) - G(x) = \big(F(a_x) + |a_x x|\big) - \big(G(b_x) + |b_x x|\big) \le F(a_x) - G(b_x) + |a_x b_x|.$$

Аналогичная оценка имеет место и для $G(x) - F(x)$. Отметим, что правые части этих двух оценок также не превосходят некоторых положительных констант, не зависящих от выбора x. Таким образом, мы показали, что $|FG| < \infty$. Положительная определенность, симметричность и неравенство треугольника для этого расстояния показывается стандартным образом. □

Предложение 2.18. *Для $a \in X$ обозначим через F_a функцию $F_a(x) = |ax|$.*

(1) *Функция F_a удовлетворяет неравенствам треугольника* (2.1) *и $A = \{a\}$ является одним из ее носителей, поэтому $F_a \in E(X)$.*

(2) *Носитель функции $F \in E(X)$ — одноточечный, скажем, равный $A = \{a\}$, если и только если существует неотрицательное число c такое, что $F(x) = c + |ax|$. Таким образом, F_a является частным случаем функций с одноточечным носителем и выделяется условием $c = 0$.*

(3) *Для любой функции $G \in E(X)$ и любого $a \in X$ имеем $|F_aG| = G(a)$, в частности, $|F_aF_b| = |ab|$, т.е. отображение $a \mapsto F_a$ является изометрическим вложением $X \to E(X)$. Кроме того, подмножество $\{F_a\}_{a\in A} \cup \{G\}$, $G > 0$, изометрично одноточечному расширению пространства X, в котором расстояния от добавленной точки до точек из X задается функцией G.*

(4) *Предположим, что функции $F, G \in E(X)$ имеют один и тот же носитель A, и $\bigl|F|_A G|_A\bigr| < \varepsilon$, тогда и $|FG| < \varepsilon$, так что малое изменение функции $F \in E(X)$ на ее носителе приводит к столь же малому изменению и всей функции F.*

(5) *Пусть функции F и G из $E(X)$ имеют равномощные носители A и B, для которых выполняется следующие условия: существует биекция $\nu\colon A \to B$ такая, что $\bigl|a\nu(a)\bigr| < \varepsilon$ и $\Bigl|F(a)G\bigl(\nu(a)\bigr)\Bigr| < \varepsilon$ при всех $a \in A$. Тогда $|FG| < 2\varepsilon$, так что малое смещение носителя функции $F \in E(X)$ и малое изменение функции на смещенном носителе приводят к малому изменению функции в целом.*

Доказательство. (1) Так как F_a совпадает с функцией расстояния, она автоматически удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1). Проверим, что $A = \{a\}$ является ее носителем. Имеем

$$\inf_{a\in A}\bigl(F_a(a) + |ax|\bigr) = F_a(a) + |ax| = |ax| = F_a(x),$$

что и требовалось.

(2) Следует непосредственно из определения носителя.

(3) Пусть B — носитель функции G, тогда

$$|F_aG| = \sup_{x\in X}\Bigl|\inf_{b\in B}\bigl(G(b) + |xb|\bigr) - |xa|\Bigr| \le \sup_{x\in X}\inf_{b\in B}\bigl(G(b) + |ab|\bigr) = G(a).$$

С другой стороны,

$$|F_aG| \ge \bigl|F_a(a) - G(a)\bigr| = G(a).$$

(4) Если $|F|_A G|_A| < \varepsilon$, то для некоторого $\varepsilon' < \varepsilon$ также выполняется $\bigl|F|_A G|_A\bigr| < \varepsilon'$. Выберем произвольное $x \in X$ и, без ограничения общности, предположим, что $F(x) \ge G(x)$. Пусть также инфимум в формуле (2.2) для $G(x)$ достигается на некотором $b \in A$, тогда

$$\bigl|F(x) - G(x)\bigr| = F(x) - G(x) = \inf_{a\in A}\bigl(F(a) + |ax|\bigr) - \bigl(G(b) + |bx|\bigr) \le$$
$$\le \bigl(F(b) + |bx|\bigr) - \bigl(G(b) + |bx|\bigr) = F(b) - G(b) \le \bigl|F|_A G|_A\bigr| < \varepsilon',$$

откуда $|FG| \le \varepsilon' < \varepsilon$.

(5) Снова выбираем $\varepsilon' < \varepsilon$ так, чтобы оба неравенства имели место при замене ε на ε'. Берем произвольное $x \in X$, предполагаем, без ограничения общности, что

$F(x) \ge G(x)$, а также что инфимум в формуле (2.2) для $G(x)$ достигается на некотором $b = \nu(a) \in B$, тогда

$$\begin{aligned}\bigl|F(x) - G(x)\bigr| = F(x) - G(x) = \inf_{a' \in A}\bigl(F(a') + |a'x|\bigr) - \bigl(G(b) + |bx|\bigr) \le \\ \le \bigl(F(a) + |ax|\bigr) - \bigl(G(b) + |bx|\bigr) \le F(a) - G(b) + |ab| < 2\varepsilon',\end{aligned}$$

откуда $|FG| \le 2\varepsilon' < 2\varepsilon$. □

Скажем, что функция $F \in E(X)$ с носителем $A \subset X$ *находится в общем положении*, если или носитель одноточечный, $A = \{a\}$, и $F(a) > 0$, или $\#A \ge 2$ и на носителе, то есть для функции $F|_A$, оба неравенства в условии (2.1), при несовпадающих x и x' из A, — строгие. В частности, функция $F|_A$ везде положительна (если $F(x) = 0$ при некотором $x \in A$, то для $x' \ne x$, $x' \in A$, имеем $\bigl|F(x')\bigr| < |xx'| < \bigl|F(x')\bigr|$, противоречие).

Следующее утверждение тривиально.

Предложение 2.19. *Пусть $F \in E(X)$ — функция общего положения с носителем A, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что каждая функция $g\colon A \to \mathbb{R}$ с $\bigl|F|_A g\bigr| < \varepsilon$ удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1), поэтому для нее определено продолжение Макшейна–Уитни, которые мы обозначим через G, и, значит, $G \in E(X)$. В частности, для такой F и любого $\varepsilon > 0$ существует $G \in E(X)$ с носителем A, для которой $|FG| < \varepsilon$ и все значения функции $G|_A$ — рациональные числа.*

Предложение 2.20. *Для каждой функции $F \in E(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция общего положения $G \in E(X)$ с тем же носителем, причем такая, что $|FG| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть A — носитель функции F. Выберем произвольные числа $M > \frac{1}{2}\max\bigl\{|aa'| : a, a' \in A\bigr\}$, $t \in (0,1)$, и положим $g = (1-t)F + t\,M$. Если $A = \{a\}$, то $g(a) = (1-t)F(a) + t\,M > 0$. Если $\#A \ge 2$, то для любых $a, a' \in A$, $a \ne a'$, имеем

$$\bigl|g(a) - g(a')\bigr| = \Bigl|(1-t)\bigl(F(a) - F(a')\bigr)\Bigr| \le (1-t)|aa'| < |aa'|$$

и

$$g(a) + g(a') = (1-t)\bigl(F(a) + F(a')\bigr) + 2t\,M > (1-t)|aa'| + t|aa'| = |aa'|,$$

т.е. g удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1), причем оба неравенства в этих условиях строгие. В силу предложения 2.15, продолжение Макшейна-Уитни G функции g удовлетворяет (2.1) и, значит, принадлежит $E(X)$. Кроме того, G, в силу сказанного выше, находится в общем положении. Выбрав t достаточно близким к 0, добьемся того, чтобы выполнялось $\bigl|g(a) - F(a)\bigr| < \varepsilon$ при каждом $a \in A$. В силу предложения 2.18, имеем $|FG| < \varepsilon$. □

Предложение 2.21. *Пусть S — всюду плотное подмножество метрического пространства X, тогда для каждой $F \in E(X)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $G \in E(X)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $|FG| < \varepsilon$;

(2) *носитель B функции G лежит в S;*

(3) *все значения функции $G|_B$ рациональны.*

Доказательство. Пусть A — носитель функции F. Если $\#A = 1$, то положим $\delta = 1$. Если же $\#A \ge 2$, то в качестве δ возьмем наименьшее расстояние между различными точками в A, так что и в этом случае δ положительно. Выберем для каждой точки $a \in A$ точку $b \in S$ такую, что $|ab| < \min\{\varepsilon, \delta\}/4$, и положим $\nu\colon a \mapsto b$. Ясно, что разным точкам соответствуют разные точки $\nu(a)$, так что $B = \bigl\{\nu(a)\bigr\}_{a\in A}$ равномощно A, и ν — биекция между A и B, причем $\bigl|a\nu(a)\bigr| < \varepsilon/4$ при всех $a \in A$. Положим $g' = F|_B$. Так как F является 1-липшицевой, то

$$\Bigl|F(a) - g'\bigl(\nu(a)\bigr)\Bigr| = \Bigl|F(a) - F\bigl(\nu(a)\bigr)\Bigr| \le \bigl|a\nu(a)\bigr| < \varepsilon/4.$$

По предложению 2.18, продолжение Макшейна–Уитни G' функции g' удовлетворяет $|FG'| < \varepsilon/2$. По предложению 2.20, существует функция общего положения $G'' \in E(X)$ с носителем B и такая, что $|G'G''| < \varepsilon/4$. Наконец, по предложению 2.19 существует функция $G \in E(X)$ с носителем B, для которой $|G''G| < \varepsilon/4$ и все значения ограничения $G|_B$ — рациональны. Ясно, что G — искомая функция. $\square$

В следующем утверждении существенно используется тот факт, что мы рассматриваем только те функции $F \in E(X)$, которые имеют конечные носители.

Предложение 2.22. *Предположим, что X — сепарабельное метрическое пространство, тогда $E(X)$ также сепарабельно.*

Доказательство. Выберем в X всюду плотное не более чем счетное подмножество S. Пусть $\mathcal{P}_\infty(S)$ обозначает семейство всех конечных непустых подмножеств множества S, тогда $\mathcal{P}_\infty(S)$ — не более чем счетное множество. Для каждого $A \in \mathcal{P}_\infty(S)$ обозначим через $E^{\mathbb{Q}}_A(X)$ семейство всех функций из $E(X)$ с носителем A и принимающих на A только рациональные значения. Ясно, что $E^{\mathbb{Q}}_A(X)$ — не более чем счетное множество. Положим $E^{\mathbb{Q}}_S(X) = \cup_{A\in\mathcal{P}_\infty(S)} E^{\mathbb{Q}}_A(X)$, тогда $E^{\mathbb{Q}}_S(X)$ — не более чем счетное множество. По предложению 2.21, для каждой функции $F \in E(X)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $G \in E^{\mathbb{Q}}_S(X)$, для которой $|FG| < \varepsilon$, так что $E^{\mathbb{Q}}_S(X)$ всюду плотно в $E(X)$ и, значит, $E(X)$ — сепарабельное. $\square$

Наконец, все готово для доказательства основной теоремы этого раздела.

Теорема 2.23. *Пространство Урысона существует.*

Доказательство. Начнем с произвольного сепарабельного метрического пространства X_0 и построим башню $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ метрических пространств так: если для $n \ge 0$ пространство X_n уже построено, то положим $X_{n+1} = E(X_n)$. По предложению 2.18, отображении $x \mapsto F_x$ из X_n в $E(X_n)$ изометрично и позволяет отождествить X_n с его изометричным образом в $E(X_n)$, поэтому можно считать, что $X_n \subset X_{n+1}$. Положим $X = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$ и пусть $\bar{X}$ — пополнение X. Так как каждое X_n сепарабельно, то $\bar{X}$ — польское метрическое пространство. Покажем, что $\bar{X}$ — пространство Урысона.

Для этого возьмем произвольное конечное подмножество $A = \{x^1, \dots, x^k\} \subset \bar{X}$ и рассмотрим любое одноточечное расширение A, заданное функцией $f \in E(A)$. Мы должны показать, что существует $y \in \bar{X}$ такое, что $f(x^i) = |yx^i|$ при всех i. Если f

обращается в 0 в некоторой точке, то мы фактически “присоединяем” одну из имеющихся точек, так что A при этом не меняется и, значит, эту точку из A и можно взять в качестве y. Если же $f > 0$, то поступим следующим образом:

(1) построим последовательность множеств $A_n = \{x_n^1, \dots, x_n^k\} \subset X$ такую, что $x_n^i \to x^i$ при $n \to \infty$;

(2) построим фундаментальную последовательность точек $y_n \in X$ такую, что $|x_n^i y_n| \to f(x^i)$ при $n \to \infty$.

Так как $\bar{X}$ — полное пространство, $y_n \to y \in \bar{X}$, причем, в силу непрерывности функции расстояния, имеем $|x_n^i y_n| \to |x^i y|$, так что $|x^i y| = f(x^i)$ при всех i, поэтому y — искомая точка.

Чтобы добиться выполнения условий второго пункта, последовательность A_n будем выбирать более тонко. А именно, положим $c = \min f$, $d = \min\big\{|x^i x^j| : i \neq j\big\}$, и возьмем произвольное $0 < e < \min\{c, d\}/5$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $A_n = \{x_n^1, \dots, x_n^k\} \subset X$ такое, что $|x_n^i x^i| < e/2^n$. Ясно, что условие на e гарантирует не совпадение x_n^i и x_n^j при любых $i \neq j$ и любых $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$|x_n^i x_m^i| \le |x_n^i x^i| + |x^i x_m^i| < e/2^n + e/2^m.$$

Обозначим через $F \in E(\bar{X})$ продолжение Макшейна–Уитни функции f. Так как F является 1-липшицевой функцией, то

$$\big|F(x_n^i) - F(x^i)\big| \le |x_n^i x^i| < e/2^n \quad \text{и} \quad \big|F(x_n^i) - F(x_m^i)\big| \le |x_n^i x_m^i| < e/2^n + e/2^m.$$

Кроме того,

$$F(x_n^i) > F(x^i) - e/2^n > 5e - e/2^n > 4e.$$

Последовательность y_n будем строить следующим образом. Так как $A_n \subset X$, существует m_n такое, что $A_n \subset X_{m_n}$. Более того, без ограничения общности можно считать, что $m_1 < m_2 < \cdots$. Точку y_n будем выбирать из X_{m_n+1}.

Положим $f_1 = F|_{A_1}$, и в качестве y_1 возьмем продолжение Макшейна–Уитни функции f_1 на все X_{m_1}, тогда $y_1 \in E(X_{m_1}) = X_{m_1+1} \subset X \subset \bar{X}$. Заметим также, что, в силу предложения 2.18, имеем $|y_1 x_1^i| = y_1(x_1^i) = F(x_1^i)$.

Предположим, что для $j = 1, \dots, n$ построены точки $y_j \in X_{m_j+1}$, для которых $|y_j x_j^i| = F(x_j^i)$ при всех i. Построим $y_{n+1} \in X_{m_{n+1}+1}$ такую, что $|y_{n+1} x_{n+1}^i| = F(x_{n+1}^i)$. Заметим сначала, что конструкция из предложения 2.18 изометрично вкладывает $A_n \subset X_{m_n}$ в X_{m_n+1}. Обозначив образы точек x_n^i и образ множества A_n теми же символами, получим $A_n \cup \{y_n\} \subset X_{m_n+1}$.

Так как X_p изометрично вкладывается в X_{p+1} при всех p, множество $A_n \cup \{y_n\}$ можно отождествить с его образом в $X_{m_{n+1}}$. Отметим, что и множество A_{n+1} лежит в $X_{m_{n+1}}$. Покажем, что $y_n \notin A_{n+1}$. Действительно,

$$|y_n x_{n+1}^i| \ge |x_n^i y_n| - |x_{n+1}^i x_n^i| \ge F(x_n^i) - e/2^{n-1} > 4e - e/2^{n-1} > 0$$

при всех i, что и требовалось.

Зададим на множестве $A_{n+1} \cup \{y_n\}$ функцию f_{n+1} так: $f_{n+1}|_{A_{n+1}} = F|_{A_{n+1}}$; в качестве $f_{n+1}(y_n)$ возьмем произвольное число $\alpha \in \big(e/2^{n-2}, e/2^{n-3}\big)$. Проверим, что f_{n+1} удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1). Для этого достаточно выяснить, что

$$\big|F(x^i_{n+1}) - \alpha\big| \le |x^i_{n+1}y_n| \le F(x^i_{n+1}) + \alpha.$$

Заметим, что

$$\big||x^i_{n+1}y_n| - |x^i_n y_n|\big| \le |x^i_{n+1}x^i_n| < e/2^{n-1},$$

поэтому

$$|x^i_{n+1}y_n| \le |x^i_n y_n| + e/2^{n-1} = F(x^i_n) + e/2^{n-1} < F(x^i_{n+1}) + e/2^{n-2} < F(x^i_{n+1}) + \alpha.$$

С другой стороны,

$$|x^i_{n+1}y_n| \ge |x^i_n y_n| - |x^i_{n+1}x^i_n| \ge F(x^i_n) - e/2^{n-1} \ge \\ \ge F(x^i_{n+1}) - e/2^{n-2} > F(x^i_{n+1}) - \alpha = \big|F(x^i_{n+1}) - \alpha\big|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что $F(x^i_{n+1}) > 4e \ge e/2^{n-3} > \alpha$.

В качестве y_{n+1} возьмем продолжение Макшейна–Уитни функции f_{n+1} на все $X_{m_{n+1}}$, тогда $y_{n+1} \in E(X_{m_{n+1}})$. По предложению 2.18,

$$|y_n y_{n+1}| = y_{n+1}(y_n) = f_{n+1}(y_n) = \alpha < e/2^{n-3}.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $y_1, y_2, \ldots$ — фундаментальна. Кроме того, $|y_n x^i_n| = F(x^i_n)$, поэтому $|y_n x^i_n| \to F(x_i) = f(x_i)$ в силу непрерывности функции F и тому, что $x^i_n \to x_i$ при $n \to \infty$. Как было отмечено выше, это построение и завершает доказательство. $\square$

Замечание 2.24. В [5] рассматривается последовательность $y_n \in E(X_{m_n+1})$, где y_n — продолжение Макшейна–Уитни функции $F|_{A_n}$, и утверждается, что эта последовательность фундаментальна. На самом деле, это — неверно. Действительно, $y_{n+1}(y_n) = \min_i\big\{F(x^i_n) + |x^i_n y_n|\big\} \ge \min_i F(x^i_n)$, но $\min_i F(x^i_n) \to \min f$, а величина $\min f$ может быть положительна, и тогда последовательность y_n не фундаментальна.

Напомним, что *серединой* между точками x и y метрического пространства X называется каждая точка $z \in X$ такая, что $|xz| + |yz| = |xy|$. Метрическое пространство X называется *геодезическим*, а его метрика — *строго внутренней*, если любые две точки соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками. Хорошо известно [10], что если в полном метрическом пространстве для любых двух точек существует середина, то это пространство геодезическое. Ясно, что пространство Урысона обладает этим свойством. Таким образом, доказан следующий результат.

Следствие 2.25. *Пространство Урысона — геодезическое.*

Задача 2.26. Выяснить, является ли геодезическим пространство $\mathcal{K}(\mathcal{U})$ всех непустых компактных подмножеств универсального пространства Урысона $\mathcal{U}$, наделенное метрикой Хаусдорфа.