Тема 1

Топология польских пространств.

На сей раз мы будем изучать метрические тройки Громова или mm-пространства [1], см. также английский дополненный вариант в [2], т.е. тройки (X, ρ, μ), где X — топологическое пространство, ρ — метрика, порождающая топологию пространства X, и μ — борелевская мера. Как правило, X будет польским пространством, т.е. гомеоморфным полному сепарабельному метрическому пространству. Далее, ρ будет некоторой полной метрикой на X. Топология пространства X порождает борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}_X$ и, тем самым, позволяет рассматривать X как измеримое пространство. Мера μ предполагается определенной на $\mathcal{B}_X$ и, как правило, или конечной, или σ-конечной, где последнее означает, что пространство X покрывается счетным числом борелевских подпространств $X_i \in \mathcal{B}_X$, для которых $\mu(X_i) < \infty$.

Мы обсудим некоторые факты, описывающие возможные топологии польских пространств, т.е. как для этих пространств выглядят их классы гомеоморфности. Здесь описание оказывается достаточно сложным, и мы приведем лишь ряд наиболее простых примеров. Затем мы обсудим классификацию измеримых пространств $(X, \mathcal{B}_X)$ с точностью до измеримого изоморфизма. На самом деле, мы приведем более общий результат, а именно, мы расширим класс объектов, добавив к польским пространствам все их борелевские подмножества. Такие подмножества, вместе с индуцированными на них борелевскими σ-алгебрами, называются *борелевскими пространствами.* Оказывается, можно легко описать классы измеримой изоморфности борелевских пространств (теорема Куратовского), что даст нам соответствующее описание и для польских пространств. Впрочем, для доказательства теоремы Куратовского нам потребуется развить некоторую технику. Наконец, для пространств с мерой, в нашем случае для $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, мы будем изучать классы изоморфизма таких пространств (эти изоморфизмы сохраняют не только σ-алгебры, но и меры). Оказывается, даже с условием на меру, классификация таких пространств достаточно проста (Рохлин). Как отметил Вершик, устройство пространства метрических троек оказывается, в отличие от рассмотренных выше классификаций, и не тривиальным, и вполне обозримым. Основным источником описанного выше материала будет служить [3].

1.1 Польские пространства

Топологическое пространство называется *польским*, если оно гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству. Иными словами, если оно — сепарабельное и метризуемое полной метрикой.

Пример 1.1. Приведем некоторые простые примеры польских пространств.

(1) Каждое не более чем счетное дискретное пространство является польским. Действительно, оно метризуется, скажем, функцией расстояния, равной 1 между любыми различными точками. Эта метрика полная, так как в таком пространстве фундаментальными являются только стационарные последовательности, а каждая такая последовательность сходится. Оно сепарабельно, так как само является не более чем счетным плотным подмножеством.

(2) Вещественная прямая $\mathbb{R}$, арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, куб I^n, где $I = [0, 1]$, — польские. В качестве счетного всюду плотного подмножества можно взять множество всех точек с рациональными координатами.

(3) Любое замкнутое подмножество польского пространства само является польским. Действительно, в метрических пространствах наследуется подмножествами свойство сепарабельности. С другой стороны, подмножество полного метризуемого пространства — полное, если и только если оно — замкнутое.

(4) Несвязное объединение последовательности польских пространств — польское. Напомним, что если d — метрика на множестве X, то $\rho = \min\{d, 1\}$ также является метрикой на X, причем метрические топологии этих метрик совпадают. Кроме того, последовательность точек фундаментальна в одной из этих метрик тогда и только тогда, когда она фундаментальна в другой. Отсюда вытекает, что d и ρ одновременно являются или не являются полными. Таким образом, если сепарабельное топологическое пространство X метризуется полной метрикой, то оно также метризуется другой полной метрикой, в которой диаметр $\operatorname{diam} X$ этого пространства не превосходит 1.

    Итак, пусть дана последовательность X_n польских пространств. Метризуем пространство X_n полной метрикой d_n так, чтобы $\operatorname{diam} X_n \le 1$. Но тогда, задав между точками разных X_n расстояние, равное 1, мы продолжим метрики d_n до некоторой метрики d на $X = \sqcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Ясно, что последовательность в X является фундаментальной, если, начиная с некоторого момента, она целиком лежит в одном из X_n. Отсюда вытекает, что метрика d — полная. В качеств счетного всюду плотного подмножества X можно взять объединение таких подмножеств во всех X_n.

    Аналогичные рассуждения имеют место и для несвязного объединения конечного числа польских пространств.

(5) Произведение последовательности X_n польских пространств тоже польское пространство. Действительно, введем на пространствах X_n полные метрики d_n, в которых $\operatorname{diam} X_n \le 1$, и рассмотрим на $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ функцию расстояния $d = \sum_{n=1}^{\infty} d_n / 2^n$.

Упражнение 1.2. Покажите, что d является полной метрикой на X, порождающей топологию произведения (тихоновскую топологию).

Сепарабельность полученного пространства вытекает из следующих упражнений.

Упражнение 1.3. Покажите, что метрическое пространство сепарабельно, если и только если оно имеет счетную предбазу.

Упражнение 1.4. Докажите, что произведение счетного числа метрических пространств со счетной базой имеет счетную предбазу.

(6) В частности, пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, гильбертов куб $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$, а также канторов дисконтинуум $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — польские пространства.

Упражнение 1.5. Докажите, что канторов дисконтинуум гомеоморфен $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

1.1.1 G_δ-подмножества и польские пространства

Напомним, что подмножество топологического пространства X *относится к классу G_δ* или *является G_δ-множеством в X*, если оно представляет собой не более чем счетное пересечение открытых подмножеств X.

Упражнение 1.6. Пусть X — топологическое пространство. Докажите следующие утверждения.

(1) Если X — метризуемо, то каждое замкнутое подмножество X является G_δ-множеством.

(2) Если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность G_δ-подмножеств X, то $\cap_{i=1}^{\infty} X_i$ — также G_δ-множество в X.

(3) Если $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ — конечное семейство G_δ-подмножеств X, то $\cup_{i=1}^{n} X_i$ — также G_δ-множество в X.

(4) Если $Y \subset X$ — некоторое G_δ-множество в X, и Z — топологическое пространство, то $Y \times Z$ является G_δ-множеством в $X \times Z$.

(5) Если $Z \subset Y \subset X$ таковы, что Y является G_δ-множеством в X, а Z является G_δ-множеством в Y, то Z является G_δ-множеством в X.

(6) Если $Z \subset Y \subset X$ таковы, что Z является G_δ-множеством в X, то Z является G_δ-множеством и в Y.

(7) Если $A \subset X$, Y — топологическое пространство, и $f\colon A \to Y$ — непрерывное отображение, причем $f(A)$ является G_δ-множеством в Y, то A также является G_δ-множеством в X.

Теорема 1.7 (П.С.Александров)**.** *Каждое G_δ-подмножество польского пространства само является польским.*

Доказательство. Пусть X — польское пространство и G — произвольное G_δ-подмножество X. Метризуем топологическое пространство X полной метрикой d. Пусть сначала $G \subset X$ — непустое открытое множество. Определим отображение $f\colon G \to X \times \mathbb{R}$, положив

$$f(x) = \left(x,\ \frac{1}{d(x, X \setminus G)}\right).$$

Ясно, что f взаимно-однозначно с образом и непрерывно. Кроме того, обратное отображение совпадает с проекцией на первый сомножитель и, значит, также непрерывно. Таким образом, f — гомеоморфизм с образом.

Покажем, что $f(G)$ — замкнутое подмножество в $X \times \mathbb{R}$. Для этого достаточно проверить, что для каждой последовательности $(x_n, y_n) \in f(G)$, сходящейся в $X \times \mathbb{R}$ к (x, y), выполняется $(x, y) \in f(G)$. Действительно, по определению отображения f, имеем $y_n = 1/d(x_n, X \setminus G)$. Так как $y_n \to y \in \mathbb{R}$, то $d(x_n, X \setminus G) \to 1/y \neq 0$ (здесь $1/0 = \infty$). С другой стороны, $x_n \to x$ и функция $g(z) = d(z, X \setminus G)$ непрерывна, поэтому $1/y = d(x, X \setminus G) \neq 0$, так что $x \in G$ и, значит, $(x, y) \in f(G)$.

Так как пространство $X \times \mathbb{R}$ метризуемо некоторой полной метрикой ρ, а $f(G)$ — замкнуто, значит, в метрике, индуцированной ρ, множество $f(G)$ — полное метрическое пространство. Если X еще и сепарабельно, т.е. X — польское пространство, то $X \times \mathbb{R}$ также сепарабельно. Так как $X \times \mathbb{R}$ —метризуемо, а подмножество сепарабельного метрического пространства также сепарабельно (убедитесь в этом), то пространство $f(G)$ — сепарабельное и, учитывая доказанное выше, — польское. Осталось вспомнить, что f — гомеоморфизм.

Пусть теперь $G = \cap_{n=1}^\infty G_n$, где каждое G_n — непустое открытое подмножество X (в случае, когда G представляет собой конечное пересечение открытых множеств, некоторые G_n возьмем бесконечное число раз). Построим теперь аналогичное отображение $f\colon G \to X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, положив

$$f(x) = \left(x,\ \frac{1}{d(x, X \setminus G_1)},\ \frac{1}{d(x, X \setminus G_2)}, \dots\right).$$

Те же самые утверждения, с учетом того, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — польское пространство, дают требуемый результат. □

Следствие 1.8. *Пространство $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел — польское.*

Упражнение 1.9. Метризуйте интервал $(0, 1)$ и пространство $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел полными метриками (так, чтобы метрические топологии совпали с индуцированными из $\mathbb{R}$).

Имеет место результат, обратный теореме 1.7. Чтобы его доказать, нам понадобится ряд технических утверждений.

Предложение 1.10. *Пусть W — метризуемое пространство, $A \subset W$, и Z — пространство, метризуемое полной метрикой. Пусть $f\colon A \to Z$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда существует G_δ-множество $B \subset W$ такое, что $A \subset B$, и f продолжается по непрерывности на B.*

Доказательство. Обозначим через $\bar{A}$ замыкание множества A. Метризуем Z полной метрикой ρ. Для каждого $x \in \bar{A}$ определим *осцилляцию функции f в x* следующим образом:

$$O_f(x) = \inf\bigl\{\operatorname{diam} f(A \cap V) : V \subset W \text{ открытая окрестность } x\bigr\}.$$

Так как f непрерывно на A, то $O_f(x) = 0$ в каждом $x \in A$.

Положим

$$B = \{x \in \bar{A} : O_f(x) = 0\}$$

и покажем, что B принадлежит классу G_δ. Для этого заметим, что $O_f(x) < t$, если и только если существует открытая окрестность V точки x, для которой $\operatorname{diam} f(A \cap V) < t$. Отсюда вытекает, что

$$B_t := \{x \in \bar{A} : O_f(x) < t\} = \bigcup \{V \cap \bar{A} : V \subset W \text{ — открыто и } \operatorname{diam} f(A \cap V) < t\}$$

— открытое множество в $\bar{A}$. Так как $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$, то B принадлежит классу G_δ в $\bar{A}$. Но, в силу упражнения 1.6, $\bar{A}$ является G_δ-множеством в W и, в силу того же упражнения, B — G_δ-множество в W.

Равенство нулю осцилляции в точках $x \in B$ приводит к тому, что для каждой последовательности $x_n \in A$, сходящейся к x, последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты метрики ρ, эта последовательность сходится к некоторой точке y, причем, для фиксированного x, точка y не зависит от выбранной последовательности x_n. Более того, так как f непрерывна на A, то для $x \in A$ имеем $y = f(x)$. Продолжим отображение f на B до отображения g, положив $g(x) = y$. Непрерывность g проверяется непосредственно (сделайте это). □

Теорема 1.11 (Лаврентьев)**.** *Пусть X и Y — топологические пространства, метризуемые полными метриками, $A \subset X$, $B \subset Y$, и $f \colon A \to B$ — гомеоморфизм. Тогда f можно продолжить до гомеоморфизма между G_δ-множествами, содержащими соответственно A и B.*

Доказательство. Положим $g = f^{-1}$. По предложению 1.10, отображения f и g продолжаются до непрерывных отображений $f' \colon A' \to Y$ и $g' \colon B' \to X$, где $A' \supset A$ и $B' \supset B$ — некоторые множества класса G_δ. Пусть $\pi \colon Y \times X \to X \times Y$ — перестановка, $\pi \colon (y, x) \mapsto (x, y)$, а $H \subset X \times Y$ и $K \subset X \times Y$ — графики отображений f' и $\pi \circ g'$ соответственно. Положим $A^* = \pi_X(H \cap K)$ и $B^* = \pi_Y(H \cap K)$, где π_X и π_Y — канонические проекции $X \times Y$ на X и Y соответственно.

Так как f' и g' — непрерывные отображения, их графики $H \subset A' \times Y$ и $K \subset X \times B'$ — замкнутые подмножества и, потому, относятся к классу G_δ. С другой стороны, $A' \subset X$ и $B' \subset Y$ являются G_δ-множествами, поэтому, в силу упражнения 1.6, $A' \times Y \subset X \times Y$ и $X \times B' \subset X \times Y$ также относятся к классу G_δ. По упражнению 1.6, H и K являются G_δ-множествами в $X \times Y$, и, по тому же упражнению, $H \cap K$ — также G_δ-множество в $X \times Y$. Еще раз применим то же упражнение и заключим, что $H \cap K$ является G_δ-множеством как в $A' \times Y$, так и в $X \times B'$.

Так как отображения $F \colon x \mapsto \bigl(x, f'(x)\bigr)$ и $G \colon y \mapsto \bigl(g'(y), y\bigr)$ непрерывны на A' и B' соответственно, а $H \cap K$ относится у классу G_δ и в $A' \times Y$, и в $X \times B'$, то, по упражнению 1.6, $A^* = F^{-1}(H \cap K)$ и $B^* = G^{-1}(H \cap K)$ относятся к классу G_δ соответственно в A' и B'. Так как A' и B' являются G_δ-множествами в X и Y соответственно, это же упражнение гарантирует, что A^* и B^* также являются G_δ множествами в X и Y. Осталось заметить, что $f'|_{A^*}$ отображает гомеоморфно A^* на B^* и является продолжением отображения f (проверьте). □

Следствие 1.12. *Подпространство Y пространства X, метризуемого полной метрикой (польского), является метризуемым полной метрикой (польским), если и только если Y относится к классу G_δ.*

Доказательство. Обратное утверждение следствия — теорема 1.7. Чтобы доказать прямое утверждение, воспользуемся теоремой 1.11, положив $A = B = Y$, и выбрав в качестве $f\colon Y \to Y$ тождественное отображение. Тогда, в силу этой теоремы, отображение f можно продолжить на G_δ-множества A' и B', содержащие A и B соответственно, однако $B = Y$ невозможно расширить, поэтому $A' = Y$ и, значит, Y является G_δ-множеством. □

1.1.2 Категории Бэра

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность. Топологическое пространство относится к *первой категории Бэра*, если оно допускает (счетное) покрытие последовательностью нигде не плотных множеств. В противном случае, топологическое пространство относится ко *второй категории Бэра*.

Теорема 1.13 (Бэр)**.** *Полные метрические пространства относятся ко второй категории Бэра, т.е. не покрываются последовательностями нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1.14. *В полном метрическом пространстве пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств — всюду плотно.*

Доказательство. Пусть X — полное метрическое пространство и $U_1, U_2, \ldots$ — произвольная последовательность открытых всюду плотных подмножеств в X. Положим $U = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ и проверим, что U — всюду плотно в X. Последнее эквивалентно тому, что каждое непустое открытое множество $V \subset X$ пересекает U. Так как U_1 всюду плотно в X, то $U_1 \cap V$ — непустое открытое множество, поэтому существует открытый шар B_1 радиуса не больше 1, замыкание которого $\bar{B}_1$ содержится в $U_1 \cap V$. Теперь поступим аналогично с B_1 и U_2, т.е. найдем открытый шар B_2 радиуса меньше, чем $1/2$, замыкание которого $\bar{B}_2$ содержится в непустом открытом множестве $B_1 \cap U_2$. Продолжая этот процесс, мы в результате построим последовательность вложенных замкнутых шаров $\bar{B}_n \subset U_n \cap V$, радиусы которых стремятся к нулю. Ясно, что $\cap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_i$ содержится в $U \cap V$ и, в силу полноты пространства X, — непусто. Последнее и означает, что $U \cap V \neq \emptyset$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть X — полное метрическое пространство, относящееся к первой категории Бэра, тогда существует последовательность замкнутых нигде не плотных множеств $F_n \in X$ такая, что $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Но для каждого n

множество $U_n = X \setminus F_n$ — открыто и всюду плотно в X, причем $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, что противоречит лемме 1.14. $\square$

Напомним, что точка x топологического пространства называется *изолированной*, если $\{x\}$ — открытое множество. Топологическое пространство называется *плотным в себе*, если оно не содержит изолированных точек.

Следствие 1.15. *Каждое плотное в себе счетное топологическое пространство, в частности, пространство* $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел, не может быть метризовано полной метрикой, в частности, не является польским.*

Упражнение 1.16. Пусть X — счетное польское пространство. Покажите, что X не содержит плотных в себе подмножеств.