Геометрия пространств компактов с метриками Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. Метрические тройки Громова

А.О.Иванов, А.А.Тужилин

Оглавление

Тема 1

Топология польских пространств.

На сей раз мы будем изучать метрические тройки Громова или mm-пространства [1], см. также английский дополненный вариант в [2], т.е. тройки (X, ρ, μ), где X — топологическое пространство, ρ — метрика, порождающая топологию пространства X, и μ — борелевская мера. Как правило, X будет польским пространством, т.е. гомеоморфным полному сепарабельному метрическому пространству. Далее, ρ будет некоторой полной метрикой на X. Топология пространства X порождает борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}_X$ и, тем самым, позволяет рассматривать X как измеримое пространство. Мера μ предполагается определенной на $\mathcal{B}_X$ и, как правило, или конечной, или σ-конечной, где последнее означает, что пространство X покрывается счетным числом борелевских подпространств $X_i \in \mathcal{B}_X$, для которых $\mu(X_i) < \infty$.

Мы обсудим некоторые факты, описывающие возможные топологии польских пространств, т.е. как для этих пространств выглядят их классы гомеоморфности. Здесь описание оказывается достаточно сложным, и мы приведем лишь ряд наиболее простых примеров. Затем мы обсудим классификацию измеримых пространств $(X, \mathcal{B}_X)$ с точностью до измеримого изоморфизма. На самом деле, мы приведем более общий результат, а именно, мы расширим класс объектов, добавив к польским пространствам все их борелевские подмножества. Такие подмножества, вместе с индуцированными на них борелевскими σ-алгебрами, называются *борелевскими пространствами.* Оказывается, можно легко описать классы измеримой изоморфности борелевских пространств (теорема Куратовского), что даст нам соответствующее описание и для польских пространств. Впрочем, для доказательства теоремы Куратовского нам потребуется развить некоторую технику. Наконец, для пространств с мерой, в нашем случае для $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, мы будем изучать классы изоморфизма таких пространств (эти изоморфизмы сохраняют не только σ-алгебры, но и меры). Оказывается, даже с условием на меру, классификация таких пространств достаточно проста (Рохлин). Как отметил Вершик, устройство пространства метрических троек оказывается, в отличие от рассмотренных выше классификаций, и не тривиальным, и вполне обозримым. Основным источником описанного выше материала будет служить [3].

1.1 Польские пространства

Топологическое пространство называется *польским*, если оно гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству. Иными словами, если оно — сепарабельное и метризуемое полной метрикой.

Пример 1.1. Приведем некоторые простые примеры польских пространств.

(1) Каждое не более чем счетное дискретное пространство является польским. Действительно, оно метризуется, скажем, функцией расстояния, равной 1 между любыми различными точками. Эта метрика полная, так как в таком пространстве фундаментальными являются только стационарные последовательности, а каждая такая последовательность сходится. Оно сепарабельно, так как само является не более чем счетным плотным подмножеством.

(2) Вещественная прямая $\mathbb{R}$, арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, куб I^n, где $I = [0, 1]$, — польские. В качестве счетного всюду плотного подмножества можно взять множество всех точек с рациональными координатами.

(3) Любое замкнутое подмножество польского пространства само является польским. Действительно, в метрических пространствах наследуется подмножествами свойство сепарабельности. С другой стороны, подмножество полного метризуемого пространства — полное, если и только если оно — замкнутое.

(4) Несвязное объединение последовательности польских пространств — польское. Напомним, что если d — метрика на множестве X, то $\rho = \min\{d, 1\}$ также является метрикой на X, причем метрические топологии этих метрик совпадают. Кроме того, последовательность точек фундаментальна в одной из этих метрик тогда и только тогда, когда она фундаментальна в другой. Отсюда вытекает, что d и ρ одновременно являются или не являются полными. Таким образом, если сепарабельное топологическое пространство X метризуется полной метрикой, то оно также метризуется другой полной метрикой, в которой диаметр $\operatorname{diam} X$ этого пространства не превосходит 1.

    Итак, пусть дана последовательность X_n польских пространств. Метризуем пространство X_n полной метрикой d_n так, чтобы $\operatorname{diam} X_n \leq 1$. Но тогда, задав между точками разных X_n расстояние, равное 1, мы продолжим метрики d_n до некоторой метрики d на $X = \sqcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Ясно, что последовательность в X является фундаментальной, если, начиная с некоторого момента, она целиком лежит в одном из X_n. Отсюда вытекает, что метрика d — полная. В качеств счетного всюду плотного подмножества X можно взять объединение таких подмножеств во всех X_n.

    Аналогичные рассуждения имеют место и для несвязного объединения конечного числа польских пространств.

(5) Произведение последовательности X_n польских пространств тоже польское пространство. Действительно, введем на пространствах X_n полные метрики d_n, в которых $\operatorname{diam} X_n \leq 1$, и рассмотрим на $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ функцию расстояния $d = \sum_{n=1}^{\infty} d_n/2^n$.

Упражнение 1.2. Покажите, что d является полной метрикой на X, порождающей топологию произведения (тихоновскую топологию).

Сепарабельность полученного пространства вытекает из следующих упражнений.

Упражнение 1.3. Покажите, что метрическое пространство сепарабельно, если и только если оно имеет счетную предбазу.

Упражнение 1.4. Докажите, что произведение счетного числа метрических пространств со счетной базой имеет счетную предбазу.

(6) В частности, пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, гильбертов куб $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$, а также канторов дисконтинуум $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ — польские пространства.

Упражнение 1.5. Докажите, что канторов дисконтинуум гомеоморфен $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

1.1.1 G_δ-подмножества и польские пространства

Напомним, что подмножество топологического пространства X *относится к классу G_δ* или *является G_δ-множеством в X*, если оно представляет собой не более чем счетное пересечение открытых подмножеств X.

Упражнение 1.6. Пусть X — топологическое пространство. Докажите следующие утверждения.

(1) Если X — метризуемо, то каждое замкнутое подмножество X является G_δ-множеством.

(2) Если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность G_δ-подмножеств X, то $\cap_{i=1}^{\infty} X_i$ — также G_δ-множество в X.

(3) Если $\{X_i\}_{i=1}^n$ — конечное семейство G_δ-подмножеств X, то $\cup_{i=1}^n X_i$ — также G_δ-множество в X.

(4) Если $Y \subset X$ — некоторое G_δ-множество в X, и Z — топологическое пространство, то $Y \times Z$ является G_δ-множеством в $X \times Z$.

(5) Если $Z \subset Y \subset X$ таковы, что Y является G_δ-множеством в X, а Z является G_δ-множеством в Y, то Z является G_δ-множеством в X.

(6) Если $Z \subset Y \subset X$ таковы, что Z является G_δ-множеством в X, то Z является G_δ-множеством и в Y.

(7) Если $A \subset X$, Y — топологическое пространство, и $f\colon A \to Y$ — непрерывное отображение, причем $f(A)$ является G_δ-множеством в Y, то A также является G_δ-множеством в X.

Теорема 1.7 (П.С.Александров)**.** *Каждое G_δ-подмножество польского пространства само является польским.*

Доказательство. Пусть X — польское пространство и G — произвольное G_δ-подмножество X. Метризуем топологическое пространство X полной метрикой d. Пусть сначала $G \subset X$ — непустое открытое множество. Определим отображение $f\colon G \to X \times \mathbb{R}$, положив

$$f(x) = \left(x,\ \frac{1}{d(x, X \setminus G)}\right).$$

Ясно, что f взаимно-однозначно с образом и непрерывно. Кроме того, обратное отображение совпадает с проекцией на первый сомножитель и, значит, также непрерывно. Таким образом, f — гомеоморфизм с образом.

Покажем, что $f(X)$ — замкнутое подмножество в $X \times \mathbb{R}$. Для этого достаточно проверить, что для каждой последовательности $(x_n, y_n) \in f(X)$, сходящейся в $X \times \mathbb{R}$ к (x, y), выполняется $(x, y) \in f(X)$. Действительно, по определению отображения f, имеем $y_n = 1/d(x_n, X \setminus G)$. Так как $y_n \to y \in \mathbb{R}$, то $d(x_n, X \setminus G) \to 1/y \neq 0$ (здесь $1/0 = \infty$). С другой стороны, $x_n \to x$ и функция $g(z) = d(z, X \setminus G)$ непрерывна, поэтому $1/y = d(x, X \setminus G) \neq 0$, так что $x \in G$ и, значит, $(x, y) \in f(G)$.

Так как пространство $X \times \mathbb{R}$ метризуемо некоторой полной метрикой ρ, а $f(G)$ — замкнуто, значит, в метрике, индуцированной ρ, множество $f(G)$ — полное метрическое пространство. Если X еще и сепарабельно, т.е. X — польское пространство, то $X \times \mathbb{R}$ также сепарабельно. Так как $X \times \mathbb{R}$ —метризуемо, а подмножество сепарабельного метрического пространства также сепарабельно (убедитесь в этом), то пространство $f(G)$ — сепарабельное и, учитывая доказанное выше, — польское. Осталось вспомнить, что f — гомеоморфизм.

Пусть теперь $G = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, где каждое G_n — непустое открытое подмножество X (в случае, когда G представляет собой конечное пересечение открытых множеств, некоторые G_n возьмем бесконечное число раз). Построим теперь аналогичное отображение $f\colon G \to X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, положив

$$f(x) = \left(x,\ \frac{1}{d(x, X \setminus G_1)},\ \frac{1}{d(x, X \setminus G_2)}, \dots\right).$$

Те же самые утверждения, с учетом того, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — польское пространство, дают требуемый результат. $\square$

Следствие 1.8. *Пространство $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел — польское.*

Упражнение 1.9. Метризуйте интервал $(0, 1)$ и пространство $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных числе полными метриками (так, чтобы метрические топологии совпали с индуцированными из $\mathbb{R}$).

Имеет место результат, обратный теореме 1.7. Чтобы его доказать, нам понадобится ряд технических утверждений.

Предложение 1.10. *Пусть W — метризуемое пространство, $A \subset W$, и Z — пространство, метризуемое полной метрикой. Пусть $f\colon A \to Z$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда существует G_δ-множество $B \subset W$ такое, что $A \subset B$, и f продолжается по непрерывности на B.*

Доказательство. Обозначим через $\bar{A}$ замыкание множества A. Метризуем Z полной метрикой ρ. Для каждого $x \in \bar{A}$ определим *осцилляцию функции f в x* следующим образом:

$$O_f(x) = \inf\bigl\{\operatorname{diam} f(A \cap V) : V \subset W \text{ открытая окрестность } x\bigr\}.$$

Так как f непрерывно на A, то $O_f(x) = 0$ в каждом $x \in A$.

Положим

$$B = \{x \in \bar{A} : O_f(x) = 0\}$$

и покажем, что B принадлежит классу G_δ. Для этого заметим, что $O_f(x) < t$, если и только если существует открытая окрестность V точки x, для которой $\operatorname{diam} f(A \cap V) < t$. Отсюда вытекает, что

$$B_t := \{x \in \bar{A} : O_f(x) < t\} = \bigcup\{V \cap \bar{A} : V \subset W \text{ — открыто и } \operatorname{diam} f(A \cap V) < t\}$$

— открытое множество в $\bar{A}$. Так как $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$, то B принадлежит классу G_δ в $\bar{A}$. Но, в силу упражнения 1.6, $\bar{A}$ является G_δ-множеством в W и, в силу того же упражнения, B — G_δ-множество в W.

Равенство нулю осцилляции в точках $x \in B$ приводит к тому, что для каждой последовательности $x_n \in A$, сходящейся к x, последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты метрики ρ, эта последовательность сходится к некоторой точке y, причем, для фиксированного x, точка y не зависит от выбранной последовательности x_n. Более того, так как f непрерывна на A, что для $x \in A$ имеем $y = f(x)$. Продолжим отображение f на B до отображения g, положив $g(x) = y$. Непрерывность g проверяется непосредственно (сделайте это). $\square$

Теорема 1.11 (Лаврентьев)**.** *Пусть X и Y — топологические пространства, метризуемые полными метриками, $A \subset X$, $B \subset Y$, и $f\colon A \to B$ — гомеоморфизм. Тогда f можно продолжить до гомеоморфизма между G_δ-множествами, содержащими соответственно A и B.*

Доказательство. Положим $g = f^{-1}$. По предложению 1.10, отображения f и g продолжаются до непрерывных отображений $f'\colon A' \to Y$ и $g'\colon B' \to X$, где $A' \supset A$ и $B' \supset B$ — некоторые множества класса G_δ. Пусть $\pi\colon Y \times X \to X \times Y$ — перестановка, $\pi\colon (y, x) \mapsto (x, y)$, а $H \subset X \times Y$ и $K \subset X \times Y$ — графики отображений f' и $\pi \circ g'$ соответственно. Положим $A^* = \pi_X(H \cap K)$ и $B^* = \pi_Y(H \cap K)$, где π_X и π_Y — канонические проекции $X \times Y$ на X и Y соответственно.

Так как f' и g' — непрерывные отображения, их графики $H \subset A' \times Y$ и $K \subset X \times B'$ — замкнутые подмножества и, потому, относятся к классу G_δ. С другой стороны, $A' \subset X$ и $B' \subset Y$ являются G_δ-множествами, поэтому, в силу упражнения 1.6, $A' \times Y \subset X \times Y$ и $X \times B' \subset X \times Y$ также относятся к классу G_δ. По упражнению 1.6, H и K являются G_δ-множествами в $X \times Y$, и, по тому же упражнению, $H \cap K$ — также G_δ-множество в $X \times Y$. Еще раз применим то же упражнение и заключим, что $H \cap K$ является G_δ-множеством как в $A' \times Y$, так и в $X \times B'$.

Так как отображения $F\colon x \mapsto \bigl(x, f'(x)\bigr)$ и $G\colon y \mapsto \bigl(g'(y), y\bigr)$ непрерывны на A' и B' соответственно, а $H \cap K$ относится у классу G_δ и в $A' \times Y$, и в $X \times B'$, то, по упражнению 1.6, $A^* = F^{-1}(H \cap K)$ и $B^* = G^{-1}(H \cap K)$ относятся к классу G_δ соответственно в A' и B'. Так как A' и B' являются G_δ-множествами в X и Y соответственно, это же упражнение гарантирует, что A^* и B^* также являются G_δ множествами в X и Y. Осталось заметить, что $f'|_{A^*}$ отображает гомеоморфно A^* на B^* и является продолжением отображения f (проверьте). $\square$

Следствие 1.12. *Подпространство Y пространства X, метризуемого полной метрикой (польского), является метризуемым полной метрикой (польским), если и только если Y относится к классу G_δ.*

Доказательство. Обратное утверждение следствия — теорема 1.7. Чтобы доказать прямое утверждение, воспользуемся теоремой 1.11, положив $A = B = Y$, и выбрав в качестве $f\colon Y \to Y$ тождественное отображение. Тогда, в силу этой теоремы, отображение f можно продолжить на G_δ-множества A' и B', содержащие A и B соответственно, однако $B = Y$ невозможно расширить, поэтому $A' = Y$ и, значит, Y является G_δ-множеством. $\square$

1.1.2 Категории Бэра

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность. Топологическое пространство относится к *первой категории Бэра*, если оно допускает (счетное) покрытие последовательностью нигде не плотных множеств. В противном случае, топологическое пространство относится ко *второй категории Бэра*.

Теорема 1.13 (Бэр)**.** *Полные метрические пространства относятся ко второй категории Бэра, т.е. не покрываются последовательностями нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1.14. *В полном метрическом пространстве пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств — всюду плотно.*

Доказательство. Пусть X — полное метрическое пространство и $U_1, U_2, \ldots$ — произвольная последовательность открытых всюду плотных подмножеств в X. Положим $U = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ и проверим, что U — всюду плотно в X. Последнее эквивалентно тому, что каждое непустое открытое множество $V \subset X$ пересекает U. Так как U_1 всюду плотно в X, то $U_1 \cap V$ — непустое открытое множество, поэтому существует открытый шар B_1 радиуса не больше 1, замыкание которого $\bar{B}_1$ содержится в $U_1 \cap V$. Теперь поступим аналогично с B_1 и U_2, т.е. найдем открытый шар B_2 радиуса меньше, чем $1/2$, замыкание которого $\bar{B}_2$ содержится в непустом открытом множестве $B_1 \cap U_2$. Продолжая этот процесс, мы в результате построим последовательность вложенных замкнутых шаров $\bar{B}_n \subset U_n \cap V$, радиусы которых стремятся к нулю. Ясно, что $\cap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_i$ содержится в $U \cap V$ и, в силу полноты пространства X, — непусто. Последнее и означает, что $U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть X — полное метрическое пространство, относящееся к первой категории Бэра, тогда существует последовательность замкнутых нигде не плотных множеств $F_n \in X$ такая, что $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Но для каждого n

множество $U_n = X \setminus F_n$ — открыто и всюду плотно в X, причем $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, что противоречит лемме 1.14. $\square$

Напомним, что точка x топологического пространства называется *изолированной*, если $\{x\}$ — открытое множество. Топологическое пространство называется *плотным в себе*, если оно не содержит изолированных точек.

Следствие 1.15. *Каждое плотное в себе счетное топологическое пространство, в частности, пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, не может быть метризовано полной метрикой, в частности, не является польским.*

Упражнение 1.16. Пусть X — счетное польское пространство. Покажите, что X не содержит плотных в себе подмножеств.

Тема 2

Универсальные пространства.

Под универсальными пространствами обычно понимают пространства, в которые вкладываются (топологически, изометрично, и т.д.) пространства из некоторого семейства. Мы рассмотрим здесь два типа пространств: универсальные для топологических и изометрических вложений. В следующем разделе мы коснемся также борелевских вложений.

2.1 Универсальные пространства для топологических вложений

В настоящем разделе мы покажем, что все польские пространства топологически вкладываются в гильбертов куб. На самом деле, имеет место даже более общий результат.

Теорема 2.1. *Любое сепарабельное метризуемое пространство X топологически вкладывается в гильбертов куб $\mathcal{H}$.*

Доказательство. В случае одноточечного X утверждение очевидно. Пусть теперь X содержит более одной точки. Выбираем произвольную счетную базу $U_1, U_2, \ldots$ пространства X. Тогда для каждой точки $x \in X$ и каждого $U_j \ni x$ существуют такое $U_i \ni x$, что

$$x \in U_i \subset \bar{U}_i \subset U_j \neq X,$$

(докажите это). Отсюда вытекает, что $\bar{U}_i$ и $X \setminus U_j$ — непустые непересекающиеся замкнутые подмножества метризуемого пространства X.

Лемма 2.2 (Лемма Урысона)**.** *Пусть X — произвольное метризуемое топологическое пространство, а A_0 и A_1 — замкнутые непустые непересекающиеся подмножества X, тогда на X существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, равная 0 на A_0, и 1 на A_1.*

Доказательство. Достаточно положить

$$f(x) = \frac{|xA_0|}{|xA_0| + |xA_1|}.$$

Отметим, что замкнутость и метризуемость гарантирует не обращение в 0 знаменателя в выражении для f. $\square$

В соответствии с леммой 2.2, для каждой пары U_i, U_j такой, что $\bar{U}_i \subset U_j \neq X$ построим непрерывную функцию $f_{ij}\colon X \to [0,1]$, которая на $\bar{U}_i$ равна 0, а на $X \setminus U_j$ равна 1. Так как множество выбранных пар (i,j) счетно, перенумеруем его некоторым образом, и соответствующие функции f_{ij} будем обозначать через f_k, где k — номер пары (i,j).

Рассмотрим отображение

$$F\colon X \to \mathcal{H}, \quad F\colon x \mapsto \big(f_1(x), f_2(x), \dots\big).$$

Так как все координатные функции f_i непрерывны, само отображение F тоже непрерывно (проверьте). Далее, для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует $U_j \ni x$, не содержащее y. Как было отмечено выше, существует $U_i \ni x$ такое, что $\bar{U}_i \subset U_j$. Отсюда вытекает, что функция $f_k = f_{ij}$ различает точки x и y, точнее, $f_k(x) = 0$ и $f_k(y) = 1$. Таким образом, отображение F является инъекцией.

Докажем теперь, что обратное к F отображение $G\colon F(X) \to X$ также непрерывно. Предположим противное, т.е. в некоторой точке $y = F(x)$ отображение G разрывно. Введем на X метрику ρ, согласованную с топологией. Напомним, что на гильбертовом кубе $\mathcal{H}$ имеется стандартная метрика d: если $y = (y^1, y^2, \dots)$ и $z = (z^1, z^2, \dots)$ — точки из $\mathcal{H}$, то $d(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} |y^n z^n|/2^n$. Напомним, что для метрических пространств непрерывность отображения равносильна сохранению сходимости последовательностей. Таким образом, разрывность в точке y означает, что образ некоторой сходящейся к y последовательности точек из $F(X)$ переходит при отображении G в последовательность, содержащую расходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности, будем считать, что существует последовательность $y_p \in F(X)$, $y_p \to y$, такая, что последовательность $x_p \in X$, $y_p = F(x_p)$, лежит от x на расстоянии большем, чем некоторое $\delta > 0$. Выбираем $U_j \ni x$ так, чтобы все x_p лежали вне U_j; выбираем $U_i \ni x$ такую, что $\bar{U}_i \subset U_j$; рассматриваем соответствующую функцию $f_k = f_{ij}$. Имеем $f_k(x) = 0$ и $f_k(x_p) = 1$ для всех p. Таким образом, у точек $y_p = F(x_p)$ и $y = F(x)$ их k-ые координаты различаются на 1, поэтому $d(y_p, y) \geq 1/2^k$, что противоречит сходимости последовательности y_p к y. $\square$

Теорема 2.1, вместе со следствием 1.12 и упражнением 1.6, приводит к следующему результату.

Следствие 2.3. *Топологическое пространство — польское, если и только если оно гомеоморфно G_δ-подмножеству гильбертова куба $\mathcal{H}$.*

2.2 Универсальные пространства для изометрических вложений

Выше мы показали, что гильбертов куб является универсальным пространством для польских пространств: каждое польское пространство топологически вкладывается в гильбертов куб. Тем не менее, если фиксировать на польском пространстве некоторую полную метрику, согласованную с топологией, то про изометричное вложение приведенные выше результаты ничего не говорят.

Для таких вложений вполне подходит банахово пространство ℓ_∞, составленное из всех ограниченных последовательностей, расстояние между которыми задается sup-нормой: если $x = (x^1, x^2, \ldots)$, то $\|x\| = \sup_n |x^n|$. Приводимое ниже вложение было построено Фреше.

Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Выбираем в всюду плотную последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ (некоторые x_i могут совпадать). Также фиксируем некоторую точку x_0. Тогда, как оказывается (проверьте), отображение $x \mapsto \big(|xx_1| - |x_0x_1|, |xx_2| - |x_0x_2|, \ldots\big)$ задает изометричное вложение X в ℓ_∞.

Теорема 2.4. *Каждое сепарабельное метрическое пространство изометрично вкладывается в ℓ_∞.*

Сейчас мы опишем еще одно универсальное пространство, в которое изометрично вкладываются все польские пространства. Это пространство было построено Урысоном и, по сравнению с ℓ_∞, имеет существенно большую группу изометрий: если в это пространство изометрично вложить некоторое компактное метрическое пространство, то каждая изометрия между образами этого пространства продолжается до изометрии всего пространства Урысона. Кроме того, пространство Урысона — сепарабельное, в отличие от ℓ_∞.

2.2.1 Пространство Урысона

Начнем с аксиоматического определения пространства Урысона.

Определение 2.5. Польское пространство $\mathcal{U}$ называется *универсальным пространством Урысона* (или, короче, *пространством Урысона*), если оно обладает свойством *конечной инъективности*: для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждой пары (X_n, X_{n+1}), где X_{n+1} — произвольное $(n+1)$-точечное метрическое пространство, X_n — любое его n-точечное подмножество, а также любого изометричного отображения $f_n \colon X_n \to \mathcal{U}$, существует продолжающее f_n изометричное отображение $f_{n+1} \colon X_{n+1} \to \mathcal{U}$.

Ниже мы докажем, что универсальное пространство Урысона существует и единственно с точностью до изометрии.

Упражнение 2.6. Докажите следующие утверждения:

(1) каждое не более чем счетное метрическое пространство изометрично вкладывается в пространство Урысона;

(2) каждое сепарабельное, в частности, польское метрическое пространство, изометрично вкладывается в пространство Урысона.

Докажем теперь, что пространство Урысона, если существует, то определено однозначно с точностью до изометрии, см. [2].

Теорема 2.7. *Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — пространства Урысона, тогда они изометричны.*

Доказательство. Выберем в $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ всюду плотные последовательности $(x_1, x_2, \dots)$ и $(y_1, y_2, \dots)$ соответственно. Будем шаг за шагом определять отображения f и g. Положим $f(x_1) = y_1$ и $g(y_1) = x_1$. Продолжим f до изометричного отображения из $\{x_1, x_2\}$ в $\mathcal{U}_2$. Отображение g определим на $\big\{y_1, f(x_2)\big\}$ равным f^{-1}. Продолжим g до изометричного отображения из $\big\{y_1, f(x_2), y_2\big\}$ в $\mathcal{U}_1$. Ясно, что ограничение нового g^{-1} на $\{x_1, x_2\}$ совпадает с f. Продолжим это f на $g(y_2)$ до g^{-1}, а затем еще продолжим f до изометричного отображения из $\{x_1, x_2, g(y_2), x_3\}$ в $\mathcal{U}_2$. И так далее. В результате мы построим изометрию между некоторой последовательностью $(x_1', x_2', \dots)$ из $\mathcal{U}_1$, содержащей подпоследовательность $(x_1, x_2, \dots)$, и некоторой последовательностью $(y_1', y_2', \dots)$ из $\mathcal{U}_2$, содержащей подпоследовательность $(y_1, y_2, \dots)$. Ясно, что обе штрихованные последовательности всюду плотны, поэтому, так как оба пространства $\mathcal{U}_i$ полные, мы можем продолжить построенные отображения до взаимно обратных изометричных отображений $f\colon \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ и $g\colon \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$, т.е. до изометрий. □

Аналогичным образом доказывается следующее свойство пространства Урысона.

Теорема 2.8. *Пусть $X, Y \subset \mathcal{U}$ — изометричные конечные подмножества пространства Урысона $\mathcal{U}$, и $f\colon X \to Y$ — некоторая изометрия. Тогда f продолжается до изометрии $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.*

Замечание 2.9. Как мы уже отмечали, теорема 2.8 останется верной, если в качестве X и Y выбрать произвольные компакты, см. [6] и [7].

Докажем теперь существование пространства Урысона. Приводимые здесь построения были предложены Катетовым [8]. Приводимое нами изложения существенно опирается на [5].

Мы начнем с более удобной переформулировки конструкции одноточечного расширения метрического пространства. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Мы хотим добавить одну точку y и продолжить метрику с X до метрики на $X \sqcup \{y\}$. Для этого нужно задать расстояния от y до точек из X так, чтобы полученная функция $f\colon X \to (0, \infty)$ *удовлетворяла неравенствам треугольника*: для любых $x, x' \in X$ имеем

$$\big|f(x) - f(x')\big| \le |xx'| \le f(x) + f(x'). \tag{2.1}$$

Отметим, что первое условие есть ни что иное как 1-липшицевость функции f.

Замечание 2.10. Семейство всех функций на метрическом пространстве X, удовлетворяющих условиям (2.1), выпукло, т.е. замкнуто относительно линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами, равными в сумме 1 (проверьте).

Таким образом, множество всех одноточечных расширений метрического пространства X отождествляется с семейством функций, удовлетворяющих условиям (2.1). Однако для построения пространства Урысона нам понадобятся не все такие расширения, а лишь те, которые можно построить каноническим образом по значениям функции f на некоторых конечных подмножествах X, называемых (не совсем удачно) носителями функции f. Такое каноническое продолжение используется в доказательстве знаменитой теоремы Макшейна–Уитни, описывающей продолжения липшицевых отображений.

Теорема 2.11 (Макшейн, Уитни)**.** *Пусть $A \subset X$ — непустое подмножество метрического пространства, $L \ge 0$, и $f\colon A \to \mathbb{R}$ — некоторая L-липшицева функция. Тогда f может быть продолжена до L-липшицевой функции $F\colon X \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для каждого $a \in A$ определим функцию $f_a\colon X \to \mathbb{R}$, положив

$$f_a(x) = f(a) + L\,|xa|.$$

Лемма 2.12. *Каждая функция f_a является L-липшицевой.*

Доказательство. Имеем

$$\big|f_a(x) - f_a(y)\big| = L\big||xa| - |ya|\big| \le L\,|xy|,$$

что и требовалось. □

Из определения функции f_a и L-липшицевости функции f вытекает, что $f_a(a) = f(a)$, и для каждого $b \in A$ выполняется

$$f_b(a) = f(b) + L\,|ab| \ge f(a) = f_a(a),$$

т.е. в точке $a \in A$ значение функции f_a не превосходит значений всех остальных функций f_b, $b \in A$.

Положим $F(x) = \inf_{a\in A} f_a(x)$. Из сказанного выше вытекает, что для каждого $a \in A$ выполняется $F(a) = \inf_{b\in A} f_b(a) = f_a(a) = f(a)$, т.е. F действительно продолжает f.

Лемма 2.13. *Пусть на множестве W заданы две функции $g, h\colon W \to \mathbb{R}$, причем их инфимумы конечны. Тогда*

$$\inf_W g - \inf_W h \le \sup_W (g - h).$$

Доказательство. Действительно,

$$\inf_W g - \inf_W h = \sup_{w'\in W}\Big(\inf_{w\in W} g(w) - h(w')\Big) \le \sup_{w'\in W}\big(g(w') - h(w')\big).$$

□

Применим лемму 2.13 к нашему случаю. Имеем

$$F(x) - F(y) = \inf_{a\in A} f_a(x) - \inf_{a\in A} f_a(y) \le \sup_{a\in A}\big(f_a(x) - f_a(y)\big) \le L\,|xy|,$$

где последнее неравенство вытекает из леммы 2.12. Таким образом, функция F является L-липшицевой, что и требовалось. □

Запишем в явном виде продолжение $F\colon X \to \mathbb{R}$ для 1-липшицевой функции $f\colon A \to \mathbb{R}$, определенной на непустом $A \subset X$:

$$F(x) = \inf_{a\in A}\big(f(a) + |ax|\big). \tag{2.2}$$

Как видно из формулы (2.2), продолжение F определяется по значениям функции f на множестве A однозначно. Множество A будем называть *носителем функции F*, а функцию F — *продолжением Макшейна–Уитни функции f*.

Упражнение 2.14. Докажите, что если $A \subset X$ — носитель некоторой 1-липшицевой функции $F\colon X \to \mathbb{R}$, то каждое $B \subset X$, $B \supset A$, также является носителем F.

Предложение 2.15. *Пусть A — непустое конечное подмножество метрического пространства X, и $f\colon A \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая неравенствам треугольника* (2.1). *Обозначим через F продолжение Макшейна–Уитни функции f на все X. Тогда F также удовлетворяет неравенствам треугольника* (2.1).

Доказательство. То, что F является 1-липшицевой, следует из теоремы 2.11. Проверим теперь выполнение второго неравенства. Выберем произвольные $x, x' \in X$ и предположим, без ограничения общности, что $F(x) \ge F(x')$. Пусть $a \in A$ и $b \in A$ — точки, на которых достигаются инфимумы в формуле (2.2) для $F(x)$ и $F(x')$ соответственно, тогда

$$F(x) + F(x') = \big(f(a) + |ax|\big) + \big(f(b) + |bx'|\big) \ge |ax| + |bx'| + |ab| \ge |xx'|,$$

где предпоследнее неравенство имеет место в силу того, что функция f удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1). □

Упражнение 2.16. Докажите предложение 2.15 для произвольного, не обязательно конечного A.

Итак, пусть X — произвольное метрическое пространство. Через $E(X)$ обозначим множество функций $F\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (2.1) и имеющих конечные носители, т.е. задающихся по формуле (2.2) для некоторых конечных множеств $A \subset X$, где f — ограничение F на A.

Определим на $E(X)$ функцию расстояния с помощью sup-нормы: для $F, G \in E(X)$ положим

$$|FG| = \sup_{x \in X} \big|F(x) - G(x)\big|.$$

Предложение 2.17. *Определенная только что функция расстояния на $E(X)$ конечна и является метрикой.*

Доказательство. Пусть A и B — носители соответственно функций F и G из $E(X)$. Так как A и B конечны, для каждого конкретного $x \in X$ инфимум в формуле (2.2) для функций F и G достигается на некоторых $a_x \in A$ и $b_x \in B$ соответственно. Имеем

$$F(x) - G(x) = \big(F(a_x) + |a_x x|\big) - \big(G(b_x) + |b_x x|\big) \le F(a_x) - G(b_x) + |a_x b_x|.$$

Аналогичная оценка имеет место и для $G(x) - F(x)$. Отметим, что правые части этих двух оценок также не превосходят некоторых положительных констант, не зависящих от выбора x. Таким образом, мы показали, что $|FG| < \infty$. Положительная определенность, симметричность и неравенство треугольника для этого расстояния показывается стандартным образом. □

Предложение 2.18. *Для $a \in X$ обозначим через F_a функцию $F_a(x) = |ax|$.*

(1) *Функция F_a удовлетворяет неравенствам треугольника* (2.1) *и $A = \{a\}$ является одним из ее носителей, поэтому $F_a \in E(X)$.*

(2) *Носитель функции $F \in E(X)$ — одноточечный, скажем, равный $A = \{a\}$, если и только если существует неотрицательное число c такое, что $F(x) = c + |ax|$. Таким образом, F_a является частным случаем функций с одноточечным носителем и выделяется условием $c = 0$.*

(3) *Для любой функции $G \in E(X)$ и любого $a \in X$ имеем $|F_aG| = G(a)$, в частности, $|F_aF_b| = |ab|$, т.е. отображение $a \mapsto F_a$ является изометрическим вложением $X \to E(X)$. Кроме того, подмножество $\{F_a\}_{a\in A} \cup \{G\}$, $G > 0$, изометрично одноточечному расширению пространства X, в котором расстояния от добавленной точки до точек из X задается функцией G.*

(4) *Предположим, что функции $F, G \in E(X)$ имеют один и тот же носитель A, и $\bigl|F|_A G|_A\bigr| < \varepsilon$, тогда и $|FG| < \varepsilon$, так что малое изменение функции $F \in E(X)$ на ее носителе приводит к столь же малому изменению и всей функции F.*

(5) *Пусть функции F и G из $E(X)$ имеют равномощные носители A и B, для которых выполняется следующие условия: существует биекция $\nu\colon A \to B$ такая, что $\bigl|a\nu(a)\bigr| < \varepsilon$ и $\Bigl|F(a)G\bigl(\nu(a)\bigr)\Bigr| < \varepsilon$ при всех $a \in A$. Тогда $|FG| < 2\varepsilon$, так что малое смещение носителя функции $F \in E(X)$ и малое изменение функции на смещенном носителе приводят к малому изменению функции в целом.*

Доказательство. (1) Так как F_a совпадает с функцией расстояния, она автоматически удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1). Проверим, что $A = \{a\}$ является ее носителем. Имеем

$$\inf_{a\in A}\bigl(F_a(a) + |ax|\bigr) = F_a(a) + |ax| = |ax| = F_a(x),$$

что и требовалось.

(2) Следует непосредственно из определения носителя.

(3) Пусть B — носитель функции G, тогда

$$|F_aG| = \sup_{x\in X}\Bigl|\inf_{b\in B}\bigl(G(b) + |xb|\bigr) - |xa|\Bigr| \le \sup_{x\in X}\inf_{b\in B}\bigl(G(b) + |ab|\bigr) = G(a).$$

С другой стороны,

$$|F_aG| \ge \bigl|F_a(a) - G(a)\bigr| = G(a).$$

(4) Если $|F|_AG|_A| < \varepsilon$, то для некоторого $\varepsilon' < \varepsilon$ также выполняется $\bigl|F|_AG|_A\bigr| < \varepsilon'$. Выберем произвольное $x \in X$ и, без ограничения общности, предположим, что $F(x) \ge G(x)$. Пусть также инфимум в формуле (2.2) для $G(x)$ достигается на некотором $b \in A$, тогда

$$\bigl|F(x) - G(x)\bigr| = F(x) - G(x) = \inf_{a\in A}\bigl(F(a) + |ax|\bigr) - \bigl(G(b) + |bx|\bigr) \le$$
$$\le \bigl(F(b) + |bx|\bigr) - \bigl(G(b) + |bx|\bigr) = F(b) - G(b) \le \bigl|F|_AG|_A\bigr| < \varepsilon',$$

откуда $|FG| \le \varepsilon' < \varepsilon$.

(5) Снова выбираем $\varepsilon' < \varepsilon$ так, чтобы оба неравенства имели место при замене ε на ε'. Берем произвольное $x \in X$, предполагаем, без ограничения общности, что

$F(x) \ge G(x)$, а также что инфимум в формуле (2.2) для $G(x)$ достигается на некотором $b = \nu(a) \in B$, тогда

$$\big|F(x) - G(x)\big| = F(x) - G(x) = \inf_{a'\in A}\big(F(a') + |a'x|\big) - \big(G(b) + |bx|\big) \le \\ \le \big(F(a) + |ax|\big) - \big(G(b) + |bx|\big) \le F(a) - G(b) + |ab| < 2\varepsilon',$$

откуда $|FG| \le 2\varepsilon' < 2\varepsilon$. $\square$

Скажем, что функция $F \in E(X)$ с носителем $A \subset X$ *находится в общем положении*, если или носитель одноточечный, $A = \{a\}$, и $F(a) > 0$, или $\#A \ge 2$ и на носителе, то есть для функции $F|_A$, оба неравенства в условии (2.1), при несовпадающих x и x' из A, — строгие. В частности, функция $F|_A$ везде положительна (если $F(x) = 0$ при некотором $x \in A$, то для $x' \ne x$, $x' \in A$, имеем $\big|F(x')\big| < |xx'| < \big|F(x')\big|$, противоречие).

Следующее утверждение тривиально.

Предложение 2.19. *Пусть $F \in E(X)$ — функция общего положения с носителем A, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что каждая функция $g\colon A \to \mathbb{R}$ с $\big|F|_A g\big| < \varepsilon$ удовлетворяет неравенствам треугольника* (2.1)*, поэтому для нее определено продолжение Макшейна–Уитни, которые мы обозначим через G, и, значит, $G \in E(X)$. В частности, для такой F и любого $\varepsilon > 0$ существует $G \in E(X)$ с носителем A, для которой $|FG| < \varepsilon$ и все значения функции $G|_A$ — рациональные числа.*

Предложение 2.20. *Для каждой функции $F \in E(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция общего положения $G \in E(X)$ с тем же носителем, причем такая, что $|FG| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть A — носитель функции F. Выберем произвольные числа $M > \frac{1}{2}\max\big\{|aa'| : a, a' \in A\big\}$, $t \in (0,1)$, и положим $g = (1-t)F + t\,M$. Если $A = \{a\}$, то $g(a) = (1-t)F(a) + t\,M > 0$. Если $\#A \ge 2$, то для любых $a, a' \in A$, $a \ne a'$, имеем

$$\big|g(a) - g(a')\big| = \Big|(1-t)\big(F(a) - F(a')\big)\Big| \le (1-t)|aa'| < |aa'|$$

и

$$g(a) + g(a') = (1-t)\big(F(a) + F(a')\big) + 2t\,M > (1-t)|aa'| + t|aa'| = |aa'|,$$

т.е. g удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1), причем оба неравенства в этих условиях строгие. В силу предложения 2.15, продолжение Макшейна-Уитни G функции g удовлетворяет (2.1) и, значит, принадлежит $E(X)$. Кроме того, G, в силу сказанного выше, находится в общем положении. Выбрав t достаточно близким к 0, добьемся того, чтобы выполнялось $\big|g(a)-F(a)\big| < \varepsilon$ при каждом $a \in A$. В силу предложения 2.18, имеем $|FG| < \varepsilon$. $\square$

Предложение 2.21. *Пусть S — всюду плотное подмножество метрического пространства X, тогда для каждой $F \in E(X)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $G \in E(X)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $|FG| < \varepsilon$;

(2) *носитель B функции G лежит в S;*

(3) *все значения функции $G|_B$ рациональны.*

Доказательство. Пусть A — носитель функции F. Если $\#A = 1$, то положим $\delta = 1$. Если же $\#A \geq 2$, то в качестве δ возьмем наименьшее расстояние между различными точками в A, так что и в этом случае δ положительно. Выберем для каждой точки $a \in A$ точку $b \in S$ такую, что $|ab| < \min\{\varepsilon, \delta\}/4$, и положим $\nu\colon a \mapsto b$. Ясно, что разным точкам соответствуют разные точки $\nu(a)$, так что $B = \bigl\{\nu(a)\bigr\}_{a\in A}$ равномощно A, и ν — биекция между A и B, причем $\bigl|a\nu(a)\bigr| < \varepsilon/4$ при всех $a \in A$. Положим $g' = F|_B$. Так как F является 1-липшицевой, то

$$\Bigl|F(a) - g'\bigl(\nu(a)\bigr)\Bigr| = \Bigl|F(a) - F\bigl(\nu(a)\bigr)\Bigr| \leq \bigl|a\nu(a)\bigr| < \varepsilon/4.$$

По предложению 2.18, продолжение Макшейна–Уитни G' функции g' удовлетворяет $|FG'| < \varepsilon/2$. По предложению 2.20, существует функция общего положения $G'' \in E(X)$ с носителем B и такая, что $|G'G''| < \varepsilon/4$. Наконец, по предложению 2.19 существует функция $G \in E(X)$ с носителем B, для которой $|G''G| < \varepsilon/4$ и все значения ограничения $G|_B$ — рациональны. Ясно, что G — искомая функция. □

В следующем утверждении существенно используется тот факт, что мы рассматриваем только те функции $F \in E(X)$, которые имеют конечные носители.

Предложение 2.22. *Предположим, что X — сепарабельное метрическое пространство, тогда $E(X)$ также сепарабельно.*

Доказательство. Выберем в X всюду плотное не более чем счетное подмножество S. Пусть $\mathcal{P}_\infty(S)$ обозначает семейство всех конечных непустых подмножеств множества S, тогда $\mathcal{P}_\infty(S)$ — не более чем счетное множество. Для каждого $A \in \mathcal{P}_\infty(S)$ обозначим через $E_A^{\mathbb{Q}}(X)$ семейство всех функций из $E(X)$ с носителем A и принимающих на A только рациональные значения. Ясно, что $E_A^{\mathbb{Q}}(X)$ — не более чем счетное множество. Положим $E_S^{\mathbb{Q}}(X) = \cup_{A\in\mathcal{P}_\infty(S)} E_A^{\mathbb{Q}}(X)$, тогда $E_S^{\mathbb{Q}}(X)$ — не более чем счетное множество. По предложению 2.21, для каждой функции $F \in E(X)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $G \in E_S^{\mathbb{Q}}(X)$, для которой $|FG| < \varepsilon$, так что $E_S^{\mathbb{Q}}(X)$ всюду плотно в $E(X)$ и, значит, $E(X)$ — сепарабельное. □

Наконец, все готово для доказательства основной теоремы этого раздела.

Теорема 2.23. *Пространство Урысона существует.*

Доказательство. Начнем с произвольного сепарабельного метрического пространства X_0 и построим башню $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ метрических пространств так: если для $n \geq 0$ пространство X_n уже построено, то положим $X_{n+1} = E(X_n)$. По предложению 2.18, отображении $x \mapsto F_x$ из X_n в $E(X_n)$ изометрично и позволяет отождествить X_n с его изометричным образом в $E(X_n)$, поэтому можно считать, что $X_n \subset X_{n+1}$. Положим $X = \cup_{n=0}^\infty X_n$ и пусть $\bar X$ — пополнение X. Так как каждое X_n сепарабельно, то $\bar X$ — польское метрическое пространство. Покажем, что $\bar X$ — пространство Урысона.

Для этого возьмем произвольное конечное подмножество $A = \{x^1, \ldots, x^k\} \subset \bar X$ и рассмотрим любое одноточечное расширение A, заданное функцией $f \in E(A)$. Мы должны показать, что существует $y \in \bar X$ такое, что $f(x^i) = |yx^i|$ при всех i. Если f

обращается в 0 в некоторой точке, то мы фактически “присоединяем” одну из имеющихся точек, так что A при этом не меняется и, значит, эту точку из A и можно взять в качестве y. Если же $f > 0$, то поступим следующим образом:

(1) построим последовательность множеств $A_n = \{x_n^1, \dots, x_n^k\} \subset X$ такую, что $x_n^i \to x^i$ при $n \to \infty$;

(2) построим фундаментальную последовательность точек $y_n \in X$ такую, что $|x_n^i y_n| \to f(x^i)$ при $n \to \infty$.

Так как $\bar{X}$ — полное пространство, $y_n \to y \in \bar{X}$, причем, в силу непрерывности функции расстояния, имеем $|x_n^i y_n| \to |x^i y|$, так что $|x^i y| = f(x^i)$ при всех i, поэтому y — искомая точка.

Чтобы добиться выполнения условий второго пункта, последовательность A_n будем выбирать более тонко. А именно, положим $c = \min f$, $d = \min\bigl\{|x^i x^j| : i \neq j\bigr\}$, и возьмем произвольное $0 < e < \min\{c, d\}/5$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $A_n = \{x_n^1, \dots, x_n^k\} \subset X$ такое, что $|x_n^i x^i| < e/2^n$. Ясно, что условие на e гарантирует не совпадение x_n^i и x_n^j при любых $i \neq j$ и любых $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$|x_n^i x_m^i| \le |x_n^i x^i| + |x^i x_m^i| < e/2^n + e/2^m.$$

Обозначим через $F \in E(\bar{X})$ продолжение Макшейна–Уитни функции f. Так как F является 1-липшицевой функцией, то

$$\bigl|F(x_n^i) - F(x^i)\bigr| \le |x_n^i x^i| < e/2^n \quad \text{и} \quad \bigl|F(x_n^i) - F(x_m^i)\bigr| \le |x_n^i x_m^i| < e/2^n + e/2^m.$$

Кроме того,

$$F(x_n^i) > F(x^i) - e/2^n > 5e - e/2^n > 4e.$$

Последовательность y_n будем строить следующим образом. Так как $A_n \subset X$, существует m_n такое, что $A_n \subset X_{m_n}$. Более того, без ограничения общности можно считать, что $m_1 < m_2 < \cdots$. Точку y_n будем выбирать из X_{m_n+1}.

Положим $f_1 = F|_{A_1}$, и в качестве y_1 возьмем продолжение Макшейна–Уитни функции f_1 на все X_{m_1}, тогда $y_1 \in E(X_{m_1}) = X_{m_1+1} \subset X \subset \bar{X}$. Заметим также, что, в силу предложения 2.18, имеем $|y_1 x_1^i| = y_1(x_1^i) = F(x_1^i)$.

Предположим, что для $j = 1, \dots, n$ построены точки $y_j \in X_{m_j+1}$, для которых $|y_j x_j^i| = F(x_j^i)$ при всех i. Построим $y_{n+1} \in X_{m_{n+1}+1}$ такую, что $|y_{n+1} x_{n+1}^i| = F(x_{n+1}^i)$. Заметим сначала, что конструкция из предложения 2.18 изометрично вкладывает $A_n \subset X_{m_n}$ в X_{m_n+1}. Обозначив образы точек x_n^i и образ множества A_n теми же символами, получим $A_n \cup \{y_n\} \subset X_{m_n+1}$.

Так как X_p изометрично вкладывается в X_{p+1} при всех p, множество $A_n \cup \{y_n\}$ можно отождествить с его образом в $X_{m_{n+1}}$. Отметим, что и множество A_{n+1} лежит в $X_{m_{n+1}}$. Покажем, что $y_n \notin A_{n+1}$. Действительно,

$$|y_n x_{n+1}^i| \ge |x_n^i y_n| - |x_{n+1}^i x_n^i| \ge F(x_n^i) - e/2^{n-1} > 4e - e/2^{n-1} > 0$$

при всех i, что и требовалось.

Зададим на множестве $A_{n+1}\cup\{y_n\}$ функцию f_{n+1} так: $f_{n+1}|_{A_{n+1}}=F|_{A_{n+1}}$; в качестве $f_{n+1}(y_n)$ возьмем произвольное число $\alpha\in\big(e/2^{n-2},e/2^{n-3}\big)$. Проверим, что f_{n+1} удовлетворяет неравенствам треугольника (2.1). Для этого достаточно выяснить, что

$$\big|F(x^i_{n+1})-\alpha\big|\le|x^i_{n+1}y_n|\le F(x^i_{n+1})+\alpha.$$

Заметим, что

$$\big||x^i_{n+1}y_n|-|x^i_ny_n|\big|\le|x^i_{n+1}x^i_n|<e/2^{n-1},$$

поэтому

$$|x^i_{n+1}y_n|\le|x^i_ny_n|+e/2^{n-1}=F(x^i_n)+e/2^{n-1}<F(x^i_{n+1})+e/2^{n-2}<F(x^i_{n+1})+\alpha.$$

С другой стороны,

$$|x^i_{n+1}y_n|\ge|x^i_ny_n|-|x^i_{n+1}x^i_n|\ge F(x^i_n)-e/2^{n-1}\ge$$
$$\ge F(x^i_{n+1})-e/2^{n-2}>F(x^i_{n+1})-\alpha=\big|F(x^i_{n+1})-\alpha\big|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что $F(x^i_{n+1})>4e\ge e/2^{n-3}>\alpha$.

В качестве y_{n+1} возьмем продолжение Макшейна–Уитни функции f_{n+1} на все $X_{m_{n+1}}$, тогда $y_{n+1}\in E(X_{m_{n+1}})$. По предложению 2.18,

$$|y_ny_{n+1}|=y_{n+1}(y_n)=f_{n+1}(y_n)=\alpha<e/2^{n-3}.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $y_1,y_2,\dots$ — фундаментальна. Кроме того, $|y_nx^i_n|=F(x^i_n)$, поэтому $|y_nx^i_n|\to F(x_i)=f(x_i)$ в силу непрерывности функции F и тому, что $x^i_n\to x_i$ при $n\to\infty$. Как было отмечено выше, это построение и завершает доказательство. $\square$

Замечание 2.24. В [5] рассматривается последовательность $y_n\in E(X_{m_n+1})$, где y_n — продолжение Макшейна–Уитни функции $F|_{A_n}$, и утверждается, что эта последовательность фундаментальна. На самом деле, это — неверно. Действительно, $y_{n+1}(y_n)=\min_i\big\{F(x^i_n)+|x^i_ny_n|\big\}\ge\min_iF(x^i_n)$, но $\min_iF(x^i_n)\to\min f$, а величина $\min f$ может быть положительна, и тогда последовательность y_n не фундаментальна.

Напомним, что *серединой* между точками x и y метрического пространства X называется каждая точка $z\in X$ такая, что $|xz|+|yz|=|xy|$. Метрическое пространство X называется *геодезическим*, а его метрика — *строго внутренней*, если любые две точки соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками. Хорошо известно [10], что если в полном метрическом пространстве для любых двух точек существует середина, то это пространство геодезическое. Ясно, что пространство Урысона обладает этим свойством. Таким образом, доказан следующий результат.

Следствие 2.25. *Пространство Урысона — геодезическое.*

Задача 2.26. Выяснить, является ли геодезическим пространство $\mathcal{K}(\mathcal{U})$ всех непустых компактных подмножеств универсального пространства Урысона $\mathcal{U}$, наделенное метрикой Хаусдорфа.

Тема 3

Борелевские множества и пространства.

Напомним, что множество X, для которого задана некоторая σ-алгебра $\mathcal{A}_X$, называется *измеримым пространством*. Иногда бывает удобно записывать измеримое пространство в виде $(X, \mathcal{A}_X)$. Если $Y \subset X$ — произвольное подмножество измеримого пространства $(X, \mathcal{A}_X)$, то на Y естественным образом определяется σ-алгебра

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}_X\},$$

называемая *индуцированной*. Отображение $f\colon X \to Y$ измеримого пространства $(X, \mathcal{A}_X)$ в измеримое пространство $(Y, \mathcal{A}_Y)$ называется *измеримым*, если для любого $A \in \mathcal{A}_Y$ выполняется $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$ (*прообраз измеримого множества измерим*, сравните с определением непрерывного отображения топологических пространств). *Измеримым вложением* одного измеримого пространства в другое назовем измеримую инъекцию, для которой образ каждого измеримого множества также измерим в объемлющем пространстве (а не в образе). Биективное отображение измеримых пространств, измеримое вместе со своим обратным, называется *изоморфизмом* измеримых пространств.

Замечание 3.1. Отметим, что изоморфизм с образом, вообще говоря, не является измеримым вложением. Например, отображение включения неизмеримого множества не переводит измеримые множества в измеримые (в объемлющем пространстве). Изоморфизм с образом будет измеримым вложением, если и только если образ — измеримое подмножество объемлющего пространства.

Идея доказательства следующей теоремы взята из [3].

Теорема 3.2. *Пусть X и Y — измеримые пространства, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ — измеримые вложения. Тогда X и Y измеримо изоморфны.*

Доказательство. Применим конструкцию из доказательства теоремы Кантора–Бернштейна–Шредера, утверждающей, что отношение сравнения мощностей множеств антисимметрично.

Пусть 2^X обозначает множество всех подмножеств X. Определим отображение $H\colon 2^X \to 2^X$ так:

$$H\colon A \to X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

Лемма 3.3. *Если* $(A_1, A_2, \ldots)$ — *последовательность подмножеств* X*, то*

$$H\big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \cup_{n=1}^{\infty} H(A_n).$$

Доказательство. Заметим, что для инъективного отображения образ пересечения равен пересечению образов. Исходя их этого, получаем

$$\begin{aligned}H\big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\big) &= X \setminus g\Big(Y \setminus f\big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\Big) = X \setminus g\big(Y \setminus \cup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\big) = \\ &= X \setminus g\Big(\cap_{n=1}^{\infty}\big(Y \setminus f(A_n)\big)\Big) = X \setminus \cap_{n=1}^{\infty} g\big(Y \setminus f(A_n)\big) = \\ &= \cup_{n=1}^{\infty}\Big(X \setminus g\big(Y \setminus f(A_n)\big)\Big) = \cup_{n=1}^{\infty} H(A_n),\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Определим последовательность A_n, положив $A_1 = \emptyset$, и если определено A_n, то $A_{n+1} = H(A_n)$. Тогда для $E = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, в силу леммы леммы 3.3, имеем

$$H(E) = \cup_{n=1}^{\infty} H(A_n) = \cup_{n=2}^{\infty} A_n = E.$$

Далее, отображение H переводит каждое измеримое в X множество в измеримое в X, поэтому каждое A_n и, вместе с ними, и E измеримы в X.

Заметим теперь, что E переводится отображением f биективно в $f(E)$. С другой стороны, так как $X \setminus g\big(Y \setminus f(E)\big) = E$, то $g\big(Y \setminus f(E)\big) = X \setminus E$, поэтому $X \setminus E$ переводится биективным отображением g^{-1} в $Y \setminus f(E)$. Таким образом, отображение $h\colon X \to Y$, заданное так:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \text{ и} \\ g^{-1}(x), & \text{если } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

является измеримой биекцией, переводящей измеримые множества в измеримые, т.е. задает изоморфизм измеримых пространств X и Y. □

Пусть X — топологическое пространство. Напомним, что наименьшая σ-алгебра, содержащая топологию τ пространства X, называется *борелевской* и обозначается через $\mathcal{B}_X$ или $\mathcal{B}_\tau$. Элементы борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}_X$ называются *борелевскими множествами*. Пусть X и Y — топологические пространства. Измеримые отображения из пространства $(X, \mathcal{B}_X)$ в пространство $(Y, \mathcal{B}_Y)$ называются *борелевскими*, измеримое вложение — *борелевским вложением*, а измеримый изоморфизм таких пространств — *борелевским изоморфизмом*. **В дальнейшем, рассматривая топологические пространства как измеримые, мы, если не оговорено противное, всегда будем предполагать, что заданные на них σ-алгебры — борелевские**.

Выясним, как связаны непрерывность отображения и его борелевость.

Предложение 3.4. *Непрерывное отображение топологических пространств является борелевским. В частности, гомеоморфизм — борелевский изоморфизм. Топологическое вложение является борелевским, если и только если образ отображения — борелевское подмножество.*

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3.5. *Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, Y — множество, и $f\colon X \to Y$ — отображение. Тогда множество $\mathcal{B} = \big\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\big\}$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. Так как $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, то $Y \in \mathcal{B}$. Далее, если $B \in \mathcal{B}$, то $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, так что $X \setminus B \in \mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B}$ замкнуто относительно перехода к дополнениям. Осталось проверить, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно счетных объединений. Пусть $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathcal{B}$, тогда $f^{-1}\big(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$, что и требовалось. □

Вернемся к доказательству предложения. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Положим $\mathcal{B} = \big\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X\big\}$. По лемме 3.5, $\mathcal{B}$ является σ-алгеброй, причем, в силу непрерывности f и определения борелевской σ-алгебры, $\mathcal{B}$ содержит все открытые подмножества Y, поэтому $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}$ и, значит, прообраз любого борелевского множества — борелевское множество, т.е. f — борелевское отображение.

Второе утверждение мгновенно следует из первого. Третье утверждение вытекает из замечания 3.1. □

Пример 3.6. Покажем, как работают предложение 3.4 и теорема 3.2. Напомним, что отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) не гомеоморфны. Тем не менее, они являются борелевски изоморфными. Действительно, интервал топологически вкладывается в отрезок в виде открытого и, значит, борелевского подмножества, а отрезок — в интервал в виде замкнутого и, тем самым, также борелевского подмножества. В силу предложения 3.4, оба топологических вложения являются борелевскими вложениями. Остается применить теорему 3.2.

В следующем утверждении приводится пример ситуации, в которой образ при топологическом вложении является борелевским подмножеством. В качестве приложения получается описание всех польских пространств в терминах борелевских множеств.

Следствие 3.7. *Пусть X и Y — топологические пространства, метризуемые полными метриками (например, польские), и $f\colon X \to Y$ — топологическое вложение. Тогда $f(X)$ — борелевское подмножество Y. В частности, каждое польское пространство борелевски вкладывается в гильбертов куб.*

Доказательство. Так как f — гомеоморфизм с образом, подпространство $f(X) \subset Y$ также метризуемо полной метрикой. В силу следствия 1.12, множество $f(X)$ относится к классу G_δ, т.е. является не более чем счетным пересечением открытых множеств и, значит, является борелевским. Второе утверждение вытекает из первого, теоремы 2.1 и предложения 3.4. □

Следующий пример борелевского изоморфизма непосредственно не вытекает теоремы 3.2.

Пример 3.8. Покажем, что отрезок $I = [0,1]$ и канторов дисконтинуум $\mathcal{C}$ борелевски изоморфны. В силу упражнения 1.5, канторов дисконтинуум можно представить как $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ с тихоновской топологией. Обозначим через $D \subset I$ множество всех конечных двоичных дробей, т.е. всех чисел вида $\sum_{i=1}^{n} a_i/2^i$, где каждое a_i равно 0 или 1. Также добавим в это множество 1. Через $E \subset \mathcal{C}$ обозначим множество всех стационарных последовательностей. Отметим, что оба множества D и E счетны, поэтому между ними имеется некоторая биекция $g\colon E \to D$.

Далее, каждое из оставшихся чисел однозначно представимо в виде ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/2^i$, где последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ бесконечна и не стационарна. Именно такие последовательности входят в $\mathcal{C} \setminus E$, поэтому имеется биекция $f\colon \mathcal{C} \setminus E \to I \setminus D$, которая сопоставляет последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ число $\sum_{i=1}^{\infty} a_i/2^i$. Непосредственно проверяется, что f — гомеоморфизм (см. также раздел 3.1).

Определим отображение $h\colon \mathcal{C} \to I$, положив

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in \mathcal{C} \setminus E, \\ g(x) & \text{для } x \in E. \end{cases}$$

Покажем, что h — борелевский изоморфизм. Берем произвольное $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, тогда

$$h(B) = f\big(B \cap (\mathcal{C} \setminus E)\big) \sqcup g(B \cap E).$$

Множество $g(B \cap E)$ не более чем счетно, поэтому оно борелевское (как не более чем счетное объединение одноточечных множеств, являющихся замкнутыми и, значит, борелевскими). Эти же рассуждения показывают, что E — борелевское и, значит, $\mathcal{C} \setminus E$ и $B \cap (\mathcal{C} \setminus E)$ — борелевские. Так как f — гомеоморфизм, то, в силу предложения 3.4, f — борелевский изоморфизм между $\mathcal{C} \setminus E$ и $I \setminus D$, так что $f\big(B \cap (\mathcal{C} \setminus E)\big)$ — борелевское подмножество $I \setminus D$, и так как $I \setminus D$ — борелевское подмножество I, то $f\big(B \cap (\mathcal{C} \setminus E)\big)$ является борелевским и в I. Аналогичные рассуждения показывают, что для каждого $A \in \mathcal{B}_I$ множество $h^{-1}(A)$ — борелевское в $\mathcal{C}$. Доказательство закончено.

Имеется ряд утверждений, дающих достаточные условия того, что данное семейство подмножеств топологического пространства является борелевской σ-алгеброй. Приведем одно из них, нужное нам в дальнейшем.

Предложение 3.9. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{B}$ — наименьшее семейство подмножеств X, содержащее все замкнутые множества, а также замкнутое относительно дополнений и счетных объединений. Тогда $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра.*

Доказательство. Так как $\mathcal{B}$ содержит $\emptyset$ и замкнуто относительно счетных объединений и дополнений, то $\mathcal{B}$ является σ-алгеброй. С другой стороны, $\mathcal{B}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все замкнутые множества и, значит, $\mathcal{B}$ также является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые множества, т.е. $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра. □

Для построения более тонких, чем в примере 3.6, измеримых вложений нам понадобится техника схем, к описанию которой мы сейчас и перейдем.

3.1 Схемы

Напомним, как строится стандартный канторов дисконтинуум. На начальном шаге рассматривается пространство $X_0 = [0, 1]$, и на каждом следующем шаге из предыдущего пространства выкидывают некоторое количество интервалов так, чтобы получить семейство равных отрезков. А именно, из каждого имеющегося отрезка выбрасывают среднюю треть. Так получаются пространства X_n, представляющие собой дизъюнктное объединение 2^n отрезков одинаковой длины, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Кантором дисконтинуум определяется как пересечение $\mathcal{C} = \cap_{n=0}^{\infty} X_n$ всех построенных пространств. Чтобы описать точки канторова дисконтинуума, отрезки пространства X_n, $n \geq 1$, нумеруют последовательностями из 0 и 1 длины n. Если на $(n-1)$-ом шаге некоторый отрезок S получил номер $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, то отрезок, получающийся из S выбрасыванием средней трети и находящийся слева (ближе к 0) нумеруется последовательностью $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$, а находящийся справа — последовательностью $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)$. Точки канторова дисконтинуума соответствуют бесконечным последовательностям, которые указывают, пересечением каких отрезков получаются соответствующие точки. Ясно, что все последовательности из $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ реализуются, причем каждой последовательности соответствует ровно одна точка. Итак, канторов дисконтинуум биективен множеству $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Эту биекцию можно задать явно, учитывая то, что каждая точка из $\mathcal{C}$ является пределом левых концов отрезков, которым она принадлежит, поэтому последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ ставится в соответствие точка $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} a_n$. Покажем, что эта функция, обозначим ее через f, отображает пространство $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ с топологией произведения (тихоновской топологией) гомеоморфно на $\mathcal{C}$. Так как пространство $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ компактно по теореме Тихонова, достаточно проверить непрерывность отображения f. Выбираем произвольную точку $a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ и любую окрестность U точки $f(a)$. По определению индуцированной топологии и топологии прямой, U содержит некоторое множество $\mathcal{C} \cap (\alpha, \beta) \ni f(a)$, поэтому U также содержит некоторый отрезок S, построенный на n-ом шаге и содержащий $f(a)$. Но тогда U также содержит и все отрезки, полученные из S на шагах, следующих за n-ым, а это означает, что U содержит образы всех точек из $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, отличающиеся от a координатами a_k, $k > n$. Но множество таких точек образует открытую окрестность точки a в тихоновской топологии, что и завершает проверку непрерывности отображения f.

Как мы видим, при работе с подобными конструкциями нам приходится пользоваться несколькими вещами, а именно, работать как с конечными, так и с бесконечными последовательностями, дополнять конечную последовательность (конкатенация) и выбирать начальный отрезок последовательности. Введем соответствующие обозначения. Приводимое далее изложение следует [16].

Пусть A — произвольное непустое множество (как правило, конечное или равное $\mathbb{N}$). Через $A^{<\mathbb{N}}$ обозначим семейство всевозможных конечных последовательностей на множестве A, включающее пустую последовательность $\emptyset$. Отметим, что $A^{\mathbb{N}}$ — это множество всевозможных бесконечных последовательностей на A. Для $a \in A^{<\mathbb{N}}$ и $b \in A^{<\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$, через $a\hat{\ }b$ обозначим конкатенацию этих последовательностей (приписываем b после a). Отметим, что $a\hat{\ }\emptyset = \emptyset\hat{\ }a = a$. Через $|a|$ обозначим длину последовательности a (если $a \in A^{\mathbb{N}}$, то $|a| = \infty$; кроме того, $|\emptyset| = 0$), а для целого $0 \leq n \leq |a|$ обозначим через $a|n$ начальный отрезок a длины n (отметим, что $a|0 = \emptyset$). Определим на $A^{<\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$ частичный порядок, положив $a \le b$, если и только если a является начальным отрезком b. Если a и b несравнимы, то этот факт будем обозначать через $a \perp b$.

Далее, будем считать, что на A задана дискретная топология, а на $A^{\mathbb{N}}$ — тихоновская. Для $s \in A^{<\mathbb{N}}$ положим

$$\Sigma(s) = \{\alpha \in A^{\mathbb{N}} \colon s \le \alpha\}.$$

Таким образом, у всех последовательностей $\alpha \in \Sigma(s)$ начальный отрезок s фиксирован, а все остальные элементы произвольны, поэтому $\Sigma(s) \subset A^{\mathbb{N}}$ — открытое множество, являющееся окрестностью любой последовательности α с начальным отрезком s.

Определим теперь несколько типов схем на польском метрическом пространстве X конечного диаметра.

(1) *Схемой Суслина* назовем семейство $\{F_s \subset X : s \in A^{<\mathbb{N}}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:
   - при всех $s, a \in A^{<\mathbb{N}}$, $a \ne \emptyset$, выполняется $\bar{F}_{s\hat{\ }a} \subset F_s$;
   - для каждого $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ имеем $\operatorname{diam} F_{\alpha|n} \to 0$ при $n \to \infty$.

(2) Схема Суслина называется *схемой Лузина*, если для любых $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ таких, что $s \perp t$, выполняется $F_s \cap F_t = \emptyset$.

(3) Схема Лузина называется *схемой Кантора*, если $A = \{0, 1\}$ и все F_s замкнуты и непусты.

Отметим, что при построении канторова дисконтинуума мы фактически пользовались схемой Кантора.

Приведем ряд полезных свойств схемы Суслина.

Положим
$$D = \bigl\{\alpha \in A^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ (F_{\alpha|n} \ne \emptyset)\bigr\} \subset A^{\mathbb{N}}.$$

Предложение 3.10. *Тогда множество D замкнуто.*

Доказательство. Выберем произвольное $\alpha \in A^{\mathbb{N}} \setminus D$, тогда существует $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $F_{\alpha|n} = \emptyset$. Но тогда ни одно $\beta \in A^{\mathbb{N}}$ с начальным отрезком $\alpha|n$ не входит в D, откуда $\alpha \in \Sigma(\alpha|n) \subset A^{\mathbb{N}} \setminus D$, так что $A^{\mathbb{N}} \setminus D$ открыто. □

Заметим, что для каждого $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ имеем $\cap_{n=0}^{\infty} F_{\alpha|n} = \cap_{n=0}^{\infty} \bar{F}_{\alpha|n}$. Если $\alpha \in D$, то это пересечение состоит из одной точки, которую мы обозначим через $f(\alpha)$. Таким образом, мы определили отображение $f \colon D \to X$, которое называется *ассоциированным со схемой Суслина*.

Предложение 3.11. *Отображение f непрерывно.*

Доказательство. Действительно, выберем произвольное $\alpha \in D$, $\varepsilon > 0$ и покажем, что некоторая окрестность последовательности $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ переводится отображением f в $U_\varepsilon\bigl(f(\alpha)\bigr)$. Для этого выберем n столь большим, чтобы выполнялось $\operatorname{diam} F_{\alpha|n} < \varepsilon$ (такое n существует в силу определения схемы Суслина). Также, по определению схемы

Суслина, для каждого $b \in A^{<\mathbb{N}}$ такого, что $b > (\alpha|n)$, выполняется $\bar{F}_b \subset F_{\alpha|n}$, поэтому для каждого $\beta \in \Sigma(\alpha|n) \cap D$ точка $f(\beta)$, как и точка $f(\alpha)$, лежит в $F_{\alpha|n}$, откуда $\big|f(\alpha)f(\beta)\big| < \varepsilon$ и, значим,

$$f\big(\Sigma(\alpha|n) \cap D\big) \subset U_\varepsilon\big(f(\alpha)\big).$$

□

Предложение 3.12. *Предположим, что $F_\emptyset = X$, и при всех $s \in A^{<\mathbb{N}}$ выполняется*

$$F_s = \cup\big\{F_{s\hat{\ }a} : a \in A\big\}.$$

Тогда ассоциированное отображение f сюръективно.

Доказательство. Берем произвольную точку $x \in X$, тогда $x \in F_\emptyset$. Если $x \in F_s$ для некоторого s, то, по условию, существует $a \in A$ такое, что $x \in F_{s\hat{\ }a}$. Последнее позволяет построить последовательность $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ такую, что для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется $x \in F_{\alpha|n}$. Но тогда $\{x\} = \cap_{n=0}^{\infty} F_{\alpha|n}$, поэтому $f(\alpha) = x$. □

Предложение 3.13. *Для схемы Лузина ассоциированное отображение инъективно.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in D$ — две различные последовательности. Это означает, что для некоторого n выполняется $(\alpha|n) \neq (\beta|n)$, но тогда $(\alpha|n) \perp (\beta|n)$ и, по определению схемы Лузина, имеем $F_{\alpha|n} \cap F_{\beta|n} = \emptyset$. Но $f(\alpha) \in F_{\alpha|n}$, а $f(\beta) \in F_{\beta|n}$, откуда $f(\alpha) \neq f(\beta)$. □

Предложение 3.14. *Для схемы Кантора имеем $D = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{C}$ и f является топологическим вложением.*

Доказательство. Действительно, для схемы Кантора, в силу того, что все $F_{\alpha|n}$ непусты, множество D совпадает с $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ и, как было показано выше, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$. По предложению 3.13, ассоциированное отображение взаимно-однозначно с образом. По предложению 3.11, f непрерывно. Так как канторово множество компактно, f — гомеоморфизм с образом, т.е. топологическое вложение. □

Применим конструкцию схем для доказательства важных свойств польских пространств.

Теорема 3.15. *Каждое плотное в себе польское пространство X содержит подмножество, гомеоморфное канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Достаточно построить схему Кантора для пространства X и применить предложение 3.14. Зададим на X произвольную полную ограниченную метрику, согласованную с топологией.

Мы начнем с построения схемы Суслина $\{U_s : s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\}$, состоящей из непустых открытых множеств, для которых выполняется усиленное условие из определения схемы Лузина: если $s \perp t$, то $\bar{U}_s \cap \bar{U}_t = \emptyset$. Построение проведем по индукции. Положим $U_\emptyset = X$. Предположим теперь, что для некоторого s непустое открытое множество U_s уже построено. Так как X плотно в себе, множество U_s содержит по крайней мере две различные точки x_0 и x_1. Построим два открытых множества $U_{s\hat{\ }0}$ и $U_{s\hat{\ }1}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $x_0 \in U_{s^\frown 0}$ и $x_1 \in U_{s^\frown 1}$,

(2) $\operatorname{diam} U_{s^\frown 0} < 2^{-|s|}$ и $\operatorname{diam} U_{s^\frown 1} < 2^{-|s|}$,

(3) $\bar{U}_{s^\frown 0} \cap \bar{U}_{s^\frown 1} = \emptyset$,

(4) $\bar{U}_{s^\frown 0} \cup \bar{U}_{s^\frown 1} \subset U_s$.

Для завершения доказательства, превратим построенную схему Суслина в схему Кантора $\{F_s : s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\}$, положив $F_s = \bar{U}_s$. □

Теорема 3.16 (Кантор–Бендиксон)**.** *Каждое сепарабельное метрическое пространство X представимо в виде $X = Y \sqcup Z$, где Z — не более чем счетное множество, а Y — замкнутое подмножество, не имеющее изолированных точек, т.е. плотное в себе.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — не более чем счетная база. Положим

$$Z = \cup\{U_n : \#U_n = 1\},$$

тогда множество Z не более чем счетно и открыто. Пусть $Y = X \setminus Z$, тогда Y замкнуто и не имеет изолированных точек, так как каждая изолированная точка, точнее, соответствующее одноточечное множество, входит в каждую базу и, значит, содержится в Z. □

Теоремы 3.15 и 3.16 мгновенно приводят к следующему результату.

Следствие 3.17. *Каждое несчетное польское пространство содержит подмножество, гомеоморфное канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$, в частности, такое пространство континуально.*

3.2 Борелевские множества и топология

Этот раздел представляет как самостоятельный интерес, так и играет важную роль в доказательстве теоремы 3.30. Мы начнем с технического результата.

Предложение 3.18. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $F \subset X$ — замкнутое подмножество. Обозначим через τ' наименьшую топологию, содержащую τ и F. Тогда (X, τ') гомеоморфно $F \sqcup (X \setminus F)$.*

Доказательство. Обозначим через τ'' семейство всех открытых подмножеств в $F \sqcup (X \setminus F)$, отождествляемых с подмножествами X. Для каждого $U \in \tau$ имеем $U = (U \cap F) \sqcup \big(U \cap (X \setminus F)\big)$, поэтому $U \in \tau''$. Кроме того, $F \in \tau''$, поэтому $\tau' \subset \tau''$.

Обратно, берем произвольное $U \in \tau''$, тогда существуют $V, W \in \tau$ такие, что $U = (F \cap V) \cup \big((X \setminus F) \cap W\big)$. Имеем $(F \cap V) \in \tau'$ и $\big((X \setminus F) \cap W\big) \in \tau'$, поэтому $U \in \tau'$, так что $\tau'' \subset \tau'$. □

Следствие 3.19. *Пусть (X, τ) — польское пространство и $F \subset X$ — замкнутое подмножество. Обозначим через τ' наименьшую топологию, содержащую τ и F. Тогда*

(1) *пространство* (X, τ') *— польское;*

(2) *борелевские* σ*-алгебры пространств* (X, τ) *и* (X, τ') *совпадают;*

(3) *множество* F *является открыто-замкнутым в* (X, τ').

Доказательство. (1) По предложению 3.18, (X, τ') гомеоморфно $F \sqcup (X \setminus F)$. Пространство F польское в соответствии с примером 1.1. Пространство $X \setminus F$ польское в силу следствия 1.12. Осталось вновь воспользоваться примером 1.1.

(2) Открытые множества топологии τ' могут быть трех типов: U, $F \cap U$, или $F \cup U$, где $U \in \tau$. Так как $F \in \mathcal{B}_\tau$, имеем $\tau' \subset \mathcal{B}_\tau$ и, значит, $\mathcal{B}_{\tau'} \subset \mathcal{B}_\tau$. С другой стороны, $\tau \subset \tau'$, откуда $\mathcal{B}_\tau \subset \mathcal{B}_{\tau'}$, что и требовалось.

(3) Имеем $X \setminus F \in \tau \subset \tau'$ и $F \in \tau'$, так что F — открыто-замкнуто в τ'. □

Предложение 3.20. *Пусть* $(\tau_1, \tau_2, \ldots)$ *— последовательность польских топологий на множестве* X. *Предположим, что для любых различных* $x, y \in X$ *существуют такие* $U, V \in \cap_{n=1}^\infty \tau_n$, *что* $x \in U$, $y \in V$ *и* $U \cap V = \emptyset$. *Обозначим через* τ_∞ *наименьшую топологию, содержащую* $\cup_{n=1}^\infty \tau_n$. *Тогда топология* τ_∞ *— польская.*

Доказательство. Рассмотрим диагональное отображение

$$f\colon (X, \tau_\infty) \to \prod_n (X, \tau_n) =: Y,$$

а именно, положим $f(x) = (x, x, \ldots)$. Легко видеть, что это отображение инъективно.

Лемма 3.21. *Отображение* f *непрерывно.*

Доказательство. Покажем непрерывность этого отображения в произвольной точке $x \in X$. Выберем произвольную окрестность U точки $f(x)$, тогда эта окрестность равна $\prod_n U_n$, где $U_n \in \tau_n$, причем все эти U_n, кроме некоторых $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}\}$, равны X. Положим $V = \cap_{i=1}^k U_{n_i}$, тогда $V \in \tau_\infty$ и $f(V) \subset U$, что и требовалось. □

Лемма 3.22. *Отображение* f *является гомеоморфизмом с образом.*

Доказательство. Напомним, что, в силу примера 1.1, пространство Y — польское, поэтому $f(X) \subset Y$ — метризуемо, и, значит, для доказательства непрерывности f^{-1} достаточно проверить, что $f^{-1}\colon f(X) \to X$ переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся. Обозначим через ρ_n полную метрику на X, задающую топологию τ_n и такую, что диаметр (X, ρ_n) не превосходит 1, тогда топология на Y задается метрикой $\sum_n \rho_n / 2^n$. Пусть $(x_1, x_1, \cdots), (x_2, x_2, \cdots), \ldots$ — сходящаяся последовательность точек из $f(X)$, тогда $\sum_n \rho_n(x_p, x_q)/2^n \to 0$ при $p, q \to \infty$. Но тогда и при каждом n имеем $\rho_n(x_p, x_q) \to 0$, так что эта последовательность фундаментальна в каждом (X, τ_n) и, в силу полноты, сходится к y_n. Покажем, что все y_n равны между собой. Пусть это не так, тогда для некоторых $n \neq m$ выполняется $y_n \neq y_m$. По условию, y_n и y_m содержатся в некоторых непересекающихся множествах $U_n, U_m \subset X$, открытых сразу во всех топологиях τ_k. Отсюда вытекает, что, начиная с некоторого момента, последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ лежит одновременно в U_n и U_m, противоречие. □

Лемма 3.23. *Множество* $f(X)$ *замкнуто в* Y.

Доказательство. Выберем произвольную точку $(x_1, x_2, \ldots) \in Y$, не лежащую в $f(X)$. Это означает, что для некоторых $m \neq n$ выполняется $x_m \neq x_n$. По условию, существуют непересекающиеся множества $U_m, U_n \subset X$, содержащие соответственно x_m и x_n, и являющиеся открытыми во всех топологиях τ_k. Обозначим через $\pi_k \colon Y \to X$ каноническую проекцию Y на k-ый сомножитель. Так как все π_k непрерывны, множество $\pi_m^{-1}(U_m) \cap \pi_n^{-1}(U_n)$ открыто в Y, содержит $(x_1, x_2, \ldots)$ и не пересекает $f(X)$, так как $U_m \cap U_n = \emptyset$. Таким образом, $Y \setminus f(X)$ — открыто. □

В силу примера 1.1, пространство $f(X)$ — польское, поэтому польской является и топология τ_∞. □

Следствие 3.24. *Пусть (X, τ) — хаусдорфово топологическое пространство, и предположим, что на X задана последовательность $(\tau_1, \tau_2, \ldots)$ польских топологий, каждая из которых содержит τ. Обозначим через τ_∞ наименьшую топологию, содержащую $\cup_{n=1}^\infty \tau_n$. Тогда топология τ_∞ — польская.*

Теорема 3.25. *Пусть (X, τ) — польское пространство и $B \in \mathcal{B}_\tau$. Тогда на X существует топология $\tau_B \supset \tau$ такая, что (X, τ_B) — польское пространство, B — открыто-замкнутое множество в топологии τ_B, и $\mathcal{B}_{\tau_B} = \mathcal{B}_\tau$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство всех борелевских подмножеств $B \in \mathcal{B}_\tau$ пространства (X, τ), для которых существует польская топология $\tau_B \supset \tau$ такая, что в ней B — открыто-замкнутое множество и $\mathcal{B}_{\tau_B} = \mathcal{B}_\tau$. Мы должны показать, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\tau$. Применим предложение 3.9. По следствию 3.19, в $\mathcal{B}$ входят все замкнутые подмножества X. Далее, если $B \in \mathcal{B}$, то $X \setminus B$ также является открыто-замкнутым в τ_B, так что топологию τ_B можно взять в качестве $\tau_{X \setminus B}$, откуда $(X \setminus B) \in \mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B}$ замкнуто относительно операции перехода к дополнению. Остается показать, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно счетных объединений.

Пусть $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathcal{B}$, и $B = \cup_n B_n$. Мы должны показать, что $B \in \mathcal{B}$. Обозначим через $\tau_n \supset \tau$ польскую топологию, в которой B_n открыто-замкнуто и $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_\tau$. Положим $\tau_\infty = \cup_n \tau_n$, тогда $B \in \tau_\infty$ и, по следствию 3.24, топология τ_∞ — польская. Так как $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_\tau$ при всех n, то $\mathcal{B}_{\tau_\infty} = \mathcal{B}_\tau$.

Заметим, что в топологии τ_∞ множество B открыто, но может не быть замкнуты. Чтобы сделать его замкнутым, рассмотрим наименьшую топологию τ', содержащую $\tau_\infty \cup \{X \setminus B\}$. По следствию 3.19, τ' — польская, $\mathcal{B}_{\tau'} = \mathcal{B}_\tau$, а B в этой топологии уже открыто-замкнуто. Таким образом, $B \in \mathcal{B}$, что и завершает доказательство. □

Следствие 3.26. *Пусть (X, τ) — польское пространство, и $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность борелевских подмножеств X. Тогда на X существует польская топология $\tau' \supset \tau$, в которой все B_i — открыто-замкнуты, и $\mathcal{B}_{\tau'} = \mathcal{B}_\tau$.*

Доказательство. Построим "башню" топологий $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \cdots$ следующим образом. В качестве τ_1 возьмем польскую топологию, содержащую τ, в которой B_1 открыто-замкнуто и $\mathcal{B}_{\tau_1} = \mathcal{B}_\tau$ (эта топология существует в силу теоремы 3.25). Если построена τ_{n-1}, то в качестве τ_n возьмем польскую топологию, содержащую τ_{n-1}, в которой B_n открыто-замкнуто и $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_{\tau_{n-1}} = \mathcal{B}_\tau$ (эта топология также существует в силу теоремы 3.25). Топологию τ' положим равной $\cup_{n=1}^\infty \tau_n$. По следствию 3.24, топология τ' — польская. Так как $\mathcal{B}_{\tau_n} = \mathcal{B}_\tau$, то $\tau_n \subset \mathcal{B}_\tau$ при всех n и, значит, $\tau' \subset \mathcal{B}_\tau$, откуда $\mathcal{B}_{\tau'} = \mathcal{B}_\tau$. □

Следствие 3.27. *Пусть (X, τ) — польское пространство, Y — сепарабельное метрическое пространство, а $f\colon X \to Y$ — борелевское отображение. Тогда на X существует польская топология $\tau' \supset \tau$ с той же борелевской σ-алгеброй, для которой отображение f — непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим на Y счетную базу $(U_1, U_2, \ldots)$, положим $B_i = f^{-1}(U_i)$, тогда все B_i — борелевские. По следствию 3.26, существует польская топология $\tau' \supset \tau$ с той же борелевской σ-алгеброй, в которой все B_i — открыто-замкнуты. Но тогда для такой топологии f — непрерывно. □

3.3 Стандартные борелевские пространства

Стандартным борелевским пространством называется измеримое пространство, изоморфное некоторому борелевскому подмножеству польского пространства.

Следствие 3.28. *Каждое стандартное борелевское пространство изоморфно некоторому борелевскому подмножеству гильбертова куба.*

Доказательство. По следствию 3.7, каждое польское пространство X изоморфно некоторому борелевскому подмножеству гильбертова куба $\mathcal{H}$. Обозначим этот изоморфизм через f. Таким образом, для каждого борелевского $A \subset X$ множество $f(A)$ — борелевское в $f(X)$. Но так как $f(X)$ — борелевское подмножество в $\mathcal{H}$, то и $f(A)$ — борелевское подмножество в $\mathcal{H}$. □

Предложение 3.29. *Каждое стандартное борелевское пространство изоморфно борелевскому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$.*

Доказательство. В силу примера 3.8, отрезок $I = [0, 1]$ и канторов дисконтинуум $\mathcal{C}$ борелевски изоморфны. Отсюда вытекает, что гильбертов куб $I^{\mathbb{N}}$ борелевски изоморфен $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$. Но так как $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, то $\mathcal{C}^{\mathbb{N}} = \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно $\mathcal{C}$. Таким образом, гильбертов куб борелевски изоморфен канторову дисконтинууму по предложению 3.4. В силу следствия 3.28, стандартное борелевское пространство изоморфно борелевскому подмножеству гильбертова куба, поэтому оно также изоморфно борелевскому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$. □

Теорема 3.30 (Куратовский)**.** *Любые два несчетных стандартных борелевских пространства изоморфны.*

Доказательство. Пусть B — несчетное стандартное борелевское пространство. Без ограничения общности, предположим, что B — борелевское подмножество некоторого польского пространства (X, τ). По предложению 3.29, B изоморфно некоторому борелевскому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$, так что этот изоморфизм — измеримое вложение.

Далее, по теореме 3.25, топологию τ можно расширить до некоторой топологии τ_B так, чтобы пространство (X, τ_B) осталось польским, B стало открыто-замкнутым, а борелевская σ-алгебра для τ_B была бы равна борелевской σ-алгебре для τ, в частности, B как измеримое пространство не изменилось, но теперь стало относиться к классу

G_δ. По следствию 1.12, подмножество B польского пространства (X, τ_B) само является польским. Теперь мы можем применить следствие 3.17, в силу которого существует топологическое вложение $f\colon \mathcal{C} \to B$. Так как $\mathcal{C}$ — компакт, непрерывный образ компакта — тоже компакт, а компакт в хаусдорфовом пространстве — замкнутое множество, то $f(\mathcal{C})$ — борелевское подмножество B и, значит, f — измеримое вложение. Осталось воспользоваться теоремой 3.2 и заключить, что B изоморфно $\mathcal{C}$ и, значит, любые два таких B изоморфны друг другу. $\square$

Следствие 3.31. *Два стандартных борелевских пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они равномощны.*

Доказательство. Несчетный случай разбирается в теореме 3.30. Для не более чем счетного пространства борелевская σ-алгебра совпадает с множеством всех подмножеств, поэтому любая биекция — борелевский изоморфизм. $\square$

Тема 4

Пространства с мерой.

Выше мы рассматривали пространства, наделенные σ-алгебрами. Теперь мы добавим в рассмотрение и некоторые функции на этих σ-алгебрах, называемые мерами. *Мерой на σ-алгебре* $\mathcal{A}$ называется функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ такая, что $\mu(\emptyset) = 0$ и для произвольной дизъюнктной последовательности $A_1, A_2, \ldots$ элементов из $\mathcal{A}$ выполняется

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Если из контекста ясно, какая σ-алгебра $\mathcal{A}$ выбрана на множестве X (например, X — топологическое пространство, и, значит, $\mathcal{A}$ — борелевская σ-алгебра), то мы говорим, что мера μ *задана на* X.

Мера μ на X называется

(1) *конечной*, если $\mu(X) < \infty$;

(2) *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$;

(3) *σ-конечной*, если $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, $X_i \in \mathcal{A}$ и $\mu(X_i) < \infty$ при всех i;

(4) *борелевской*, если X — топологическое пространство и μ определена на соответствующей борелевской σ-алгебре.

Пространством с мерой называется тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где $\mathcal{A}$ — некоторая σ-алгебра на X, а μ — мера на $\mathcal{A}$. Если μ — вероятностная мера, то $(X, \mathcal{A}, \mu)$ называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathcal{B})$ — измеримое пространство и $f\colon X \to Y$ — измеримое отображение. Определим отображение $f_*\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ следующим образом: $(f_*\mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$. Легко проверяется, что $f_*\mu$ — мера на $\mathcal{B}$, которая называется *образом меры μ при отображении f.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерой. Эти пространства называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f\colon X \to Y$ измеримых пространства $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ такой, что $\nu = f_*\mu$. При этом f называется *изоморфизмом пространств с мерой.* Ниже мы приведем результаты Рохлина [17], полностью описывающие классы изоморфизма стандартных борелевских пространств, наделенных борелевскими мерами.

Пример 4.1. Тривиальными примерами меры является функция, тождественно равная нулю, а также функция, равная ∞ на каждом непустом множестве. Еще один стандартный пример меры сопоставляет каждому конечному измеримому множеству его мощность, а каждому бесконечному — символ ∞. Последняя мера называется *считающей.*

Пример 4.2. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Выберем некоторое $x \in X$ и зададим функцию $\delta_x \colon \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ так:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Легко проверяется, что δ_x — мера, которая называется *мерой Дира́ка с центром в* x.

В следующем упражнение формулируются хорошо известные фундаментальные свойства меры.

Упражнение 4.3. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Докажите следующие утверждения.

(1) **Монотонность**: если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(2) **Счетная субаддитивность**: $\mu\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $(A_1, A_2, \ldots)$ измеримых множеств.

(3) **Непрерывность снизу**: пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — неубывающая последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая и

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(\cup A_i).$$

(4) **Непрерывность сверху**: пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — невозрастающая последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая. Если при этом $\mu(A_k) < \infty$ для некоторого k, то

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(\cap A_i).$$

(5) Предположим, что мера μ конечна, и пусть $(A_1, A_2, \ldots)$ — покрытие X измеримыми множествами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при всех $n \geq N$ выполняется $\mu\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) > \mu(X) - \varepsilon$. Последнее эквивалентно $\mu\big(X \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i\big) < \varepsilon$.

В действительности, в ряде случаев, чтобы задать меру на всей σ-алгебре, достаточно определить ее на некотором подмножестве σ-алгебры, а потом канонически распространить на всю σ-алгебру. В связи с этим нам будет удобно использовать несколько понятий и обозначений.

Обозначение 4.4. Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное семейство подмножеств множества X. Через $\sigma(\mathcal{P})$ будем обозначать наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{P}$.

Например, если (X, τ) — топологическое пространство, то $\sigma(\tau) = \mathcal{B}_\tau$.

Другим популярным семейством, используемым в этом контексте, является алгебра множеств. Напомним, что семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется *алгеброй*, если $\mathcal{A}$ содержит X, а также замкнуто относительно дополнений и конечных объединений (или конечных пересечений).

На алгебре $\mathcal{A}$ также определяется мера: это такая функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, что $\mu(\emptyset) = 0$ и для любой дизъюнктной последовательности $(A_1, A_2, \dots)$ элементов из $\mathcal{A}$, удовлетворяющей условию $\sqcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$, выполняется

$$\mu(\sqcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Также на алгебры дословно переносятся данные выше определения конечной, вероятностной и σ-конечной мер.

Следующий стандартный результат будет нам полезен.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра на множестве X, и $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ — некоторая σ-конечная мера. Тогда существует и единственна мера $\nu\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$, продолжающая μ: $\nu|_\mathcal{A} = \mu$.*

Из теоремы 4.5 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 4.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра на множестве X, а μ_1 и μ_2 — некоторые σ-конечные меры на $\sigma(\mathcal{A})$, совпадающие на $\mathcal{A}$. Тогда $\mu_1 = \mu_2$.*

Пример 4.7. Пусть $X = \mathbb{R}$, и в качестве алгебры $\mathcal{A}$ возьмем семейство всевозможных конечных объединений полуинтервалов вида $(a, b]$, лучей вида $(-\infty, b]$ и лучей вида (a, ∞), где $a, b \in \mathbb{R}$. Определим функцию λ на этих полуинтервалах, положив $\lambda\big((a, b]\big) = b - a$, а на лучах зададим ее равной ∞. Продолжим λ по аддитивности на $\mathcal{A}$, тогда λ будет мерой на $\mathcal{A}$ (проверьте). Легко видеть, что все элементы из $\mathcal{A}$ — борелевские подмножества прямой $\mathbb{R}$, и что $\sigma(\mathcal{A})$ содержит все открытые множества, поэтому $\sigma(\mathcal{A})$ совпадает с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Продолжение меры λ на $\sigma(\mathcal{A})$, существующее и единственное в силу теоремы 4.5, называется *мерой Лебега*. Ясно, что мера Лебега инвариантна относительно движений прямой. Кроме того, если $A \subset \mathbb{R}$ — борелевское подмножество, то ограничение меры λ на A также будем называть *мерой Лебега на* A. В частности, так получается мера Лебега на стандартном отрезке $I = [0, 1]$. В дальнейшем мы, как правило, будем обозначать меру Лебега через λ. Отметим, что в качестве алгебры $\mathcal{A}$ можно взять и многие другие семейства, например, полуинтервалы $(a, b]$ можно заменить на $[a, b)$, а в качестве лучей взять $(-\infty, b)$ и $[a, \infty)$. При этом, описанная выше конструкция приведет к той же борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ и той же мере Лебега λ.

Пример 4.8. Пусть $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ — канторов дисконтинуум. Легко видеть, что при построении $\mathcal{C}$ мы на n-ом шаге выбрасываем из $[0, 1]$ конечное дизъюнктное семейство интервалов суммарной длины $2^{n-1}/3^n$. Таким образом, сумма длин всех выброшенных интервалов равна $\sum_{n=1}^\infty 2^{n-1}/3^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-2/3} = 1$, так что, в силу σ-аддитивности меры Лебега λ, имеем $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.

4.1 Атомы и обобщенная мера Дирака

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная σ-алгебра на множестве X. *Атомом σ-алгебры $\mathcal{A}$* называется такое непустое множество $A \in \mathcal{A}$, которое не содержит отличных от пустого множества и от самого A подмножеств $B \in \mathcal{A}$. Возможно, более удачным был бы термин неделимый элемент σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть теперь $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой.

Определение 4.9. Измеримое множество $A \in \mathcal{A}$ назовем *p-атомом для меры μ*, если A — атом σ-алгебры $\mathcal{A}$, имеющий положительную меру, $\mu(A) > 0$.

Отметим, что p-атом можно определить и следующим эквивалентным образом: множество $A \in \mathcal{A}$ назовем *p-атомом меры μ*, если для каждого измеримого $B \subset A$, $B \neq A$, имеем $\mu(B) = 0$. Следующий результат очевиден.

Предложение 4.10. *Каждое измеримое подмножество, пересекающее p-атом, содержит этот p-атом, поэтому разные p-атомы пересекаться не могут. У борелевской меры на топологическом пространстве, в котором все одноточечные подмножества замкнуты, каждый p-атом состоит ровно из одной точки.*

Упражнение 4.11. Покажите, что каждая σ-конечная мера содержит не более чем счетное число p-атомов.

Замечание 4.12. Приведем близкое понятие — классическое определение атома меры, см. например [11]. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Измеримое подмножество $A \in \mathcal{A}$ называется *атомом меры μ*, если $\mu(A) > 0$, и мера $\mu(B)$ каждого измеримого $B \subset A$ или равна 0, или $\mu(A)$.

Приведем пример, демонстрирующий отличие понятий атома σ-алгебры, p-атома и атома меры.

Пример 4.13. Пусть X — несчетное множество, а σ-алгебра $\mathcal{A}$ на X состоит из всех не более чем счетных подмножеств X и всех их дополнений. В качестве меры μ рассмотрим отображение $\mu\colon \mathcal{A} \to \{0, 1\}$, для которого $\mu(A) = 1$, если и только если $A \in \mathcal{A}$ — несчетно. Тогда атомами меры μ являются всевозможные измеримые несчетные подмножества X; p-атомов мера μ не содержит; наконец, атомы σ-алгебры $\mathcal{A}$ — это все одноточечные подмножества X.

Упражнение 4.14. Верно ли, что множество атомов σ-алгебры на множестве X является дизъюнктным покрытием X? (Известно, что для σ-алгебр, порожденных счетными семействами, ответ положительный, см. например [3]. А что можно сказать про общие σ-алгебры?)

Пример 4.15. Обобщим меру Дирака, выбрав в σ-алгебре $\mathcal{A}$ произвольный атом A, и для $B \in \mathcal{A}$ положим $\mu(B) = 1$, если $B \supset A$, и $\mu(B) = 0$ иначе. Эту меру будем обозначать через δ_A и называть *мерой Дирака с центром в A*. Ясно, что A является единственным p-атомом меры δ_A, хотя атомов мера δ_A может содержать много: к ним относятся все множества $B \in \mathcal{A}$, содержащие A.

Пример 4.16. Пусть μ и ν — меры на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, и a, b — неотрицательные вещественные числа. Тогда $a\mu + b\nu$ — мера на $(X, \mathcal{A})$.

Пусть μ и ν — меры на измеримом пространства $(X, \mathcal{A})$. Будем говорить, что *мера μ не превосходит меры ν* и писать $\mu \le \nu$, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ выполняется $\mu(A) \le \nu(A)$.

Упражнение 4.17. Пусть μ и ν — меры на измеримом пространства $(X, \mathcal{A})$, причем $\mu \le \nu$ и мера μ конечна. Покажите, что функция $(\nu - \mu)\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ является мерой.

Ниже мы будем использовать суммирования любого, не обязательного не более чем счетного семейства неотрицательных чисел. Напомним соответствующее определение. Пусть $\{c_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — произвольное семейство неотрицательных чисел. Тогда точную верхнюю грань сумм $\sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma$ по всем конечным подмножествам Δ семейства индексов Γ назовем *суммой этого семейства* и будем обозначать через $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma$.

Упражнение 4.18. Покажите, что если семейство $\{c_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ содержит несчетное число ненулевых слагаемых, то $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma = \infty$.

Предложение 4.19. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство всех p-атомов для μ. Положим $\mu_\gamma := \mu(A_\gamma)$ и предположим, что $\sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma < \infty$. Тогда $\nu := \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma \delta_{A_\gamma}$ — конечная мера на $\mathcal{A}$, причем $\nu \le \mu$, поэтому функция $\mu - \nu$ также является мерой на $\mathcal{A}$. Более того, мера $\mu - \nu$ не содержит p-атомов.*

Доказательство. Ясно, что $\nu(\emptyset) = 0$. Проверим σ-аддитивность. Так как все μ_γ положительны и $\sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma < \infty$, множество Γ, в силу упражнения 4.18, содержит не более чем счетное число элементов. Теперь σ-аддитивность функции ν вытекает из σ-аддитивности всех δ_{A_γ} и из обычной коммутативности сложения. Таким образом, мы показали, что ν — мера. Так как $\nu(X) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma < \infty$, то мера ν — конечна.

Покажем теперь, что $\nu \le \mu$. Выберем произвольное $B \in \mathcal{A}$, тогда если $\mu(B) = \infty$, то $\nu(B) \le \mu(B)$. Пусть теперь $\mu(B) < \infty$. Обозначим через Γ_B множество всех $\gamma \in \Gamma$ таких, что $A_\gamma \subset B$, и положим $A = \cup_{\gamma\in\Gamma_B} A_\gamma$. Так как множество $\Gamma_B \subset \Gamma$ не более чем счетно, то, в силу σ-аддитивности меры, выполняется

$$\nu(B) = \nu(B \setminus A) + \nu(A) = \nu(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma \delta_{A_\gamma}(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma_B} \mu_\gamma \delta_{A_\gamma}(A) =$$
$$= \sum_{\gamma\in\Gamma_B} \mu_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma_B} \mu(A_\gamma) = \mu(A) \le \mu(B),$$

что и требовалось.

Сказанное выше, вместе с упражнением 4.17, показывает, что функция $\mu - \nu$ является мерой. Нам осталось проверить, что мера $\mu - \nu$ не содержит p-атомов. Так как $\mu(A_\gamma) = \mu_\gamma = \nu(A_\gamma)$ при каждом $\gamma \in \Gamma$, то A_γ не являются p-атомами меры $\mu - \nu$. Предположим, что у меры $\mu - \nu$ имеется p-атом $A \in \mathcal{A}$, отличный от всех A_γ. Тогда A не пересекает $\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\alpha$, так как A не содержит собственных измеримых подмножеств в силу предложения 4.10, поэтому $\nu(A) = 0$, так что $\mu(A) > 0$ и A не содержит непустых измеримых подмножеств, т.е. A — p-атом μ, противоречие. $\square$

Замечание 4.20. В [26] приводится теорема, аналогичная предложению 4.19, утверждающая, что каждая конечная мера на множестве X единственным образом раскладывается в сумму мер, одна из которых не содержит атомов, а другая является *чисто* *атомной* в том смысле, что X представимо в виде не более чем счетного объединения атомов. Отметим, что мера из примера 4.13 является чисто атомной, но она не имеет ни одного p-атома.

Меру μ, не имеющую p-атомов, назовем *непрерывной.*

Следствие 4.21. *Пусть X — топологическое пространство, в котором все одноточечные подмножества замкнуты, и μ — конечная борелевская мера на X. Тогда существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ точек в X и последовательность неотрицательных чисел $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < \infty$, такие, что $\mu - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \delta_{x_i}$ — непрерывная конечная мера на X. Если X бесконечно, то последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ можно выбрать состоящей из различных точек (мы допускаем нулевые μ_i).*

Замечание 4.22. Если X — топологическое пространство, в котором все одноточечные подмножества замкнуты, и $\mu\colon \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ — непрерывная борелевская мера, причем $\mu(X) > 0$, то X — несчетно, так как иначе, в силу σ-аддитивности меры, мы бы имели $\mu(X) = 0$. Если при этом $(X, \mathcal{B}_X)$ — стандартное борелевское пространство, то, в силу теоремы 3.30, X борелевски изоморфно отрезку I.

4.2 Функция распределения

При изучении борелевских мер на прямой или на отрезке бывает полезно ввести в рассмотрение специальные измеримые функции, которые эти меры порождают. Мы проделаем соответствующие построения для нужного нам в дальнейшем случая отрезка I.

Пусть μ — конечная борелевская мера на отрезке $I = [0, 1]$. Определим *функцию распределения* $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ *меры* μ, положив $F(x) = \mu\big([0, x]\big)$. Ясно, что функция F — неубывающая.

Предложение 4.23. *Функция распределения F меры μ непрерывна справа. Более того, μ — непрерывная мера, если и только если F — непрерывная функция.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $x \in [0, 1)$ и покажем, что F непрерывна в x справа. Положим $a_k = x + (1 - x)/k$, $A_k = (a_{k+1}, a_k]$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что A_k — непересекающиеся полуинтервалы, причем $(x, a_n] = \sqcup_{k=n}^{\infty} A_k$, откуда $\mu\big((x, 1]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что

$$F(a_n) - F(x) = \mu\big([0, a_n]\big) - \mu\big([0, x]\big) = \mu\big((x, a_n]\big) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon,$$

откуда, в силу монотонности функции F, вытекает ее непрерывность справа.

Докажем теперь вторую часть предложения. Пусть сначала μ — непрерывная мера. Это означает, что для каждого $x \in [0, 1]$ выполняется $\mu\big(\{x\}\big) = 0$. Достаточно показать, что в каждом $x \in (0, 1]$ функция F непрерывна слева. Положим $b_k = x - x/k$, $B_k = (b_k, b_{k+1}]$, тогда семейство полуинтервалов B_k дизъюнктно, и $(b_n, x) = \sqcup_{k=n}^{\infty} B_k$, откуда

$\mu\big((0,x)\big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)<\infty$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое n, что

$$\begin{split}(4.1)\quad F(x)-F(b_n)=\mu\big([0,x]\big)-\mu([0,b_n])=\mu\big((b_n,x]\big)=\\ =\mu\big(\{x\}\big)+\sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k)<\varepsilon,\end{split}$$

а это, с учетом монотонности F, влечет непрерывность F слева.

Обратно, если функция F непрерывна, то она непрерывна слева в каждой точке $x\in(0,1]$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n\in\mathbb{N}$, для которого $F(x)-F(b_n)<\varepsilon$, но, в силу цепочки соотношений (4.1), этого не может быть, если $\mu\big(\{x\}\big)>0$. □

Предложение 4.24. *Пусть μ — непрерывная конечная борелевская мера на отрезке $I=[0,1]$ и F — функция распределения меры μ. Тогда $F_*\mu=\lambda$, где λ — мера Лебега.*

Доказательство. По предложению 4.23, функция F непрерывна. Кроме того, F — монотонная, $F(0)=0$ и $F(1)=\mu(I)=:a$, поэтому $F(I)=[0,a]$, и для любого $x\in[0,a]$ множество $F^{-1}(x)$ является связным и замкнутым подмножеством отрезка I, т.е. само является отрезком.

Пусть сначала $a=0$, тогда $\mu(I)=0$, так что $\mu=0$, откуда $F_*\mu=0$. С другой стороны, мера Лебега на одноточечном множестве также тождественно равна нулю, так что в этом случае $F_*\mu=\lambda$.

Пусть теперь $a>0$. Выберем произвольный полуинтервал $(\alpha,\beta]\subset[0,a]$, тогда $F^{-1}(\alpha)=[\alpha_1,\alpha_2]$, $F^{-1}(\beta)=[\beta_1,\beta_2]$ и поэтому $F^{-1}\big((\alpha,\beta]\big)=(\alpha_2,\beta_2]$. Следовательно,

$$\begin{split}(F_*\mu)\big((\alpha,\beta]\big)=\mu\Big(F^{-1}\big((\alpha,\beta]\big)\Big)=\\ =\mu\big((\alpha_2,\beta_2]\big)=\mu\big([0,\beta_2]\big)-\mu\big([0,\alpha_2]\big)=F(\beta_2)-F(\alpha_2)=\beta-\alpha,\end{split}$$

поэтому $F_*\mu$ совпадает с мерой Лебега λ на всех полуинтервалах $(\alpha,\beta]$.

Далее, выясним, чему равно значение меры $F_*\mu$ на $\{0\}$. Так как $F(0)=0$, то $F^{-1}(0)=[0,\alpha]$, откуда

$$(F_*\mu)\big(\{0\}\big)=\mu\big(F^{-1}(0)\big)=\mu\big([0,\alpha]\big)=F(\alpha)=0=\lambda\big(\{0\}\big),$$

так что и здесь обе меры совпадают. Так как обе меры аддитивны, они также совпадают и на конечных дизъюнктных объединениях рассмотренных выше полуинтервалов и одноточечного множества $\{0\}$. Заметим, что семейство всех таких объединений образует алгебру $\mathcal{A}$ на отрезке I, причем $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_I$. Кроме того, легко видеть, что $\sigma(\mathcal{A})$ содержит все открытые подмножества отрезка I (проверьте), поэтому $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}_I$ и, в силу следствия 4.6, получаем $F_*\mu=\lambda$. □

4.3 Теорема об изоморфизме пространств с мерой

Здесь мы приведем результаты Рохлина [17], описывающие классы изоморфизма стандартных борелевских пространств, наделенных борелевскими мерами.

Теорема 4.25. *Пусть X — стандартное борелевское пространство и μ — непрерывная конечная борелевская мера на X. Предположим, что $a := \mu(X) > 0$. Тогда пространство $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ изоморфно $(I, \mathcal{B}_I, a\lambda)$, где $I = [0,1]$ и λ — мера Лебега.*

Доказательство. Заметим сначала, что если пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ изоморфны, то для любого $c \geq 0$ изоморфны пространства $(X, \mathcal{A}, c\mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, c\nu)$. Таким образом, достаточно показать, что пространство $(X, \mathcal{B}_X, \mu/a)$ изоморфно $(I, \mathcal{B}_I, \lambda)$. Иными словами, достаточно доказать теорему для случая вероятностных мер μ.

Итак, пусть $a = \mu(X) = 1$. Так как мера μ конечна, не имеет p-атомов и $\mu(X) > 0$, то, в силу замечания 4.22, измеримое пространство $(X, \mathcal{B}_X)$ борелевски изоморфно $(I, \mathcal{B}_I)$. Таким образом, будем сразу считать, что мера μ задана на I.

Обозначим через F функцию распределения меры μ, тогда $F(I) = [0,1] = I$. Положим

$$N = \big\{ y \in I : \#F^{-1}(y) > 1 \big\}.$$

Так как F монотонна, то N — не более чем счетно.

Если $N = \emptyset$, то F — гомеоморфизм и, в силу предложения 3.4, F — борелевский изоморфизм. Кроме того, по предложению 4.24, имеем $\lambda = F_*\mu$, поэтому F — изоморфизм пространств с мерой $(I, \mathcal{B}_I, \mu)$ и $\big(I, \mathcal{B}_I, \lambda\big)$.

Пусть теперь $N \neq \emptyset$. Положим $M = \mathcal{C} \setminus N$, где $\mathcal{C} \subset I$ — канторов дисконтинуум, тогда M — несчетное борелевское подмножество отрезка I. Так как F однозначно на $F^{-1}(I \setminus N)$, то $F^{-1}(M)$ — несчетно. Положим $Q = M \cup N = \mathcal{C} \cup N$, тогда и $P := F^{-1}(Q)$ — несчетное борелевское подмножество отрезка и, значит, — несчетное стандартное борелевское пространство.

В силу примера 4.8, выполняется $\lambda(\mathcal{C}) = 0$. Кроме того, так как N не более чем счетно, то $\lambda(N) = 0$, откуда $\lambda(Q) = 0$. По предложению 4.24, имеем $\lambda = F_*\mu$, поэтому

$$\mu(P) = \mu\big(F^{-1}(Q)\big) = (F_*\mu)(Q) = \lambda(Q) = 0.$$

По теореме 3.30, существует борелевский изоморфизм $g\colon P \to Q$. Так как $\mu(P) = \lambda(Q) = 0$, то g является также изоморфизмом пространств с мерой $(P, \mathcal{B}_P, \mu)$ и $(Q, \mathcal{B}_Q, \lambda)$.

С другой стороны, ограничение F на $I \setminus P$ является гомеоморфизмом с $I \setminus Q$ (докажите), поэтому это ограничение, в силу предложения 3.4, — борелевский изоморфизм. Вспоминая, что $\lambda = F_*\mu$, заключаем: отображение $F|_{I \setminus P}$ является изоморфизмом пространств с мерой $(I \setminus P, \mathcal{B}_{I \setminus P}, \mu)$ и $(I \setminus Q, \mathcal{B}_{I \setminus Q}, \lambda)$.

Положим

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in P, \\ F(x), & \text{если } x \in I \setminus P. \end{cases}$$

Из сказанного выше вытекает, что h — изоморфизм пространств с мерой $(I, \mathcal{B}_I, \mu)$ и $(I, \mathcal{B}_I, \lambda)$, что и завершает доказательство. □

Следствие 4.26. *Пусть X — стандартное борелевское пространство и μ — произвольная конечная борелевская мера на X. Положим $a = \mu(X)$.*

(1) *Если X — не более чем счетно, то*

$$\mu = \sum_{x \in X} \mu_x \delta_x,$$

где μ_x — неотрицательные числа такие, что $\sum_{x\in X}\mu_x = a$.

(2) *Если X — несчетно, то пространство с мерой $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ изоморфно $(I, \mathcal{B}_I, \nu)$, где*

$$\nu = b\,\lambda + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\delta_{y_n}$$

для некоторых $b \geq 0$, последовательности $(y_1, y_2, \ldots)$ различных точек отрезка I, и последовательности $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ неотрицательных чисел, удовлетворяющей $b + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = a$.

Доказательство. Если X не более чем счетно, то результат вытекает из σ-аддитивности меры.

Пусть теперь X несчетно, тогда, в силу теоремы 3.30, пространства X и I борелевски изоморфны. Если $a = 0$, то положим $b = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = 0$.

Пусть теперь $a > 0$. В силу следствия 4.21, для некоторой последовательности $(x_1, x_2, \ldots)$ различных точек пространства X и последовательности $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ неотрицательных чисел такой, что $\sum_n \mu_n < \infty$, функция $\nu := \mu - \sum_n \mu_n\delta_{x_n}$ является непрерывной мерой на X.

Если $\nu = 0$, то снова воспользуемся теоремой 3.30, построим борелевский изоморфизм $f\colon X \to I$ и положим $b = 0$, $y_n = f(x_n)$.

Если же $\nu \neq 0$, то, в силу теоремы 4.25, существует борелевский изоморфизм $f\colon X \to I$, при котором $f_*\nu = b\,\lambda$, где λ — мера Лебега на I и $b = \nu(X) > 0$. Так как борелевский изоморфизм сохраняет как линейные комбинации, так и меры Дирака, имеем $f_*\mu = b\,\lambda + \sum_n \mu_n\delta_{y_n}$, где $y_n = f(x_n)$, что и требовалось. □

4.4 Некоторые напоминания

В этом разделе мы приведем ряд нужных нам фактов из общей теории меры. Напомним, что все меры, рассматриваемые на топологических, в частности, на метрических пространствах предполагаются борелевскими. Детали см. в [12].

Теорема 4.27. *Каждая конечная мера μ на метрическом пространстве X удовлетворяет следующему условию: для любого $A \in \mathcal{B}_X$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутое $F \subset X$ и открытое $G \subset X$, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$. Иными словами,*

$$\mu(A) = \sup\bigl\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ — замкнуто в } X\bigr\},$$
$$\mu(A) = \inf\bigl\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ — открыто в } X\bigr\}.$$

Следствие 4.28. *Конечные меры λ, μ на метрическом пространстве X совпадают, если и только если $\lambda(A) = \mu(A)$ для всех замкнутых (всех открытых) множеств $A \subset X$.*

Пусть X — топологическое пространство и μ — мера на нем. *Носителем* $\operatorname{supp}\mu$ *меры* μ называется множество всех $x \in X$, у которых каждая окрестность имеет ненулевую меру.

Ясно, что если $x \in X \setminus \operatorname{supp}\mu$, то у точки x есть окрестность U нулевой меры. Но тогда и все точки из U также не лежат в $\operatorname{supp}\mu$. Таким образом, $\operatorname{supp}\mu$ — замкнутое подмножество X.

Упражнение 4.29. Покажите, что носитель конечной линейной комбинации мер с положительными коэффициентами равен объединению носителей этих мер.

Упражнение 4.30. Покажите, что носитель ненулевой меры на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве всегда непуст.

Упражнение 4.31. Приведите пример ненулевой меры на топологическом пространстве, у которой носитель пустой.

Теорема 4.32. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и μ — конечная мера на X. Тогда носитель $\operatorname{supp}\mu$ меры μ — единственно замкнутое подмножество в X, удовлетворяющее следующим свойствам*:

(1) $\mu(\operatorname{supp}\mu) = \mu(X)$,

(2) *если $F \subset X$ — замкнутое, причем $\mu(F) = \mu(X)$, то $\operatorname{supp}\mu \subset F$.*

4.4.1 *-слабая сходимость мер

Пусть X — метрическое пространство и $C_b(X)$ — нормированное векторное пространство всех непрерывных ограниченных функций на X, где в качестве нормы выбрана $\|f\| = \sup_{x\in X}\big|f(x)\big|$. Хорошо известно, что пространство $C_b(X)$ — банахово. Каждая конечная мера μ на X задает непрерывный линейный функционал на $C_b(X)$ по формуле

$$\mu(f) = \int_X f\,d\mu,$$

где в правой части равенства стоит интеграл Лебега.

Последовательность $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ конечных мер на X называется **-слабо сходящейся к конечной мере μ на X* и этот факт обозначается через $\mu_i \Rightarrow \mu$, если для каждой функции $f \in C_b(X)$ выполняется $\mu_n(f) \to \mu(f)$ при $n \to \infty$.

Следующий результат принято называть теоремой Портманто (краткий исторический обзор см. в [15]). Чтобы его сформулировать, введем еще пару понятий.

Пусть X — метрическое пространство. Через $C_{ub}(X)$ обозначим подпространство в $C_b(X)$, состоящее из равномерно непрерывных ограниченных функций.

Пусть μ — мера на X, и A — произвольное подмножество X. Напомним, что через $\bar A$, $\operatorname{Int} A$ и ∂A мы обозначаем замыкание, внутренность и границу множества A. Так как замкнутые и открытые множества измеримы, и $\partial A = \bar A \setminus \operatorname{Int} A$, то ∂A измеримо не зависимо от измеримости A. Измеримое множество $A \subset X$ называется *μ-непрерывным*, если $\mu(\partial A) = 0$.

Теорема 4.33 (“Portmanteau”, А.Д.Александров [18])**.** *Пусть X — произвольное метрическое пространство, а μ_n, $n \in \mathbb{N}$, и μ — вероятностные меры на X. Тогда следующие пять условий эквивалентны*:

(1) $\mu_n \Rightarrow \mu$;

(2) $\mu_n(f) \to \mu(f)$ *для всех* $f \in C_{ub}(X)$;

(3) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F)$ *для всех замкнутых множеств* $F \subset X$;

(4) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G)$ *для всех открытых множеств* $G \subset X$;

(5) $\mu_n(A) \to \mu(A)$ *для всех* μ*-непрерывных множеств* $A \subset X$.

4.4.2 Меры и функционалы: теорема Рисса

В разделе 4.4.1 мы использовали интеграл Лебега по конечной мере, определенной на метрическом пространстве X, чтобы определить непрерывный линейный функционал на пространстве $C_b(X)$ всех ограниченных непрерывных функций. Ясно, что если функция $f \in C_b(X)$ всюду неотрицательна, то $\mu(f) \ge 0$. Непрерывный линейный функционал $\varphi\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ называется *неотрицательным*, если для любой $f \in C_b(X)$, $f \ge 0$, выполняется $\varphi(f) \ge 0$. Итак, каждая конечная мера μ на X может быть представлена в виде неотрицательного линейного функционала на $C_b(X)$. Если пространство X достаточно хорошее, то верно и обратное утверждение.

Мы приведем соответствующий результат для компактного X. Кроме того, для полноты картины, мы введем в рассмотрение обобщение понятия меры, а именно, знакопеременную меру, которая определяется так же, как и мера, но без условия неотрицательности. Мы не будем излагать соответствующую теорию в общем виде, а определим знакопеременную меру в интересующем нас случае конечных мер эквивалентным образом: назовем *конечной знакопеременной мерой на измеримом пространстве* $(Z, \mathcal{A})$ функцию $\xi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, равную разности двух конечных мер μ и ν на $\mathcal{A}$: $\xi = \mu - \nu$. Отметим, что такое представление меры ξ не единственно, так как для любой конечной меры λ на $\mathcal{A}$ мы можем заменить μ и ν на $\mu' = \mu+\lambda$ и $\nu = \nu'+\lambda$, тогда $\xi - \mu' - \nu'$. Среди всех таких представлений выделяется особое, которое описывается теоремой Хана (см. подробности в [11]).

Конечные знакопеременные меры на измеримом пространстве $(Z, \mathcal{A})$ образуют векторное пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{S}(Z)$. На этом пространстве вводится норма следующим образом:

$$\|\xi\| = \|\mu - \nu\| = \sup_{A\in\mathcal{A}} \bigl|\mu(A) - \nu(A)\bigr|.$$

Определенная только что норма называется *полной вариацией знакопеременной меры* ξ. Отметим, что для обычной (неотрицательной) конечной меры μ на измеримом пространстве $(Z, \mathcal{A})$ ее полная вариация $\|\mu\|$ равна $\mu(Z)$ в силу монотонности меры. Для обычных мер полная вариация естественно определяется и без предположения о конечности меры.

Пусть X — метрическое пространство, тогда каждая конечная знакопеременная мера $\xi = \mu - \nu \in \mathcal{S}(X)$ задает непрерывный линейный функционал на $C_b(X)$:

$$\xi(f) = \int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu. \tag{4.2}$$

Далее, рассмотрим нормированное линейное пространство V и двойственное пространство V^* непрерывных линейных функционалов на V. Напомним, что норма $\|\cdot\|$

пространства V порождает двойственную норму на V^*:

$$\|\varphi\| = \sup\Big\{\big|\varphi(v)\big| : v \in V,\ \|v\| \le 1\Big\}.$$

Хорошо известно, что двойственное пространство V^* с рассмотренной только что нормой является банаховым, в частности, банаховым является и пространство $C_b(X)^*$.

Напомним также, что изоморфизм нормированных пространств, сохраняющий норму, называется *изометрическим изоморфизмом*, так как он сохраняет метрики, порожденные нормами. Детали относительно следующей теоремы можно найти, например, в [21] или [24].

Теорема 4.34 (Рисса–Маркова–Какутани)**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда*

(1) *отображение $\Psi\colon \mathcal{S}(X) \to C(X)^*$ нормированных пространств, сопоставляющее каждой конечной знакопеременной норме ξ непрерывный линейный функционал $\xi\colon C(X) \to \mathbb{R}$, определенный формулой* (4.2)*, является изометричным изоморфизмом*;

(2) *функционал $\varphi \in C(X)^*$ является образом конечной меры, если и только если φ — неотрицательный.*

В частности, функционал $\varphi \in C(X)^*$ является образом вероятностной меры, если и только если φ — неотрицательный и $\varphi(1) = 1$, где через 1 мы обозначили постоянное отображение $1\colon X \to \mathbb{R}$, переводящее X в 1.

Замечание 4.35. Теорема 4.34 имеет различные обобщения. Например, ее вариант [24], называемый теоремой Александрова–Маркова, имеет место для нормального топологического пространства X. При этом, как оказывается, счетно-аддитивных мер уже не достаточно, и приходится рассматривать конечно-аддитивные меры. Кроме того, при замене метрического пространства на топологическое требуется добавить еще и условие регулярности меры, т.е. возможности сколько угодно точного приближения ее значений на измеримых множествах A значениями на содержащихся в A замкнутых множествах и содержащих A открытых множеств. Также можно обобщить 4.34 и на произвольные топологические пространства (теорема Александрова, см.[24]).

4.4.3 Теорема Банаха–Ала́оглу

Выше мы определили *-слабую сходимость линейных функционалов как поточечную сходимость. Для дальнейшего изучения этой сходимости мы напомним, как можно естественно определить топологию, в которой сходимость означает *-слабую сходимость.

Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — некоторое семейство отображений из X в топологическое пространство Y с топологией τ_Y. Каждое $x \in X$ задает отображение $x\colon \mathcal{F} \to Y$ естественным образом: $x(f_\alpha) = f_\alpha(x)$. Для каждого $x \in X$ семейство $x^{-1}(\tau_Y)$ образует топологию на $\mathcal{F}$, причем из всех топологий на $\mathcal{F}$, для которых отображение x непрерывно, топология $x^{-1}(\tau_Y)$ — наименьшая. Пусть τ — наименьшая топология на $\mathcal{F}$, содержащая все топологии $x^{-1}(\tau_Y)$, т.е. τ —

наименьшая топология, для которой все отображения $x \in X$ непрерывны. Ясно, что предбаза топологии τ состоит из элементов $x^{-1}(U)$, где $U \in \tau_Y$ и $x \in X$; элементы соответствующей базы представляют собой все возможные конечные пересечения вида $\cap_{k=1}^{n} x_k^{-1}(U_k)$, $U_k \in \tau_Y$ и $x_k \in X$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Построенная топология τ называется **-слабой.*

Приведем один важный технический результат.

Предложение 4.36. *Пусть X — произвольное множество, Y — топологическое пространство, $\mathcal{F} = \{f_\alpha \colon X \to Y\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — некоторое семейство отображений, и $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Тогда топология, индуцированная на $\mathcal{G}$ из *-слабой топологии на $\mathcal{F}$, совпадает со *-слабой топологией, определенной непосредственно на $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Пусть $V \subset \mathcal{G}$ — открытое множество в индуцированной из $\mathcal{F}$ топологии, тогда существует такое открытое в $\mathcal{F}$ множество W, что $V = W \cap \mathcal{G}$. В силу того, как выглядит база *-слабой топологии, см. выше, критерий открытости множества W состоит в том, что вместе с каждой точкой f это множество содержит $U = \cap_{k=1}^{n} x_k^{-1}(U_k) \ni f$, где $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы X, а U_k — некоторые открытые множества в Y. По определению,

$$U = \bigl\{ f_\alpha \in \mathcal{F} : f_\alpha(x_k) \in U_k,\, k = 1, \ldots, n \bigr\}.$$

Но тогда $V = W \cap \mathcal{G}$ содержит

$$U \cap \mathcal{G} = \bigl\{ f_\alpha \in \mathcal{G} : f_\alpha(x_k) \in U_k,\, k = 1, \ldots, n \bigr\},$$

а последнее множество входит в базу *-слабой топологии на $\mathcal{G}$, поэтому, в силу произвольности выбора $f \in V$, множество V открыто в *-слабой топологии на $\mathcal{G}$. $\square$

Упражнение 4.37. Докажите, что последовательность $(f_1, f_2, \ldots) \subset \mathcal{F}$ сходится в топологии τ к некоторой функции $f \in \mathcal{F}$, $f_i \to f$, тогда и только тогда, когда отображения f_i сходятся к f поточечно, т.е. для каждого $x \in X$ выполняется $f_i(x) \to f(x)$.

Пример 4.38. Пусть V — линейное нормированное пространство, тогда каждое $v \in V$ можно представить как линейное отображение на V^*: $v(\varphi) := \varphi(v)$ для всех $\varphi \in V^*$. Таким образом, определяется **-слабая топология на V^**. По упражнению 4.37, сходимость $\varphi_i \to \varphi$, $\varphi_i, \varphi \in V^*$, в *-слабой топологии — это поточечная сходимость функционалов φ_i к функционалу φ.

Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [21].

Теорема 4.39 (Банах–Ала́оглу)**.** *Пусть V — произвольное банахово пространство, и $B^* \subset V^*$ — шар с центром в нуле и радиусом* 1 *относительно двойственной нормы. Тогда шар B^* компактен в $*$-слабой топологии.*

Следствие 4.40. *Для любого метрического пространства X, пусть*

$$B^* = \bigl\{ \varphi \in C_b(X)^* : \|\varphi\| \le 1 \bigr\}$$

— единичный шар в $C_b(X)^*$ относительно двойственной нормы. Тогда B^* компактен в *-слабой топологии.

В случае общих топологических пространств компактность не влечет существование сходящихся подпоследовательностей в любой последовательности (секвенциальная компактность). Если же пространство метрическое, то компактность и секвенциальная компактность равносильны. Это — одна из причин важности следующего результата (доказательство см. например в [21] или [22]).

Теорема 4.41. *Пусть V — банахово пространство, и $B^* \subset V^*$ — шар с центром в нуле и радиусом 1 относительно двойственной нормы. Тогда *-слабая топология на B^* метризуема, если и только если пространство V — сепарабельно.*

Доказательство следующей теоремы можно найти в [19].

Теорема 4.42 (Стоун–Вейерштрасс). *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда пространство $C(X)$ — сепарабельно.*

Следствие 4.43. *Пусть X — компактное метрическое пространство, и $B^* \subset C(X)^*$ — шар с центром в нуле и радиусом 1 относительно двойственной нормы. Тогда шар B^*, наделенный *-слабой топологией, — метризуемый компакт.*

Тема 5

Метрические тройки Громова.

В настоящем разделе мы приступаем к изучению *метрических троек Громова* или *mm-пространств*, а именно, метрических пространств (X,d), на которых заданы борелевские меры μ. Обычно эти тройки записываются в виде (X,d,μ) или в более краткой форме, если понятно, о какой метрике или мере идет речь, например, просто (X,μ) или даже X. Имеются разные варианты теории. Мы, как правило, будем ограничивать себя сепарабельными пространствами. Также, в качестве меры будем брать конечную (например, вероятностную), σ-конечную или локально-конечную меру (мера достаточно малой окрестности каждой точки конечна). Начальная часть нашего изложения следует [13]. Впрочем, некоторые детали становятся более ясными поле обращения к [12] и [14].

Приведем ряд простых, но полезных свойств mm-пространств. Напомним, что на каждом подмножестве топологического пространства индуцируется топология: нужно взять все открытые множества и пересечь их с подмножеством. Таким образом, на подмножестве возникает и соответствующая борелевская σ-алгебра. Следующее предложение утверждает, что эту σ-алгебру можно получить и другим способом: достаточно пересечь все борелевские множества объемлющего пространства с подмножеством.

Предложение 5.1. *Пусть $Y\subset X$ — подпространство топологического пространства X, тогда*

$$\mathcal{B}_Y=\mathcal{B}_X\cap Y:=\{B\cap Y: B\in\mathcal{B}_X\},$$

где $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ — соответствующие борелевские σ-алгебры. Более того, $\mathcal{B}_Y\subset\mathcal{B}_X$, если и только если $Y\in\mathcal{B}_X$.

Доказательство. Легко видеть, что $\mathcal{B}_X\cap Y$ является σ-алгеброй в Y, содержащей все открытые в Y множества, поэтому $\mathcal{B}_X\cap Y\supset\mathcal{B}_Y$. Докажем теперь обратное включение.

Положим

$$\mathcal{C}=\{B\sqcup(D\setminus Y): B\in\mathcal{B}_Y,\ D\in\mathcal{B}_X\}.$$

Так как $X\cap Y$ — открыто в Y и, значит, принадлежит $\mathcal{B}_Y$, а также $X\in\mathcal{B}_X$, то $X=(X\cap Y)\sqcup(X\setminus Y)\in\mathcal{C}$. Далее, если $E=B\sqcup(D\setminus Y)\in\mathcal{C}$, то $X\setminus E=(Y\setminus B)\sqcup\big((X\setminus D)\setminus Y\big)$, но $(Y\setminus B)\in\mathcal{B}_Y$ и $(X\setminus D)\in\mathcal{B}_X$, поэтому $X\setminus E\in\mathcal{C}$. Аналогично проверяется, что $\mathcal{C}$ замкнуто относительно не более чем счетны объединений. Наконец, каждое открытое множество $U \subset X$ имеет вид $(U \cap Y) \sqcup (U \setminus Y)$, причем $U \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ и $U \in \mathcal{B}_X$, поэтому $U \in \mathcal{C}$, так что $\mathcal{C}$ содержит топологию τ_X пространства X. Таким образом, $\mathcal{C}$ является σ-алгеброй на X, содержащей τ_X, откуда $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{C}$ и, следовательно, $\mathcal{B}_X \cap Y \subset \mathcal{C} \cap Y$. Однако, $\mathcal{C} \cap Y = \mathcal{B}_Y$, поэтому $\mathcal{B}_X \cap Y \subset \mathcal{B}_Y$, что и требовалось. $\square$

В качестве следующего шага мы хотели бы, начав с mm-пространства (X,μ), построить соответствующее mm-пространство на подмножестве $Y \subset X$. Конечно, индуцировать борелевскую σ-алгебру мы можем, но что делать с мерой μ? Если $Y \in \mathcal{B}_X$, то, как было отмечено в предложении 5.1, $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_X$, поэтому мы можем просто ограничить меру μ на $\mathcal{B}_Y$. Такое ограничение будем обозначать через μ_Y. Если же $Y \notin \mathcal{B}_X$, то этот подход не работает. Чтобы и в этом случае добиться успеха, мы напомним понятие внешней меры и продолжения обычной меры до внешней.

Внешней мерой μ на множестве X называется функция $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$, для которой $\mu(\emptyset) = 0$ и которая является *σ-субаддитивна*: если $(A_1, A_2, \dots)$ — последовательность подмножеств в X и $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ то

$$\mu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Подмножество $A \subset X$ называется *измеримым по Каратеодери* для внешней меры μ на X, если для всякого $T \subset X$ выполняется $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ (т.е. A делит каждое множество T на μ-аддитивные части). Множество всех μ-измеримых по Каратеодори подмножеств X обозначим через $\sigma(\mu)$. Заметим, что каждое множество $A \subset X$, для которого $\mu(A) = 0$, измеримо по Каратеодори.

Следующее утверждение хорошо известно.

Теорема 5.2. *Для каждой внешней меры μ семейство $\sigma(\mu)$ является σ-алгеброй, а ограничение μ на $\sigma(\mu)$ представляет собой обычную меру.*

На внешние меры естественно переносятся многие свойства, относящиеся к обычным мерам. Так, например, внешняя мера на топологическом пространстве X называется *борелевской*, если $\mathcal{B}_X \subset \sigma(\mu)$.

Если μ — мера, определенная на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, то естественным образом определяется ее *продолжение Лебега* на 2^X до некоторой внешней меры μ^*:

$$\mu^*(T) = \inf\bigl\{\mu(A) : T \subset A,\ A \in \mathcal{A}\bigr\}.$$

Отметим, что σ-алгебра $\sigma(\mu^*)$ включает $\mathcal{A}$, но может быть больше, чем $\mathcal{A}$.

Упражнение 5.3. Покажите, что для внешней меры λ^*, продолжающей меру Лебега λ, заданную на отрезке $I = [0,1]$, существует измеримое по Каратеодори множество $T \subset I$, не являющееся борелевским.

Используя внешнюю меру μ^*, продолжающую некоторую меру μ, заданную на измеримом пространстве X, мы можем индуцировать внешнюю меру уже на произвольном подмножестве $Y \subset X$, ограничив μ^* на 2^Y. Полученную внешнюю меру вновь обозначим через μ_Y^*.

Упражнение 5.4. Пусть Y — измеримое подмножество измеримого пространства X. Докажите, что μ_Y^* совпадает продолжением Лебега меры μ_Y, т.е. $\mu_Y^* = (\mu_Y)^*$.

Предложение 5.5. *Пусть μ — борелевская мера на топологическом пространстве X, и Y — произвольное подмножество X. Тогда внешняя мера μ_Y^* также является борелевской, т.е. $\mathcal{B}_Y \subset \sigma(\mu_Y^*)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждое открытое подмножество Y измеримо по Каратеодори. Пусть $U \subset Y$ — такое подмножество, тогда $U = Y \cap V$, где V — открытое подмножество X. Для произвольного $T \subset Y$ имеем

$$\mu_Y^*(T\cap U)+\mu_Y^*(T\setminus U) = \mu^*(T\cap U)+\mu^*(T\setminus U) = \mu^*(T\cap V)+\mu^*(T\setminus V) = \mu^*(T) = \mu_Y^*(T),$$

где предпоследнее равенство вытекает из того, что $V \in \mathcal{B}_X \subset \sigma(\mu^*)$. □

Из сказанного выше вытекает следующий результат, позволяющий строить по известным mm-пространствам много других.

Следствие 5.6. *Пусть (X,μ) — некоторое mm-пространство, и $Y \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда (Y,μ_Y^*) — тоже mm-пространство.*

5.1 Гиперпространство метрических троек Громова

Напомним, что различие между метрическими пространствами можно измерять с помощью расстояния Громова–Хаусдорфа, которое строится на базе расстояния Хаусдорфа, определенного на подмножествах метрического пространства. В силу того, что в литературе используются разные обозначения для окрестностей точек, а также для окрестностей подмножеств метрического пространства, фиксируем здесь обозначения, привычные для нас.

Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$, $s > 0$ и $r \ge 0$. Подмножество

- $U_s(x) = \big\{y \in X : |xy| < s\big\}$ назовем *открытым шаром с центром в x радиуса s*;
- $B_r(x) = \big\{y \in X : |xy| \le r\big\}$ — *замкнутым шаром с центром в x радиуса r*;
- $S_r(x) = \big\{y \in X : |xy| = r\big\}$ — *сферой с центром в x радиуса r*, причем если $r = 0$,

причем если $r = 0$, то соответствующие замкнутый шар и сфера называются *вырожденными*.

Упражнение 5.7. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, $r \ge 0$ и $s > 0$. Покажите, что

(1) $\partial U_s(x)$ и $\partial B_s(x)$ не связаны никаким включением,

(2) $\partial U_s(x) \subset S_s(x)$,

(3) $\partial B_r(x) \subset S_r(x)$,

причем оба предыдущих включения могут быть строгими.

Напомним, что для подмножеств $Z \subset [0,\infty]$ функции inf и sup естественным образом определяются и для $Z = \emptyset$, а именно, $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = 0$. Для произвольного $A \subset X$, возможно пустого, и $x \in X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf_{a\in A} |xa|$. Отметим, что $|x\emptyset| = |\emptyset x| = \infty$. Определим теперь открытые и замкнутые окрестности подмножеств $A \subset X$:

- $U_s(A) = \big\{y \in X : |xA| < s\big\}$ назовем *открытой s-окрестностью множества A*;
- $B_r(A) = \big\{y \in X : |xA| \le r\big\}$ назовем *замкнутой r-окрестностью множества A*.

Отметим, что
$$U_s(\emptyset) = \{x \in X : |x\emptyset| = \infty < s\} = \emptyset.$$
Аналогично, $B_r(\emptyset) = \emptyset$.

Отметим также, что $U_s(A) = \cup_{a\in A} U_s(a)$, а $B_r(A)$ равно замыканию множества $\cup_{a\in A} B_r(a)$, причем оба этих равенства имеют место и для $A = \emptyset$ (убедитесь).

В дальнейшем нам понадобится следующий простой результат.

Предложение 5.8. *Для произвольного замкнутого подмножества F метрического пространства X и конечной меры μ на X выполняется*
$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu\big(B_{1/k}(F)\big) = \lim_{k\to\infty} \mu\big(U_{1/k}(F)\big).$$

Пусть теперь A и B — произвольные подмножества метрического пространства X. Тогда *расстоянием Хаусдорфа* между A и B называется величина
$$d_H(A,B) = \inf\big\{\varepsilon > 0 : A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\big\}.$$

Замечание 5.9. Если $A = B = \emptyset$, то каждое из включений в определении $d_H(A,B)$ имеет место при всех ε, так что $d_H(A,B) = 0$. Если же только одно из A, B пусто, пусть например $A = \emptyset$, то включение $B \subset U_\varepsilon(A)$ не выполняется ни при каком ε, поэтому $d_H(A,B) = \infty$.

В дальнейшем мы не будем применять d_H к пустым множества, а **все рассматриваемые метрические пространства предполагаются непустыми**.

Хорошо известно [10], что на множестве $\mathcal{H}(X)$ всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства X расстояние Хаусдорфа является метрикой. Более того, если пространство X — полное, то $\mathcal{H}(X)$ тоже полное; если X — вполне ограниченное, то $\mathcal{H}(X)$ — вполне ограниченное; если X — компактное, то $\mathcal{H}(X)$ — компактное.

Пусть теперь X и Y — метрические пространства, тогда *расстоянием Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ между X и Y* называется точная нижняя грань тех $\varepsilon > 0$, для которых существует метрическое пространство Z и $X', Y' \subset Z$, изометричные X и Y соответственно, такие, что $d_H(X',Y') < \varepsilon$. Хорошо известно [10], что на семействе компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой, а полученное метрическое пространство, называемое *пространством Громова–Хаусдорфа*, — польское, геодезическое и стягиваемое по себе (гомеоморфно конусу).

Пусть теперь имеются два mm-пространства (X, d, μ) и (Y, ρ, ν). Используем аналогичную конструкцию, чтобы определить, насколько эти пространства различны. Конечно, мы можем изометрически вложить X и Y в некоторое метрическое пространство Z, но теперь, кроме расстояния между образами X и Y, нам нужно измерить еще расстояния между мерами μ и ν. Если $f\colon X \to Z$ и $g\colon Y \to Z$ — изометричные вложения, то определены борелевские меры $f_*\mu$ и $g_*\nu$. Как померить расстояние между этими мерами? Тут имеется много разных вариантов.

5.1.1 Расстояния Прохорова

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Обозначим через $\mathcal{M}(X)$ множество всех конечных (борелевских) мер на X, а через $\mathcal{P}(X)$ — подмножество в $\mathcal{M}(X)$, состоящее из всех вероятностных мер. Построим естественную функцию расстояния на $\mathcal{M}(X)$, называемую *расстоянием Прохорова*. Пусть, как и выше, $\mathcal{B}_X$ обозначает борелевскую σ-алгебру на X. Тогда для $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ положим

$$d_P(\mu,\nu) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \mu(A) \le \nu\big(U_\varepsilon(A)\big) + \varepsilon \ \&\ \nu(A) \le \mu\big(U_\varepsilon(A)\big) + \varepsilon \ \ \forall A \in \mathcal{B}_X\Big\}. \tag{5.1}$$

Ясно, что d_P — неотрицательная симметричная функция от пар мер, причем $d_P(\mu,\mu) = 0$ при всех $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

Теорема 5.10. *Функция расстояния d_P является метрикой на $\mathcal{M}(X)$.*

Доказательство. Проверим положительную определенность функции d_P. Предположим, что $d_P(\mu,\nu) = 0$, тогда для любых $\varepsilon > 0$ и замкнутого F выполняется $\mu(F) \le \nu\big(U_\varepsilon(F)\big) + \varepsilon$. По предложению 5.8, имеем $\nu\big(U_{1/k}(F)\big) \to \nu(F)$ при $k \to \infty$ и, значит, $\mu(F) \le \nu(F)$. Симметричное неравенство дает $\mu(F) = \nu(F)$. В силу следствия 4.28, заключаем, что $\mu = \nu$, откуда и вытекает положительная определенность функции d_P.

Проверим теперь неравенство треугольника. Пусть $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$. Выберем произвольные $s \ge d_P(\lambda,\mu)$ и $t \ge d_P(\mu,\nu)$, тогда для любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполняется

$$\lambda(A) \le \mu\big(U_s(A)\big) + s \le \nu\Big(U_t\big(U_s(A)\big)\Big) + s + t \le \nu\big(U_{s+t}(A)\big) + s + t,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $U_t\big(U_s(A)\big) \subset U_{s+t}(A)$ (проверьте). Аналогично проверяется, что $\nu(A) \le \lambda\big(U_{s+t}(A)\big) + s + t$, поэтому $d_P(\lambda,\nu) \le s + t$. Из произвольности s и t заключаем, что $d_P(\lambda,\nu) \le d_P(\lambda,\mu) + d_P(\mu,\nu)$, что и требовалось. $\square$

Определение 5.11. Функция d_P называется *метрикой Прохорова*. Если для последовательности $(\mu_1, \mu_2, \ldots) \subset \mathcal{M}(X)$ и $\mu \in \mathcal{M}(X)$ выполняется $d_P(\mu_n, \mu) \to 0$ при $n \to \infty$, то будем говорить, что эта последовательность *сходится к μ по Прохорову* и обозначать $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$. Множество $\mathcal{P}(X)$ вероятностных мер на метрическом пространстве X, наделенное метрикой Прохорова, будем называть *пространством Прохорова на X*.

На самом деле, в некоторых случаях для определения метрики Прохорова достаточно одного из двух неравенств (5.1).

Предложение 5.12. *Пусть для вероятностных мер $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$, произвольного $\varepsilon > 0$ и любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполняется $\mu(A) \le \nu\big(U_\varepsilon(A)\big)+\varepsilon$. Тогда $\nu(A) \le \mu\big(U_\varepsilon(A)\big)+\varepsilon$ и, значит,*

$$d_P(\mu,\nu) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \mu(A) \le \nu\big(U_\varepsilon(A)\big)+\varepsilon \ \ \forall A \in \mathcal{B}_X\Big\}.$$

Тем самым, при определении метрики Прохорова на пространстве вероятностных мер можно ограничиться одним из двух неравенств (5.1).

Доказательство. Положим $B = X \setminus U_\varepsilon(A)$. По условию, $\mu(B) \le \nu\big(U_\varepsilon(B)\big)+\varepsilon$, откуда

$$\mu\big(U_\varepsilon(A)\big) = \mu(X\setminus B) = 1-\mu(B) \ge 1-\Big(\nu\big(U_\varepsilon(B)\big)+\varepsilon\Big) = \nu\big(X\setminus U_\varepsilon(B)\big)-\varepsilon.$$

Покажем, что $A \subset X \setminus U_\varepsilon(B)$. Последнее равносильно тому, что для каждого $a \in A$ выполняется $a \notin U_\varepsilon(B)$. Предположим противное, тогда для некоторого $b \in B$ выполняется $|ab| < \varepsilon$, так что $b \in U_\varepsilon(A)$. Но $b \in X \setminus U_\varepsilon(A)$, противоречие.

Теперь, воспользовавшись монотонностью меры, заключаем, что $\mu\big(U_\varepsilon(A)\big) \ge \nu(A)-\varepsilon$, что и требовалось. □

Разберем теперь, как связаны *-слабая сходимость и сходимость по Прохорову на пространстве вероятностных мер. Для этого мы воспользуемся теоремой Портманто.

Теорема 5.13. *Если последовательность $(\mu_1,\mu_2,\dots) \subset \mathcal{P}(X)$ сходится к $\mu \in \mathcal{P}(X)$ по Прохорову, то также имеет место и *-слабая сходимость $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon_n = d_P(\mu_n,\mu)+1/n$, тогда $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$ и $\mu_n(A) \le \mu\big(U_{\varepsilon_n}(A)\big)+\varepsilon_n$ для любого непустого $A \in \mathcal{B}_X$. Выберем в качестве A непустое замкнутое множество F, тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \limsup_{n\to\infty}\Big[\mu\big(U_{\varepsilon_n}(F)\big)+\varepsilon_n\Big] = \mu(F),$$

поэтому, в силу теоремы 4.33, имеем $\mu_n \Rightarrow \mu$, что и требовалось. □

В случае сепарабельного пространства имеет место и обратный результат. Введем предварительно ряд обозначений.

Теорема 5.14. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\mu,\mu_1,\mu_2,\ldots \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mu_n \Rightarrow \mu$, если и только если $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$.*

Доказательство. В силу теоремы 5.13, нам осталось показать, что слабая сходимость влечет сходимость по Прохорову.

Лемма 5.15. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует покрывающая X последовательность $(A_1,A_2,\dots)$ открытых (замкнутых) μ-непрерывных шаров, радиусы которых меньше δ.*

Доказательство. Пусть $S = (s_1,s_2,\dots) \subset X$ — всюду плотная последовательность в X. В силу упражнения 5.7, для каждого (открытого или замкнутого) шара A радиуса r с центром в x выполняется $\partial A \subset S_r(x)$.

Для $x \in X$ рассмотрим семейство сфер $\mathcal{S} = \{S_r(x) : \delta/2 < r < \delta\}$. Так как это семейство дизъюнктно, а мера μ конечна, то, в силу упражнения 4.18, существует не более чем счетное множество r_j, $\delta/2 < r_j < \delta$, таких, что $\mu\big(S_{r_j}(x)\big) > 0$. Следовательно, найдется такое $\delta/2 < r(x) < \delta$, для которого $\mu\big(S_{r(x)}(x)\big) = 0$.

Выберем в качестве A_i или шары $U_{r(s_i)}(s_i)$, или шары $B_{r(s_i)}(s_i)$. Так как радиусы эти шаров отделены от нуля (больше $\delta/2$), последовательность $(A_1, A_2, \ldots)$ — покрытие X. Кроме того, радиусы этих шаров меньше δ и μ-меры границ равны нулю. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует такое N, что при каждом $n \ge N$ выполняется $d_P(\mu_n, \mu) < \varepsilon$ или, что, в силу предложения 5.12, равносильно $\mu(A) < \mu_n\big(U_\varepsilon(A)\big) + \varepsilon$ при всех непустых $A \in \mathcal{B}_X$.

Выберем произвольное $0 < \delta < \varepsilon/2$ и, используя лемму 5.15, построим покрытие $(A_1, A_2, \ldots)$ пространства X открытыми μ-непрерывными шарами, радиусы которых меньше δ.

По пункту (5) упражнения 4.3, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для $C = \cup_{i=1}^k A_k$ выполняется $\mu(X \setminus C) \le \delta$. Положим $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_k)$.

Пусть B — объединение произвольного набора шаров из $\mathcal{A}$. Так как $\partial B \subset \cup \partial A_i$, то $\mu(\partial B) \le \sum \mu(\partial A_i) = 0$, т.е. каждое B является μ-непрерывным подмножеством X.

Так как $\mu_n \Rightarrow \mu$, то, в силу пункта (5) теоремы 4.33, имеем $\mu_n(B) \to \mu(B)$, поэтому существует N_B такое, что при всех $n \ge N_B$ выполняется $\big|\mu_n(B) - \mu(B)\big| < \delta$. Положим $N = \max_B N_B$, тогда при всех $n \ge N$ и всех B имеем $\big|\mu_n(B) - \mu(B)\big| < \delta$.

Выберем теперь произвольное $A \in \mathcal{B}_X$ и положим $\mathcal{B} = \{A_i \in \mathcal{A} : A \cap A_i \ne \emptyset\}$ и $B = \cup \mathcal{B}$. Ясно, что $A \cap C \subset B$, поэтому $A \subset B \cup (X \setminus C)$, откуда $\mu(A) \le \mu(B) + \mu(X \setminus C)$.

Заметим, что диаметр каждого A_i меньше ε, поэтому все $A_i \in \mathcal{B}$ лежат в $U_\varepsilon(A)$, откуда $B \subset U_\varepsilon(A)$. Таким образом, для всех $n \ge N$ и всех $A \in \mathcal{B}_X$ имеем

$$\mu(A) \le \mu(B) + \mu(X \setminus C) \le \mu(B) + \delta < \mu_n(B) + 2\delta < \mu_n\big(U_\varepsilon(A)\big) + \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

5.1.2 Сепарабельность и пространство Прохорова

В настоящем разделе мы покажем, что из сепарабельности метрического пространства вытекает сепарабельность пространства вероятностных мер, определенных на этом пространстве. Прежде чем приступить к доказательству, мы напомним определения нескольких нужных нам понятий.

Пусть X — произвольное множество, $Y \subset X$ и $f\colon X \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Напомним, что *колебание функции f на подмножестве Y* — это следующая величина:

$$\omega(f, Y) = \sup_{x, x' \in Y} \big|f(x) - f(x')\big|.$$

С учетом сделанных выше распространений функций inf и sup на $\emptyset$, имеем $\omega(f, \emptyset) = 0$. Отметим за одно, что, по аналогичным соображениям, $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.

Замечание 5.16. В терминах колебания естественно определяются равномерно непрерывные функции. А именно, если X — метрическое пространство, то $f \in C_{ub}(X)$, если и только если функция f — ограничена, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $Y \subset X$, $\operatorname{diam} Y < \delta$, выполняется $\omega(f, Y) < \varepsilon$.

Еще одно необходимое для дальнейшего понятие — индикатор множества. Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. Функция $I_Y\colon X \to \{0,1\}$, равная 1 на Y и 0 на $X \setminus Y$, называется *индикатором множества* Y. Напомним, что для конечной меры μ, заданной на некотором измеримом пространстве, множество интегрируемых по Лебегу функций включает все индикаторы измеримых множеств, а также замкнуто относительно линейных комбинаций и произведений (образует алгебру). Интеграл Лебега по мере μ от интегрируемой функции f будем обозначать $\mu(f)$ — так же, как это мы делали для непрерывных ограниченный функций f.

Теорема 5.17. *Если метрическое пространство X сепарабельно, то и пространство Прохорова $\bigl(\mathcal{P}(X), d_P\bigr)$ также сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $(s_1, s_2, \dots) \subset X$ — всюду плотная последовательность в X. Рассмотрим следующее счетное семейство вероятностных мер на X:

$$\mathcal{D} = \Bigl\{\sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{s_i} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1,\ k = 1, 2, \dots\Bigr\}.$$

Мы покажем, что $\mathcal{D}$ всюду плотно в $\mathcal{P}(X)$, чем и завершим доказательство. Для этого достаточно, в силу сепарабельности X и теоремы 5.14, выбрать произвольное $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и построить последовательность $\mu_n \in \mathcal{D}$, которая *-слабо сходится к μ.

Фиксируем некоторое $t > 0$, тогда последовательность шаров $U_i := U_{t/2}(s_i)$ покрывает X. Перестроим это семейство в дизъюнктное покрытие $(V_1, V_2, \dots)$: пусть $V_1 = U_1$, а при каждом $n > 1$ положим $V_n = U_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} U_i$. Заметим, что диаметры множеств V_i, как и шаров U_i, не превосходят t, и что ряд $\sum_{i=1}^\infty \mu(V_i)$ сходится к 1, в частности, существует такое k, для которого $\sum_{i=1}^{k-1} \mu(V_i) > 1 - t$. Положим $Z_i = V_i$ при $i = 1, \dots, k-1$ и $Z_k = X \setminus \cup_{i=1}^{k-1} V_i$, тогда $(Z_1, \dots, Z_k)$ — покрытие X такое, что $\operatorname{diam} Z_i \le t$ при $1 \le i \le k-1$, и $\mu(Z_k) < t$.

Положим $z_i = \mu(Z_i)$, $z = (z_1, \dots, z_k)$, $\nu_t = \sum_{i=1}^k z_i \delta_{s_i}$. Так как $\sum_{i=1}^k z_i = 1$, то $\nu_t \in \mathcal{P}(X)$.

Следующая лемма тривиальна.

Лемма 5.18. *Рассмотрим гиперплоскость Π в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$, заданную уравнением $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, тогда множество точек, лежащих в этой плоскости и имеющих только рациональные координаты, всюду плотно. В частности, для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Pi$ и любого $\varepsilon > 0$ существует точка $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi$ такая, что $y_i \in \mathbb{Q}$ при всех i и $\|x-y\|_1 = \sum_i |x_i - y_i| < \varepsilon$. При этом, если все x_i неотрицательны, то точку y можно выбрать так, чтобы все y_i также были неотрицательными.*

В силу леммы 5.18, существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, в котором $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и $\alpha_i \ge 0$ при всех i, а также $\sum_i \alpha_i = 1$ и $\|z - \alpha\|_1 < t$. Положим $\eta_t = \alpha_1 \delta_{s_1} + \dots + \alpha_k \delta_{s_k}$, и в качестве последовательности μ_n возьмем $\eta_{1/n}$. Проверим, что $\mu_n \Rightarrow \mu$. Чтобы показать последнее, достаточно, в силу пункта (2) теоремы 4.33, выбрать произвольную равномерно непрерывную ограниченную функцию $g \in C_{ub}(X)$ и выяснить, что $\mu_n(g) \to \mu(g)$.

Выберем такую функцию g, фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть N столь велико, что при всех $n \ge N$ выполняется

- $\omega(g, Z_i) < \varepsilon/3$ для любого $1 \le i \le k-1$ (такое N существует в силу равномерной непрерывности функции g);
- $\omega(g, X)\mu(Z_k) < \varepsilon/3$ (это возможно, так как $\mu(Z_k) < 1/n$);
- $\|z-\alpha\|_1\,\|g\|_\infty < \varepsilon/3$ (это можно сделать, так как $\|z-\alpha\|_1 < 1/n$).

Возьмем произвольное $n \ge N$ и положим $t = 1/n$. Тогда

$$\bigl|\nu_t(g) - \eta_t(g)\bigr| = \left|\sum_{i=1}^k \bigl(z_i - \alpha_i\bigr) g(s_i)\right| \le \|z-\alpha\|_1\,\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее,

$$\inf_{x\in Z_i} g(x)\,\mu(Z_i) \le \mu(g\,I_{Z_i}) \le \sup_{x\in Z_i} g(x)\,\mu(Z_i),$$

поэтому при $1 \le i < k$ имеем

$$\Bigl|\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu(Z_i)g(s_i)\Bigr| = \Bigl|\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu\bigl(g(s_i)\,I_{Z_i}\bigr)\Bigr| \le \omega(g, Z_i)\,\mu(Z_i) < \frac{\varepsilon}{3}\,\mu(Z_i),$$

а при $i = k$ выполняется

$$\Bigl|\mu(g\,I_{Z_k}) - \mu(Z_k)g(s_k)\Bigr| \le \omega(g, X)\,\mu(Z_k) < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$\begin{aligned}\bigl|\mu(g) - \nu_t(g)\bigr| = \left|\sum_{i=1}^k \bigl[\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu(Z_i)g(s_i)\bigr]\right| \le \\ \le \sum_{i=1}^k \bigl|\mu(g\,I_{Z_i}) - \mu(Z_i)g(s_i)\bigr| < \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{3}\,\mu(Z_i) + \frac{\varepsilon}{3} \le \frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bigl|\mu(g) - \mu_n(g)\bigr| \le \bigl|\mu(g) - \nu_t(g)\bigr| + \bigl|\nu_t(g) - \eta_t(g)\bigr| < \varepsilon,$$

что и требовалось. □

5.1.3 Компактность и пространство Прохорова

Цель это раздела — доказать следующий результат.

Теорема 5.19. *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда пространство Прохорова $\bigl(\mathcal{P}(X), d_P\bigr)$ также компактно.*

Доказательство. Обозначим через Φ множество всех неотрицательных линейных функционалов $\varphi\colon C(X) \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(1) = 1$. По теореме 4.34, отображение Ψ, сопоставляющее каждой мере $\mu \in \mathcal{P}(X)$ линейный функционал $\varphi := \Psi(\mu)$ по правилу

$\varphi(f) = \mu(f) = \int_X f\,d\mu$, является изометрией между $\mathcal{P}(X)$ и Φ, где на $\mathcal{P}(X)$ и Φ рассматриваются метрики, порожденные соответственно полной вариацией и двойственной нормой к sup-норме на $C(X)$.

Обозначим через B^* единичный (относительно двойственной нормы) шар с центром в нуле в пространстве $C(X)^*$, тогда $\Phi \subset B^*$, так как полная вариация $\|\mu\|$ каждой вероятностной меры μ равна $\mu(X) = 1$, поэтому, в силу изометричности отображения Ψ, имеем $\big\|\Psi(\mu)\big\| = 1$.

По теореме 4.39, шар B^* компактен в *-слабой топологии.

Лемма 5.20. *Множество Φ замкнуто в *-слабой топологии на $C(X)^*$.*

Доказательство. Действительно,

$$\Phi = \big\{\varphi \in C(X)^* : \varphi(1) = 1 \text{ и } \varphi(f) \ge 0 \text{ для всех } f \in C(X),\ f \ge 0\big\}.$$

Для произвольного $f \in C(X)$ рассмотрим отображение $\theta_f\colon C(X)^* \to \mathbb{R}$, $\theta_f(\varphi) = \varphi(f)$. Заметим, что, по определению *-слабой топологии, для каждых $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ множество $\Big\{\varphi \in C(X)^* : \big|\varphi(f) - a\big| < \varepsilon\Big\}$ открыто в этой топологии, поэтому такое отображение θ_f непрерывно и, следовательно, множества

$$\big\{\varphi \in C(X)^* : \varphi(1) = 1\big\} = \theta_1^{-1}(1) \quad\text{и}\quad \big\{\varphi \in C(X)^* : \varphi(f) \ge 0\big\} = \theta_f^{-1}\big([0,\infty)\big)$$

замкнуты в *-слабой топологии. Осталось заметить, что Φ совпадает с пересечением таких множеств и, поэтому, также замкнуто. □

По предложению 4.36, *-слабая топология на B^* совпадает с топологией, индуцированной из *-слабой топологии на $C(X)^*$, поэтому множество $\Phi \subset B^*$ — замкнуто в шаре B^* со *-слабой топологией. Так как каждое замкнутое подмножество компактного пространства само компактно, мы заключаем, что Φ — компакт в топологии, индуцированной из *-слабой топологии пространства $C(X)^*$. Снова, по предложению 4.36, эта индуцированная топология совпадает со *-слабой топологией самого пространства Φ. Тем самым, Φ — компакт и в *-слабой топологии.

Лемма 5.21. *Метрическое пространство $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ и топологическое пространство Φ со *-слабой топологией гомеоморфны.*

Доказательство. Мы покажем, что построенное выше отображение $\Psi\colon \mathcal{P}(X) \to \Phi$ является гомеоморфизмом и в топологиях из условия леммы. По следствию 4.43, *-слабая топология шара B^* метризуема. Таким образом, Ψ является отображением метризуемых пространств, поэтому достаточно проверить, что Ψ и Ψ^{-1} сохраняют сходимость последовательностей. Так как метрическое пространство X компактно, то оно также и сепарабельно, поэтому, в силу теоремы 5.17, пространство Прохорова $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ — сепарабельно. Но, по теореме 5.14, сходимость последовательности в таком $\mathcal{P}(X)$ относительно метрики Прохорова d_P равносильна *-слабой сходимости, а это и означает сохранение сходимости отображениями Ψ и Ψ^{-1}. □

Предыдущая лемма и завершает доказательство теоремы. □

5.1.4 Плотные семейства мер и теорема Прохорова о предкомпактности

Пусть X — топологическое пространство. Конечная мера μ на X называется *плотной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$.

Пусть теперь $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ — семейство вероятностных мер на топологическом пространстве X. Говорят, что семейство Γ — *равномерно плотное*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$ для всех $\mu \in \Gamma$.

Следующий технический результат будет неоднократно использован в доказательствах разных утверждений.

Предложение 5.22. *Пусть X — полное метрическое пространство и $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ — семейство вероятностных мер. Предположим, что для каждых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует конечная последовательность $(a_1, \ldots, a_n) \subset X$ такая, что для $U = \cup_{i=1}^n U_\delta(a_i)$ выполняется $\mu(U) \geq 1 - \varepsilon$ при каждом $\mu \in \Gamma$. Тогда семейство Γ — равномерно плотное.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует такое $U_m = \cup_{i=1}^{n_m} U_{1/m}(a_i)$, что $\mu(U_m) \geq 1 - \varepsilon/2^m$. Положим $K_m = \cup_{i=1}^{n_m} B_{1/m}(a_i)$, тогда, в силу монотонности меры, будем также иметь $\mu(K_m) \geq 1-\varepsilon/2^m$ для всех $\mu \in \Gamma$.

Пусть $K = \cap_{m=1}^\infty K_m$. Тогда K — замкнутое подмножество X, так как замкнуто каждое K_m. Кроме того, K — вполне ограничено в силу того, что для каждого $\delta > 0$ при $1/m < \delta/2$ точки $\{a_i\}_{i=1}^{n_m}$ образуют конечную $(\delta/2)$-сеть в K_m, а, значит, в $K \subset K_m$ имеемся δ-сеть, состоящая не более чем из n_m точек (убедитесь в этом). Таким образом, K — компакт. Покажем, что K — искомый компакт. Имеем

$$\mu(X \setminus K) = \mu(X \setminus \cap_m K_m) = \mu\bigl(\cup_m (X \setminus K_m)\bigr) \leq \sum_m \mu(X \setminus K_m) < \sum_m \varepsilon/2^m = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Теорема 5.23. *Каждая конечная мера на польском пространстве плотна.*

Доказательство. Пусть X — польское пространство и μ — конечная мера на нем. Если μ — нулевая мера, то утверждение очевидно. Если же мера μ не нулевая, то, поделив ее на $\mu(X)$, получим вероятностную меру. Легко видеть, утверждение одновременно выполняется или нет для меры μ и $\mu/\mu(X)$. Таким образом, теорему достаточно доказать для вероятностных мер μ. Пусть μ — именно такая мера.

Выберем в X всюду плотную последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$, метризуем X полной метрикой, и заметим, что для каждого $\delta > 0$ последовательность открытых шаров $\bigl(U_\delta(a_1), U_\delta(a_2), \ldots\bigr)$ покрывает X. В силу пункта (5) упражнения 4.3, для каждых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для $U = \cup_{i=1}^n B_\delta(a_i)$ выполняется $\mu(U) \geq 1 - \varepsilon$. Но тогда, по предложению 5.22, семейство $\Gamma = \{\mu\}$ — равномерно плотное, т.е. μ — плотная мера. □

Из теоремы 5.23 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 5.24. *Каждая конечная последовательность конечных мер на польском пространстве равномерно плотна.*

Теорема 5.25. *Каждая фундаментальная в метрике Прохорова последовательность вероятностных мер на польском метрическом пространстве равномерно плотна.*

Доказательство. Пусть X — польское пространство, метризованное полной метрикой, и $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность в пространстве $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$. Пусть $(a_1, a_2, \ldots) \subset X$ — всюду плотная последовательность. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, положим $\gamma = \min\{\delta, \varepsilon\}/2$, и найдем такое N, что при всех $p, q \geq N$ выполняется $d_P(\mu_p, \mu_q) < \gamma$. Последнее означает, что для любого измеримого $A \subset X$ имеем

$$\mu_p(A) \leq \mu_q\big(U_\gamma(A)\big) + \gamma \ \text{ и } \ \mu_q(A) \leq \mu_p\big(U_\gamma(A)\big) + \gamma. \tag{5.2}$$

Так как последовательность $\big(U_{\delta/2}(a_1), U_{\delta/2}(a_2), \ldots\big)$ образует покрытие X, по пункту (5) упражнения 4.3 существует n такое, что для $V = \cup_{i=1}^n U_{\delta/2}(a_i)$ выполняется $\mu_k(V) \geq 1 - \gamma$ для всех $k \in \{1, \ldots, N\}$.

Далее, заметим, что

$$U_\gamma(V) = U_\gamma\Big(\cup_{i=1}^n U_{\delta/2}(a_i)\Big) \subset \cup_{i=1}^n U_{\delta/2+\gamma}(a_i) \subset \cup_{i=1}^n U_\delta(a_i) =: U,$$

поэтому, учитывая уравнения (5.2), для $k \geq N$ получим

$$\mu_N(V) \leq \mu_k\big(U_\gamma(V)\big) + \gamma \leq \mu_k(U) + \gamma,$$

откуда $\mu_k(U) \geq \mu_N(V) - \gamma \geq 1 - 2\gamma \geq 1 - \varepsilon$.

С другой стороны, при $k < N$ имеем

$$\mu_k(U) \geq \mu_k(V) \geq 1 - \gamma \geq 1 - \varepsilon.$$

Итак, для каждых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ мы нашли конечную последовательность $(a_1, \ldots, a_n) \subset X$ такую, что для $U = \cup_{i=1}^n U_\delta(a_i)$ выполняется $\mu_k(U) \geq 1 - \varepsilon$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. По предложению 5.22, последовательность $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ равномерно плотна. $\square$

Теорема 5.26. *Пусть X — польское метрическое пространство и Γ — предкомпактное подмножество метрического пространства $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$. Тогда семейство Γ — равномерно плотное.*

Доказательство. Пусть $(U_1, U_2, \ldots)$ — последовательность открытых подмножеств пространства X, являющаяся покрытием X. Положим $V_k = \cup_{i=1}^k U_i$.

Лемма 5.27. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu(V_m) \geq 1 - \varepsilon$ для всех $\mu \in \Gamma$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого k найдется $\mu_k \in \Gamma$, для которого $\mu_k(V_k) < 1 - \varepsilon$. Так как Γ — предкомпактно, то, по теореме 5.13, существует подпоследовательность μ_{k_i}, которая *-слабо сходится к некоторому $\mu \in \mathcal{P}(X)$. По теореме 4.33, для каждого n выполняется

$$\mu(V_n) \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_{k_i}(V_n) \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_{k_i}(V_{k_i}) \leq 1 - \varepsilon,$$

где среднее неравенство вытекает из того, что при больших k_i выполняется $V_n \subset V_{k_i}$ и, значит, $\mu_{k_i}(V_n) \leq \mu_{k_i}(V_{k_i})$. Но $\cup_{n=1}^\infty V_n = X$, поэтому, в силу пункта (3) упражнения 4.3, заключаем, что $\mu(V_n) \to \mu(X) = 1$, противоречие. $\square$

Пусть $(a_1, a_2, \dots)$ — всюду плотная последовательность точек в X. Фиксируем произвольное $\delta > 0$, и возьмем в качестве U_i открытые шары $U_\delta(a_1)$. Тогда, в силу леммы 5.27, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для множества $U = \cup_{i=1}^m U_\delta(a_i)$ выполняется $\mu(U) \geq 1 - \varepsilon$ при каждом $\mu \in \Gamma$. В силу предложения 5.22, семейство Γ — равномерно плотное. $\square$

Идея доказательства следующей теоремы существенно опирается на [27].

Теорема 5.28 (Прохоров Ю.В. [25])**.** *Пусть X — польское метрическое пространство и Γ — произвольное подмножество метрического пространства $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$. Тогда семейство Γ предкомпактно, если и только если Γ — равномерно плотное.*

Доказательство. То, что из предкомпактности семейства Γ вытекает равномерная плотность этого семейства, доказано в теореме 5.26. Покажем, что и обратное утверждение справедливо.

Пусть $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ — равномерно плотное семейство вероятностных мер на X. По теореме 2.1, существует топологическое вложение $f\colon X \to \mathcal{H}$ топологического пространства X в гильбертов куб $\mathcal{H}$, причем такое, что $Y := f(X)$ — борелевское подмножество $\mathcal{H}$. Для каждой меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ положим $\nu_\mu = f_*\mu$.

Лемма 5.29. *Для каждого измеримого $A \subset \mathcal{H}$ и любого $\mu \in \mathcal{P}(X)$ имеем*

$$\nu_\mu(A) = \nu_\mu(A \cap Y),$$

в частности, для каждого $A \subset \mathcal{H} \setminus Y$ выполняется $\nu_\mu(A) = 0$.

Доказательство. По определению отображения f_*, для каждого измеримого $A \subset \mathcal{H}$ имеет место

$$\nu_\mu(A) = \mu\big(f^{-1}(A)\big) = \mu\big(f^{-1}(A \cap Y)\big) = \nu_\mu(A \cap Y),$$

что и требовалось. $\square$

Из леммы 5.29 вытекает, что $\nu_\mu(\mathcal{H}) = \nu_\mu(Y) = \mu(X) = 1$, т.е. $\nu_\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Лемма 5.30. *Семейство $\{\nu_\mu\}_{\mu\in\Gamma} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$ — равномерно плотное.*

Доказательство. Действительно, так как Γ — равномерно плотно в $\mathcal{P}(X)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $Z \subset X$ такой, что $\mu(X \setminus Z) < \varepsilon$ для всех $\mu \in \Gamma$. Положим $K = f(Z)$, тогда K — компакт в $\mathcal{H}$ как непрерывный образ компакта. Осталось заметить, что, в силу леммы 5.29,

$$\nu_\mu(\mathcal{H} \setminus K) = \nu_\mu(Y \setminus K) = \mu(X \setminus Z) < \varepsilon$$

для всех $\mu \in \Gamma$. $\square$

По теореме 5.19, пространство $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ с метрикой Прохорова — компактно, поэтому в любой последовательности $\nu_i := \nu_{\mu_i}$ существует подпоследовательность ν_{i_k}, сходящаяся по метрике Прохорова в некоторой мере $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Лемма 5.31. *Имеем $\nu(Y) = 1$.*

Доказательство. Так как X — сепарабельное пространство, то, в силу теоремы 5.14, сходимость по метрике Прохорова равносильна *-слабой сходимости, а последняя равносильна условию (3) из теоремы 4.33, чем мы сейчас и воспользуемся. Напомним, что последовательность $(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \ldots)$ — равномерно плотная, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $Z \subset X$, для которого $\mu_{i_k}(Z) \geq 1-\varepsilon$ для всех μ_{i_k}, откуда, положив $K = f(Z)$, получим $\nu_{i_k}(K) = \mu_{i_k}(Z) \geq 1-\varepsilon$. Так как множество K также является компактом в метрическом пространстве $\mathcal{H}$, то K — замкнутое подмножество $\mathcal{H}$. По теореме 4.33,

$$1-\varepsilon \leq \limsup_{k\to\infty} \nu_{i_k}(K) \leq \nu(K) \leq \nu(Y),$$

откуда $\nu(Y) \geq 1$, и так как $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, имеем $\nu(Y) = 1$. □

Обозначим через f_Y отображение из X в Y, совпадающее с f (ограничение f на Y), тогда f_Y — гомеоморфизм. Положим $\mu = (f_Y^{-1})_*(\nu_Y)$, тогда $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Теперь доказательство теоремы завершает следующая лемма.

Лемма 5.32. *Имеем* $\mu_{i_k} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$.

Доказательство. Снова воспользуемся тем, что *-слабая сходимость мер на X равносильна сходимости по метрике Прохорова. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и любое замкнутое $A \subset X$. Положим $B = f(A)$, тогда B — замкнутое подмножество в индуцированной на Y топологии. Последнее означает, что существует замкнутое $C \subset \mathcal{H}$, для которого $B = Y \cap C$. В силу леммы 5.29, $\nu_{i_k}(B) = \nu_{i_k}(C)$, и так как множество Y — измеримо, а $\nu(C \setminus Y) = 0$ в силу леммы 5.31, имеем

$$\nu(C) = \nu(Y \cap C) + \nu(C \setminus Y) = \nu(B).$$

По теореме 4.33, примененной к *-слабо сходящейся последовательности ν_{i_k}, получим

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_{i_k}(A) = \limsup_{k\to\infty} \nu_{i_k}(B) = \limsup_{k\to\infty} \nu_{i_k}(C) \leq \nu(C) = \nu(B) = \nu_Y(B) = \mu(A).$$

В силу все той же теоремы 4.33, заключаем, что $\mu_{i_k} \Rightarrow \mu$. □

Доказательство теоремы закончено. □

5.1.5 Полнота и пространство Прохорова

Теорема 5.33. *Пусть X — польское метрическое пространство. Тогда метрическое пространство $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$ также является польским.*

Доказательство. По теореме 5.17, пространство $\mathcal{P}(X)$ сепарабельно. Таким образом, остается доказать его полноту.

Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность мер $(\mu_1, \mu_2, \ldots) \subset \mathcal{P}(X)$. По теореме 5.25, эта последовательность равномерно плотна. По теореме 5.28, эта последовательность предкомпактна в $\mathcal{P}(X)$, так что в ней существует сходящаяся подпоследовательность. Но тогда и вся последовательность сходится, что и доказывает полноту пространства $\mathcal{P}(X)$. □

5.1.6 Локально изометричное вложение метрического пространства в пространство вероятностных мер

Цель данного раздела — доказать следующий результат.

Теорема 5.34. *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Рассмотрим отображение $\delta\colon X \to \mathcal{P}(X)$ из метрического пространства X в метрическое пространство $\big(\mathcal{P}(X), d_P\big)$: $\delta\colon x \mapsto \delta_x$, где δ_x — мера Дирака с центром в x. Тогда*

(1) *для любых $x, y \in X$ выполняется $d_P(\delta_x, \delta_y) = \min\big\{|xy|, 1\big\}$;*

(2) *отображение δ — топологическое вложение;*

(3) *множество $\delta(X)$ — замкнуто.*

Доказательство. (1) Пусть $|xy| \ge 1$. Мы должны показать, что $d_P(\delta_x, \delta_y) = 1$. Так как для любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполняется $\delta_x(A) \le 1 \le \delta_y\big(U_1(A)\big) + 1$, то $d_P(\delta_x, \delta_y) \le 1$. Покажем, что $d_P(\delta_x, \delta_y) \ge 1$. Предположим противное, тогда для некоторого $d < 1$ и каждого $A \in \mathcal{B}_X$ должно выполняться $\delta_x(A) \le \delta_y\big(U_d(A)\big) + d$. Положим $A = \{x\}$, тогда $U_d(A) \not\ni y$, так что $\delta_x(A) = 1$ и $\delta_y\big(U_d(A)\big) = 0$, поэтому неравенство не выполняется.

Пусть теперь $|xy| < 1$. Покажем, что $d_P(\delta_x, \delta_y) = |xy|$. Если $r < |xy|$, то для $A = \{x\}$ множество $U_r(A)$ не содержит y, поэтому $\delta_x(A) = 1$, $\delta_y\big(U_r(A)\big) = 0$, и неравенство $\delta_x(A) \le \delta_y\big(U_r(A)\big) + r$ не выполняется, поэтому $d_P(\delta_x, \delta_y) \ge |xy|$. Пусть переть $r > |xy|$. Если $x \notin A \in \mathcal{B}_X$, то неравенство $\delta_x(A) \le \delta_y\big(U_r(A)\big) + r$ очевидно выполняется. Если же $x \in A$, то $U_r(A) \supset U_r(x) \ni y$, поэтому $\delta_x(A) = 1$ и $\delta_y\big(U_r(A)\big) = 1$, так что предыдущее неравенство также выполняется. Следовательно, $d_P(\delta_x, \delta_y) \le |xy|$ и, значит, $d_P(\delta_x, \delta_y) = |xy|$.

(2) Так как при $x \ne y$ значения мер δ_x и δ_y на $\{x\} \in \mathcal{B}_X$ различаются, то $\delta_x \ne \delta_y$, поэтому отображение δ инъективно.

Далее, в силу пункта (1), отображение δ непрерывно. Покажем, что отображение $\delta^{-1}|_{\delta(X)}$ также непрерывно. Для этого достаточно проверить, что для каждых $x \in X$ и $r < 1$ в окрестность $U_r(x)$ не попадает ни одного $z = \delta^{-1}(\delta_z)$ такого, что $d_P(\delta_x, \delta_z) \ge r$ (если это доказать, то получим $U_r(x) = \delta^{-1}\big(U_r(\delta_x)\big)$, откуда и вытекает непрерывность обратного отображения). Но это так в силу того, что условие $d_P(\delta_x, \delta_z) \ge r$ влечет $|xz| \ge r$.

(3) Докажем теперь замкнутость образа $\delta(X)$. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in X$, для которой последовательность мер δ_{x_n} сходится в $\mathcal{P}(X)$ в некоторой мере μ. Мы должны показать, что μ имеет вид δ_x для некоторого $x \in X$. Если в последовательности x_n имеется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторому $x \in X$, то, в силу доказанной локальной изометричности отображения δ, меры $\delta_{x_{n_k}}$ сходятся к δ_x, откуда и вся последовательность δ_{x_k} сходится к δ_x.

Пусть теперь x_n не содержит сходящихся подпоследовательностей, в частности, каждая точка может встречаться в этой последовательности не более чем конечное число раз. Без ограничения общности, предположим, что все точки x_n различны. Положим $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда каждое подмножество S — замкнуто. По теореме 5.13, имеем $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$, поэтому, в силу теоремы 4.33, выполняется

$$\limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(C) \le \mu(C)$$

для всех подмножеств $C \subset S$. Обозначим через C_0 подмножество в S, составленное из всех точек x_n с четными номерами n, и пусть $C_1 = S \setminus C_0$. Тогда $\limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(S) = 1$ и $\limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(C_i) = 1$, поэтому $\mu(S) \ge 1$ и $\mu(C_i) \ge 1$, а так как μ — вероятностная мера, имеем $\mu(C_0) = \mu(C_1) = \mu(S) = 1$. Но $S = C_0 \sqcup C_1$, противоречие. $\square$

Из теоремы 5.34 вытекает, что предыдущие результаты о связи свойства метрического пространства и пространства вероятностных мер на нем можно превратить в критерии.

Следствие 5.35. *Пусть X — метрическое пространство и $\mathcal{P}(X)$ — соответствующее пространство Прохорова. Тогда $\mathcal{P}(X)$ — сепарабельное (компактное, польское), если и только если таким является X.*

Благодарности

Курс поддержан Фондом развития теоретической физики и математики БАЗИС.

Литература

[1] Gromov M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.

[2] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[3] Srivastava S.M. *A Course on Borel Sets*, Springer, 1998.

[4] Урысон П.С. *Труды по топологии и другим областям математики*, М.; Л., 1951, т. 2, с. 747–777.

[5] Heinonen J. *Geometric embeddings of metric spaces*. Report Univeristy of Jyvaskyla Department of Mathematics and Statistics 90, 2001.

[6] Huhunaišvili G.E. *On a property of Urysohn's universal metric space*, Dokl. Akad. Nauk USSR (N.S.), 1955, v. 101, p. 332–333 (in Russian).

[7] Богатый С.А. *Компактная однородность универсального метрического пространства Урысона*, УМН, 2000, т. 55, выпуск 2(332), с. 131–132.

[8] Katětov M. *On universal metric spaces*, in: Frolik (Ed.), Proc. of the 6th Prague Topological Symposium (1986), Heldermann, Berlin, 1988, p. 323–330.

[9] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[10] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[11] Богачев В.И. *Основы теории меры*, 2-е изд., НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, т.1 и т.2, 2006.

[12] Parthasarathy K.R. *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York - London, 1967.

[13] Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J.T. *Sobolev spaces on metric measure spaces. An Approach Based on Upper Gradients*, Cambridge Univ. Press, 2015.

[14] Halmos P.R. *Measure theory*, Springer-Verlag NewYork, Heidelberg, Berlin, 1950.

[15] Billingsley P. *Convergence of probability measures*, Wiley & Sons, New York — London, 1999.

[16] Schlumprecht Th. *Notes on descriptive set theory and applications to Banach spaces*, Class notes for Reading Course in Spring/Summer 2008.

[17] Рохлин В.А. *Об основных понятиях теории меры*, Матем. сб., 1949, т. 25(67), N1, с. 107–150.

[18] Alexandrov A.D. *Additive set-functions in abstract spaces*, Матем. сб., 1943, v. 13(55), N 2-3, p. 169–238.

[19] Pinkus A. *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory, 2000, v. 107, p. 1–66.

[20] Rudin W. *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[21] Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1957.

[22] Megginson R.E. *An introduction to Banach space theory, Graduate Texts in Mathematics*, 1998, v. 183, New York: Springer-Verlag, ISBN 0-387-98431-3.

[23] van Gaans O. *Probability measures on metric spaces*, notes of the seminar "Stochastic Evolution Equations", Delft University of Technology, Winter 2002/2003: `http://www.math.leidenuniv.nl/~vangaans/jancol1.pdf`

[24] Кусраев А.Г., Малюгин С.А. *О теоремах представления А.Д.Александрова и А.А.Маркова для мажорируемых операторов*, Владикавк. матем. журн., 2002, 4:3, с. 34–49.

[25] Прохоров Ю.В. *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей*, Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, N2, с. 177–238.

[26] Кадец В.М. *Курс функционального анализа*, Харьков, 2006, 616 стр.

[27] Chin W. *New simple proofs of Kolmogorov extension theorem and Prokhorov's theorem*, arXiv:1911.12979v1, 2019.