Вопросы по спецкурсу “Транспортная задача Канторовича и геометрия пространств вероятностных мер” часть первая

(1) Общая постановка транспортных задач Монжа и Канторовича. Сравнение этих задач.

(2) Транспортная задача Канторовича на конечном метрическом пространстве. Существование оптимального плана.

(3) Транспортная задача Канторовича на конечном метрическом пространстве. Транспортное расстояние: доказательство того, что это расстояние является метрикой, линейной на ребрах стандартного симплекса и продолжающей исходную метрику.

(4) Двойственность в задаче линейного программирования. Различные формы двойственности и связь между этими формами.

(5) Двойственность в задаче линейного программирования. Теорема двойственности для асимметричной формы (с доказательством).

(6) Двойственность в транспортной задаче Канторовича.

(7) Теорема о том, что метрика Канторовича задается нормой Канторовича–Рубинштейна (с доказательством).

(8) Выпуклые подмножества арифметического пространства, поляры. Теорема о совпадении двойной поляры с исходным замкнутым выпуклым множеством (с доказательством).

(9) Теорема о том, как выглядит единичный шар по отношению к норме Канторовича–Рубинштейна.

(10) Измеримые пространства и измеримые отображения. Основные свойства.

(11) Меры на сигма-алгебрах. Основные свойства.

(12) Множества нулевой меры, основные свойства. Пополнение сигма-алгебры и меры.

(13) Знакопеременные меры, разложения Хана и Жордана–Хана.

(14) Внешние меры, измеримость по Каратеодори, связь между мерами и внешними мерами.

(15) Интеграл Лебега: простые функции, их основные свойства, интеграл Лебега простой функции, фундаментальная в среднем последовательность простых функций, определение интеграла Лебега в общем случае.

(16) Основные свойства интеграла Лебега.

(17) Факторизация псевдометрического пространства, факторизация линейного пространства. Построение полных нормированных пространств $L(\mu)$ и $L^{\infty}(\mu)$ для пространства с конечной мерой μ.

(18) Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Произведение мер, теорема Фубини. Отображение мер, теорема "о замене переменных".

(19) Постановка задач Монжа и Канторовича на пространствах с мерами. Сравнение этих задач.

(20) Метрические пространства, F_σ и G_δ подмножества, ε-аппроксимация непустого множества, равномерная непрерывность ε-аппроксимации (доказательство).

(21) Сепарабельные пространства. Наследование сепарабельности. Плоскость Зоргенфрея. Случай метрических пространств.

(22) Регулярность борелевских мер на метрическом пространстве: вычисление их значений через значения на замкнутых (открытых) подмножествах (с доказательством). Критерии совпадения конечных борелевских мер.

(23) Носитель конечной борелевской меры на сепарабельном метрическом пространстве.

(24) Слабая топология. Пример: тихоновское произведение. Критерий слабой сходимости.

(25) *-слабая топология. Пример: двойственное пространство и теорема Банаха–Алаоглу. Критерий *-слабой сходимости.

(26) Компактность и секвенциальная компактность. Примеры, иллюстрирующие неэквивалентность понятий. Случай метрических пространств.

(27) Сепарабельность пространства непрерывных функций, заданных на метрическом компакте (с доказательством).

(28) Теорема Рисса.

(29) Теорема Портманто о *-слабой сходимости мер (с доказательством).

(30) Существование решения задачи Канторовича в случае компактных метрических пространств и непрерывной функции стоимости (с доказательством).