Тема 11

Доказательство теоремы Канторовича (теорема 9.1).

Мы разобьем доказательство теоремы 9.1 на несколько шагов. Напомним, что мы уже доказали неравенство

$$\sup_{\Phi_c \cap C_b} J(\varphi, \psi) \leq \inf_{\Pi(\mu,\nu)} K(\pi),$$

см. лемму 9.3.

11.1 Случай непрерывной функции стоимости на компактных пространствах

Пусть сначала X и Y компактны, а функция $c\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ непрерывна. Воспользуемся теоремой двойственности Фенхеля–Рокафеллера (теорема 9.18). Рассмотрим линейное нормированное пространство $E = C_b(X \times Y)$ непрерывных (автоматически ограниченных) функций на $X \times Y$ со стандартной нормой $\|\cdot\|_\infty$. По теореме Рисса (теорема 7.21) топологически двойственное пространство E^* отождествляется с пространством $\mathcal{M}_\pm(X \times Y)$ знакопеременных борелевских мер, а неотрицательные функционалы можно рассматривать как обычные борелевские меры.

Рассмотрим функции $F\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $F\colon G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенные так:

$$F(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u(x,y) \geq -c(x,y), \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и

$$G(u) = \begin{cases} \int_X \varphi\, d\mu + \int_Y \psi\, d\nu, & \exists \text{ такие } (\varphi,\psi) \in C_b(X) \times C_b(Y), \text{ что } u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y), \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем сначала, что функция $G(u)$ определена корректно, т.е. не зависит от представления $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Действительно, если есть другое такое разложение

$u(x,y) = \tilde\varphi(x) + \tilde\psi(y)$, то $\varphi(x) - \tilde\varphi(x) = \tilde\psi(y) - \psi(y)$, поэтому эти разности не зависят ни от x ни от y, т.е. $\varphi(x) - \tilde\varphi(x) = \tilde\psi(y) - \psi(y) = s \in \mathbb{R}$, но тогда

$$\int_X \tilde\varphi\,d\mu + \int_Y \tilde\psi\,d\nu = \int_X (\varphi - s)\,d\mu + \int_Y (\psi + s)\,d\nu = \int_X \varphi\,d\mu + \int_Y \psi\,d\nu,$$

так как обе меры — вероятностные.

Покажем, что функции F и G удовлетворяют предположениям теоремы 9.18. Проверим сначала выпуклость. Пусть $u_1,\ u_2 \in E$. Начнем с функции F. Если $F(u_i) = +\infty$ хотя бы для одного из $i = 1,\ 2$, то неравенство

$$(*)\qquad F(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \le \lambda F(u_1) + (1-\lambda)F(u_2)$$

выполнено автоматически. Иначе $u_i(x,y) \ge -c(x,y)$, поэтому $F(u_i) = 0$, $i = 1,\ 2$. С другой стороны, $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \ge -\lambda c(x,y) - (1-\lambda)c(x,y) = -c(x,y)$, поэтому $F(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = 0$ и неравенство $(*)$ выполнено в форме равенства. Итак, F выпукла, перейдем к функции G. Снова, если $G(u_i) = +\infty$ хотя бы для одного из $i = 1,\ 2$, то неравенство

$$(11.1)\qquad G(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \le \lambda G(u_1) + (1-\lambda)G(u_2)$$

выполнено автоматически. Иначе $u_i(x,y) = \varphi_i(x) + \psi_i(y)$, $i = 1,\ 2$, поэтому

$$\begin{aligned}\lambda u_1(x,y) + (1-\lambda)u_2(x,y) &= \lambda\bigl(\varphi_1(x) + \psi_1(y)\bigr) + (1-\lambda)\bigl(\varphi_2(x) + \psi_2(y)\bigr) = \\ &= \bigl(\lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_2(x)\bigr) + \bigl(\lambda\psi_1(y) + (1-\lambda)\psi_2(y)\bigr),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}G\bigl(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2\bigr) &= \int_X \bigl(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\bigr)d\mu + \int_Y \bigl(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2\bigr)d\nu = \\ = \lambda\Bigl(\int_X \varphi_1\,d\mu + \int_Y \psi_1\,d\nu\Bigr) &+ (1-\lambda)\Bigl(\int_X \varphi_2\,d\mu + \int_Y \psi_2\,d\nu\Bigr) = \lambda G(u_1) + (1-\lambda)G(u_2),\end{aligned}$$

т.е. функция G также выпукла.

В качестве $z_0 \in E$ возьмем постоянную функцию $z_0(x) = 1$. Так как функция стоимости по предположению неотрицательна, $z_0(x,y) = 1 \ge -c(x,y)$, поэтому $F(z_0) = 0 < \infty$, причем то же верно и для любой функции $z \in E$, $\|z - z_0\|_\infty < 1/2$, поэтому F в z_0 конечна и непрерывна. Далее, $z_0(x,y) = \varphi_{1/2}(x) + \psi_{1/2}(y)$, где $\varphi_{1/2}(x) = 1/2$ и $\psi_{1/2}(y) = 1/2$ — постоянные функции на X и Y соответственно. Поэтому $G(z_0) = \int_X 1/2\,d\mu + \int_Y 1/2\,d\nu = 1$, т.е. функция G также принимает в точке z_0 конечное значение. Поэтому применима теорема 9.18.

Запишем сначала левую часть равенства из теоремы 9.18:

$$\begin{aligned}&\inf_{u\in E}\bigl(F(u) + G(u)\bigr) = \\ &\quad= \inf_u \Bigl[0 + \int_X \varphi(x)\,d\mu + \int_Y \psi(x)\,d\nu : u(x,y) \ge -c(x,y) \text{ и } u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)\Bigr] = \\ &\quad= -\sup_{(\varphi,\psi)\in C_b}\Bigl[\int_X (-\varphi(x))\,d\mu + \int_Y (-\psi(x))\,d\nu : -\varphi(x) - \psi(y) \le c(x,y)\Bigr] = \\ &\quad= -\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b} J(\varphi,\psi),\end{aligned}$$

где в первом равенстве мы переходим к инфимуму по тем функциям, на которых F и G принимают конечные значения, а в последнем равенстве мы переобозначили $-\varphi = \varphi$ и $-\psi = \psi$.

Вычислим теперь двойственные функции $F^*\colon E^* \to \mathbb{R}$ и $G^*\colon E^* \to \mathbb{R}$. Для любой знакопеременной борелевской меры $\pi \in M_\pm(X \times Y)$ имеем:

$$F^*(-\pi) = \sup_{u \in E}\big(-\langle \pi, u\rangle - F(u)\big) = \sup_u \Big[-\int_{X\times Y} u(x,y)\,d\pi : u(x,u) \geq -c(x,y)\Big] =$$
$$= \sup_u \Big[\int_{X\times Y} u(x,y)\,d\pi : u(x,u) \leq c(x,y)\Big],$$

где при переходе ко второму равенству мы отбросили те функции, на которых получается $-\infty$, а в последнем равенстве — переобозначили $-u = u$. Заметим, что если π — знакопеременная мера, то найдется неположительная функция $v \in C_b(X \times Y)$, для которой $\int_{X\times Y} v\,d\pi > 0$. Тогда положим $u(x,y) = \lambda v(x,y) \leq c(x,y)$ для любого $\lambda > 0$ и, устремляя $\lambda \to +\infty$, заключаем, что $\sup = +\infty$. Если же π неотрицательна, то $\sup = \int_{X\times Y} c\,d\pi$. Итак,

$$F^*(-\pi) = \begin{cases} \int_{X\times Y} c(x,y)\,d\pi, & \text{если } \pi \in M(X\times Y),\\ +\infty, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Далее,

$$G^*(\pi) = \sup_{u\in E}\big(\langle \pi, u\rangle - G(u)\big) =$$
$$= \sup_u \Big[\int_{X\times Y} u(x,y)\,d\pi - \int_X \varphi\,d\mu - \int_Y \psi\,d\nu : u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)\Big],$$

где при переходе ко второму равенству мы отбросили те функции, на которых получается $-\infty$, и sup берется по тем функциям u, для которых существуют такие $(\varphi,\psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$, что $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Если мера π такова, что

$$\int_{X\times Y} \big[\varphi(x) + \psi(y)\big]\,d\pi = \int_X \varphi(x)\,d\mu + \int_Y \psi(y)\,d\nu$$

для всех $(\varphi,\psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$, то $G^*(\pi) = 0$, иначе $G^*(\pi) = +\infty$, поэтому G^* — это индикаторная функция $\Pi(\mu,\nu)$.

Итак, по теореме двойственности Фенхеля–Рокафеллера (теорема 9.18),

$$-\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b} J(\varphi,\psi) = \inf_{u\in E}\big(F(u) + G(u)\big) = \sup_{\pi\in E^*}\big(-F^*(-\pi) - G^*(\pi)\big) =$$
$$= \sup_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\Big[-\int_{X\times Y} c(x,y)\,d\pi - 0\Big] = -\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\Big[\int_{X\times Y} c(x,y)\,d\pi\Big],$$

где в третьем равенстве мы перешли к супремуму по тем мерам, по которым получается конечное значение, а не минус бесконечность. Остается убрать знаки. Тем самым, теорема Канторовича доказана для компактных X и Y и непрерывной функции стоимости c.

Замечание 11.1. Это доказательство не проходит для некомпактных пространств. В случае некомпактных X и Y пространство $C_b(X \times Y)^*$ оказывается больше, чем $M_{\pm}(X \times Y)$.

Более того, супремум значений функционала $J(\varphi, \psi)$ по пространству ограниченных непрерывных функций на некомпактном пространстве ...

Напомним, что $C_0(X)$ — это пространство непрерывных функций на X таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K(\varepsilon)$, вне которого значения функции не превышают ε по абсолютной величине. По определению $C_0 \subset C_b$. Если пространство X не локально компактно, то $C_0(X)$ может оказаться равным нулю. Так будет в любом не локально компактном нормированном пространстве.

11.2 Случай равномерно непрерывной ограниченной функции стоимости

В данном разделе мы откажемся от компактности, сохранив ограничения на функцию стоимости.

Положим $\|c\|_\infty = \sup_{X\times Y} c(x, y)$. Далее, пусть π_* — оптимальный план перевозок, т.е. $I(\pi_*) = \inf_{\Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$. Существование такого π_* следует из компактности семейства мер $\Pi(\mu, \nu)$, которое будет доказано ниже. (На самом деле, на данном этапе существование π_* не существенно, можно провести рассуждения с приближающей последовательностью, но они более громоздкие и затемнят дело.)

Упражнение 11.2. Пусть X и Y — польские пространства. Проверьте, что тогда $X \times Y$ тоже польское.

Фиксируем произвольное малое $\delta > 0$. Так как $X \times Y$ — польское, то по теореме 10.3 мера π_* является плотной, как и меры μ и ν. Последнее означает, что существуют такие компакты $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, что

$$\mu(X \setminus X_0) < \delta, \qquad \nu(Y \setminus Y_0) < \delta,$$

откуда, так как $\pi_* \in \Pi(\mu, \nu)$, получаем

$$\pi_*\big((X\times Y)\setminus(X_0\times Y_0))\big) \le \pi\big(X\times(Y\setminus Y_0)\big)+\pi\big((X\setminus X_0)\times Y\big) = \nu(Y\setminus Y_0)+\mu(X\setminus X_0) < 2\delta.$$

Определим на компакте $X_0 \times Y_0$ вероятностную меру

$$\pi_{*0}(A) = \frac{1}{\pi_*(X_0 \times Y_0)} \pi_*\big(A \cap (X_0 \times Y_0)\big),$$

и пусть μ_0 и ν_0 — проекции этой меры на X_0 и Y_0 соответственно. Определим $\Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ как множество всех вероятностных мер на $X_0 \times Y_0$ с такими проекциями, и положим

$$I_0(\pi_0) = \int_{X_0\times Y_0} c(x, y)\, d\pi_0(x, y).$$

Пусть $\tilde{\pi}_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ — мера, на которой достигается инфимум

$$I_0(\tilde{\pi}_0) = \inf_{\pi_0\in\Pi_0} I_0(\pi_0)$$

(см. выше комментарий при существование). Положим $C = (X\times Y)\setminus(X_0\times Y_0)$. Склеим из $\tilde\pi_0$ и π_* следующую меру на $X\times Y$:

$$\tilde\pi(A) = \pi_*(X_0\times Y_0)\tilde\pi_0\big(A\cap(X_0\times Y_0)\big) + \pi_*(A\cap C).$$

Лемма 11.3. *Мера $\tilde\pi$ принадлежит $\Pi(\mu,\nu)$.*

Доказательство. Действительно,

$$\tilde\pi(X\times Y) = \pi_*(X_0\times Y_0)\tilde\pi_0(X_0\times Y_0) + \pi_*(C) = \pi_*(X_0\times Y_0) + \pi_*(C) = 1.$$

так как $\tilde\pi_0(X_0\times Y_0) = 1$, поскольку $\tilde\pi_0$ — вероятностная мера на $X_0\times Y_0$, а π_* — вероятностная мера на $X\times Y$, и $X_0\times Y_0$ — измеримо. Поэтому $\tilde\pi$ — тоже вероятностная мера на $X\times Y$. Далее, для любого измеримого $B\subset Y$ имеем

$$\begin{aligned}
&\tilde\pi(X\times B) = \pi_*(X_0\times Y_0)\tilde\pi_0\big((X\times B)\cap(X_0\times Y_0)\big) + \pi_*\big((X\times B)\cap C\big) =\\
&= \pi_*(X_0\times Y_0)\tilde\pi_0\big(X_0\times(B\cap Y_0)\big) + \pi_*\big(X\times(B\cap(Y\setminus Y_0))\big) + \pi_*\big((X\setminus X_0)\times(B\cap Y_0)\big) =\\
&= \pi_*(X_0\times Y_0)\nu_0(B\cap Y_0) + \nu\big(B\cap(Y\setminus Y_0)\big) + \pi_*\big((X\setminus X_0)\times(B\cap Y_0)\big).
\end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое. По определению проекции,

$$\begin{aligned}
\nu_0(M) = \pi_{*0}(X\times M) = \frac{1}{\pi_*(X_0\times Y_0)}\pi_*\big((X\times M)\cap(X_0\times Y_0)\big) =\\
= \frac{1}{\pi_*(X_0\times Y_0)}\pi_*\big(X_0\times(M\cap Y_0)\big).
\end{aligned}$$

Поэтому предыдущее равенство можно продолжить так:

$$\begin{aligned}
&\tilde\pi(X\times B) = \pi_*\big(X_0\times(B\cap Y_0)\big) + \nu\big(B\cap(Y\setminus Y_0)\big) + \pi_*\big((X\setminus X_0)\times(B\cap Y_0)\big) =\\
&= \pi_*\big(X\times(B\cap Y_0)\big) + \nu\big(B\cap(Y\setminus Y_0)\big) = \nu(B\cap Y_0) + \nu\big(B\cap(Y\setminus Y_0)\big) = \nu(B),
\end{aligned}$$

где мы пользовались тем, что $\pi_*\in\Pi(\mu,\nu)$ и измеримостью Y_0. Таким образом, проекция меры $\tilde\pi$ на Y совпадает с ν. Аналогично проверяется, что проекция $\tilde\pi$ на X совпадает с μ. Лемма доказана. □

Напомним, что выше мы показали, что $\pi_*(C)\le 2\delta$, поэтому

$$I(\tilde\pi) = \pi_*(X_0\times Y_0)I_0(\tilde\pi_0) + \int_C c(x,y)\,d\pi_* \le I_0(\tilde\pi_0) + 2\delta\|c\|_\infty = \inf I_0 + 2\delta\|c\|_\infty,$$

откуда

$$(\dagger)\qquad \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) \le \inf I_0 + 2\delta\|c\|_\infty.$$

Определим теперь функционал

$$J_0(\varphi_0,\psi_0) = \int_{X_0}\varphi_0\,d\mu_0 + \int_{Y_0}\psi_0\,d\nu_0,$$

на пространстве $L^1(\mu_0)\times L_1(\nu_0)$. Из результата предыдущего пункта вытекает, что $\inf I_0 = \sup J_0$, где супремум берется по всем допустимым парам $(\varphi_0,\psi_0)\in L^1(\mu_0)\times L_1(\nu_0)$, т.е. таким, что $\varphi_0(x)+\psi_0(y)\le c(x,y)$ для почти всех x и y. В частности, найдется такая допустимая пара $(\tilde\varphi_0,\tilde\psi_0)$, что $J_0(\tilde\varphi_0,\tilde\psi_0)\ge\sup J_0-\delta$. Мы построим по ней пару (φ,ψ), с помощью которой максимизируем J.

Коррекция функций.

Подправим сначала функции $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ так, чтобы неравенство $\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y) \le c(x,y)$ выполнялось при всех x и y. Пусть N_x и N_y — множества нулевой меры такие, что искомое неравенство выполнено при всех $(x,y) \in (X \setminus N_x) \times (Y \setminus N_y)$ и переопределим функции $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$, положив их значения на N_x и N_y соответственно равными $-\infty$.

Без ограничения общности предположим, что $\delta \le 1$. Так как $J_0(0,0) = 0$, то $\sup J_0 \ge 0$, откуда $J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \ge -\delta \ge -1$. Перепишем J_0 в виде

$$J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) = \int_{X_0 \times Y_0} \big(\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y)\big)\, d\pi_0 \ge -1,$$

где π_0 — произвольная мера из $\Pi_0(\mu_0, \nu_0)$, заключаем. что существует точка $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0$ такая, что $\tilde{\varphi}_0(x_0) + \tilde{\psi}_0(y_0) \ge -1$.

Заметим, что если заменить $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ на $(\tilde{\varphi}_0 + s, \tilde{\psi}_0 - s)$ для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}$, то значение функционала J_0 не изменится (меры —вероятностные) и пара функций останется допустимой, поэтому, выбирая s надлежащим образом (проверьте!), можно подправить наши функции и в дальнейшем предполагать, что

$$\tilde{\varphi}_0(x_0) \ge -\frac{1}{2}, \qquad \tilde{\psi}_0(y_0) \ge -\frac{1}{2}.$$

Тогда, так как для любого $x \in X_0$ и $y_0 \in Y_0$ выполнено $\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y_0) \le c(x, y_0)$, откуда

$$\tilde{\varphi}_0(x) \le c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \le c(x, y_0) + \frac{1}{2},$$

и аналогично

$$\tilde{\psi}_0(y) \le c(x_0, y) - \tilde{\varphi}_0(x_0) \le c(x_0, y) + \frac{1}{2}$$

при всех $y \in Y_0$.

Следующий трюк, позволяющий построить допустимую пару функций на всем X и всем Y, предложил Rüschendorf. Положим

$$\bar{\varphi}_0(x) = \inf_{y \in Y_0} \big(c(x,y) - \tilde{\psi}_0(y)\big), \qquad x \in X.$$

Так как $\tilde{\varphi}_0(x) \le c(x,y) - \tilde{\psi}_0(y)$ при всех $(x,y) \in X_0 \times Y_0$, то $\tilde{\varphi}_0 \le \bar{\varphi}_0$ всюду на X_0, откуда

$$(*) \qquad J_0(\bar{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \ge J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0).$$

Более того, используя неравенства из предыдущего абзаца, получим следующие оценки, имеющие место для всех $x \in X$:

$$\bar{\varphi}_0(x) = \inf_{y \in Y_0} \big(c(x,y) - \tilde{\psi}_0(y)\big) \ge \inf_{y \in Y_0} \big(c(x,y) - c(x_0,y)\big) - \frac{1}{2},$$

и

$$\bar{\varphi}_0(x) = \inf_{y \in Y_0} \big(c(x,y) - \tilde{\psi}_0(y)\big) \le c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \le c(x, y_0) + \frac{1}{2}.$$

Наконец положим

$$\bar\psi_0(y) = \inf_{x\in X}\big(c(x,y) - \bar\varphi_0(x)\big), \qquad y\in Y.$$

Отметим, что по определению функции $\bar\psi_0$ имеем: $\bar\varphi_0(x)+\bar\psi_0(y)\le c(x,y)$ для любых $x\in X$ и $y\in Y$, поэтому $(\bar\varphi_0,\bar\psi_0)\in\Phi_c$. Кроме того, по определению функции $\bar\varphi_0$ имеем: $\bar\varphi_0(x)\le c(x,y)-\tilde\psi_0(y)$, откуда $c(x,y)-\bar\varphi_0(x)\ge\tilde\psi(y)$, поэтому $\bar\psi_0\ge\tilde\psi_0$, и значит $J(\bar\varphi_0,\bar\psi_0)\ge J(\bar\varphi_0,\tilde\psi_0)$, а так как $J(\bar\varphi_0,\tilde\psi_0)\ge J(\tilde\varphi_0,\tilde\psi_0)$, то $J(\bar\varphi_0,\bar\psi_0)\ge J(\tilde\varphi_0,\tilde\psi_0)$. Далее, из полученных выше оценок на $\bar\varphi_0$ получаем, что

$$\bar\psi_0(y) = \inf_{x\in X}\big(c(x,y)-\bar\varphi_0(x)\big)\ge\inf_{x\in X}\big(c(x,y)-c(x,y_0)\big)-\frac12,$$

и

$$\bar\psi_0(y) = \inf_{x\in X}\big(c(x,y)-\bar\varphi_0(x)\big)\le c(x_0,y)-\bar\varphi_0(x_0)\le c(x_0,y)-\tilde\varphi_0(x_0)\le c(x_0,y)+\frac12.$$

Так как $c(x,y)\ge 0$, то

$$\inf_{y\in Y_0}\big(c(x,y)-c(x_0,y)\big)\ge\inf_{y\in Y_0}\big(-c(x_0,y)\big) = -\sup_{y\in Y_0}c(x_0,y)\ge-\sup_{x,y}c(x,y) = -\|c\|_\infty,$$

откуда

$$\bar\varphi_0(x)\ge\inf_{y\in Y_0}\big(c(x,y)-c(x_0,y)\big)-\frac12\ge-\|c\|_\infty-\frac12,$$

и, аналогично,

$$\bar\psi_0(y)\ge\inf_{x\in X}\big(c(x,y)-c(x,y_0)\big)-\frac12\ge-\|c\|_\infty-\frac12.$$

Этих оценок оказывается достаточно для завершения доказательства.

Итоговые оценки.

Итак, перейдем в выражении для J к интегрированию по $\pi_*\in\Pi(\mu,\nu)$, затем разобьем интеграл на два, по $X_0\times Y_0$ и по дополнению $C=(X\times Y)\setminus(X_0\times Y_0)$, в первом интеграле перейдем к интегрированию по π_{*0}:

$$J(\bar\varphi_0,\bar\psi_0) = \int_X\bar\varphi_0\,d\mu+\int_Y\bar\psi_0\,d\nu = \int_{X\times Y}\big(\bar\varphi_0(x)+\bar\psi_0(y)\big)\,d\pi_* =$$
$$\pi_*(X\times Y)\int_{X_0\times Y_0}\big(\bar\varphi_0(x)+\bar\psi_0(y)\big)\,d\pi_{*0}+\int_C\big(\bar\varphi_0(x)+\bar\psi_0(y)\big)\,d\pi_*.$$

Напомним, что мы выбрали $X_0\subset X$ и $Y_0\subset Y$ так, что $\pi_*(C)\le 2\delta$, поэтому, в силу доказанных в предыдущем пункте оценок второй интеграл оценивается так:

$$\int_C\big(\bar\varphi_0(x)+\bar\psi_0(y)\big)\,d\pi_*\ge-\big(2\|c\|_\infty+1\big)\pi_*(C)\ge-\big(2\|c\|_\infty+1\big)2\delta.$$

Кроме того, μ_0 и ν_0 — маргиналы меры π_{*0}, поэтому, используя доказанное в предыдущем пункте неравенства $(*)$ и $(\dagger)$, первый интеграл оценивается так:

$$\pi_*(X \times Y) \int_{X_0 \times Y_0} \big(\bar\varphi_0(x) + \bar\psi_0(y)\big)\, d\pi_{*0} \geq (1-2\delta)\Big(\int_{X_0} \bar\varphi_0\, d\mu_0 + \int_{Y_0} \bar\psi_0\, d\nu_0\Big) =$$
$$= (1-2\delta) J_0(\bar\varphi_0, \bar\psi_0) \geq (1-2\delta) J_0(\tilde\varphi_0, \tilde\psi_0) \geq (1-2\delta)(\sup J_0 - \delta) =$$
$$= (1-2\delta)(\inf I_0 - \delta) \geq (1-2\delta)\big(\inf I - 2\delta \|c\|_\infty - \delta\big).$$

Окончательно,

$$J(\bar\varphi_0, \bar\psi_0) \geq (1-2\delta)\big(\inf I - 2\delta\|c\|_\infty - \delta\big) - \big(2\|c\|_\infty + 1\big)2\delta,$$

откуда, в силу произвольности δ получаем требуемое неравенство $\sup J \geq \inf I$.

Замечание 11.4. Из равномерной непрерывности c вытекает равномерная непрерывность $\bar\varphi_0$ и $\bar\psi_0$. Поэтому супремум можно брать по $\Phi_c \cap C_b$ вместо $\Phi_c \cap L^1$. Отсюда же следует измеримость $\bar\varphi_0$ и $\bar\psi_0$.

11.3 Общий случай

Перейдем к общему случаю. Нам понадобится следующая конструкция.

Вспомогательная конструкция

Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство, и $F\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная полунепрерывная снизу функция. Положим

$$F_n(x) = \inf_{y \in Y} \big(F(y) + n|xy|\big).$$

Лемма 11.5. *Для любого натурального n функция $F_n(x)$ корректно определена равномерно непрерывна и неотрицательна. Функции $\{F_n(x)\}$ образуют неубывающую последовательность, причем $F(x) = \sup_n F_n(x)$.*

Доказательство. Так как $F(y) \geq 0$, то и $F(y) + n|xy| \geq 0$ для каждого x и y. Поэтому инфимум конечен и неотрицателен. Далее, для каждого фиксированного y и фиксированного n функция $h_y(x) = F(y) + n|xy|$ является n-липшицевой, и поэтому равномерно непрерывной по x. Но инфимум семейства λ-липшицевых функций является λ-липшицевой функцией (проверьте!), поэтому каждая функция $F_n(x) = \inf_y h_y(x)$ является n-липшицевой и, значит, тоже равномерно непрерывна.

Неравенство $F(y) + n|xy| \leq F(y) + (n+1)|xy|$ выполнено для всех x и y, поэтому $F_n(x) \leq F_{n+1}(x)$. Положив $y = x$, заключаем, что $F_n(x) \leq F(x)$ для каждого n, поэтому $\sup_n F_n(x) \leq F(x)$. С другой стороны, для любого фиксированного x и любого $\varepsilon > 0$ из полунепрерывности функции F вытекает, что найдется такое $r > 0$, что для любого $y \in U_r(x)$ выполнено $F(y) \geq F(x) - \varepsilon$, откуда $F(y) + n|xy| \geq F(x) - \varepsilon$. Если же $|yx| \geq r$ то найдется такое n, что $nr \geq F(x)$, поэтому снова $F(y) + n|xy| \geq n|xy| \geq nr \geq F(x) - \varepsilon$. Итак, для любого фиксированного x и любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное n, для которого $F(y) + n|xy| \geq F(x) - \varepsilon$ для всех $y \in \mathcal{X}$, поэтому $\sup_n F_n(x) \geq F(x)$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Таким образом, имеет место следующий результат.

Утверждение 11.6. *Произвольную неотрицательную полунепрерывную снизу функцию на метрическом пространстве можно представить как точную верхнюю грань неубывающей последовательности неотрицательных равномерно непрерывных функций.*

Последовательность функционалов

Воспользуемся утверждением 11.6 и представим функцию c в виде $c = \sup c_n$, где $\{c_n\}$ — неубывающая последовательность неотрицательных равномерно непрерывных функций. Заменив c_n на срезки $\inf\{c_n(x,y), n\}$, можно считать, что каждая функция c_n ограничена.

Рассмотрим теперь последовательность функционалов I_n на $\Pi(\mu,\nu)$ вида

$$I_n(\pi) = \int_{X\times Y} c_n\, d\pi.$$

Из результатов предыдущего пункта вытекает, что

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n(\pi) = \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}} J(\varphi,\psi).$$

Для завершения доказательства мы покажем, что

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) = \sup_n \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n(\pi),$$

и что для любого n выполнено

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}} J(\varphi,\psi) \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c} J(\varphi,\psi),$$

откуда

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n(\pi) = \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}} J(\varphi,\psi) \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c} J(\varphi,\psi),$$

и поэтому

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) \le= \sup_n \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n(\pi) \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c} J(\varphi,\psi),$$

что и требовалось.

Проверка неравенств

Так как по построению $c_n \le c$, то $\Phi_{c_n} \subset \Phi_c$ для любого n, причем функционалы J_n и J на Φ_{c_n} совпадают, то неравенство

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}} J(\varphi,\psi) \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c} J(\varphi,\psi)$$

выполнено. При этом все равно, какие функции мы рассматриваем, непрерывные ограниченные или интегрируемые.

Так как $\{c_n\}$ — неубывающая последовательность функций, то I_n — неубывающая последовательность функционалов, поэтому не убывает и числовая последовательность $\{\inf I_n\}$, а так как $c_n \le c$, то $I_n \le I$, поэтому последовательность $\{\inf I_n\}$ ограничена сверху величиной $\inf I$, откуда $\inf I \ge \sup_n \inf I_n$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n(\pi) \ge \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$$

Утверждение 11.7. *Семейство мер $\Pi(\mu,\nu)$ равномерно плотно и, следовательно, секвенциально предкомпактно в слабой топологии и предкомпактно в метрической.*

Доказательство. Так как пространства X и Y — польские, то по теореме10.3 меры μ и ν плотны. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компакты $K_\varepsilon \subset X$ и $L_\varepsilon \subset Y$ такие, что $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon/2$ и $\nu(Y \setminus L_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Но тогда для каждой меры $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ и компакта $K_\varepsilon \times L_\varepsilon \subset X \times Y$ выполнено

$$\pi\big((X\times Y)\setminus(K_\varepsilon\times L_\varepsilon)\big) \le \pi\big(X\times(Y\setminus L_\varepsilon)\big) + \pi\big((X\setminus K_\varepsilon)\times Y)\big) = \\ = \nu(Y\setminus L_\varepsilon) + \mu(X\setminus K_\varepsilon) < \varepsilon,$$

что и означает равномерную плотность семейства $\Pi(\mu,\nu) \subset \mathcal{P}(X\times Y)$. Теперь предкомпактность следует из теоремы Прохорова (следствие **??**). □

Из утверждения 11.7 следует, что для каждого фиксированного n любая минимизирующая последовательность $\{\pi_n^k\}$ задачи $\inf I_n$ сходится (с точностью до перехода к подпоследовательности) к некоторой вероятностной мере $\pi_n \in \mathcal{P}(X\times Y)$ (причем сходится и по метрике и в слабой топологии), поэтому для любой непрерывной ограниченной функции $\theta(x,y)$ имеем

$$\int \theta(x,y)\,d\pi_n^k \to \int \theta(x,y)\,d\pi_n \quad \text{при } k\to\infty,$$

поэтому $\pi_n \in \Pi(\mu,\nu)$. В частности, доказана следующая лемма.

Лемма 11.8. *Семейство мер $\Pi(\mu,\nu)$ замкнуто и, следовательно, компактно в метрической топологии.*

Далее, так как $\{\pi_n^k\}$ — минимизирующая последовательность, то

$$\inf I_n = \lim_{k\to\infty} \int c_n\,d\pi_n^k = \int c_n\,d\pi_n = I_n(\pi_n),$$

т.е., точная нижняя грань I_n достигается на мере π_n.

В силу компактности $\Pi(\mu,\nu)$, последовательность $\{\pi_n\} \subset \Pi(\mu,\nu)$ имеет предельную точку $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$. Так как $\{I_n\}$ — неубывающая последовательность, то из $n \ge m$ следует, что $I_n(\pi_n) \ge I_m(\pi_n)$. Фиксируем m и перейдем к пределу по n:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(\pi_n) \ge \limsup_{n\to\infty} I_m(\pi_n) \ge I_m(\pi_*).$$

Теперь, с помощью теоремы Леви о монотонной сходимости, перейдем к пределу по m, воспользуемся монотонностью $\{I_m\}$ и тем, что $c = \sup c_m$. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(\pi_n) \geq \lim_{m\to\infty} I_m(\pi_*) = I(\pi_*) \geq \inf_{\pi\in\Pi} I(\pi),$$

откуда и получается требуемая оценка. Таким образом, равенство $\inf I = \sup J$ полностью доказано.

Инфимум достигается

Достижимость инфимума снова следует из компактности $\Pi(\mu,\nu)$. Пусть $\{\pi_k\}$ — минимизирующая последовательность для I, и π_* — любая ее предельная точка (в слабой, или, что как мы знаем все равно, в метрической топологии). Снова рассмотрим нашу неубывающую последовательность $\{c_n\}$ неотрицательных равномерно непрерывных ограниченных функций, и соответствующие функционалы I_n. Тогда

$$I(\pi_*) = \lim_{n\to\infty} I_n(\pi_*) \leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{k\to\infty} I_n(\pi_k) \leq \limsup_{k\to\infty} I(\pi_k) = \inf I,$$

где первое равенство выполнено по теореме о монотонной сходимости интеграла Лебега (теорема Леви), первое неравенство выполнено по определению π_*, второе неравенство выполнено в силу монотонности последовательности $\{I_n\}$, а последнее равенство — в силу определения $\{\pi_k\}$. Таким образом, инфимум достигается в каждой предельной точке минимизирующей последовательности. Теорема полностью доказана.

11.4 Теорема Канторовича–Рубинштейна

Важный частный случай общей теории получается, если $X = Y$ и $c(x,y) = d(x,y)$ (функция стоимости перевозок совпадает с расстоянием). Заметим, что, вообще говоря, не обязательно предполагать, что топология на X порождена метрикой d.

Обозначим через $\mathrm{Lip}(X,d)$ множество всех липшицевых функций на X, и пусть $\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}$ обозначает константу Липшица для $\varphi \in \mathrm{Lip}(X)$. Напомним, что функция $\varphi \mapsto \|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}$ — это полунорма. На пространстве мер возникает двойственная полунорма

$$\|\mu\|^*_{\mathrm{Lip}} = \sup\Big\{ \int \varphi\, d\mu : \|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1\Big\}.$$

Теорема 11.9. *Пусть $X = Y$ — польское пространство, и d — полунепрерывная функция расстояния на X. Обозначим через $\mathcal{T}_d(\mu,\nu)$ стоимость оптимальной перевозки для функции стоимости $c(x,y) = d(x,y)$, т.е.*

$$\mathcal{T}_d(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times X} d(x,y)\, d\pi.$$

Тогда

$$\mathcal{T}_d(\mu,\nu) = \|\mu-\nu\|^*_{\mathrm{Lip}}.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство функций

$$d_n = \frac{d}{1 + d/n}.$$

Лемма 11.10. *Функция d_n является ограниченной метрикой на X. Кроме того $d_n(x, y) \le d(x, y)$, $d_n(x, y) \le d_{n+1}(x, y)$ для всех $x, y \in X$, причем $d_n(x, y) \to d(x, y)$ при $n \to \infty$. В частности,* $\mathrm{Lip}(X, d_n) \subset \mathrm{Lip}(X, d)$.

Опираясь на лемму 11.10 и рассуждая как в пункте 11.3 доказательства теоремы Канторовича, можно свести доказательство к случаю d_n, т.е., можно без ограничения общности предполагать, что метрика d ограничена. Тогда все липшицевы функции непрерывны, ограничены и поэтому интегрируемы по каждой из мер μ и ν. Поэтому, применяя теорему 9.1, заключаем, что для завершения доказательства остается проверить равенство

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_d} J(\varphi, \psi) = \|\mu - \nu\|_{\mathrm{Lip}},$$

где $J(\varphi, \psi) = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\nu$.

Рассуждая как в пункте 11.2 при коррекции функций (снова используя трюк Rüschendorf'а), можно показать, что

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_d} J(\varphi, \psi) \le \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(\varphi^{dd}, \varphi^d),$$

где

$$\varphi^d(y) = \inf_{x\in X} \big(d(x, y) - \varphi(x)\big), \qquad \varphi^{dd}(x) = \inf_{y\in X} \big(d(x, y) - \varphi^d(y)\big)$$

Лемма 11.11. *Функция φ_d является 1-липшицевой.*

Доказательство. Функция φ_d определена как инфимум ограниченных 1-липшицевых функций. □

Таким образом,

$$-\varphi^d(x) \le \inf_{y\in X} \big(d(x, y) - \varphi^d(y)\big) \le -\varphi^d(x),$$

где правое неравенство получается, если взять $y = x$ под знаком инфимума, а левое следует из леммы 11.11. Поэтому $\varphi^{dd} = -\varphi^d$. В итоге,

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_d} J(\varphi, \psi) \le \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(\varphi^{dd}, \varphi^d) = \sup_{\varphi\in L^1(\mu)} J(-\varphi^d, \varphi^d) \le$$
$$\le \sup_{\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}\le 1} J(\varphi, -\varphi) \le \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_d} J(\varphi, \psi),$$

где первое неравенство — трюк Rüschendorf'а, второе следует из леммы 11.11, а третье — из интегрируемости липшицевых функций. Поэтому везде имеют место равенства, и остается заметить, что

$$\sup_{\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}} J(\varphi, -\varphi) = \|\mu - \nu\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Теорема доказана. □