Тема 10

Плотные меры. Теорема Прохорова.

В данном разделе мы определим важный класс вероятностных мер, которые называются плотными.

10.1 Плотные меры

Понятие плотности меры тесно связано с понятием компактности, как видно из следующего определения.

Определение 10.1. Вероятностная мера μ на топологическом пространстве X называется *плотной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(K) > 1 - \varepsilon$.

Из теоремы 6.11, которая утверждает, что для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}(X)$ и любого $A \in \mathcal{B}_X$ выполнено

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ — замкнуто в } X\big\},$$
$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ — открыто в } X\big\}.$$

вытекает следующий результат.

Следствие 10.2. *Пусть $\mu \in \mathcal{P}(X)$ — плотная вероятностная мера на метрическом пространстве X. Тогда для любого измеримого A выполняется*

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ — \textit{компакт}}\big\}.$$

Доказательство. В силу монотонности меры, достаточно проверить, что

$$\mu(A) \le \sup\big\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ — компакт}\big\}.$$

Так как мера μ плотная, для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset X$, для которого $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$. Из аддитивности меры μ вытекает, что

$$\mu(A) = \mu(A \cap K) + \mu\big(A \cap (X \setminus K)\big) \le \mu(A \cap K) + \mu(X \setminus K),$$

откуда

$$\mu(A \cap K) \ge \mu(A) - \mu(X \setminus K) > \mu(A) - \varepsilon.$$

Кроме того, так как каждый компакт является замкнутым подмножеством X, то по теореме 6.11, а также в силу того, что подмножество компакта $K \subset X$ замкнуто в X, если и только если оно компактно, получаем, что

$$\begin{aligned}\mu(A) - \varepsilon < \mu(A \cap K) = \sup\big\{\mu(F) : F \subset A \cap K,\ F \text{ — замкнуто в } X\big\} = \\ = \sup\big\{\mu(K') : K' \subset A \cap K,\ K' \text{ — компакт}\big\} \le \\ \le \sup\big\{\mu(K') : K' \subset A,\ K' \text{ — компакт}\big\},\end{aligned}$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает требуемое. □

Теорема 10.3. *Пусть X — польское пространство, тогда каждая вероятностная мера μ на X — плотная.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим соответствующий компакт K. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots\} \subset X$ — счетное всюду плотное множество. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ семейство открытых шаров $A_{ik} = U_{1/k}(s_i)$ покрывает X, причем, в силу пункта (5) теоремы 4.10, существует n_k такое, что $\mu\big(\cup_{i=1}^{n_k} A_{ik}\big) > 1 - \varepsilon/2^k$. Положим $C_k = \cup_{i=1}^{n_k} A_{ik}$, и пусть $C = \cap_{k=1}^{\infty} C_k$.

Положим $K = \bar{C}$, где $\bar{C}$ — замыкание множества C.

Лемма 10.4. *Множество K является компактом, и $\mu(K) > 1 - \varepsilon$.*

Доказательство. Покажем сначала, что C вполне ограничено. Действительно, множество $\{s_i\}_{i=1}^{n_k}$ является $(1/k)$-сетью в C_k и, значит, в $C \subset C_k$ имеется $(2/k)$-сеть, состоящая не более чем из n_k точек. Так как k произвольно, получаем, что для каждого $\delta > 0$ в C содержится конечная δ-сеть.

Далее, каждая δ-сеть для C является также и δ-сетью для $\bar{C}$, поэтому K — замкнутое вполне ограниченное множество, т.е. компакт.

Оценим теперь $\mu(K)$. Для этого положим $D_k = X \setminus C_k$ и заметим, что $\mu(D_k) < 1/2^k$, поэтому

$$\mu(K) \ge \mu(C) = \mu\big(\cap_{k=1}^{\infty}(X \setminus D_k)\big) = \mu\big(X \setminus \cup_{k=1}^{\infty} D_k\big) \ge 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) > 1 - \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Теорема доказана. □

Отметим, что, вообще говоря, борелевская мера на метрическом пространстве вовсе не обязана быть плотной.

Пример 10.5. Пусть X — несчетное дискретное пространство, тогда $\mathcal{B}_X = 2^X$. Положим $\mu(A)$ равным 0, если $X \setminus A$ несчетно, и 1 в противном случае. Тогда μ — вероятностная мера. Отметим, что подмножество такого X компактно, если и только если оно конечно, поэтому все компакты имеют нулевую меру и, значит, такая мера μ не является плотной.

10.2 Равномерно плотные семейства мер

Важную роль в доказательствах существования играют компакты. Наша цель — описать предкомпактные семейства вероятностных мер.

Определение 10.6. Семейство $\mathcal{M}$ вероятностных мер на топологическом пространстве X называется *равномерно плотным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset X$, что $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ для всех $\mu \in \mathcal{M}$.

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *предкомпактным*, если его замыкание — компакт. Следующий результат является “половиной” известной теоремы Прохорова[1].

Теорема 10.7. *Пусть X — польское пространство, и $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ — предкомпактное семейство вероятностных мер на X (на $\mathcal{P}(X)$ рассматривается топология слабой сходимости). Тогда $\mathcal{M}$ равномерно плотно.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.3. Равномерность вытекает из того, что теперь для любого $\varepsilon > 0$ существует n_k такое, для которого оценка $\mu\big(\cup_{i=1}^{n_k} A_{ik}\big) > 1 - \varepsilon/2^k$ выполняется одновременно для всех $\mu \in \mathcal{M}$. Мы докажем это даже в более слабых предположениях.

Лемма 10.8. *Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольное открытое покрытие произвольного метрического пространства X, а семейство $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ вероятностных мер предкомпактно в топологии слабой сходимости. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что*

$$\mu\big(\cup_{i=1}^{n} U_i\big) > 1 - \varepsilon \quad \textit{при всех } \mu \in \mathcal{M}.$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ можно найти $\mu_n \in \mathcal{M}$, для которого выполняется $\mu_n\big(\cup_{i=1}^{n} U_i\big) \le 1 - \varepsilon$. Так как $\mathcal{M}$ предкомпактно в топологии слабой сходимости, в последовательности $\{\mu_n\}$ существует подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторому $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Так как $\cup_{i=1}^{n} U_i$ — открытое множество, то, по теореме Портманто (теорема 7.22, пункт 4), для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\mu\big(\cup_{i=1}^{n} U_i\big) \le \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}\big(\cup_{i=1}^{n} U_i\big) \le \liminf_{k\to\infty} \mu_{n_k}\big(\cup_{i=1}^{n_k} U_i\big) \le 1 - \varepsilon.$$

Однако, это противоречит пункту (5) теоремы 4.10. □

[1] Юрий Васильевич Прохоров (1929-2013), окончил мех-мат МГУ, ученик А.Н.Колмогорова, академик АН СССР, зав. кафедрой ВМиК, заведующий отделом Математического института имени В. А. Стеклова.

Завершить доказательство теперь можно дословно повторив конструкцию и рассуждения из доказательства теоремы 10.3. □

Оказывается, имеет место и обратный результат (вторая “половина” теоремы Прохорова).

Теорема 10.9. *Пусть X — польское метрическое пространство, и $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ — равномерно плотное семейство вероятностных мер на X. Тогда $\mathcal{M}$ предкомпактно в слабой топологии.*

План доказательства теоремы 10.9. Сначала мы докажем, что каждая последовательность $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}$ содержит подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Отсюда вытекает, что $\overline{\mathcal{M}}$ секвенциально компактно в слабой топологии. Затем мы покажем, что слабая топология на $\mathcal{P}(X)$ метризуема. Мы явно построим естественную метрику на $\mathcal{P}(X)$, называемую метрикой Прохорова. Тогда предкомпактность $\mathcal{M}$ будет следовать из теоремы **??**. □

10.3 Доказательство секвенциальной компактности

Начнем со следующей технической леммы.

Лемма 10.10. *Пусть $M \subset X$. Тогда существует счетное семейство $\mathcal{A}$ открытых множеств в X такое, что если G — открытое подмножество X, пересекающееся с M, и $x \in M \cap G$, то существует $A \in \mathcal{A}$, для которого $x \in A \in \overline{A} \subset G$.*

Доказательство. Пусть D — счетное плотное подмножество в X. В качестве $\mathcal{A}$ возьмем семейство шаров $\big\{U_r(d) : d \in D, \quad r \in \mathbb{Q}\big\}$. Пусть G — открыто, и $x \in G \cap M$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого $U_\varepsilon(x) \subset G$, а также существует $d \in D$, для которого $|xd| < \varepsilon/2$. Выберем рациональное r, $|xd| < r < \varepsilon/2$, тогда $x \in U_r(d) \subset B_r(d) \subset U_\varepsilon(x) \subset G$, где предпоследнее включение следует из неравенства треугольника. Лемма доказана. □

Пусть $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}$ — произвольная последовательность. Так как $\mathcal{M}$ — равномерно плотное семейство, то существует последовательность компактов $K_a \subset X$ такая, что $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ и $\mu_n(K_a) > 1 - 1/a$ для всех натуральных n и a. Применим лемму 10.10 к множеству $M = \cup_a K_a \subset X$: существует счетное семейство открытых множеств $\mathcal{A}$ такое, что если G — открытое подмножество X, пересекающееся с M, и $x \in M \cap G$, то существует $A \in \mathcal{A}$, для которого $x \in A \in \overline{A} \subset G$. Рассмотрим семейство $\mathcal{H}$ подмножеств в X, состоящее из пустого множества и конечных объединений множеств вида $\overline{A} \cap K_a$, где $A \in \mathcal{A}$ и $a \in \mathbb{N}$.

Лемма 10.11. *Семейство $\mathcal{H}$ счетно. Кроме того, каждый компакт K_a является элементом $\mathcal{H}$, и каждый элемент $H \in \mathcal{H}$ — компакт.*

Доказательство. Счетность $\mathcal{H}$ очевидна. Далее, каждый компакт K_a покрывается множествами из $\mathcal{A}$ (так как X открыто, каждая точка $x \in K_a \cap X$ содержится в некотором $A \in \mathcal{A}$), а значит и конечным семейством множеств из $\mathcal{A}$, поэтому равен конечному объединению множеств вида $\overline{A} \cap K$, и значит $K_a \in \mathcal{H}$. Наконец, каждое множество $\overline{A} \cap K_a$ представляет собой замкнутое подмножество компакта, и поэтому компактно, и поэтому каждый элемент $H \in \mathcal{H}$ компактен как конечное объединение компактов. $\square$

Так как для каждого фиксированного H множество значений $\{\mu_n(H)\}_n$ ограничено, оно содержит сходящуюся подпоследовательность. Воспользовавшись счетностью семейства $\mathcal{H}$ и используя стандартный диагональный процесс, выберем такую подпоследовательность μ_{n_i}, что для каждого $H \in \mathcal{H}$ существует предел

$$\lim_{i\to\infty} \mu_{n_i}(H) =: \alpha(H).$$

Для завершения доказательства достаточно построить на X вероятностную меру μ, обладающую следующим свойством:

$$\mu(G) = \sup_{H\subset G, H\in\mathcal{H}} \alpha(H) \qquad \text{для всех открытых } G \subset X. \tag{10.1}$$

Действительно, для каждого $H \subset G$ выполнено $\alpha(H) = \lim_i \mu_{n_i}(H) \le \liminf_i \mu_{n_i}(G)$, поэтому, если такая мера μ нашлась, то $\mu(G) \le \liminf_i \mu_{n_i}(G)$ для каждого открытого $G \subset X$, поэтому по теореме Портманто (теорема 7.22, пункт 4) $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Перейдем к построению меры μ. Заметим сначала, что построенное нами семейство $\mathcal{H}$ по определению замкнуто относительно конечных объединений и, кроме того, построенная нами функция α обладает следующими свойствами.

Лемма 10.12. *Пусть $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Тогда*

- $\alpha(\emptyset) = 0$;
- *если $H_1 \subset H_2$, то $\alpha(H_1) \le \alpha(H_2)$;*
- *если $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, то $\alpha(H_1 \cup H_2) = \alpha(H_1) + \alpha(H_2)$;*
- $\alpha(H_1 \cup H_2) \le \alpha(H_1) + \alpha(H_2)$.

Доказательство. Утверждения леммы получаются из свойств мер μ_i и борелевости элементов $H \in \mathcal{H}$. $\square$

Для каждого открытого $G \subset X$ положим

$$\beta(G) = \sup_{H\subset G, H\in\mathcal{H}} \alpha(H),$$

тогда $\beta(\emptyset) = \alpha(\emptyset) = 0$, и если $G_1 \subset G_2$ — открыты в X, то $\beta(G_1) \le \beta(G_2)$. Наконец положим

$$\gamma(M) = \inf_{M\subset G} \beta(G),$$

где M — произвольное подмножество X, и инфимум берется по всем открытым G, $M \subset G$. Ясно, что $\gamma(G) = \beta(G)$ для любого открытого $G \subset X$.

Для завершения доказательства мы покажем, что γ — внешняя мера на X, причем ее σ-алгебра измеримых множеств содержит все замкнутые подмножества X. Тогда эта σ-алгебра содержит борелевскую сигма алгебру $\mathcal{B}_X$, ограничение γ на $\mathcal{B}_X$

является борелевской мерой на X, которую мы выберем в качестве μ. Ясно, что $\mu(G) = \gamma(G) = \beta(G)$ для любого открытого $G \subset X$, поэтому выполнено (10.1). Наконец, так как каждый компакт K_a принадлежит $\mathcal{H}$, лемма 10.12, то

$$1 \geq \mu(X) = \beta(X) \geq \sup_a \alpha(K_a) \geq \sup_a (1 - 1/a) = 1,$$

поэтому μ — искомая вероятностная мера, что и требовалось.

Разобьем доказательство на несколько лемм.

Лемма 10.13. *Пусть F — замкнуто, G — открыто, $F \subset G$ и $F \subset H$ для некоторого $H \in \mathcal{H}$. Тогда найдется $H_0 \in \mathcal{H}$ такое, что $F \subset H_0 \subset G$.*

Доказательство. Действительно, для каждой $x \in F$ найдется такое $A_x \in \mathcal{A}$, что $x \in A_x \in \overline{A_x} \subset G$. Множества $\{A_x\}$ покрывают F, замкнутое подмножество F компакта H компактно, поэтому существует конечное подпокрытие $\{A_{x_1}, \ldots, A_{x_k}\}$. С другой стороны, $F \subset H$ поэтому F содержится в конечном объединении компактов K_a и, значит, в некотором компакте K_b. Тогда можно взять $H_0 = \cup_{i=1}^{k} \big(\overline{A_{x_i}} \cap K_b\big)$. □

Лемма 10.14. *Функция β, определенная выше на открытых подмножествах X, является субаддитивной.*

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 — открытые подмножества в X, и $H \in \mathcal{H}$ такой, что $H \subset G_1 \cup G_2$. Определим замкнутые множества F_1, F_2 так:

$$F_1 = \overline{\big\{x \in H : |x, X \setminus G_1| \geq |x, X \setminus G_2|\big\}} \qquad F_2 = \overline{\big\{x \in H : |x, X \setminus G_2| \geq |x, X \setminus G_1|\big\}}.$$

Заметим, что $F_1 \cup F_2 = H$. Кроме того, если $x \in F_1 \subset H \subset G_1 \cup G_2$ и $F \notin G_1$, то $x \in G_2$, но последнее невозможно, так как в этом случае $|x, X \setminus G_2| > 0 = |x \setminus G_1|$ (строгость неравенства вытекает из замкнутости $X \setminus G_2$). Таким образом, $F_1 \subset G_1$. Точно так же $F_2 \subset G_2$. Так как $F_i \subset H$, $i = 1,\ 2$, то из леммы 10.13 вытекает, что найдутся такие $H_i \in \mathcal{H}$, что $F_i \subset H_i \subset G_i$, $i = 1,\ 2$. Но тогда

$$\alpha(H) \leq \alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2),$$

и в силу произвольности $H \subset G_1 \cup G_2$, заключаем, что $\beta(G_1 \cup G_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$, что и требовалось. □

Лемма 10.15. *Функция β, определенная выше на открытых подмножествах X, является сигма субаддитивной.*

Доказательство. Действительно, если $H \subset \cup_n G_n$, $H \in \mathcal{H}$, то в силу компактности H для некоторого n_0 выполнено $H \subset \cup_{n \leq n_0} G_n$. Тогда в силу уже доказанной конечной субаддитивности

$$\alpha(H) \leq \beta\Big(\cup_{n \leq n_0} G_n\Big) \leq \sum_{n \leq n_0} \beta(G_n) \leq \sum_n \beta(G_n),$$

и, взяв супремум по всем $H \subset \cup_n G_n$, заключаем, что

$$\beta\Big(\cup_n G_n\Big) \leq \sum_n \beta(G_n),$$

что и требовалось. □

Лемма 10.16. *Определенная выше функция γ является внешней мерой на X.*

Доказательство. Так как β монотонна и $\beta(\emptyset) = 0$, то γ тоже монотонна и $\gamma(\emptyset) = 0$. Поэтому остается проверить счетную субаддитивность. Пусть $\{M_n\}$ — произвольное счетное семейство подмножеств в X, и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся открытые $G_n \subset X$ такие, что $M_n \subset G_n$ и $\beta(G_n) < \gamma(M_n) + \varepsilon/2^n$. Тогда, в силу счетной субаддитивности β (лемма 10.15),

$$\gamma\Big(\cup_n M_n\Big) \le \beta\Big(\cup_n G_n\Big) \le \sum_n \beta(G_n) \le \sum_n \gamma(M_n) + \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, получаем требуемое. □

Итак, мы доказали, что γ — внешняя мера на X. Перейдем теперь к γ-измеримым множествам. Напомним, что подмножество $A \subset X$ называется γ-измеримым, если для любого $M \subset X$ выполнено равенство $\gamma(M) = \gamma(M \cap A) + \gamma(M \cap (X \setminus A))$, причем достаточно проверить неравенство $\ge$ так как обратное следует из полуаддитивности.

Лемма 10.17. *Для любого замкнутого $F \subset X$ и открытого $G \subset X$ имеем $\beta(G) \ge \gamma(G \cap F) + \gamma(G \cap (X \setminus F))$.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $H_1 \in \mathcal{H}$ так, чтобы $H_1 \subset (X \setminus F) \cap G$ и $\alpha(H_1) > \beta((X \setminus F) \cap G) - \varepsilon$. Заметим, что $X \setminus H_1 \supset F$. Теперь выберем $H_0 \in \mathcal{H}$ так, чтобы $H_0 \subset (X \setminus H_1) \cap G$ и $\alpha(H_0) > \beta((X \setminus H_1) \cap G) - \varepsilon$. Так как H_0 и H_1 — дизъюнктные подмножества в G, то

$$\begin{aligned}\beta(G) \ge \alpha(H_0 \cup H_1) = \alpha(H_0) + \alpha(H_1) > \beta((X \setminus H_1) \cap G) + \beta((X \setminus F) \cap G) - 2\varepsilon \ge \\ \ge \gamma(F \cup G) + \gamma((X \setminus F) \cap G) - 2\varepsilon,\end{aligned}$$

и из произвольности ε следует требуемое. □

Лемма 10.18. *Любое замкнутое подмножество $F \subset X$ является γ-измеримым.*

Доказательство. В силу леммы 10.17 для любого открытого подмножества $G \subset X$ и замкнутого $F \subset X$ и любого $L \subset G$ имеем:

$$\beta(G) \ge \gamma(G \cap F) + \gamma(G \cap (X \setminus F)) \ge \gamma(G \cap L) + \gamma(L \cap (X \setminus F)).$$

Взяв инфимум по всем открытым G, $G \supset L$, получаем $\gamma(L) \ge \gamma(G \cap L) + \gamma(L \cap (X \setminus F))$, что и требовалось. □

Тем самым, доказано следующее утверждение, представляющее собой первый шаг доказательства теоремы о предкомпактности.

Утверждение 10.19. *Пусть X — польское метрическое пространство, и $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ — равномерно плотное семейство вероятностных мер на X. Тогда любая последовательность $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}$ содержит подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой вероятностной мере $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Другими словами, равномерно плотное семейство вероятностных мер секвенциально предкомпактно в слабой топологии.*