Тема 8

Теоремы Хана–Банаха о продолжении и отделимости

Нам понадобится несколько технических результатов из геометрии линейных пространств общего вида.

8.1 Теоремы Хана–Банаха о продолжении

Есть несколько вариантов формулировки теоремы Хана–Банаха о продолжении линейного функционала. Мы приведем вещественный и комплексный варианты.

Пусть $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел, и $\mathcal{X}$ — векторное пространство над $\mathbb{K}$. Функция $q\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ называется *квазиполунормой*, если

- $q(x+y) \le q(x) + q(y)$ (неравенство треугольника), и
- $q(tx) = tq(x)$ при всех $x \in \mathcal{X}$ и всех $t \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$ (вещественная положительная полуоднородность).

Квазиполунорма q называется *полунормой*, если она полуоднородна в следующем смысле: $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ при всех $x \in \mathcal{X}$ и всех $\lambda \in \mathbb{K}$.

Замечание 8.1. По определению, квазиполунорма q нулевого вектора равна нулю, а полунорма любого вектора неотрицательна. Последнее следует из того, что для полунормы выполнено $q(x) = q(-x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$, откуда

$$2q(x) = q(x) + q(x) = q(x) + q(-x) \ge q(x-x) = q(0) = 0.$$

Теорема 8.2. *Пусть $\mathcal{X}$ — вещественное линейное пространство, на котором задана некоторая квазиполунорма q. Пусть на некотором его подпространстве $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ задан линейный функционал $\phi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, ограниченный сверху этой квазиполунормой, т.е.*

$$\phi(y) \le q(y) \quad \text{для любого } y \in \mathcal{Y}.$$

Тогда существует линейный функционал $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, продолжающий ϕ и ограниченный q, т.е. такой, что $\psi|_{\mathcal{Y}} = \phi$ и $\psi(x) \le q(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, а именно, пусть кормазмерность $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{X}$ равна 1. Другими словами, пусть существует вектор $x_0 \in \mathcal{X}$, для которого

$$\mathcal{X} = \{y + sx_0 : y \in \mathcal{Y}, s \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда, чтобы построить линейное продолжение, достаточно задать значение $\psi(x_0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и тогда положить $\psi(y + sx_0) = \phi(y) + s\alpha$ для всех $y \in \mathcal{Y}$, $s \in \mathbb{R}$. Линейность очевидна, остается показать, что можно выбрать α так, чтобы выполнялось требуемое неравенство $\psi(x) \leq q(x)$. А именно, нужно выбирать α так, чтобы

$$\psi(x) = \psi(y + sx_0) = \phi(y) + s\alpha \leq q(y + sx_0) = q(x)$$

при всех $y \in \mathcal{Y}$ и всех s. Для $s = 0$ неравенство выполнено по предположению. При $s > 0$ поделим неравенство на положительное s, положим $z = y/s$ и получим следующее условие: $\alpha \leq q(z + x_0) - \phi(z)$ при всех $z \in \mathcal{Y}$. Аналогично, при $s < 0$ получим, что $\alpha \geq q(y + sx_0)/s - \phi(y/s)$. Положим $t = -s > 0$, $w = y/t = -y/s$ и снова воспользуемся положительной полуоднородностью. Получим $\alpha \geq \phi(w) - q(w - x_0)$. Итак, нужно выбрать α так, чтобы следующее двойное неравенство

$$\phi(w) - q(w - x_0) \leq \alpha \leq q(z + x_0) - q(z)$$

было выполнено при всех $z, w \in \mathcal{Y}$. Для существования такого α достаточно, чтобы

$$\sup\{\phi(w) - q(w - x_0) : w \in \mathcal{Y}\} \leq \inf\{q(z + x_0) - \phi(z) : z \in \mathcal{Y}\}.$$

Но последнее имеет место, так как

$$\phi(z) + \phi(w) = \phi(z + w) \leq q(z + w) = q(z + x_0 - x_0 + w) \leq q(z + x_0) + q(w - x_0),$$

поэтому $\phi(w) - q(w - x_0) \leq q(z + x_0) - \phi(z)$, откуда и вытекает требуемое.

Чтобы перейти к общему случаю, нам понадобится лемма Цорна. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всех пар $(\mathcal{V}, \nu)$, каждая из которых состоит из подпространства $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, содержащего $\mathcal{Y}$, и ограниченного квазиполунормой q продолжения $\nu \colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ функционала ϕ на $\mathcal{V}$. Введем на $\mathcal{F}$ отношение порядка, положив $(\mathcal{V}_1, \nu_1) \leq (\mathcal{V}_2, \nu_2)$, если $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ и $\nu_2|_{\mathcal{V}_1} = \nu_1$. Каждое линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ имеет верхнюю грань (в качестве этой верхней грани можно взять пару, состоящую из подпространства $\mathcal{U}$, являющегося объединением всех подпространств $\mathcal{V}$, образующих пары $(\mathcal{V}, \nu)$ из $\mathcal{M}$, и функционала, который на каждом таком подпространстве $\mathcal{V}$ совпадает с соответствующим функционалом ν), поэтому, по лемме Цорна, семейство $\mathcal{F}$ имеет некоторый максимальный элемент $(\mathcal{Z}, \psi)$. Остается проверить, что $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$. Но если это не так, то найдется вектор $x_0 \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ и, применяя описанную выше конструкцию, можно построить продолжение $\tilde{\psi}$ функционала ψ на подпространство $\mathcal{Z} \oplus \{sx_0\}$. Последнее противоречит максимальности $(\mathcal{Z}, \psi)$, так как пара $\left(\mathcal{Z} \oplus \{sx_0\}, \tilde{\psi}\right)$ принадлежит $\mathcal{F}$ и больше чем $(\mathcal{Z}, \psi)$ в нашем отношении порядка. Теорема доказана. $\square$

Терему Хана–Банаха можно переформулировать для комплексных линейных пространств и для пространств с полунормой.

Теорема 8.3. *Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное линейное пространство, на котором задана некоторая квазиполунорма q. Пусть на некотором его подпространстве $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ задан линейный функционал $\phi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ такой, что*

$$\operatorname{Re}\phi(y) \le q(y) \quad \text{для любого } y \in \mathcal{Y}.$$

Тогда существует линейный функционал $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, продолжающий ϕ и ограниченный q, т.е. такой, что $\psi|_{\mathcal{Y}} = \phi$ и $\operatorname{Re}\psi(x) \le q(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$.

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой 8.2, рассмотрим $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ как вещественные линейные пространства, и определим $\mathbb{R}$-линейное отображение $\phi_1\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, положив $\phi_1(y) = \operatorname{Re}\phi(y)$, $y \in \mathcal{Y}$ (заметим, что Re — линейная функция на вещественном линейном пространстве $\mathcal{X}$). Тогда $\psi_1(y) = \operatorname{Re}\psi(y) \le q(y)$, и применима теорема 8.2, согласно которой существует $\mathbb{R}$-линейное отображение $\psi_1\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, продолжающее ϕ_1 и ограниченная q на всем $\mathcal{X}$. Определим отображение $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ так:

$$\psi(x) = \psi_1(x) - i\psi_1(ix) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{X}.$$

Остается проверить, что ψ — искомое. Оставим это в качестве упражнения.

□

Из теоремы Хана–Банаха для квазиполунорм легко получить случай полунорм.

Теорема 8.4. *Пусть $\mathcal{X}$ — $\mathbb{K}$-линейное пространство, на котором задана некоторая полунорма q. Пусть на некотором его подпространстве $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ задан линейный функционал $\phi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ такой, что*

$$\bigl|\phi(y)\bigr| \le q(y) \quad \text{для любого } y \in \mathcal{Y}.$$

Тогда существует $\mathbb{K}$-линейный функционал $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{K}$, продолжающий ϕ и ограниченный q, т.е. такой, что $\psi|_{\mathcal{Y}} = \phi$ и $\bigl|\psi(x)\bigr| \le q(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию теорем о продолжении.

8.2 Функционалы Минковского и отделимость

Начнем с конструкции, которая позволяет строить квазиполунормы. Пусть $C \subset \mathcal{X}$ — выпуклое подмножество вещественного линейного пространства $\mathcal{X}$ такое, что

- $0 \in C$,
- $\cup_{t>0} tC = \mathcal{X}$.

Такие подмножества иногда называют *поглощающими.* Для произвольного $x \in \mathcal{X}$ положим $T_C(x) = \{t > 0 : x \in tC\}$. Заметим, что из второго свойства вытекает, что каждый вектор $x \in \mathcal{X}$ содержится в некотором tC, поэтому множество $T_C(x)$ не пусто для любого $x \in \mathcal{X}$ и ограничено снизу.

Определим *функционал Минковского*, соответствующий такому C, положив

$$Q_C(x) = \inf\{t > 0 : x \in tC\} = \inf T_C(x), \qquad x \in \mathcal{X}.$$

Пример 8.5. Пусть $\mathcal{X}$ — нормированное пространство, и $C = B_1(0)$ — замкнутый единичный шар с центром в нуле. Тогда $Q_C(x) = \|x\|$.

Например, так как $0 \in C$, то $0 \in tC$ для любого $t > 0$, поэтому $T_C(0) = (0, \infty)$, откуда $Q_C(0) = 0$.

Утверждение 8.6. *Для любого поглощающего выпуклого подмножества $C \subset \mathcal{X}$ функционал Минковского Q_C задает на $\mathcal{X}$ некоторую квазиполунорму.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 8.7. *Для любого $x \in \mathcal{X}$ и любого $\lambda > 0$ имеет место равенство $T_C(\lambda x) = \lambda T_C(x)$.*

Доказательство. Пусть сначала $t \in T_C(\lambda x)$. Тогда $\lambda x \in tC$, и значит $x \in \frac{t}{\lambda}C$, т.е. $\frac{t}{\lambda} \in T_C(x)$, откуда $t \in \lambda T_C(x)$.

Докажем обратное включение. Пусть $s \in \lambda T_C(x)$, т.е. существует $t \in T_C(x)$, для которого $s = \lambda t$. Последнее означает, что $x \in tC = \frac{s}{\lambda}C$, откуда $\lambda x \in sC$. Поэтому $s \in T_C(\lambda x)$, что и требовалось. $\square$

Для $A, B \subset \mathbb{R}$ положим $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Лемма 8.8. *Для любых $x, y \in \mathcal{X}$ выполнено включение $T_C(x) + T_C(y) \subset T_C(x + y)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $t \in T_C(x)$ $s \in T_C(y)$. Тогда $x \in tC$, $y \in sC$, откуда

$$u = \frac{1}{t}x \in C, \qquad v = \frac{1}{s}y \in C,$$

и из выпуклости C заключаем, что

$$\frac{t}{t+s}u + \frac{s}{t+s}v = \frac{1}{t+s}(x + y) \in C,$$

поэтому $x + y \in (t + s)C$, т.е. $t + s \in T_C(x + y)$, что и требовалось. $\square$

Из леммы 8.7 следует, что $Q_C(\lambda x) = \lambda Q_C(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$ и любого $\lambda > 0$, а из леммы 8.8 следует, что $Q_C(x + y) \leq Q_C(x) + Q_C(y)$ для любых $x, y \in \mathcal{X}$. Утверждение доказано. $\square$

Лемма 8.9. *Пусть $C \subset \mathcal{X}$ — поглощающее выпуклое подмножество, и Q_C — соответствующий функционал Минковского. Тогда*

$$\big\{x \in \mathcal{X} : Q_C(x) < 1\big\} \subset C \subset \big\{x \in \mathcal{X} : Q_C(x) \leq 1\big\}.$$

Доказательство. Так как для любого $x \in C$ выполнено $1 \in T_C(x)$, то $Q_C(x) = \inf T_C(x) \leq 1$, откуда следует второе включение. Проверим первое. Если $x \in \mathcal{X}$ и $Q_C(x) < 1$, то существует $t \in (0, 1)$, для которого $x \in tC$. Но тогда $y = \frac{1}{t}x \in C$, поэтому из выпуклости C и $0 \in C$ вытекает, что $x = ty + (1 - t)0 \in C$. $\square$

Важным частным случай — линейные топологические пространства. Напомним, что линейное пространство $\mathcal{X}$ над полем $\mathbb{K}$ называется *линейным топологическим пространством*, если оно также является топологическим пространством, причем структуры линейного и топологического пространств согласованы в следующем смысле: отображения

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathcal{X}, \quad \text{и} \quad \mathbb{K} \times \mathcal{X} \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in \mathcal{X}$$

непрерывны.

Упражнение 8.10. Проверьте, что для любого $y \in \mathcal{X}$ отображение $f_y \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *сдвига на вектор* y, заданное формулой $f_y(x) = x + y$, является гомеоморфизмом топологического пространства $\mathcal{X}$.

Упражнение 8.11. Проверьте, что для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, отображение $g_\lambda \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *растяжения в* λ *раз*, заданное формулой $g_\lambda(x) = \lambda x$, является гомеоморфизмом топологического пространства $\mathcal{X}$.

Утверждение 8.12. *Пусть $\mathcal{X}$ — вещественное линейное топологическое пространство, и $C \subset \mathcal{X}$ — его открытое выпуклое подмножество, содержащее* 0. *Тогда $\cup_{t>0} tC = \mathcal{X}$, т.е. C является поглощающим, и, кроме того, имеет место равенство $\big\{x \in \mathcal{X} : Q_C(x) < 1\big\} = C$.*

Доказательство. Фиксируем произвольный $x \in \mathcal{X}$ и рассмотрим отображение $F_x \colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, заданное так: $F_x(t) = tx$. Так как $\mathcal{X}$ — линейное топологическое пространство, то отображение F_x непрерывно. В частности, оно непрерывно в $0 \in \mathbb{R}$. Поэтому для окрестности C точки $F_x(0) = 0 \in \mathcal{X}$ найдется $\delta > 0$ такое, что $F_x\big((-2\delta, 2\delta)\big) \subset C$, т.е., $F_x(t) = tx \in C$ для любого $t \in (-2\delta, 2\delta)$, в частности, $\delta x \in C$, откуда $x \in \frac{1}{\delta}C$. Таким образом, в силу произвольности x, заключаем, что $\cup_{t>0} tC = \mathcal{X}$.

Перейдем к доказательству равенства. Из леммы 8.9 следует включение $\big\{x \in \mathcal{X} : Q_C(x) < 1\big\} \subset C$, поэтому достаточно проверить обратное. Пусть $x \in C$. Воспользуемся теперь непрерывностью отображения F_x в $t = 1$. Так как $F_x(1) = x \in C$, для открытой окрестности C точки x найдется $\delta > 0$ такое, что $F_x\big((1-2\delta, 1+2\delta)\big) \subset C$. В частности, $F_x(1+\delta) = (1+\delta)x \in C$, т.е., $x \in \frac{1}{1+\delta}C$, откуда $Q_C(x) \leq 1/(1+\delta) < 1$. Утверждение доказано. □

Утверждение 8.13. *Пусть $\mathcal{X}$ — вещественное линейное топологическое пространство, $C \subset \mathcal{X}$ — выпуклое открытое его подмножество, содержащее* 0, *и $x_0 \in \mathcal{X} \setminus C$. Тогда существует такая линейная непрерывная функция $\psi \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, что*

- $\psi(x_0) = 1$,
- $\psi(v) < 1$ *при всех* $v \in C$.

Доказательство. Рассмотрим линейное одномерное подпространство $\mathcal{Y} = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$, и определим на нем линейную функцию $\phi \colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ так: $\phi(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что ϕ — линейная функция на $\mathcal{Y}$, причем $\phi(x_0) = 1$. Чтобы применить теорему Хана–Банаха (теорему 8.2), нам нужна следующая лемма.

Лемма 8.14. *Линейная функция ϕ ограничена на $\mathcal{Y}$ квазипсевдонормой Q_C, т.е. $\phi(y) \le Q_C(y)$ для любого $y \in \mathcal{Y}$.*

Доказательство. Представим y в виде $y = tx_0$. Если $t \le 0$, то $\phi(y) = t \le 0 \le Q_C(y)$, так как $Q_C(y) \ge 0$ по определению. Пусть теперь $t > 0$. Тогда

$$Q_C(y) = Q_C(tx_0) = tQ_C(x_0)$$

по свойствам квазиполунормы. Кроме того, $x_0 \notin C$, поэтому, по утверждению 8.12 $Q_C(x_0) \ge 1$, поэтому, продолжая предыдущую цепочку равенств, заключаем, что

$$Q_C(y) = tQ_C(x_0) \ge t = \phi(tx_0) = \phi(y),$$

что и требовалось. □

Теперь применим теорему Хана–Банаха о продолжении (теорема 8.2). Согласно этой теореме, существует линейный функционал $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, продолжающий ϕ и ограниченный сверху той же квазиполунормой. Очевидно, $\psi(x_0) = \phi(x_0) = 1$. Далее, по утверждению 8.12 для любого $v \in C$ выполнено $Q_C(v) < 1$, откуда $\psi(v) \le Q_C(v) < 1 = \psi(x_0)$. Остается проверить непрерывность ψ.

Заметим, что достаточно проверить непрерывность в нуле $0 \in \mathcal{X}$, а затем воспользоваться сдвигами. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и в качестве окрестности нуля выберем открытое множество $U_\varepsilon = (\varepsilon C) \cap (-\varepsilon C)$. Для любого $u \in U_\varepsilon$ имеем $\frac{1}{\varepsilon}(\pm u) \in C$, откуда в силу утверждения 8.12 заключаем, что $Q_C\big(\frac{1}{\varepsilon}(\pm u)\big) < 1$, т.е. $Q_C(\pm u) < \varepsilon$. Из ограниченности функционала ψ квазиполунормой Q_C следует, что $\psi(\pm u) \le Q_C(\pm u) < \varepsilon$, откуда $\big|\psi(u)\big| < \varepsilon$, что и доказывает непрерывность функционала ψ. Утверждение доказано. □

Утверждение 8.13 является частным случаем следующей теоремы Хана–Банаха об отделимости (вещественный случай).

Теорема 8.15. *Пусть $\mathcal{X}$ — вещественное линейное топологическое пространство, $A, B \subset \mathcal{X}$ — его непустые выпуклые подмножества, причем A — открыто, и $A \cap B = \emptyset$. Тогда существуют линейный непрерывный функционал $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ и вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\psi(a) < \alpha \le \psi(b) \qquad \text{для любых } a \in A \text{ и } b \in B.$$

В частности, функционал ψ не нулевой.

Доказательство. Фиксируем произвольные точки $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$ и определим множество

$$C = A - B + b_0 - a_0 = \{a - b + b_0 - a_0 : a \in A, b \in B\} \subset \mathcal{X}.$$

Лемма 8.16. *Множество $C \subset \mathcal{X}$ выпукло, открыто и содержит $0 \in \mathcal{X}$*

Доказательство. Выпуклость проверяется непосредственно: если $p_i = a_i - b_i + b_0 - a_0 \in C$, $i = 1$, 2, и $s \in [0, 1]$, то

$$sp_1 + (1-s)p_2 = s(a_1 - b_1 + b_0 - a_0) + (1-s)(a_2 - b_2 + b_0 - a_0) =$$
$$= \big(sa_1 + (1-s)a_2\big) - \big(sb_1 + (1-s)b_2\big) + b_0 - a_0$$

принадлежит C в силу выпуклости A и B. Далее, при $a = a_0$ и $b = b_0$ получаем $0 \in C$. Наконец,

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - b + b_0 - a_0)$$

открыто, как объединение открытых множеств. Лемма доказана. $\square$

Положим $x_0 = b_0 - a_0$. Так как $A \cap B = \emptyset$, точка x_0 не принадлежит C, и можно применить утверждение 8.13, согласно которому существует линейный непрерывный функционал $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ такой, что $\psi(x_0) = 1$ и $\psi(v) < 1$ при всех $v \in C$. Проверим, что ψ удовлетворяет требованиям теоремы.

Для любого $v = a - b + b_0 - a_0 \in C$ имеем

$$\psi(v) = \psi(a - b + b_0 - a_0) < 1,$$

откуда

$$\psi(a) < \psi(b) - \psi(b_0 - a_0) + 1 = \psi(b) - \psi(x_0) + 1 = \psi(b),$$

для любых $a \in A$ и $b \in B$. Положим $\alpha = \inf\{\psi(b) : b \in B\}$. Тогда, очевидно,

$$\psi(a) \le \alpha \le \psi(b) \qquad \text{для любых } a \in A \text{ и } b \in B.$$

Для завершения доказательства теоремы нам нужна следующая лемма.

Лемма 8.17. *В сделанных обозначениях $\psi(a) < \alpha$ при всех $a \in A$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е., существует $a_1 \in A$, для которого $\psi(a_1) = \alpha$. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto a_1 + tx_0 \in \mathcal{X}$. Из открытости множества A вытекает, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что $a_1 + tx_0 \in A$ при всех $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. В частности, $\psi(a_1 + \varepsilon x_0) \le \alpha$, откуда $\psi(a_1) + \varepsilon\psi(x_0) = \alpha + \varepsilon \le \alpha$, противоречие. $\square$

Теорема доказана. $\square$

Следующий результат представляет собой обобщение теоремы Хана–Банаха о отделимости на случай комплексного пространства.

Теорема 8.18. *Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное топологическое векторное пространство, $A, B \subset \mathcal{X}$ — его непустые выпуклые подмножества, причем A — открыто, и $A \cap B = \emptyset$. Тогда существуют линейный непрерывный функционал $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ и вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\operatorname{Re}\phi(a) < \alpha \le \operatorname{Re}\phi(b) \qquad \textit{для любых } a \in A \textit{ и } b \in B.$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{X}$ как вещественное топологическое векторное пространство и применим вещественную теорему 8.15, согласно которой существует $\mathbb{R}$-линейный функционал $\phi_1\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ и вещественное число α такие, что

$$\phi_1(a) < \alpha \le \phi_1(b) \qquad \text{при всех } a \in A,\ b \in B.$$

Тогда функционал $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ определенный так: $\phi(x) = \phi_1(x) - i\phi_1(x)$, $x \in \mathcal{X}$, удовлетворяет всем условиям теоремы (проверьте!). $\square$

8.3 Случай локально-выпуклых пространств

Линейное топологическое пространство $\mathcal{X}$ называется *локально выпуклым*, если для любой его точки $x \in \mathcal{X}$ и любой ее окрестности U существует выпуклое открытое множество C такое, что $x \in C \subset U$. Другими словами, топология пространства $\mathcal{X}$ обладает базой из выпуклых множеств.

Пусть $\mathcal{X}$ — линейное топологическое пространство. Его подмножество $U \subset \mathcal{X}$ называется *уравновешенным*, если для любого $x \in A$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \le 1$, выполнено $\lambda x \in A$.

Обобщенной окрестностью точки x в топологическом пространстве называется любое такое его подмножество W, что существует открытое множество U, для которого $x \in U \subset W$.

Лемма 8.19. *Любая окрестность нуля топологического векторного пространства $\mathcal{X}$ содержит уравновешенную обобщенную окрестность нуля.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывную функцию $h\colon \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $h(\lambda, x) = \lambda x$. Из непрерывности h в точке $(0,0)$ следует, что для любой окрестности U нуля в $\mathcal{X}$ найдутся такие $\varepsilon > 0$ и окрестность нуля $V \subset \mathcal{X}$, что $h(\lambda, x) \in U$ для любых λ, $|\lambda| \le \varepsilon$, и $x \in V$, то есть $\lambda V \subset U$ при всех λ, $|\lambda| \le \varepsilon$, и значит $\varepsilon V \subset \mu U$ для всех μ, $|\mu| \ge 1$. Положим

$$W = \bigcap_{|\mu| \ge 1} \mu U.$$

Ясно, что $\varepsilon V \subset W$, поэтому W — обобщенная окрестность нуля. Кроме того, если $x \in W$, то $x \in \mu U$ для всех μ,$|\mu| \ge 1$, поэтому $x \in \frac{\mu}{\lambda} U$ для всех μ, λ, где $|\mu| \ge 1$ и $0 < |\lambda| \le 1$. Последнее означает, что $\lambda x \in \mu U$ для всех таких λ и μ, т.е. $\lambda x \in W$ для любого λ, $|\lambda| \le 1$. $\square$

Топологическое векторное пространство $\mathcal{X}$ называется *локально выпуклым*, если для любой его точки $x \in \mathcal{X}$ и любой ее окрестности U существует выпуклое открытое множество C такое, что $x \in C \subset U$. Другими словами, топология пространства $\mathcal{X}$ обладает базой из выпуклых множеств.

Лемма 8.20. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально выпуклое топологическое векторное пространство. Тогда любой ее окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную обобщенную окрестность нуля.*

Доказательство. Действительно, если V — выпуклая окрестность нуля, то $V \cap (-V)$ — выпуклая уравновешенная окрестность нуля. Для комплексного пространства нужно взять множество

$$\bigcap_{|z|=1} zV$$

(это уже будет обобщенная окрестность). $\square$

Лемма 8.21. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально выпуклое топологическое векторное пространство, $C \subset \mathcal{X}$ — его компактное подмножество, и $D \subset \mathcal{X}$ — его замкнутое подмножество. Тогда множество*

$$C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\}$$

замкнуто.

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольную точку $p \notin \overline{C+D}$. Для каждого $x \in C$ множество $x + D$ замкнуто, $p \notin x + D$, поэтому существует выпуклая уравновешенная окрестность нуля $U(x)$ такая, что $p + U(x)$ не пересекается с $x + D$, откуда $p \notin x + U(x) + D$ (тут мы воспользовались уравновешенностью U). Множества $x + \frac{1}{2}U(x)$ образуют покрытие компакта C, поэтому в нем существует конечное подпокрытие $\left\{x_i + \frac{1}{2}U(x_i), i = 1, \ldots, n\right\}$. Определим выпуклую уравновешенную окрестность нуля

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \frac{1}{2}U(x_i).$$

Тогда

$$C + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2}U(x_i)\right) + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2}U(x_i) + \frac{1}{2}U(x_i)\right) \subset \bigcup_{x \in C} \left(x + U(x)\right),$$

поэтому $p \notin C + V + D$, откуда $p + V$ не пересекается с $C + D$, и значит $p \notin \overline{C+D}$, что и требовалось. □

Замечание 8.22. На самом деле лемма 8.21 справедлива в любом топологическом векторном пространстве (проверьте!).

Теорема 8.23. *Пусть $\mathcal{X}$ —локально выпуклое топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $C, D \subset \mathcal{X}$ — его непересекающиеся выпуклые подмножества, причем C — компактное, а D — замкнутое. Тогда существует непрерывное линейное отображение $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{K}$ и два числа $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ такие, что*

$$\operatorname{Re}\phi(x) \le \alpha < \beta \le \operatorname{Re}\phi(y), \qquad \text{\textit{для любых} } x \in C,\ y \in D.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $B = D - C$. Оно замкнуто по лемме 8.21. Так как множества D и C не пересекаются, то $0 \notin B$. Поэтому множество $\mathcal{X} \setminus B$ — открытая окрестность нуля. Из локальной выпуклости пространства $\mathcal{X}$ следует, что существует выпуклое открытое множество A, $0 \in A \subset \mathcal{X} \setminus B$. В частности, $A \cap B = \emptyset$. Применяя подходящую версию теоремы Хана–Банаха об отделимости (Теоремы 8.15 и 8.18), построим линейный непрерывный функционал $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ и вещественное число ρ такие, что

$$\operatorname{Re}\phi(a) < \rho \le \operatorname{Re}\phi(b) \qquad \text{для всех } a \in A \text{ и } b \in B.$$

Так как $0 \in A$ и $\phi(0) = 0$, то $\rho > 0$. Поэтому выполнено неравенство $\operatorname{Re}\phi(b) \ge \rho > 0$ при всех $b \in B$, откуда

$$\operatorname{Re}\phi(y) - \operatorname{Re}\phi(x) \ge \rho > 0 \qquad \text{для любых } x \in C,\ y \in D.$$

Положим

$$\beta = \inf_{y \in D} \operatorname{Re}\phi(y), \qquad \alpha = \sup_{x \in C} \operatorname{Re}\phi(x).$$

Тогда $\beta - \alpha \ge \rho$ и

$$\operatorname{Re}\phi(x) \le \alpha \le \beta - \rho < \beta \le \operatorname{Re}\phi(y) \qquad \text{для любых } x \in C,\ y \in D,$$

что и требовалось. □