Тема 7

Слабая сходимость вероятностных мер

Для доказательства существования оптимизационных задач часто пользуются свойством компактности соответствующего “конфигурационного” пространства. Если рассматриваемый функционал непрерывен, то существование решения вытекает из стандартного топологического результата об ограниченности непрерывной функции на компакте и достижимости минимального и максимального значений. Тем не менее, во многих случаях условие непрерывности функционала заменяется на более слабое условие полунепрерывности, и тогда от компактности может потребоваться несколько большее, а именно, чтобы каждая последовательность имела сходящуюся подпоследовательность. Последнее свойство называется *секвенциальной компактностью* и, вообще говоря, компактности не равносильно (см. ниже). Тем не менее, если топология конфигурационного пространства задается некоторой метрикой (такие пространства называются *метризуемыми*), то в этом случае компактность уже равносильна секвенциальной компактности. Чтобы добиться метризуемости, приходится вводить дополнительные ограничения. В нашем случае эти ограничения будут задаваться сепарабельностью исходных метрический пространств.

Итак, для начала мы произведем нормировку рассматриваемых мер. Напомним, что в проблеме Канторовича рассматриваются конечные борелевские меры $\lambda \in \mathcal{M}(X)$, $\mu \in \mathcal{M}(Y)$, и по ним строится семейство борелевских мер $\Pi(\lambda, \mu)$ на $X \times Y$, удовлетворяющих следующему условию: если $X \xleftarrow{\varphi^X} X \times Y \xrightarrow{\varphi^Y} Y$ — канонические проекции, то для любой меры $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$ имеем $\varphi^X_*(\pi) = \lambda$ и $\varphi^Y_*(\pi) = \mu$. Из этого граничного условия вытекает, что $\lambda(X) = \pi(X \times Y) = \mu(Y)$, так что если мы одновременно поделим меры λ и μ на $\lambda(X) = \mu(Y)$, то получим вероятностные меры, и пространство $\Pi(\lambda, \mu)$ также будет состоять из вероятностных мер. Таким образом, на пространстве вероятностных мер нам хотелось бы ввести некоторую топологию, превращающую это пространство в компакт, а в случае функционала Канторовича, не являющегося непрерывным, добиться еще и секвенциальной компактности.

Топология описанного выше типа действительно существует, она называется топологией *-слабой сходимости. Знаменитая теорема Ала́оглу (см. ниже) показывает, что пространство вероятностных мер является компактным, и если потребовать сепарабельности пространств X и Y, то — секвенциально компактным. Отметим, что теорема Алаоглу вытекает из другого знаменитого результата — теоремы Тихонова о компактности произведения произвольного числа компактов, наделенного так называемой тихоновской топологией. Ниже мы приведем оба этих результата.

Отметим также, что понятие *-слабой сходимости особенно интенсивно используется в теории топологических линейных пространств, причем соответствующая топология строится на двойственном пространстве. Таким образом, нам требуется научиться рассматривать вероятностные меры как непрерывные линейные функционалы, определенные на некотором линейном пространстве. Перейдем к деталям.

7.1 Линейные топологические пространства

Напомним, что линейное пространство V, наделенное некоторой топологией, называется *линейным топологическим пространством*, если операции сложения векторов и умножения векторов на числа являются непрерывными. Важным частным случаем линейных топологических пространств являются линейные нормированные или полунормированные пространства: норма (полунорма) $\|\cdot\|$ задает функцию расстояния $\rho(v,w)=\|v-w\|$, которая порождает соответствующую метрическую (псевдометрическую) топологию.

Как уже отмечалось выше, важным для нас частным случаем линейного нормированного пространства будет служить пространство $C_b(X)$ непрерывных ограниченных функций, определенных на метрическом пространстве X, с нормой $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}\bigl|f(x)\bigr|$.

Напомним, что непрерывные линейные отображения $\varphi\colon V\to\mathbb{R}$ называются *линейными функционалами*, множество линейных функционалов образует векторное пространство, называемое *двойственным к* V и обычно обозначаемое через V^*.

Примером непрерывного линейного функционала на $C_b(X)$ является интегрирование по конечной мере μ:

$$\mu(f)=\int_X f\,d\mu.$$

Непрерывность этого функционала вытекает из следующей цепочки:

$$\bigl|\mu(f)\bigr| = \left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu \le \sup|f|\cdot\mu(X) = \|f\|_\infty\cdot\mu(X),$$

так что функция μ является даже липшицевой.

На V^* можно определить несколько естественных топологий. *Двойственная норма на* V^* задается так:

$$\|\varphi\| = \sup\bigl\{\varphi(v) : v\in B_1(0)\bigr\}.$$

Метрическая топология, порожденная этой нормой, называется *сильной*.

Другой способ задания топологии использует поточечную сходимость, и результирующая топология называется **-слабой*. Опишем общую конструкцию не только *-слабой, но и просто слабой топологий, которая нам также пригодится в дальнейшем.

7.1.1 Общее построение слабой и *-слабой топологий

Построение топологий этого типа использует заранее заданное семейство отображений из множества в одно или несколько топологических пространств. Требуется определить наименьшую топологию, в которой все эти отображения будут непрерывными. При этом в случае, когда определяется *-слабая топология, исходное множество и семейство отображений меняются местами. Перейдем к подробностям.

7.1.2 Слабая топология

Пусть дано произвольное множество X, семейство топологических пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ с топологиями τ_α, и множество $\mathcal{F} = \{f\alpha\colon X \to X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, состоящее из произвольных отображений. Тогда для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ определена наименьшая топология $T_\alpha = f_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)$, в которой отображение f_α непрерывно. Обозначим через τ наименьшую топологию на X, содержащую все T_α. Ясно, что τ — наименьшая топология, для которой все отображения f_α непрерывны, а $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} T_\alpha$ — предбаза топологии τ. Так как каждый элемент этой предбазы имеет вид $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ для некоторого $U_\alpha \in \tau_\alpha$, то элементы соответствующей базы топологии τ — это конечные пересечения $\cap_{k=1}^n V_{\alpha_k}$, где $V_{\alpha_k} = f_\alpha^{-1}(U_{\alpha_k})$, $U_{\alpha_k} \in \tau_{\alpha_k}$. Описанная только что топология τ называется *слабой* (по отношению к семейству отображений $\mathcal{F}$).

Пример 7.1. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — произвольное семейство множеств. Тогда *произведением* $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ называется семейство всевозможных отображений $x\colon \mathcal{A} \to \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ таких, что $x(\alpha) \in X_\alpha$ при всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Обозначим через $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ естественную проекцию: $p_\alpha(x) = x(\alpha) =: x_\alpha$.

Выберем теперь в конструкции слабой сходимости множество X, равное произведению $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ топологических пространств X_α, а в качестве семейства $\mathcal{F}$ — множество всех проекций p_α. Тогда соответствующая слабая топология на X называется *тихоновской*, а множество $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ — *тихоновским произведением*. Отметим, что предбаза тихоновской топологии состоит из множеств $\Pi(U_\alpha) := \prod_{\beta\in\mathcal{A}} U_\beta$, где $U_\beta = X_\beta$ при $\beta \ne \alpha$, а $U_\alpha \in \tau_\alpha$; соответствующая база тихоновской топологии составлена из множеств $\Pi(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}) := \prod_{\beta\in\mathcal{A}} U_\beta$, где все $U_\beta = X_\beta$ при $\beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, а $U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$ при всех $i = 1, \ldots, k$.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 7.2. *Пусть X — топологическое пространство со слабой топологией, построенной по семейству отображений $\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ в топологические пространства X_α. Тогда последовательность $\{x^i\}_{i=1}^\infty \subset X$ сходится к некоторому $x \in X$, если и только если для каждого α выполняется $f_\alpha(x^i) \to f(x)$ при $i \to \infty$.*

Доказательство. Пусть сначала $x^i \to x$. Мы должны показать, что для каждого α и каждого $U_\alpha \in \tau_\alpha$, $f(x) \in U_\alpha$, существует I, для которого при всех $i \ge I$ выполняется $f_\alpha(x^i) \in U_\alpha$. Положим $V_\alpha = f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset X$, тогда V_α — открытое множество в топологии τ (так как f_α непрерывно в этой топологии). Так как $x^i \to x$, существует I такое, что для всех $i \ge I$ выполняется $x^i \in V_\alpha$. Но тогда $f_\alpha(x^i) \in U_\alpha$, что и требовалось.

Обратно, предположим, что для некоторой последовательности $\{x^i\}_{i=1}^\infty \subset X$ и точки $x \in X$ при каждом $\alpha \in \mathcal{A}$ выполняется $f_\alpha(x^i) \to f(x)$ при $i \to \infty$. Мы должны показать, что для любого $V \in \tau$ существует I, для которого при всех $i \ge I$

выполняется $x^i \in V$. Но, по определению топологии τ, существует конечный набор $\{U_{\alpha_k} \in \tau_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$ такой, что для $V_{\alpha_k} = f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \in \tau$ выполняется $x \in \cap_{k=1}^n V_{\alpha_k} \subset V$. Так как $f_\alpha(x^i) \to f(x)$ при всех α, существует I такое, что для всех $i \geq I$ выполняется $f(x^i) \in U_{\alpha_k}$ при каждом $k = 1, \ldots, n$, откуда $x^i \in V_{\alpha_k}$ при всех k и, значит, $x^i \in \cap_{k=1}^n V_{\alpha_k} \subset V$, что и требовалось. □

Следствие 7.3. *В тихоновской топологии на $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ сходимость означает покоординатную сходимость: $x^i \to x$ при $i \to \infty$, если и только если для каждого α выполняется $x_\alpha^i \to x_\alpha$.*

Теорема 7.4 (Тихонов, см. [1])**.** *Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — произвольное семейство топологических пространств, тогда их тихоновское произведение компактно, если и только если все X_α — компактны.*

Следствие 7.5. *Пусть X — произвольное множество, и $\mathcal{F}$ — равномерно ограниченное семейство функций, т.е. принимающих значения на некотором отрезке $[-M, M]$. Предположим, что $\mathcal{F}$ является замкнутым подмножеством в $\prod_{x \in X}[-M, M]$, тогда $\mathcal{F}$ — компактно.*

7.1.3 *-слабая топология

Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — некоторое семейство отображений из X в топологическое пространство Y с топологией τ_Y. Каждое $x \in X$ задает отображение $x : \mathcal{F} \to Y$ естественным образом: $x(f_\alpha) = f_\alpha(x)$. Для каждого $x \in X$ семейство $x^{-1}(\tau_Y)$ образует топологию на $\mathcal{F}$, причем из всех топологий на $\mathcal{F}$, для которых отображение x непрерывно, топология $x^{-1}(\tau_Y)$ — наименьшая. Пусть τ — наименьшая топология на $\mathcal{F}$, содержащая все топологии $x^{-1}(\tau_Y)$, т.е. τ — наименьшая топология, для которой все отображения $x \in X$ непрерывны. Ясно, что предбаза топологии τ состоит из элементов $x^{-1}(U)$, где $U \in \tau_Y$ и $x \in X$; элементы соответствующей базы представляют собой все возможные конечные пересечения вида $\cap_{k=1}^n x_k^{-1}(U_k)$, $U_k \in \tau_Y$ и $x_k \in X$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Построенная топология τ называется **-слабой*.

Предложение 7.6. *Последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ сходится в топологии τ к некоторой функции $f \in \mathcal{F}$, $f_i \to f$, тогда и только тогда, когда отображения f_i сходятся к f поточечно, т.е. для каждого $x \in X$ выполняется $f_i(x) \to f(x)$.*

Доказательство. Пусть сначала $f_i \to f$. Мы должны показать, что для каждого $x \in X$ и каждого $U \in \tau_Y$, $f(x) \in U$, существует I такое, что для любого $i \geq I$ выполняется $f_i(x) \in U$.

Положим $V = x^{-1}(U)$, тогда V — открыто в $\mathcal{F}$ (так как x — непрерывное отображение) и $f \in V$ (так как $x(f) = f(x) \in U$). Условие $f_i \to f$ влечет существование I такого, что для любого $i \geq I$ выполняется $f_i \in V$. Однако последнее означает, что $f_i(x) = x(f_i) \in U$.

Докажем обратное утверждение. Пусть для каждого $x \in X$ выполняется $f_i(x) \to f(x)$. Мы должны показать, что $f_i \to f$, т.е. для любого открытого $V \in \tau$, $f \in V$, существует I такое, что при всех $i \geq I$ имеем $f_i \in V$.

По определению, $\cup_{x\in X} x^{-1}(\tau_Y)$ — предбаза топологии τ, т.е. каждый элемент из τ содержит вместе с каждой точкой и пересечение конечного числа элементов из этого объединения. Следовательно, существуют $\{x_1,\dots,x_n\}\subset X$ и $\{U_1,\dots,U_n\}\subset\tau_Y$ такие, что $f\in\cap_{k=1}^n x_k^{-1}(U_k)\subset V$, в частности, $f(x_k)\in U_k$ при всех k.

Так как f_i сходятся к f поточечно, существует такое I, что при всех $i\geq I$ выполняется $f_i(x_k)\in U_k$ для любого k. Но это означает, что при всех $i\geq I$ выполняется $f_i\in x_k^{-1}(U_k)$ при каждом k, и, потому, $f_i\in\cap_{k=1}^n x_k^{-1}(U_k)\subset V$, что и требовалось. $\square$

Рассмотрим теперь нормированное линейное пространство V и двойственное пространство V^*. Каждое $v\in V$ можно рассматривать как линейное отображение на V^*: $v(\varphi):=\varphi(v)$ для всех $\varphi\in V^*$. Таким образом, определяется **-слабая топология на* V^*. По предложению 7.6, сходимость $\varphi_i\to\varphi$, $\varphi_i,\varphi\in V^*$, в *-слабой топологии есть поточечная сходимость линейных функционалов φ_i к функционалу φ.

Следующая теорема будет также нам полезна в дальнейшем.

Теорема 7.7 (Банах-Ала́оглу [13])**.** *Пусть V — произвольное нормированное линейное пространство, и $B_1^*(0)\subset V^*$ — единичный шар относительно двойственной нормы. Тогда шар $B_1^*(0)$ компактен в $*$-слабой топологии. Более того, если пространство V сепарабельно, то шар $B_1^*(0)$ метризуем в *-слабой топологии, т.е. на шаре $B_1^*(0)$ существует метрика, порождающая на нем *-слабую топологию.*

Следствие 7.8. *Для любого метрического пространства X, пусть*

$$B_1^*(0)=\bigl\{\varphi\in C_b(X)^*:\|\varphi\|_\infty\leq 1\bigr\}$$

— единичный шар в $C_b(X)^*$ относительно двойственной нормы. Тогда $B_1^*(0)$ компактен в *-слабой топологии.

Замечание 7.9. Теорему Банаха–Алаоглу можно вывести из следствия 7.5.

Приведем примеры, демонстрирующие, что компактность и секвенциальная компактность — понятия не равносильные.

7.2 Компактность и секвенциальная компактность.

Напомним, что топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Топологическое пространство *секвенциально компактно*, если всякая его последовательность точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Пример 7.10 (компактное пространство не обязано быть секвенциально компактным [1])**.** Рассмотрим тихоновское пространство $X=\prod_{\alpha\in[0,1]}\{0,1\}$, где топология двухточечного пространства $\{0,1\}$ — дискретная (каждая точка — открытое множество). По теореме 7.4, пространство X компактно. Напомним, что элементами пространства X являются всевозможные отображения $x\colon[0,1]\to\{0,1\}$. Рассмотрим последовательность $x^1,x^2,\dots$ в X, заданную так: $x^n(\alpha)$ равно n-ой цифре в двоичном разложении числа α (из двух разложений, в одном из которых, начиная с некоторого места, идут все нули, а в другом — единицы, мы выбираем второе). Покажем, что в последовательности x^n нет сходящихся подпоследовательностей.

Выберем произвольную подпоследовательность x^{n_k} и положим $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_{2k}}$, тогда $\alpha \in [0,1]$, $x^{n_{2k-1}}(\alpha) = 0$ и $x^{n_{2k}}(\alpha) = 1$, так что последовательность чисел $x^{n_k}(\alpha)$ расходится и, значит, сама последовательность x^{n_k} также расходится. Таким образом, X не является секвенциально компактным.

Аналогично показывается, что пространство $\prod_{\alpha\in[0,1]}[0,1]$, состоящее из всех функций $f\colon [0,1] \to [0,1]$ и наделенное топологией поточечной сходимости, является компактным, но не секвенциально компактным. Это пространство называется *тихоновским кирпичом континуального веса.*

Пример 7.11 (секвенциально компактное пространство не обязано быть компактным [27])**.** В тихоновском пространстве $X' = \prod_{\alpha\in\mathbb{R}}\{0,1\}$, где $\{0,1\}$ — дискретное пространство, рассмотрим подпространство

$$X = \Big\{x \in X' : x^{-1}(1) \text{ не более чем счетно}\Big\}.$$

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через $p'_\alpha\colon X' \to \{0,1\}$ каноническую проекции на α-ый сомножитель произведения X', и пусть $U'_r = p_r^{-1}(0)$, тогда U'_r открыто в X' (все канонические проекции непрерывны в тихоновской топологии), и

$$U_r = \{x \in X : x_r = 0\} = X \cap U'_r$$

— открыто в X. Так как каждый $x \in X$ содержит не более чем счетный набор 1, существует такое $r \in \mathbb{R}$, что $x_r = 0$ и, значит, $x \in U_r$, откуда $\{U_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ — открытое покрытие X. Заметим, что для любого конечного набора $\{r_1,\dots,r_n\} \subset \mathbb{R}$ существует $x \in X$, в котором $x_{r_i} = 1$ при всех $i = 1,\dots,n$, так что $x \notin \cup_{i=1}^n U_{r_i}$, поэтому ни одно конечное подсемейство в $\{U_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ не является покрытием X и, значит, X — некомпактно.

Рассмотрим произвольную последовательность $x^i \in X$, и пусть

$$S = \{r \in \mathbb{R} : x^i_r = 1 \text{ для некоторого } i\}.$$

Заметим, что S — не более чем счетное множество. Положим

$$X_S = \{x \in X : x_r = 0 \text{ при всех } r \notin S\},$$

тогда X_S гомеоморфно $\prod_{r\in S}\{0,1\}$, а последнее пространство или конечное дискретное, или же, при счетном S, гомеоморфно канторову множеству. Действительно, рассмотрим отображение

$$f\colon \prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\} \to [0,1],\ f\colon (x_1,x_2,\dots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{3^n},$$

тогда f задает биекцию между $\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}$ и точками канторова множества. Легко проверяется, что это отображение непрерывно, откуда вытекает гомеоморфность f как биективного непрерывного отображения из компакта в хаусдорфово пространство. Но тогда X_S — компакт и, значит, последовательность x^i содержит подпоследовательность, сходящуюся как в X_S, так и в объемлющем пространстве X. Таким образом X — секвенциально компактно.

Теорема 7.12 ([1]). *В метрическом пространстве компактность и секвенциальная компактность равносильны.*

Следствие 7.13. *Пусть V — сепарабельное нормированное линейное пространство, и $B_1^*(0) \subset V^*$ — единичный шар относительно двойственной нормы. Тогда шар $B_1^*(0)$, наделенный $*$-слабой топологией, — секвенциально компактен.*

Нам также понадобится некоторое ослабление понятия гомеоморфности. Два топологических пространства называются *секвенциально гомеоморфными*, если между ними существует биекция, уважающая (в обе стороны) сходимость последовательностей: последовательность в одном пространстве сходится к некоторому пределу тогда и только тогда, когда образ этой последовательности сходится к образу предела.

Ясно, что гомеоморфные пространства секвенциально гомеоморфны. Обратное неверно.

Пример 7.14. Пусть X — более чем счетное множество. Рассмотрим на X топологию τ_1, состоящую из пустого множества, а также дополнений до всех не более чем счетных множеств. Тогда в таком пространстве X сходящимися являются только стационарные последовательности. Действительно, для любой точки $x \in X$, в любой нестационарной последовательности x^i в X существует подпоследовательность, не содержащая точек равных x. Возьмем в качестве окрестности точки x открытое множество U, получающееся из X выкидыванием всех точек последовательности x^i, отличных от x. Тогда не существует такого номера I, что при всех $i \geq I$ точки x^i лежат в U, так что последовательность x^i расходится.

Обозначим через τ_2 дискретную топологию на X. Тогда в топологии τ_2 сходящимися также являются только стационарные последовательности. Таким образом, тождественное отображение из X в себя является секвенциальным гомеоморфизмом, но топология τ_1 отлична от дискретной, так что топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) не гомеоморфны.

Предложение 7.15 ([1]). *Отображение метрических пространств непрерывно, если и только если оно переводит каждую сходящуюся последовательность в сходящуюся. В частности, для метрических пространств гомеоморфность равносильна секвенциальной гомеоморфности.*

Секвенциальная компактность нам понадобится благодаря следующему очевидному факту.

Предложение 7.16. *Секвенциально гомеоморфные пространства секвенциально компактны или нет одновременно.*

7.3 Сепарабельность пространства непрерывных функций на метрическом компакте

Мы собираемся воспользоваться второй частью теоремы 7.7, утверждающей, что для сепарабельного линейного нормированного пространства V шар $B_1^*(0) \subset V^*$, наделенный *-слабой топологией, метризуем. Для этого нам понадобится знаменитая теорема Стоуна–Вейерштрасса. Начнем с необходимых определений.

Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций на X. Множество $\mathcal{F}$ будем называть *алгеброй*, если оно замкнуто относительно конечных линейных комбинаций (образует линейное пространство) и поточечного умножения функций. Также будем говорить, что $\mathcal{F}$ *разделяет точки*, если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, существует такая функция $f \in \mathcal{F}$, что $f(x) \neq f(y)$.

Лемма 7.17. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $C(X)$ наделено топологией равномерной сходимости, и $\mathcal{A} \subset C(X)$ — подалгебра, являющаяся замкнутым множеством и содержащая 1. Тогда*

(1) *если $f \in \mathcal{A}$, то $|f| \in \mathcal{A}$;*

(2) *если $f, g \in \mathcal{A}$, то $\min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \mathcal{A}$.*

Доказательство. (1) Так как каждая функция на компакте ограничена, существует $M > 0$ такое, что $f(x) \in [-M, M]$ при всех $x \in X$. Далее, по теореме Вейерштрасса, каждая непрерывная функция на отрезке $[-M, M]$ равномерно приближается многочленами. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon(t)$ такой, что $\big||t| - P_\varepsilon(t)\big| < \varepsilon$ при всех $t \in [-M, M]$. Но тогда и $\Big||f(x)| - P_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big| < \varepsilon$ при всех $x \in X$, т.е. функция $|f|$ сколь угодно точно приближается функциями $P_\varepsilon\big(f(x)\big)$, которые, в силу условия $f \in \mathcal{A}$ и определения алгебры, лежат в $\mathcal{A}$ при всех $\varepsilon > 0$. Так как $\mathcal{A}$ — замкнутое подмножество $C(X)$, то $|f| \in \mathcal{A}$.

(2) Достаточно заметить, что

$$\min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f+g|}{2}, \quad \max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f+g|}{2}.$$

Доказательство закончено. □

Теорема 7.18 (Стоун–Вейерштрасс, см. [21])**.** *Пусть X — компактное метрическое и $\mathcal{A} \subset C(X)$ — алгебра, содержащая 1 и различающая точки. Тогда множество $\mathcal{A}$ всюду плотно в $C(X)$.*

Доказательство. Если мы покажем, что замыкание алгебры $\mathcal{A}$ всюду плотно в $C(X)$, то тем самым мы докажем и что само $\mathcal{A}$ всюду плотно. Так как при переходе к замыканию все декларируемые свойства алгебры $\mathcal{A}$ сохраняются, включая и то, что замыкание алгебры снова алгебра (рассматриваемые алгебраические операции непрерывны), то сразу будем считать множество $\mathcal{A}$ замкнутым. Но тогда к $\mathcal{A}$ применима лемма 7.17, чем мы и воспользуемся ниже.

Выберем произвольные $\varepsilon > 0$ и функцию $f \in C(X)$. Мы должны показать, что существует $g \in \mathcal{A}$ такое, что $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Выберем две различные точки $x, y \in X$ и рассмотрим такую функцию $h \in \mathcal{A}$, для которой $h(x) \neq h(y)$. Построим по h функцию h_{xy} следующим образом:

$$h_{xy}(z) = f(x) + \big(f(y) - f(x)\big)\frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)}.$$

Тогда $h_{xy}(x) = f(x)$, $h_{xy}(y) = f(y)$ и $h_{xy} \in \mathcal{A}$.

Пусть $U_x = \{z \in X : h_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Ясно, что $x \in U_x$ и, кроме того, U_x — открытое подмножество X.

Рассмотрим открытое покрытие $\{U_x\}_{x\in X}$ пространства X, выберем из него конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$, и положим $h_y = \min\{h_{x_1y}, \ldots, h_{x_ny}\}$. Тогда $h_y \in \mathcal{A}$ в силу леммы 7.17. Кроме того, $h_y(y) = f(y)$ и $h_y(z) < f(z) + \varepsilon$ при всех $z \in X$.

Определим теперь открытые множества $V_y = \{z \in X : h_y(z) > f(y) - \varepsilon\}$, заметим, что $y \in V_y$ при всех $y \in X$, выберем из открытого покрытия $\{V_y\}_{y\in X}$ конечное подпокрытие $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_m}\}$, и положим $g(z) = \max\{h_{y_1}, \ldots, h_{y_m}\}$. Тогда $g \in \mathcal{A}$ и $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, что и требовалось. □

Следствие 7.19. *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда пространство $C(X)$ — сепарабельно.*

Доказательство. Выберем счетное всюду плотное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ и рассмотрим семейство функций $\mathcal{F} = \{1, f_1, f_2, \ldots\}$, определенных так: $f_i(x) = |xx_i|$. Покажем, что это семейство разделяет точки. Для этого выберем произвольные $x, y \in X$, положим $d = |xy| > 0$, и пусть x_i таково, что $|x_ix| < d/2$, тогда $|x_iy| > d/2$, поэтому $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — наименьшая алгебра, содержащая множество $\mathcal{F}$: алгебра $\mathcal{A}$ состоит из всевозможных конечных линейных комбинаций конечных произведений функций из $\mathcal{F}$. Из сказанного выше вытекает, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию теоремы 7.18, поэтому $\mathcal{A}$ всюду плотно в $C(X)$. Ясно, что подмножество $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ в $\mathcal{A}$, состоящее из всех рациональных конечных линейных комбинаций конечных произведений функций из $\mathcal{F}$, является всюду плотным подмножеством в $\mathcal{A}$ и, поэтому, в $C(X)$. Однако, $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ — счетное множество. □

Применим следствия 7.19 и 7.13.

Следствие 7.20. *Пусть X — компактное метрическое пространство, и $B_1^*(0) \subset C(X)^*$ — единичный шар в двойственной норме. Тогда шар $B_1^*(0)$, наделенный *-слабой топологией, — секвенциально компактен.*

7.4 Теорема Рисса

Выше мы определили понятия сильной и *-слабой топологий в общем случае, а также на пространстве $C_b(X)^*$ — двойственном к пространству непрерывных ограниченных функций $C_b(X)$, заданных на метрическом пространстве X. Кроме того, мы отметили, что каждая конечная борелевская мера $\mu \in \mathcal{M}(X)$ задает с помощью интеграла Лебега линейное отображение $\mu\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$, непрерывное в сильной (а также и в *-слабой) топологии, т.е. μ можно рассматривать как элемент пространства $C_b(X)^*$. Сильная и *-слабая топологии на пространстве $C_b(X)^*$ позволяют определить соответствующие сходимости конечных борелевских мер. Если топология задается двойственной нормой, то соответствующая сходимость называется *сильной* и обозначается через $\mu_i \to \mu$. Если же топология *-слабая, то и сходимость в ней называется **-слабой* и обозначается через $\mu_i \Rightarrow \mu$. В силу предложения 7.6, сходимость $\mu_i \Rightarrow \mu$ равносильна поточечной сходимости, т.е. тому, что $\mu_i(f) \to \mu(f)$ для каждой функции $f \in C_b(X)$. Все только что сказанное можно распространить и на знакопеременные меры.

Возникает естественный вопрос: какая часть пространства $C_b(X)^*$ задается мерами (знакопеременными мерами)? Для компактного X ответ дается знаменитой теоремой Рисса.

Функционал $\Phi \in C_b(X)^*$ назовем *неотрицательным*, если для любой $f \in C_b(X)$, $f \geq 0$, выполняется $\Phi(f) \geq 0$.

Теорема 7.21 (Рисс [22])**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда для каждого функционала $\Phi \in C_b(X)^* = C(X)^*$ существует и единственна борелевская знакопеременная мера $\mu \in \mathcal{M}_\pm(X)$ такая, что для всех $f \in C(X)$ выполняется*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu.$$

При этом, функционал Φ неотрицательный, если и только если $\mu \in \mathcal{M}(X)$. В частности, семейство $\mathcal{P}(X)$ вероятностных мер можно рассматривать как множество всех неотрицательных функционалов $\Phi \in C(X)^*$, для которых выполняется условие $\Phi(1) = 1$, где под 1 мы понимаем функцию на X, тождественно равную 1.

7.5 Теорема Портманто́ о *-слабой сходимости мер

Следующий результат фактически приводит ряд определений, эквивалентных *-слабой сходимости. Чтобы его сформулировать, введем еще одно понятие. Пусть X — метрическое пространство и $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Подмножество $A \subset X$ называется *μ-непрерывным*, если $\mu(\partial A) = 0$, где ∂A обозначает границу множества A.

Теорема 7.22 (“Portmanteau”[1], А.Д.Александров [11])**.** *Пусть X — произвольное метрическое пространство, и $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда следующие пять условий эквивалентны*:

(1) $\mu_n \Rightarrow \mu$;

(2) $\mu_n(f) \to \mu(f)$ *для всех* $f \in C_{ub}(X)$;

(3) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *для всех замкнутых множеств* $F \subset X$;

(4) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ *для всех открытых множеств* $G \subset X$;

(5) $\mu_n(A) \to \mu(A)$ *для всех μ-непрерывных множеств* $A \subset X$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Это вытекает из предложения 7.6 и того, что $C_{ub}(X) \subset C_b(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Для пустого F имеем $\mu_n(F) = \mu(F) = 0$, так что осталось рассмотреть случай непустого F.

[1] Как отмечается в [25], Биллингсли [12] приписывает эту теорему некоему Jean-Pierre Portmanteau, отсылая к статье *Espoir pour l'ensemble vide?* (перевод: “Надежда на пустое множество?”), Annales de l'Université de Felletin, CXLI, 1915, pp. 322–325, хотя ни математика Jean-Pierre Portmanteau, ни университета в Felletin никогда не существовало. Калленберг [15] обнаружил вариант этой теоремы у А.Д.Александрова [11].

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть ψ_F^ε — непрерывная ε-аппроксимация множества F, определенная формулой (6.1). Тогда, в силу леммы 6.3, $\psi_F^\varepsilon \in C_{ub(X)}$, и для ψ_F^ε выполняются неравенства (6.2).

Из монотонности меры μ_n получаем, что $\mu_n(F) = \mu_n(I_F) \le \mu_n(\psi_F^\varepsilon)$, откуда

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\psi_F^\varepsilon).$$

Так как $\psi_F^\varepsilon \in C_{ub}(X)$, то, по предположению, $\mu_n(\psi_F^\varepsilon) \to \mu(\psi_F^\varepsilon)$ при $n \to \infty$, поэтому, учитывая монотонность меры μ, заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(\psi_F^\varepsilon) \le \mu\big(B_\varepsilon(F)\big).$$

Из предложения 6.10 вытекает, что $\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu\big(B_{1/k}(F)\big)$, откуда

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F).$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) получается переходом к дополнениям.

(3)&(4) $\Rightarrow$ (5). Пусть $B = \operatorname{Int} A$ — внутренность A, а $C = \bar A$ — замыкание A. Тогда для B выполняется (4), а C удовлетворяет (3), поэтому

$$\mu(B) \le \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) \le \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \le \mu(C).$$

Так как $\mu(\partial A) = 0$, то $\mu(B) = \mu(C)$, откуда и вытекает требуемое.

(5) $\Rightarrow$ (1). Выберем произвольную функцию $f \in C_b(X)$ и покажем, что $\mu_n(f) \to \mu(f)$. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ положим $F_t = f^{-1}(t)$. Так как $\{F_t\}$ — дизъюнктное семейство, то $\mu(F_t) > 0$ может быть лишь для не более чем счетного множества T таких t. Отсюда вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$, для которого множество $\{t_k = a_\varepsilon + k\varepsilon\}_{k\in\mathbb{Z}}$ не пересекает T. Выберем для каждого $\varepsilon > 0$ какое-нибудь из множеств $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, не пересекающих T, и обозначим его через T_ε.

Далее, положим $B_{k,\varepsilon} = f^{-1}\big([t_k, t_{k+1})\big)$, $t_k, t_{k+1} \in T_\varepsilon$. Так как f — непрерывная функция, то $\partial B_{k,\varepsilon} \subset F_{t_k} \cup F_{t_{k+1}}$, поэтому все множества $B_{k,\varepsilon}$ являются μ-непрерывными. Кроме того, в силу ограниченности функции f, при заданном $\varepsilon > 0$ лишь конечное число $B_{k,\varepsilon}$ отличны от $\emptyset$, поэтому если $I_{k,\varepsilon}$ обозначает индикаторную функцию множества $B_{k,\varepsilon}$, то функция $I_\varepsilon = \sum_k t_{k+1} I_{k,\varepsilon}$ является простой (лишь конечное число индикаторных функций $I_{k,\varepsilon}$ отличны от нуля), причем $f \le I_\varepsilon \le f + \varepsilon$. Отсюда, в силу монотонности меры и аддитивности интеграла Лебега, заключаем, что $\mu_n(f) \le \mu_n(I_\varepsilon) \le \mu_n(f) + \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и $\mu(f) \le \mu(I_\varepsilon) \le \mu(f) + \varepsilon$.

Так как все множества $B_{k,\varepsilon}$ являются μ-непрерывными, то, по предположению, $\mu_n(I_\varepsilon) \to \mu(I_\varepsilon)$ при $n \to \infty$, откуда

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(f) \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n(I_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(I_\varepsilon) = \mu(I_\varepsilon) \le \mu(f) + \varepsilon,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(f) \ge \liminf_{n\to\infty} \mu_n(I_\varepsilon) - \varepsilon = \lim_{n\to\infty} \mu_n(I_\varepsilon) - \varepsilon = \mu(I_\varepsilon) - \varepsilon \ge \mu(f) - \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что $\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f)$. $\square$

7.6 Существование решения задачи Канторовича: случай компактов

Теорема 7.23. *Пусть X и Y — компактные метрические пространства, и пусть $c\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда для любых вероятностных мер $\lambda\in\mathcal{P}(X)$ и $\mu\in\mathcal{P}(Y)$ существует оптимальное решение $\pi\in\Pi(\lambda,\mu)$ задачи Канторовича.*

Доказательство. Так как разным конечным мерам, лежащим в $\mathcal{M}(X\times Y)$, соответствуют разные функционалы из $C(X\times Y)^*$ в силу теоремы 6.13, множество $\Pi(\lambda,\mu)$ можно рассматривать как подмножество в $C(X\times Y)^*$, что мы и будем делать.

Как мы уже отмечали, каждая мера $\pi\in\Pi(\lambda,\mu)$ удовлетворяет следующему условию: $\pi(X\times Y)=\lambda(X)=\mu(Y)$, поэтому, в силу того, что меры λ и μ — вероятностные, такой же является и мера π.

Вычислим для меры $\pi\in\Pi(\lambda,\mu)$ ее норму $\|\pi\|_\infty$. Рассмотрим произвольную функцию $f\in C(X\times Y)$, $\|f\|_\infty\le 1$, тогда $f\le 1$, поэтому $\pi(f)\le\pi(1)=\pi(X\times Y)=1$. Так как $\|1\|_\infty=1$ и $\pi(1)=1$, то $\|\pi\|_\infty=1$, поэтому π лежит в единичной сфере $S_1^*(0)\subset C(X\times Y)^*$ с центром в начале координат. В частности, $\Pi(\lambda,\mu)$ содержится в шаре $B_1^*(0)$, который, по следствию 7.20, является секвенциально компактным в $*$-слабой топологии.

Так как c — непрерывная функция на компакте $X\times Y$, то она — ограничена, поэтому, в силу пункта (2) теоремы 5.15, для каждой меры $\pi\in\Pi(\lambda,\mu)$ выполняется

$$\int_{X\times Y} c\,d\pi\ge\min_{(x,y)\in X\times Y}c(x,y)\int_{X\times Y}d\pi=\min_{(x,y)\in X\times Y}c(x,y),$$

поэтому функционал Канторовича $K(\pi)=\int_{X\times Y}c\,d\pi$, заданный на множестве $\Pi(\lambda,\mu)$, ограничен снизу. Пусть $\pi_n\in\Pi(\lambda,\mu)$ — последовательность мер, на которой функционал Канторовича стремится к своей точной нижней грани. В силу $*$-слабой секвенциальной компактности шара $B_1^*(0)$, в этой последовательности существует подпоследовательность, $*$-слабо сходящаяся к некоторому функционалу $\pi\in B_1^*(0)$. Без ограничения общности будем сразу считать, что такой подпоследовательностью является сама последовательность π_n.

Покажем, что функционал π соответствует ограниченной мере. Для этого, в соответствии с теоремой 7.21, мы должны проверить, что для любой неотрицательной функции $f\in C(X\times Y)$ выполняется $\pi(f)\ge 0$. Для каждого n имеем $\pi_n(f)\ge 0$ по той же теореме 7.21. Кроме того, по определению $*$-слабой сходимости, выполняется $\pi_n(f)\to\pi(f)$, откуда $\pi(f)\ge 0$.

Покажем теперь, что конечная мера π — вероятностная. Так как все меры π_n — вероятностные, то $\pi_n(X\times Y)=\pi_n(1)=1$. Но $\pi_n\Rightarrow\pi$, поэтому $\pi_n(1)\to\pi(1)$, откуда $\pi(X\times Y)=\pi(1)=1$, что и требовалось.

Покажем, что для меры π выполняются граничные условия, т.е. $\pi\in\Pi(\lambda,\mu)$. Пусть $X\xleftarrow{\varphi^X}X\times Y\xrightarrow{\varphi^Y}Y$ — канонические проекции. Мы должны показать, что $\varphi^X_*\pi=\lambda$ и $\varphi^Y_*\pi=\mu$. Проверим первое равенство (второе проверяется аналогично). По следствию 6.12, достаточно проверить, что для любого замкнутого множества $F\subset X$ выполняется $\pi(F\times Y)=\lambda(F)$. По условию, имеем $\pi_n(F\times Y)=\lambda(F)$ для всех n, а также

$\pi_n(G \times Y) = \lambda(G)$ для всех n и всех открытых G. С другой стороны, по пункту (3) теоремы 7.22, выполняется

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \pi_n(F \times Y) = \limsup_{n\to\infty} \pi_n(F \times Y) \le \pi(F \times Y),$$
$$\lambda\big(U_{1/k}(F)\big) = \lim_{n\to\infty} \pi_n\big(U_{1/k}(F) \times Y\big) = \liminf_{n\to\infty} \pi_n\big(U_{1/k}(F) \times Y\big) \ge \pi\big(U_{1/k}(F) \times Y\big).$$

По предложению 6.10, имеет

$$\lambda(F) = \lim_{k\to\infty} \lambda\big(U_{1/k}(F)\big) \ge \lim_{k\to\infty} \pi\big(U_{1/k}(F) \times Y\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \pi\big(U_{1/k}(F \times Y)\big) = \pi(F \times Y) \ge \lambda(F),$$

следовательно, $\lambda(F) = \pi(F \times Y)$.

Итак, граничные условия для π выполняются, поэтому $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$.

Так как c — непрерывная функция, т.е. $c \in C(X \times Y)$, то, в силу предложения 7.6, имеем $\pi_n(c) \to \pi(c)$. Иными словами,

$$\int_{X\times Y} c\, d\pi = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} c\, d\pi_n = \inf_{\pi' \in \Pi(\lambda,\mu)} \int_{X\times Y} c\, d\pi',$$

т.е. π — решение проблемы Канторовича. □