Тема 6

Конечные борелевские меры на метрических пространствах.

В начале нашего курса мы уделили особое внимание проблемам Монжа и Канторовича, в которых пространства X и Y совпадают, а стоимость транспортировки задается метрикой. В случае пространств $X = Y$ более общего вида естественно ограничиться мерами, согласованными с метрикой, т.е. мерами, определенными на борелевской σ-алгебре пространства X. Эту σ-алгебру будем обозначать через $\mathcal{B}_X$, а каждую меру (возможно, знакопеременную) на таком $\mathcal{B}_X$ будем называть *борелевской*. Как правило, все борелевские меры будут конечными. Семейство конечных борелевских мер на X будем обозначать через $\mathcal{M}(X)$, семейство знакопеременных борелевских мер — через $\mathcal{M}_\pm(X)$, а семейство вероятностных мер — через $\mathcal{P}(X)$. Заметим, что $\mathcal{M}_\pm(X)$ является линейным пространством, $\mathcal{M}(X)$ замкнуто относительно линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами, а $\mathcal{P}(X)$ — относительно линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами, в сумме равными 1.

6.1 Предварительные определения, соглашения и результаты

Для метрического пространства X, если не сказано противное, расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Для каждого $s > 0$, $r \geq 0$, $x \in X$ и непустого $A \subset X$ определим

- *открытый шар с центром в x и радиусом s*: $U_s(x) = \big\{y \in X : |xy| < s\big\}$;
- *замкнутый шар с центром в x и радиусом r*: $B_r(x) = \big\{y \in X : |xy| \leq r\big\}$;
- *сферу с центром в x и радиусом r*: $S_r(x) = \big\{y \in X : |xy| \leq r\big\}$;
- *расстояние от x до A*: $|xA| = |Ax| = \inf\big\{|xa| : a \in A\big\}$;
- *открытую s-окрестность A*: $U_s(A) = \big\{y \in X : |Ay| < s\big\}$;

- *замкнутую r-окрестность* A: $B_r(A) = \big\{y \in X : |Ay| \le r\big\}$;
- *диаметр* $\operatorname{diam} A$ *множества* A: $\operatorname{diam} A = \sup\big\{|aa'| : a, a' \in A\big\}$; также положим $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.

Имеют место следующие простые утверждения.

Предложение 6.1. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x, y \in X$, $r \ge 0$, $s, t > 0$, $A \subset X$ — непустое, $F \subset X$ — замкнутое и $G \subset X$ открытое. Тогда*

(1) $U_t\big(U_s(A)\big) \subset U_{s+t}(A)$;

(2) $\partial U_s(x)$ *и* $\partial B_s(x)$ *не связаны никаким включением, а* $\partial U_s(x) \subset S_s(x)$ *и* $\partial B_r(x) \subset S_r(x)$, *причем оба предыдущих включения могут быть строгими*;

(3) $|Ax| + |xy| \ge |Ay|$, *так что функция* $\rho_A(x) = |Ax|$ *является* 1*-липшицевой и, значит, равномерно непрерывной*;

(4) $\operatorname{diam} U_s(x) \le \operatorname{diam} B_s(x) \le 2s$;

(5) $\operatorname{diam} U_s(A) \le \operatorname{diam} B_s(A) \le \operatorname{diam} A + 2s$;

(6) $F = \cap_{\varepsilon>0} U_\varepsilon(F) = \cap_{n=1}^\infty U_{1/n}(F)$, *т.е. каждое замкнутое F равно пересечению счетного числа открытых множеств* (*подмножества, представимые в виде пересечения счетного числа открытых множеств, называют* G_δ***-подмножествами***);

(7) $G = \cup_{n=1}^\infty F_n$, *где каждое $F_n \subset G$ замкнуто* (*подмножества, представимые в виде объединения счетного числа замкнутых множеств, называют* F_σ***-подмножествами***).

Определим $C_b(X)$ как линейное пространство непрерывных и ограниченных функций на X. В качестве нормы на $C_b(X)$ "по умолчанию" рассматривают функцию $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\big|f(x)\big|$; соответствующее расстояние будем обозначать через ρ_∞. Нам также понадобится пространство ограниченных *равномерно* непрерывных функций на X, которое мы обозначим через $C_{ub}(X)$, причем введем на нем те же норму и расстояние. Отметим, что $C_{ub}(X)$ содержит все ограниченные липшицевы функции. Отметим также, что для компактного X пространства $C_b(X)$ и $C_{ub}(X)$ совпадают.

Равномерно непрерывные функции удобно определяются в терминах полезного нам для дальнейшего понятия колебания функции. Пусть f — произвольная функция на множестве Y. Тогда *колебанием* $\omega(f, Y)$ *функции* f называется $\sup_{y\in Y} f(y) - \inf_{y\in Y} f(y)$. Ясно, что для любых $y, y' \in Y$ выполняется $\big|f(y) - f(y')\big| \le \omega(f, Y)$. Также легко видеть, что если Y — метрическое пространство, и f — непрерывная функция, то $\omega\big(f, U_r(y)\big) \to 0$ при $r \to 0$. Более того, функция f равномерно непрерывна на метрическом пространстве Y тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $Z \subset Y$, $Z \ne \emptyset$, $\operatorname{diam} Z < \delta$, выполняется $\omega(f, Z) < \varepsilon$.

Приведем пример равномерно непрерывной (на самом деле липшицевой) ограниченной функции, которая неоднократно встретится в дальнейших построениях.

Конструкция 6.2. Пусть A — непустое подмножество метрического пространства X. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и определим функцию $\psi_A^\varepsilon \colon X \to \mathbb{R}$ так:

$$\psi_A^\varepsilon(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{|xA|}{\varepsilon}\right\}. \tag{6.1}$$

Ясно, что ψ_A^ε непрерывна, равна 1 на A, равна 0 вне $U_\varepsilon(A)$, а в остальных местах ее значения лежат на отрезке $[0,1]$, поэтому

$$I_A(x) \le \psi_A^\varepsilon(x) \le I_{U_\varepsilon(A)}(x) \le I_{B_\varepsilon(A)}(x) \tag{6.2}$$

при всех $x \in X$, где I_A обозначает индикатор множества A. Функцию ψ_A^ε назовем *непрерывной ε-аппроксимацией множества A*.

Лемма 6.3. *Непрерывная ε-аппроксимация ψ_A^ε непустого множества $A \subset X$ является $1/\varepsilon$-липшицевой и, значит, равномерно непрерывной.*

Доказательство. Проверим, что $\bigl|\psi_A^\varepsilon(x) - \psi_A^\varepsilon(y)\bigr| \le |xy|/\varepsilon$.

Если x и y лежат вне $U_\varepsilon(A)$, то $\psi_A^\varepsilon(x) - \psi_A^\varepsilon(y) = 0$ и неравенство имеет место.

Если только одно из x, y, скажем y, лежит вне $U_\varepsilon(A)$, то $\psi_A^\varepsilon(y) = 0$ и $|xA| \le \varepsilon$, так что $\psi_A^\varepsilon(x) = 1 - |xA|/\varepsilon \ge 0$, поэтому мы должны проверить, что

$$\bigl|\psi_A^\varepsilon(x) - \psi_A^\varepsilon(y)\bigr| = \psi_A^\varepsilon(x) = 1 - \frac{|xA|}{\varepsilon} \le \frac{|xy|}{\varepsilon}.$$

Последнее равносильно $\varepsilon \le |xA| + |xy|$, но это так в силу того, что $|xA| + |xy| \ge |yA| \ge \varepsilon$, так как y лежит вне $U_\varepsilon(A)$.

Наконец, предположим, что x и y лежат в $U_\varepsilon(A)$, тогда

$$\bigl|\psi_A^\varepsilon(x) - \psi_A^\varepsilon(y)\bigr| = \left|\left(1 - \frac{|xA|}{\varepsilon}\right) - \left(1 - \frac{|yA|}{\varepsilon}\right)\right| = \left|\frac{|xA| - |yA|}{\varepsilon}\right| \le |xy|/\varepsilon,$$

что и требовалось. □

6.2 Сепарабельные метрические пространства

Подмножество топологического пространства называется *всюду плотным*, если в любом открытом множестве имеются точки из этого подмножества. Иными словами, замыкание такого подмножества совпадает со всем пространством. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное всюду плотное подмножество. Метрическое пространство называется *польским*, если оно полное и сепарабельное.

Предложение 6.4. *Каждое компактное метрическое пространство X сепарабельно.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем конечную $(1/n)$-сеть S_n, тогда $\cup_{n=1}^\infty S_n$ — счетное всюду плотное подмножество X. □

Предложение 6.5. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, тогда последовательность $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых шаров любого фиксированного радиуса с центрами в точках из любого счетного всюду плотного подмножества X покрывает X. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества X борелевскими множествами A_i диаметра меньше ε.*

Доказательство. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное подмножество X, существующее в силу сепарабельности X, и $r > 0$. Положим $U_i = U_r(s_i)$ и покажем, что последовательность $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет утверждению предложения. Выберем произвольную точку $x \in X$, тогда существует $s_i \in S$, для которого $|xs_i| < r$, но тогда $x \in U_i$.

Разбиение $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно построить так: выберем $r < \varepsilon/2$ и положим $A_1 = U_1$, а для $i > 1$ пусть $A_i = U_i \setminus \cup_{k<i} U_k$. Так как $A_i \subset U_i$ и A_i не пересекает U_k при $k < i$, то $A_i \cap A_k = \emptyset$ для любых $k < i$, что доказывает дизъюнктность последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. С другой стороны, ясно, что $\cup_{k\le i} U_k = \cup_{k\le i} A_k$, поэтому $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие X. Осталось заметить, что $\operatorname{diam} A_i \le \operatorname{diam} U_i \le 2r < \varepsilon$. □

Рассмотрим теперь подмножество сепарабельного пространства. Верно ли, что оно само является сепарабельным? Оказывается, в случае общих топологических пространств ответ отрицательный.

Пример 6.6 (Плоскость Зоргенфре́я [16], [23]). Пусть Y — топологическое пространство, совпадающее как множество с вещественной прямой $\mathbb{R}$, на которой выбрана следующая топология: в качестве базы рассматриваются полуинтервалы вида $[a, b)$. Положим $X = Y \times Y$. Тогда базой топологии на X будут полупрямоугольники $[a, b) \times [c, d)$. Заметим, что счетное множество $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ является всюду плотным на X, так что X — сепарабельное топологическое пространство. Положим $L = \big\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\big\}$, тогда в индуцированной на L топологии каждая точка — открытое множество, поэтому L — дискретное континуальное пространство и, значит, L не является сепарабельным.

Тем не менее, в метрическом пространстве все обстоит иначе.

Предложение 6.7. *Всякое подмножество сепарабельного метрического пространства само сепарабельно.*

Доказательство. Результат мгновенно вытекает из следующей леммы.

Лемма 6.8. *Если топологическое пространство имеет счетную базу, то оно сепарабельно. Если метрическое пространство сепарабельно, то оно имеет счетную базу. В частности, для метрического пространства наличие счетной базы и сепарабельность равносильны.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство X имеет счетную базу $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. Выберем в каждом U_i произвольную точку s_i и покажем, что последовательность $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотна в X. Действительно, мы должны проверить, что для любой $x \in X$ и любой ее открытой окрестности U существует $s_i \in U$, но это так потому, что $\mathcal{B}$ — база и, значит, для некоторого i выполняется $x \in U_i \subset U$, откуда $s_i \in U_i \subset U$.

Пусть метрическое пространство X сепарабельно и S — счетное всюду плотное подмножество X. Рассмотрим семейство $\mathcal{B}$ всех открытых шаров всех положительных рациональных радиусов с центрами в точках из S. Тогда для каждого открытого $U \subset X$ и каждой точки $x \in U$ существует некоторое $r > 0$ такое, что $U_r(x) \subset U$; существует $s \in S$ такое, что $|xs| < r/2$; существует рациональное число q такое, что $|xs| < q < r/2$. Тогда шар $U_q(s)$ лежит в $\mathcal{B}$, содержит x и содержится в U. Таким образом, $\mathcal{B}$ — счетная база. $\square$

Вернемся к доказательству предложения. Выберем произвольное $Y \subset X$. В силу леммы 6.8, пространство X обладает счетной базой $\mathcal{B}$. Но $\mathcal{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ — счетная база в Y, поэтому, в силу той же леммы 6.8, пространство Y сепарабельно. $\square$

Замечание 6.9. Лемма 6.8 перестанет быть верной, если заменить метрическое пространство на топологическое. Действительно, плоскость Зоргенфрея $X \times X$, хоть и сепарабельное пространство, но не имеет счетной базы: рассмотрим произвольный прямоугольник $[a, b) \times [c, d)$ и представим его в виде объединения открытых множеств U_i. Одно из них, обозначим его U_{ac}, содержит точку (a, c), причем для всех остальных $(x, y) \in U_{ac}$ выполняется $x \ge a$ и $y \ge c$. Заметим, что при разных парах (a, c) и (a', c') множества U_{ac} и $U_{a'c'}$ разные. Таким образом, каждая база содержит континуальное семейство элементов.

Приведем ряд важных для дальнейшего свойств рассматриваемых конечных борелевских мер. Напомним, что множество всех таких мер на метрическом пространстве X мы обозначили через $\mathcal{M}(X)$.

6.3 Начальные свойства конечных борелевских мер

Начнем с результата, мгновенно вытекающего из пункта (6) предложения 6.1 и пункта (4) теоремы 4.10.

Предложение 6.10. *Для произвольного непустого замкнутого подмножества F метрического пространства X и меры $\mu \in \mathcal{M}(X)$ выполняется*

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu\bigl(B_{1/k}(F)\bigr) = \lim_{k\to\infty} \mu\bigl(U_{1/k}(F)\bigr).$$

Теорема 6.11. *Каждая мера $\mu \in \mathcal{M}(X)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $A \in \mathcal{B}_X$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутое $F \subset X$ и открытое $G \subset X$, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$. Иными словами,*

$$\mu(A) = \sup\bigl\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ — замкнуто в } X\bigr\},$$
$$\mu(A) = \inf\bigl\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ — открыто в } X\bigr\}.$$

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то положим $F = G = A$. Пусть теперь $A \ne \emptyset$ замкнуто. Тогда, в силу предложения 6.10, для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 0$ такое, что $\mu\bigl(U_r(A) \setminus A\bigr) < \varepsilon$. Положив $F = A$ и $G = U_r(A)$, получим искомую пару.

Обозначим через $\mathcal{G}$ семейство всех измеримых A, для которых выполняется утверждение теоремы. В силу сказанного выше, $\mathcal{G}$ содержит все замкнутые множества. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\mathcal{G}$ является σ-алгеброй, откуда сразу получим $\mathcal{G} = \mathcal{B}_X$ в силу минимальности борелевской σ-алгебры.

Проверим, что множество $\mathcal{G}$ замкнуто относительно счетных объединений. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$, тогда для каждого n существуют замкнутое $F_n \subset X$ и открытое $G_n \subset X$, для которых $F_n \subset A_n \subset G_n$ и $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Положим $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $F' = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Тогда G — открытое множество и $F' \subset A \subset G$. Заметим, что

$$G \setminus F' = \cup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus F_n),$$

отсюда, в силу пунктов (1) и (2) теоремы 4.10, имеем

$$\mu(G \setminus F') = \mu\big(\cup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2.$$

Из пункта (5) теоремы 4.10 вытекает, что существует n_0, для которого при $F = \cup_{n=1}^{n_0} F_n$ выполняется $\mu(F' \setminus F) < \varepsilon/2$. Заметим, что множество F замкнуто и $F \subset A$.

Наконец, $\mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus F') + \mu(F' \setminus F) < \varepsilon$. Таким образом, $\mathcal{G}$ замкнуто относительно счетных объединений.

Покажем теперь, что $\mathcal{G}$ замкнуто относительно дополнений. Пусть $A \in \mathcal{G}$ и $\varepsilon > 0$, тогда существуют замкнутое $F \subset X$ и открытое $G \subset X$, для которых $F \subset A \subset G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Положим $A' = X \setminus A$, $F' = X \setminus G$ и $G' = X \setminus F$, тогда $F' \subset A' \subset G'$ и $G' \setminus F' = G \setminus F$, поэтому $\mu(G' \setminus F') < \varepsilon$. Таким образом, $A' \in \mathcal{G}$, что и завершает доказательство. $\square$

Следствие 6.12. *Меры $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(X)$ совпадают, если и только если $\lambda(A) = \mu(A)$ для всех замкнутых (всех открытых) множеств $A \subset X$.*

Напомним, что, в силу замечания 4.4, каждое непрерывное отображение топологических пространств является измеримым. Кроме того, по предложению 5.11, каждая ограниченная измеримая функция интегрируема. Поэтому для всех функций $f \in C_b(X)$ определен интеграл Лебега $\int_X f\,d\mu$, который мы для краткости будем обозначать через $\mu(f)$. Тем самым, меру μ можно рассматривать, в силу пункта (1) теоремы 5.15, как линейное отображение $\mu\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$, $\mu\colon f \mapsto \mu(f)$.

Теорема 6.13. *Меры $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(X)$ совпадают, если и только если для любой $f \in C_{ub}(X)$ выполняется $\lambda(f) = \mu(f)$, т.е. ограничения отображений λ и μ на линейное подпространство $C_{ub}(X) \subset C_b(X)$ равны.*

Доказательство. Единственное нетривиальное утверждение: из совпадения значений мер на $C_{ub}(X)$ вытекает совпадение этих мер. Для этого, в силу следствия 6.12, достаточно проверить совпадение значений этих мер на всех замкнутых подмножествах X. Выберем произвольное непустое замкнутое подмножество $F \subset X$ и для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим его непрерывную ε-аппроксимацию ψ_F^{ε}, заданную формулой (6.1). В силу неравенств (6.2) и монотонности интеграла Лебега, имеем $\lambda(F) \le \lambda(\psi_F^{\varepsilon}) = \mu(\psi_F^{\varepsilon}) \le \mu\big(B_{\varepsilon}(F)\big)$, поэтому, в силу предложения 6.10, получаем $\lambda(F) \le \mu(F)$. Аналогично доказывается и обратное неравенство, следовательно, $\lambda(F) = \mu(F)$. $\square$

Для конечной борелевской меры на сепарабельном метрическом пространстве X определено наименьшие замкнутое подмножество полной меры.

Теорема 6.14. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Тогда существует и единственно замкнутое подмножество $C_\mu \subset X$, удовлетворяющее следующим свойствам:*

(1) $\mu(C_\mu) = \mu(X)$,

(2) *если $F \subset X$ — замкнутое, причем $\mu(F) = \mu(X)$, то $C_\mu \subset F$.*

Более того, C_μ — это множество всех таких точек $x \in X$, что для всех открытых $U \ni x$ выполняется $\mu(U) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{U} = \big\{U \subset X : U$ — открыто, и $\mu(U) = 0\big\}$ и положим $U_\mu = \cup_{U \in \mathcal{U}} U$. В силу предложения 6.7, подпространство U_μ является сепарабельным, поэтому, в силу предложения 6.5, существует счетное покрытие $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ множества U_μ открытыми в U_μ и, в силу открытости U_μ, открытыми в X множествами. Но тогда $\mu(U_\mu) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(U_i) = 0$, так что $\mu(U_\mu) = 0$. Положим $C_\mu = X \setminus U_\mu$, тогда $\mu(C_\mu) = \mu(X)$.

Пусть F — произвольное замкнутое подмножество X такое, что $\mu(F) = \mu(X)$, тогда $X \setminus F$ открыто и $\mu(X \setminus F) = 0$, поэтому $X \setminus F \in \mathcal{U}$, откуда $X \setminus F \subset U_\mu$, так что $C_\mu \subset F$. Таким образом, C_μ равно пересечению всех замкнутых $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, поэтому C_μ однозначно определено.

Для завершения доказательства, выберем произвольное $x \in C_\mu$ и открытое $U \ni x$, тогда если $\mu(U) = 0$, то $U \subset U_\mu$ и, значит, $x \notin C_\mu$, противоречие. Если же $x \in X \setminus C_\mu$, то $x \in U_\mu$ и, значит, для открытого $U_\mu \subset X$, содержащего x, выполняется $\mu(U_\mu) = 0$. Последнее и завершает доказательство предложения. □

Определение 6.15. Замкнутое множество C_μ из теоремы 6.14 называется *носителем меры* $\mu \in \mathcal{M}(X)$.