Тема 5

Интеграл Лебега. Общая постановка проблем Монжа и Канторовича.

При обобщении проблем Монжа и Канторовича на случай бесконечных пространств вероятностные функции превращаются в вероятностные меры, а соответствующие оптимизационные функционалы из сумм — в интегралы Лебега. В данной главе мы приведем определения интеграла Лебега и расскажем об основных свойствах этого интеграла. В конце данного раздела мы сформулируем проблемы Монжа и Канторовича в наиболее общем виде.

5.1 Определение интеграла Лебега

Имеется много эквивалентных определений интеграла Лебега. Нам будет достаточно одного из них, являющегося основным в [2].

Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Обозначим через $\mathcal{S}(X)$ семейство всех простых функций на X. По теореме 4.7, множество $\mathcal{S}(X)$ образует алгебру, замкнуто относительно деления на простые функции, нигде не обращающиеся в 0, и если $f \in \mathcal{S}(X)$, то $|f| \in \mathcal{S}(X)$.

Пусть теперь на X задана **конечная** мера μ. Определим на пространстве $\mathcal{S}(X)$ отображение Ψ_μ так: если $f = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}$, где $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ — разбиение X, то

$$\Psi_\mu(f) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i).$$

Величину $\Psi_\mu(f)$ принято обозначать через $\int_X f\,d\mu$ и называть *интегралом Лебега*. Иногда бывает необходимо явно указать, по какой переменной идет интегрирование, скажем, если интегрируемая функция зависит от параметра. В этом случае пишут, например, так: $\int_X f(x)\,d\mu(x)$.

Для каждого $A \in \mathcal{A}$ определен *интеграл Лебега по множеству* A:

$$\int_A f\, d\mu = \int_X (f\, I_A)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap A).$$

Замечание 5.1. Ясно, что если $A = X$, то $\int_A f\, d\mu$ совпадает с $\Psi_\mu(f)$.

Замечание 5.2. Несложно проверяется, что если $\{B_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}$ — покрытие X, и $f = \sum_{j=1}^m d_j I_{B_j}$, то интегралы Лебега от f как по X, так и по любому $A \in \mathcal{A}$, задаются одними и теми же формулами, а именно, $\sum_{j=1}^m d_j\, \mu(B_j)$ и $\sum_{j=1}^m d_j\, \mu(B_j \cap A)$ соответственно.

Приведем ряд очевидных свойств интеграла Лебега от простых функций.

Теорема 5.3. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой, $f, g \in \mathcal{S}(X)$, $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда*

(1) *интеграл Лебега $\int_A$ является линейным функционалом на $\mathcal{S}(X)$;*

(2) *если $f \le g$, то $\int_A f\, d\mu \le \int_A g\, d\mu$;*

(3) $\left|\int_A f\, d\mu\right| \le \int_A |f|\, d\mu(x)$;

(4) $\int_A |f|\, d\mu \le \sup_{x\in A}\bigl|f(x)\bigr|\, \mu(A)$;

(5) *если $A \cap B = \emptyset$, то $\int_{A\sqcup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$.*

Из пунктов (1) и (3) теоремы 5.3 легко выводится, что отображение $f \mapsto \int_X |f|\, d\mu$ является полунормой на $\mathcal{S}(X)$ (полунорма отличается от нормы тем, что может принимать нулевые значения на ненулевых векторах). Эту полунорму мы обозначим через $\|\cdot\|_\mu$. Таким образом, на $\mathcal{S}(X)$ определена псевдометрика $\rho_\mu(f, g) = \|f - g\|_\mu$.

Определение 5.4. Последовательность $f_n \in \mathcal{S}(X)$ назовем *фундаментальной в среднем*, если она фундаментальна относительно псевдометрики ρ_μ.

Далее, из пунктов (1) и (3) теоремы 5.3 мгновенно вытекает, что если $f_n \in \mathcal{S}(X)$ — фундаментальная в среднем последовательность, то $\int_X f_n\, d\mu$ — фундаментальная числовая последовательность, так что существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$.

Определим теперь интеграл Лебега для более широкого класса функций. При этом, мы разрешим функциям быть бесконечными и даже быть неопределенным на некотором подмножестве меры нуль.

Определение 5.5. Пусть f — произвольная функция, определенная на почти всем измеримом пространстве X. Будем говорить, что f *интегрируема по Лебегу относительно меры μ* или *μ-интегрируема*, если для нее найдется фундаментальная в среднем последовательность простых функций, которая почти всюду сходится к f. Множество всех μ-интегрируемых функций будем обозначать через $\mathcal{L}(\mu)$.

Лемма 5.6 ([2], лемма 2.3.4). *Предположим, что последовательность $f_n \in \mathcal{S}(X)$ фундаментальна в среднем, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого множества $D \in \mathcal{A}$, $\mu(D) < \delta$, и всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\int_D |f_n|\, d\mu \leq \varepsilon.$$

Лемма 5.6, вместе с теоремой 4.21, приводят к следующему результату.

Предложение 5.7 ([2], лемма 2.4.2). *Пусть для $f \in \mathcal{L}(\mu)$ имеется две фундаментальных в среднем последовательности $f_n, g_n \in \mathcal{S}(X)$ таких, что $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f \overset{\text{п.в.}}{\leftarrow} g_n$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu.$$

Из предложения 5.7 вытекает, что для каждой μ-интегрируемой функции f корректно определено (конечное) число $\int_X f\, d\mu$, равное пределу интегралов Лебега произвольной фундаментальной последовательности простых функции, почти всюду сходящейся к f.

Определение 5.8. Число $\int_X f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$, где f_n — фундаментальная в среднем последовательность простых функций, сходящаяся почти всюду к μ-интегрируемой функции f, называется *интегралом Лебега функции f по мере μ*. Для $A \in \mathcal{A}$ и $f \in \mathcal{L}(\mu)$ положим $\int_A f\, d\mu = \int_X (f\, I_A)\, d\mu$ и назовем *интегралом Лебега по множеству A*.

Замечание 5.9. Интеграл Лебега по множеству $A \in \mathcal{A}$ можно определить так же, как и интеграл Лебега по множеству X: достаточно заменить пространство $(X, \mathcal{A}, \mu)$ на его подпространство $(A, \mathcal{A}_A, \mu|_A)$, при этом величина интеграла не изменится.

Предложение 5.10. *Каждая функция $f \in \mathcal{L}(\mu)$ является почти всюду измеримой, и для нее существует измеримая функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$. Каждая такая g также μ-интегрируема, и $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$. Если при этом f определена на всем X, а мера μ — полная, то сама f измерима.*[1]

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{L}(\mu)$, существует фундаментальная в среднем последовательность $f_n \in \mathcal{S}(X)$ такая, что $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f$. По предложению 4.12, существует $Y \in \mathcal{U}_\mu(X)$, входящее в область определения функции f и такое, что $f_n|_Y \to f|_Y$. По теореме 4.7, функция $f|_Y$ измерима, тем самым, доказано первое утверждение.

Так как $\mu(X \setminus Y) = 0$, то, по предложению 4.18, функцию $f|_Y$ можно доопределить до μ-измеримой функции g, заданной на всем X. Но тогда также $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} g$, следовательно, $g \in \mathcal{L}(\mu)$ и

$$\int_X g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu,$$

тем самым, второе утверждение тоже доказано.

[1] В [2], определение 2.1.10, предлагается расширить понятие измеримой функции, добавив функции, определенные и измеримые почти всюду. Мы не будем следовать этой рекомендации, так как для наших целей в этом нет необходимости.

Для доказательства третьего утверждения предположим, что f определена на всем X, а мера μ — полная. Для определенных выше f_n и Y ограничение $f|_Y$ измеримо. Но тогда, по предложению 4.18, функция f также измерима. □

Множество всех функций, определенных на почти всем пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и почти всюду измеримых, обозначим через $\mathcal{F}(\mu)$. Подмножество в $\mathcal{F}(\mu)$, состоящее из всех почти всюду ограниченных функций, обозначим через $\mathcal{F}_b(\mu)$. Отметим, что $\mathcal{F}(\mu)$ и $\mathcal{F}_b(\mu)$ замкнуты относительно линейных комбинаций и произведения функций. Отметим также, что, в силу предложения 5.10, имеем $\mathcal{L}(\mu) \subset \mathcal{F}(\mu)$. Обратное, конечно, неверно (приведите пример). Тем не менее, если потребовать дополнительно ограниченность функции f почти всюду, то этого оказывается вполне достаточно для интегрируемости.

Предложение 5.11 ([2], обобщение пункта (ii) теоремы 2.5.1)**.** *Имеем* $\mathcal{F}_b(\mu) \subset \mathcal{L}(\mu)$.

Связь между интегралами Лебега и Римана

Имеет место следующий результат.

Теорема 5.12 ([2], теореме 2.10.1)**.** *Если функция интегрируема по Риману на отрезке в собственном смысле, то она интегрируема на этом отрезке и по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега от этой функции равны.*

Замечание 5.13. Обратное неверно: если f — функция Дирихле, равная 1 в рациональных точках отрезка $[0, 1]$, и 0 в иррациональных, то f интегрируема по Лебегу, так как отличается от 0 на множестве меры 0 (в рациональных точках), он она не интегрируема по Риману.

Интеграл Лебега для знакопеременной меры

Если вместо меры μ взять знакопеременную меру, то также можно определить интеграл Лебега:

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-.$$

5.2 Свойства интеграла Лебега

Многие из сформулированных в предыдущем разделе свойств интеграла Лебега от простых функций переносятся и на функции общего вида. Приведем соответствующие результаты. Доказательства можно найти в [2].

Для начала, обобщим понятие точной верхней и нижней граней, перенеся их на функции из $\mathcal{F}(\mu)$. Отметим, что для произвольной функции f, заданной на произвольном множестве X, точные верхняя и нижняя грани могут быть определены так:

$$\sup f = \inf\Big\{a \in \mathbb{R} : f^{-1}\big[(a, \infty)\big] = \emptyset\Big\}, \quad \inf f = \sup\Big\{a \in \mathbb{R} : f^{-1}\big[(-\infty, a,)\big] = \emptyset\Big\},$$

где мы полагаем $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$.

Если теперь $f \in \mathcal{F}(\mu)$, то положим

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\Big\{a \in \mathbb{R} : \mu\Big(f^{-1}\big[(a,\infty)\big]\Big) = 0\Big\},$$
$$\operatorname{ess\,inf} f = \sup\Big\{a \in \mathbb{R} : \mu\Big(f^{-1}\big[(-\infty,a,)\big]\Big) = 0\Big\}.$$

Замечание 5.14. Легко видеть, что $f \in \mathcal{F}_b(\mu)$, если и только если конечны $\operatorname{ess\,inf} f$ и $\operatorname{ess\,sup} f$. Кроме того, $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, если и только если $\operatorname{ess\,sup}|f| = 0$.

Теорема 5.15. *Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ — пространство с конечной мерой, $f,g \in \mathcal{L}(\mu)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $A,B \in \mathcal{A}$. Тогда*

(1) $\alpha f + \beta g, |f| \in \mathcal{L}(\mu)$;

(2) *если* $f|_A \overset{\textit{п.в.}}{\leq} g|_A$, *то* $\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu$;

(3) $\left|\int_A f\,d\mu\right| \leq \int_A |f|\,d\mu$;

(4) *если функция f ограничена на почти всем A, т.е. $f|_A \in \mathcal{F}_b(\mu|_A)$, то* $\int_A |f|\,d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}\big|f|_A\big|\,\mu(A)$;

(5) *если* $A \cap B = \emptyset$, *то* $\int_{A\sqcup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$;

(6) *для каждого $R > 0$ выполняется*

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f(x)\big| \geq R\big\}\Big) \leq \frac{1}{R}\int_X |f|\,d\mu$$

(неравенство П.Л.Чебышёва, [2], теорема 2.5.3);

в частности, $\int_X |f|\,d\mu = 0$, *если и только если* $f \overset{\textit{п.в.}}{=} 0$

([2], следствие 2.5.4).

Замечание 5.16. Как мы отметили выше, множества $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{F}(\mu)$ и $\mathcal{F}_b(\mu)$ замкнуты относительно линейных комбинаций, тем не менее, они не обязаны быть линейными пространствами. Действительно, для любого f, лежащего в одном из этих множеств, функция $f - f$, претендующая быть нулем, определена там же, где и f, так что, вообще говоря, ее область определения может не совпадать с X и, значит, таких "нулей" может быть много.

Далее, отображение $f \mapsto \int_X |f|\,d\mu$, определенное на $\mathcal{L}(\mu)$, удовлетворяет всем свойствам полунормы, однако, формально говоря, не может считаться полунормой, так как $\mathcal{L}(\mu)$ не является линейным пространством. Тем не менее, как и выше мы будем обозначать эту функцию через $\|\cdot\|_\mu$. Отметим, что эта функция продолжает одноименную полунорму, определенную нами выше на $\mathcal{S}(X)$.

То, что $\mathcal{L}(\mu)$ не является линейным пространством, не мешает функции $(f,g) \mapsto \|f-g\|_\mu$ быть псевдометрикой на $\mathcal{L}(\mu)$. Эту псевдометрику мы обозначим через ρ_μ (она также продолжает одноименную псевдометрику, определенную выше на $\mathcal{S}(X)$). Кроме того, фундаментальность и сходимость последовательности функций $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ по псевдометрике ρ_μ к функции $f \in \mathcal{L}(\mu)$ будем, как и выше, называть *фундаментальностью* и *сходимостью в среднем по мере* μ; такую сходимость будем обозначать через $f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows} f$.

Далее, функция $f \mapsto \operatorname{ess\,sup}|f|$, определенная на $\mathcal{F}_b(\mu)$, также удовлетворяет всем свойством полунормы, но не является полунормой по аналогичным соображениям. Тем не менее, эту функцию мы будем обозначать через $\|\cdot\|_{\mathrm{ess}}$. Снова отображение $(f,g) \mapsto \|f-g\|_{\mathrm{ess}}$ является псевдометрикой на $\mathcal{F}_b(\mu)$, которую мы обозначим через ρ_{ess}.

Теорема 5.17 ([2], теорема 2.7.3, следствие 2.7.4, теорема 4.1.3)**.** *Пусть* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *— пространство с конечной мерой. Тогда*

(1) *псевдометрические пространства* $\mathcal{L}(\mu)$ *и* $\mathcal{F}_b(\mu)$ *— полные*;

(2) *если* $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ *— последовательность, фундаментальная в среднем, и* f *— функция, определенная на почти всем* X*, причем* $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f$*, то* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *и* $f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows} f$*.*

Замечание 5.18. Отметим также, что для $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ условие $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$ равносильно $\rho_\mu(f,g) = 0$ (пункт (6) теоремы 5.15), и $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$ влечет $\|f\|_\mu = \|g\|_\mu$. Аналогично, для $f, g \in \mathcal{F}_b(\mu)$ условие $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$ равносильно $\rho_{\mathrm{ess}}(f,g) = 0$ (замечание 5.14), и $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$ влечет $\|f\|_{\mathrm{ess}} = \|g\|_{\mathrm{ess}}$.

Замечание 5.19. Предложение 5.10 позволяет по каждой функции $f \in \mathcal{L}(\mu)$ построить определенную и измеримую на всем X функцию $g \in \mathcal{L}(\mu)$ такую, что $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$. Аналогично можно поступить и с функциями из $\mathcal{F}(\mu)$ и $\mathcal{F}_b(\mu)$. Все это дает возможность, без потери информации, ограничиться подмножествами $\mathcal{L}(\mu)_g$, $\mathcal{F}(\mu)_g$ и $\mathcal{F}_b(\mu)_g$ в $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{F}(\mu)$ и $\mathcal{F}_b(\mu)$ соответственно, состоящими из тех функций, которые определены и измеримы на всем X. Эти подмножества уже являются линейными пространствами (замечание 4.13 и пункт (1) теоремы 5.15), а функции $\|\cdot\|_\mu$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{ess}}$, ограниченные соответственно на $\mathcal{L}(\mu)_g$ и $\mathcal{F}_b(\mu)_g$, — полунормами. Более того, в силу сказанного выше, $\mathcal{S}(X)$ и $\mathcal{L}(\mu)_g$ всюду плотны в $\mathcal{L}(\mu)$ относительно псевдометрики ρ_μ, а $\mathcal{F}_b(\mu)_g$ всюду плотно в $\mathcal{F}_b(\mu)$ относительно псевдометрики ρ_{ess}. Пространство $\mathcal{F}_b(\mu)_g$ с полунормой $\|\cdot\|_{\mathrm{ess}}$ обозначается через $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Следующая конструкция позволяет по псевдометрике построить соответствующее метрическое пространство, отождествив элементы, находящиеся на нулевом расстоянии.

Конструкция 5.20. Пусть X — произвольное множество и ρ — некоторая псевдометрика на X. Введем на X отношение φ следующим образом: $x, y \in X$ находятся в отношении φ, если и только если $\rho(x,y) = 0$. Тогда φ — эквивалентность. Обозначим через X/ρ множество классов эквивалентности φ, а для каждого $x \in X$ через $[x]$ будем обозначать содержащий x элемент из X/ρ. Тогда для любых $x' \in [x]$ и $y' \in [y]$ выполняется $\rho(x', y') = \rho(x,y)$, поэтому мы корректно определим расстояние между $[x]$ и $[y]$, если положим его равным $\rho(x,y)$. Это расстояние также обозначим через ρ. Легко видеть, что ρ является метрикой на множестве X/ρ.

Приложение 5.21. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой. Тогда, в силу сказанного выше, ρ_μ является метрикой на множестве $\mathcal{L}(\mu)/\rho_\mu = \mathcal{L}(\mu)_g/\rho_\mu$, а ρ_{ess} — метрикой на множестве $\mathcal{F}_b(\mu)/\rho_{\text{ess}} = \mathcal{F}_b(\mu)_b/\rho_{\text{ess}} = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\rho_{\text{ess}}$. Полученные метрические пространства будем обозначать через $L(\mu)$ и $L^\infty(\mu)$ соответственно.

Замечание 5.22. По замечанию 5.18, эквивалентности на $\mathcal{L}(\mu)$ и $\mathcal{F}_b(\mu)$, заданные псевдометриками ρ_μ и ρ_{ess}, такие же, как и заданные условием $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$. Последнее дает возможность применить еще одну конструкцию и показать, что $L(\mu)$ и $L^\infty(\mu)$ — линейные пространства.

Конструкция 5.23. Пусть $\mathcal{L}$ — произвольное линейное пространство, и φ — эквивалентность, для которой выполняется следующее свойство: для любых $x, y \in \mathcal{L}$, любых $x' \in [x]$, $y' \in [y]$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем $\alpha x' + \beta y' \in [\alpha x + \beta y]$. Тогда на фактор-пространстве $L := \mathcal{L}/\varphi$, состоящем из классов эквивалентности φ, корректно определены линейные комбинации $\alpha[x] + \beta[y] := [\alpha x + \beta y]$, что превращает L в линейное пространство.

Приложение 5.24. Пусть теперь $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой. Рассмотрим на линейных пространствах $\mathcal{L}(\mu)_g$ и $\mathcal{F}_b(\mu)_g$ отношения эквивалентности, заданные условием $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$. Легко видеть, что если $f \overset{\text{п.в.}}{=} f'$ и $g \overset{\text{п.в.}}{=} g'$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется $\alpha f + \beta g \overset{\text{п.в.}}{=} \alpha f' + \beta g'$. Отсюда, а также из замечания 5.18 и конструкции 5.23 вытекает, что $L(\mu)$ и $L^\infty(\mu)$ — линейные пространства.

Следствие 5.25 ([2], теорема 2.7.3)**.** *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой. Тогда $L(\mu)$ и $L^\infty(\mu)$ — полные нормированные пространства.*

Замечание 5.26. Следствие 5.25 верно и для более общих мер, см. [2], следствие 3.7.5.

В следующей теореме мы собрали основные факты об интегрируемых функциях, в частности, о предельных переходах под знаком интеграла.

Теорема 5.27. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой, тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) ***Абсолютная непрерывность интеграла Лебега**: если $f \in \mathcal{L}(\mu)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого множества $D \in \mathcal{A}$, $\mu(D) < \delta$, выполняется*

$$\int_D |f|\, d\mu \le \varepsilon$$

([2], теорема 2.5.7).

(2) ***Теорема Лебега о мажорируемой сходимости**: пусть $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ — некоторая последовательность, а f — функция, определенная на почти всем X такая, что $f_n \overset{п.в.}{\to} f$ и существует $\Phi \in \mathcal{L}(\mu)$, для которой $|f_n| \overset{п.в.}{\le} \Phi$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, и*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

([2], теорема 2.8.1).

(3) ***Теорема Беппó Лéви о монотонной сходимости***: *предположим, что для некоторой последовательности* $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ *выполняется* $f_1 \overset{\text{п.в.}}{\leq} f_2 \overset{\text{п.в.}}{\leq} \cdots$ *и* $\sup_n \int_X f_n \, d\mu < \infty$*, в частности, существует* $Y \in \mathcal{U}_\mu(X)$ *такое, что* $f_1|_Y \leq f_2|_Y \leq \cdots$ *и, значит, для каждого* $x \in Y$ *существует предел* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*. Тогда* $f \in \mathcal{L}(\mu)$*,* $f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows} f$*, и*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

([2], теорема 2.8.2).

(4) ***Теорема Фату***: *пусть для некоторой последовательности* $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ *выполняется* $f_n \geq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$*, а* f *— функция, определенная на почти всем* X *и такая, что* $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f$ *и* $\sup_n \int_X f_n \, d\mu \leq K < \infty$*. Тогда* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *и*

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq K$$

([2], теорема 2.8.3).

Теорема 5.28 (теорема Фубини [2], теорема 3.4.4)**.** *Пусть* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *и* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *— пространства с конечными мерами, и* $f \in \mathcal{L}(\mu \otimes \nu)$*. Положим* $f_x(y) = f(x, y) = f_y(x)$*, тогда*

(1) *существует* $X' \in \mathcal{U}_\mu(X)$ *такое, что при всех* $x \in X'$ *выполняется* $f_x \in \mathcal{L}(\nu)$*, и если* $\Phi(x) := \int_Y f_x(y) \, d\nu(y)$*, то* $\Phi \in \mathcal{L}(\mu)$*;*

(2) *существует* $Y' \in \mathcal{U}_\nu(Y)$ *такое, что при всех* $y \in Y'$ *выполняется* $f_y \in \mathcal{L}(\mu)$*, и если* $\Psi(y) := \int_X f_y(x) \, d\mu(x)$*, то* $\Psi \in \mathcal{L}(\nu)$*;*

(3) *кроме того,*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \Phi \, d\mu := \int_X \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \\ &= \int_Y \Psi \, d\nu := \int_Y \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \, d\nu(y).\end{aligned}$$

Теорема 5.29 ("о замене переменных", [2], теорема 3.6.1)**.** *Пусть* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *— пространство с конечной мерой,* $(Y, \mathcal{B})$ *— измеримое пространство,* $f\colon X \to Y$ *— измеримое отображение, и* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *— измеримая функция. Тогда* $g \in \mathcal{L}(f_*\mu)$*, если и только если* $g \circ f \in \mathcal{L}(\mu)$*. При этом*

$$\int_X (g \circ f) \, d\mu = \int_Y g \, d(f_*\mu).$$

5.3 Проблемы Монжа и Канторовича: общая постановка

Пусть $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ и $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ — пространства с конечными мерами. Для наглядности, можно представлять, что в пространстве X распределен некоторый ресурс (скажем, нефть, газ, другие полезные ископаемые и т.д.), а λ задает распределение этого ресурса (например, для каждого измеримого $A \subset X$ величина $\lambda(A)$ равна массе ресурса, размещенного в области A). Требуется переместить ресурс в Y и расположить его там в соответствии с мерой μ. При этом, из всех возможных перемещений нужно найти те, которые минимизируют затраты на перемещение.

Проблема Монжа

Предполагая, что весь ресурс, расположенный в месте $x \in X$, целиком перемещается в место $y \in Y$, будем задавать такую транспортировку измеримым отображением $T\colon X \to Y$. При этом естественно потребовать сохранение массы, т.е. что каждое множество $B \in \mathcal{B}$ получается из $A = T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ той же самой массы: $\lambda(A) = \mu(B)$; в частности, $\lambda(X) = \mu(Y)$. Иными словами, T должно удовлетворять условию $\mu = T_*\lambda$. Множество всех таких T обозначим через $\mathcal{T}(\lambda, \mu)$. Каждое $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ называется *транспортировкой*. Если $\lambda(X) = \mu(Y) > 0$, то, без ограничения общности, эти меры можно нормализовать, поделив на $\lambda(X) = \mu(Y)$, тогда полученные меры будут вероятностными.

Затраты на перемещение будем задавать измеримой функцией $c\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, которая описывает стоимость перемещения единицы ресурса. Будем предполагать, что эта функция "достаточно хорошая", т.е. для каждой транспортировки $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$, если $f_T(x) := c\big(x, T(x)\big)$, то $f_T \in \mathcal{L}(\lambda)$. *Проблема Монжа* состоит в нахождении *оптимальной транспортировки*, минимизирующей полную стоимость

$$M(T) := \int_X c\big(x, T(x)\big)\, d\lambda(x).$$

Проблема Канторовича

Если в проблеме Монжа вся масса, сосредоточенная в каждой точке $x \in X$, перемещается в $T(x)$, то в проблеме Канторовича эту массу разрешается распределять по всему пространству Y. Таким образом, каждому $x \in X$ приписывается мера π_x на Y, задающая распределение перенесенной массы из x. Это можно формализовать так.

На измеримом пространстве $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ рассмотрим меру π такую, что для каждых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ выполняется

$$\pi(A \times Y) = \lambda(A) \text{ и } \pi(X \times B) = \mu(B). \tag{5.1}$$

Первое равенство говорит о том, что вся масса $\lambda(A)$, находившаяся в $A \subset X$, была распределена с помощью π по всему Y. Второе равенство сообщает, что масса $\mu(B)$, которая по плану должна оказаться в $B \subset Y$, с помощью π будет собрана со всего X. Будем говорить, что λ и μ — *граничные меры для* π, а равенства (5.1) — *граничные условия для* π. Отметим, что, во введенных выше обозначениях, если через φ^X и φ^Y

обозначить проекции $X \times Y$ соответственно на X и Y, то граничные условия (5.1) можно переписать так: $\lambda = \varphi_*^X(\pi)$ и $\mu = \varphi_*^Y(\pi)$. Множество всех π, удовлетворяющих граничным условиям (5.1), обозначим через $\Pi(\lambda, \mu)$, а каждое $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$ будем называть *транспортным планом.*

Снова рассмотрим измеримую функцию стоимости $c\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, предполагая на сей раз, что для каждого $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$ выполняется $c \in \mathcal{L}(\pi)$; при этом, полную стоимость реализации плана $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$ зададим так:

$$K(\pi) = \int_{X \times Y} c\, d\pi.$$

Проблема Канторовича состоит в поиске *оптимального транспортного плана* $\pi \in \Pi(\lambda, \mu)$, минимизирующего полную стоимость $K(\pi)$.

Замечание 5.30. Для каждой транспортировки $T \in \mathcal{T}(\lambda, \mu)$ положим $\pi_T(A \times B) = \lambda\bigl(A \cap T^{-1}(B)\bigr)$, тогда $\pi_T(A \times Y) = \lambda\bigl(A \cap T^{-1}(Y)\bigr) = \lambda(A)$ и $\pi_T(X \times B) = \lambda\bigl(X \cap T^{-1}(B)\bigr) = \lambda\bigl(T^{-1}(B)\bigr) = \mu(B)$. Отображение π_T можно продолжить до меры на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ так: $\pi_T = (\mathrm{id} \times T)_* \lambda$, где $\mathrm{id} \times T\colon X \to X \times Y$, $(\mathrm{id} \times T)(x) = \bigl(x, T(x)\bigr)$. Тогда получим $\pi_T \in \Pi(\lambda, \mu)$. Далее, теорема 5.29, в которой $f = \mathrm{id} \times T$ и $g = c$, утверждает, что $c \in \mathcal{L}(\pi_T)$, если и только если для функции $f_T(x) := c\bigl(x, T(x)\bigr)$ выполняется $f_T \in \mathcal{L}(\lambda)$; при этом,

$$\int_X c\bigl(x, T(x)\bigr)\, d\lambda(x) = \int_{X \times Y} c\, d\pi_T.$$

Таким образом, проблема Монжа может рассматриваться как проблема Канторовича, в которой минимизация происходит не по всему пространству $\Pi(\lambda, \mu)$, а по его части, составленной из транспортных планов вида $(\mathrm{id} \times T)_* \lambda$.