Тема 4

Базовые понятия теории меры.

В дальнейшем мы будем иметь дело с пространствами более общего вида, в частности, с бесконечными. Основным инструментом при изучении оптимизационных транспортных проблем будет понятие меры. Мы начнем с напоминания основных определений и фактов.

Каждая мера представляет собой функцию, заданную на подмножествах объемлющего пространства. Частными случаями меры являются длина, площадь и объем подмножеств евклидова пространства. По смыслу, эти функции неотрицательны и аддитивны на непересекающихся подмножествах. Кроме того, они не зависят от расположения данного подмножества в пространстве, т.е. не меняются при движениях. Знаменитый парадокс Банаха–Тарского [10], в соответствии с которым сферу в $\mathbb{R}^3$ можно разбить на 5 частей, а затем переместить эти части так, что из них сложатся две сферы того же радиуса, иллюстрирует принципиальную невозможность распространить такое измерение площади на все подмножества.

Имеется два выхода из создавшегося положения. В одном из них мы ограничиваем семейство подмножеств, на которых определена мера, при этом удается сохранить свойство аддитивности даже на счетных дизъюнктных семействах. Другой подход — определить меру на всех подмножествах, однако за счет ослабления свойства аддитивности, заменив ее на субаддитивность (мера объединения, даже дизъюнктного, не превосходит суммы мер элементов, формирующих это объединение). В предыдущих наших курсах [7] мы рассказывали про геометрическую теорию меры, в которой реализован второй подход. На сей раз будем следовать первому.

4.1 Измеримые пространства

Пусть X — произвольное множество. Через 2^X будем обозначать множество всех подмножеств в X. Семейство $\mathcal{A} \subset 2^X$ подмножеств X называется *сигма-алгеброй* или *σ-алгеброй*, если оно содержит X, а также замкнуто относительно счетных объединений и перехода к дополнению:

- $X \in \mathcal{A}$;

- если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$;
- если $A \in \mathcal{A}$, то $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Замечание 4.1. Так как в последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементы, соответствующие разным i, могут совпадать, второй пункт говорит также, что каждая σ-алгебра замкнута относительно конечных объединений.

Замечание 4.2. Каждая σ-алгебра замкнута относительно не более чем счетных пересечений.

Множество X, на котором задана некоторая σ-алгебра $\mathcal{A}$, называется *измеримым пространством*, а все $A \in \mathcal{A}$ — *измеримыми множествами*. Фактически, измеримое пространство — это пара $(X, \mathcal{A})$.

Пример 4.3. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство и Y — произвольное подмножество X. Положим

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\},$$

тогда $\mathcal{A}_Y$ — сигма-алгебра на Y, которую будем называть *индуцированной*. В дальнейшем, мы всегда будем рассматривать подмножества измеримого пространства именно с такими индуцированными σ-алгебрами. Легко видеть, что $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}$, если и только если $Y \in \mathcal{A}$; для таких Y пары $(Y, \mathcal{A}_Y)$ будем называть (*измеримыми*) *подпространствами в* X.

Легко видеть, что пересечение произвольного числа σ-алгебр — снова некоторая σ-алгебра, поэтому наименьшая σ-алгебра $\sigma(R)$, содержащая данное множество $R \subset 2^X$, совпадает с пересечением всех σ-алгебр, содержащих R. В частности, если в качестве R взять некоторую топологию, то соответствующая $\sigma(R)$ называется *борелевской σ-алгеброй, соответствующей топологии* R, а элементы этой σ-алгебры — *борелевскими подмножествами* X. Ясно, что борелевская σ-алгебра $\sigma(R)$ содержит не только все открытые, но и все замкнутые множества топологии R, и может быть также определена как наименьшая σ-алгебра, содержащая все замкнутые множества. Если в качестве топологического пространства X рассматривается вещественная прямая $\mathbb{R}$, арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ или, более общо, метрическое пространство с метрической топологией, то, если не оговорено противное, такое X всегда будет также считаться измеримым пространством, наделенным борелевской σ-алгеброй, порожденной стандартной топологией.

4.2 Измеримые отображения, свойства измеримых функций

Отображение $f\colon X \to Y$ между измеримыми пространствами называется *измеримым*, если прообразы всех измеримых в Y множеств измеримы в X.

Замечание 4.4. Если X и Y — топологические пространства, снабженные борелевскими σ-алгебрами, то каждое непрерывное отображение — измеримо. Обратное, конечно же, в общем случае не верно. Приведем пример.

Пусть $f(x)$ — функция на $\mathbb{R}$, равная 0 при $x < 0$ и 1 при $x \geq 0$. Тогда f разрывна. Однако, прообраз любого $A \subset \mathbb{R}$, в частности, борелевского, равен или пустому множеству, или $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, или $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, или $\mathbb{R}$. В каждом из этих случаев прообраз является борелевским множеством и, значит, f измерима.

Имеет место следующий тривиальный результат.

Предложение 4.5. *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ — две произвольные σ-алгебры на множестве X, а $\mathcal{C} \supset \mathcal{D}$ — две произвольные σ-алгебры на множестве Y. Пусть $f \colon X \to Y$ — измеримое отображение из $(X, \mathcal{A})$ в $(Y, \mathcal{C})$, тогда f также является измеримым отображением из $(X, \mathcal{B})$ в $(Y, \mathcal{D})$.*

Нас особенно будет интересовать случай *измеримых функций*, определенных на некотором измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, т.е. измеримых отображений из X в вещественную прямую, наделенную стандартной борелевской σ-алгеброй.

Важным примером измеримых функций являются простые функции, которые строятся так. Напомним, что *индикатором I_Y подмножества Y множества X* называется функция, равная 1 на Y и 0 на $X \setminus Y$. Ясно, что индикатор I_Y, определенный для подмножества измеримого пространства, является измеримой функцией, если и только если Y измеримо. Рассмотрим теперь произвольное конечное разбиение $\{A_i\}_{i=1}^n$ измеримого пространства X на измеримые множества A_i, и для $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ определим функцию $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}(x)$. Каждая такая функция и называется *простой*. Иными словами, простая функция на измеримом пространстве — это произвольная измеримая функция, принимающая лишь конечное число разных значений.

Замечание 4.6. (1) Если $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ — покрытие X, и $c_1, \ldots, c_n$ — вещественные числа, то $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ также является простой функцией на X.

(2) Если Y — произвольное (не обязательно измеримое) подмножество X, и f — простая функция на X, то $f|_Y$ является простой на $(Y, \mathcal{A}_Y)$.

В следующей теореме описываются наиболее важные свойства измеримых функций.

Теорема 4.7 ([2], теорема 2.1.5)**.** *Пусть f, g, f_n, $n \in \mathbb{N}$, — измеримые функции на пространстве $(X, \mathcal{A})$. Тогда*

(1) *для любой измеримой функции $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ композиция $\varphi \circ f$ измерима, в частности, это верно для любой непрерывной функции φ;*

(2) *для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ измерима, таким образом, множество измеримых функций на пространстве X является линейным пространством;*

(3) *функция $f\,g$ измерима, таким образом, множество измеримых функций на пространстве X является алгеброй;*

(4) *если $g \neq 0$, то функция f/g измерима;*

(5) *если для любого $x \in \mathbb{R}$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, то функция $F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ измерима;*

(6) *если при каждом* $x \in \mathbb{R}$ *величина* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *конечна, то функция* $s(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *измерима;*

(7) *если при каждом* $x \in \mathbb{R}$ *величина* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *конечна, то функция* $i(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *измерима.*

4.3 Меры

Через $[0,\infty]$ обозначим объединение множества неотрицательных вещественных чисел и символа ∞ с естественными алгебраическими операциями и отношением порядка. Множество $[0,\infty]$ естественным образом наделяется топологией отрезка, так что для него определено понятие (стандартной) борелевской σ-алгебры. Аналогично определяется множество $[-\infty,\infty]$, получающееся из $\mathbb{R}$ добавлением двух символов ∞ и $-\infty$ положительной и отрицательной бесконечностей.

Функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ называется *мерой* на измеримом пространстве X с σ-алгеброй $\mathcal{A}$, если

- $\mu(\emptyset) = 0$, и
- для любой дизъюнктной последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ выполняется

$$\mu(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{4.1}$$

Свойство (4.1) называется *σ-аддитивностью.*

Замечание 4.8. В силу первого свойства, σ-аддитивность имеет место также и для конечных дизъюнктных семейств.

Пример 4.9. Приведем примеры различных σ-алгебр и мер на них.

(1) На $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ положим $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(X) = a$, где $a \in [0,\infty]$.

(2) На $\mathcal{A} = 2^X$ определим *считающую меру*, положив $\mu(A)$ равным числу элементов в A, если A — конечно, и ∞ в противном случае.

(3) На $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, A, X\setminus A\}$ положим $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = a$, $\mu(X\setminus A) = b$, $\mu(X\setminus A) = a+b$ для некоторых $a, b \in [0,\infty]$. Если $\mathcal{A}$ порождено не более чем счетным разбиением $\mathcal{P} = \{A_i\}$, то каждая мера μ однозначно задается своими значениями на элементах разбиения $\mathcal{P}$, причем на этих элементах μ может принимать любые значения из $[0,\infty]$ (на все остальные элементы μ продолжается по σ-аддитивности).

(4) На произвольном $\mathcal{A}$ для фиксированной точки $x \in X$ определим *δ-меру Дирака* δ_x, положив $\delta_x(A) = 1$, если $x \in A$, и $\delta_x(A) = 0$ в противном случае.

(5) На произвольном $\mathcal{A}$ положим меру не более чем счетного множества равной 0, а любого бесконечного несчетного множества равной ∞.

(6) Если μ_1 и μ_2 — произвольные меры на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то их линейная комбинация $a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ с неотрицательными коэффициентами a_1 и a_2 также является мерой на $\mathcal{A}$.

Измеримое пространство $(X, \mathcal{A})$, на котором задана некоторая мера $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, называется *пространством с мерой.* Фактически, пространство с мерой — это тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Если под X мы понимаем измеримое пространство, но не желаем явно указывать σ-алгебру, то вместо тройки $(X, \mathcal{A}, \mu)$ будем писать пару (X, μ).

Мера μ *конечна*, если $\mu(X) < \infty$; мера μ называется *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$; пространство $(X, \mathcal{A}, \mu)$ такое, что μ — вероятностная мера, называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Выберем произвольное $Y \in \mathcal{A}$, тогда определена индуцированная σ-алгебра $\mathcal{A}_Y$, являющаяся подалгеброй в $\mathcal{A}$ и состоящая из всех множеств вида $A \cap Y$, $A \in \mathcal{A}$, см. выше. Через $\mu|_Y$ будем обозначать ограничение функции μ на $\mathcal{A}_Y$. Ясно, что $\mu|_Y$ — мера на $\mathcal{A}_Y$, которую мы будем называть *индуцированной.* При этом, пространство $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu|_Y)$ назовем *подпространством* пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Приведем ряд часто используемых свойств меры (докажите эти свойства самостоятельно).

Теорема 4.10. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) ***Монотонность***: *если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

(2) ***Счетная субаддитивность***: *$\mu(\cup A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ измеримых множеств.*

(3) ***Непрерывность снизу***: *пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая и*
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\cup A_i).$$

(4) ***Непрерывность сверху***: *пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая. Если при этом $\mu(A_k) < \infty$ для некоторого k, то*
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\cap A_i).$$

(5) *Предположим, что мера μ конечна, и пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие X измеримыми множествами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при всех $n \ge N$ выполняется $\mu\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) > \mu(X) - \varepsilon$. Последнее эквивалентно $\mu\big(X \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i\big) < \varepsilon$.*

Замечание 4.11. В пункте (4) теоремы 4.10 условие $\mu(A_k) < \infty$ существенно. Приведем соответствующий пример. Пусть $X = \mathbb{N}$ и μ — считающая мера. Положим $A_i = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, i\}$, тогда $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, однако $\mu(A_i) = \infty$ для всех i.

4.3.1 Множества нулевой меры

При работе с измеримым пространством $(X, \mathcal{A})$, наделенным конечной мерой μ, множества μ-меры нуль являются обычно "несущественными". Говорят, что некоторое свойство выполняется *на пространстве полной μ-меры* или *μ-почти всюду*, если оно выполняется на некотором $A \in \mathcal{A}$ таком, что $\mu(A) = \mu(X)$, т.е. если оно может не выполняться только на множестве $X \setminus A$ меры нуль. Если некоторое свойство обозначается символом (скажем, $=$, $\le$, $\to$ и т.д.), но оно имеем место μ-почти всюду, то этот факт будет обозначать надписью "μ-п.в." над символом или, если ясно, о какой мере идет речь, — надписью "п.в.". Например, $\overset{\mu\text{-п.в.}}{=}$, $\overset{\mu\text{-п.в.}}{\le}$, $\overset{\mu\text{-п.в.}}{\to}$ или соответственно $\overset{\text{п.в.}}{=}$, $\overset{\text{п.в.}}{\le}$, $\overset{\text{п.в.}}{\to}$.

Положим

$$\mathcal{D}_\mu(X) = \bigl\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\bigr\}, \;\; \mathcal{U}_\mu(X) = \bigl\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \mu(X)\bigr\}.$$

Таким образом, $\mathcal{D}_\mu(X)$ состоит из множеств нулевой меры, которыми мы обычно пренебрегаем, а $\mathcal{U}_\mu(X)$ — из множеств полной меры.

Предложение 4.12. *В сделанных выше обозначениях,*

(1) $\emptyset \in \mathcal{D}_\mu(X)$, $X \in \mathcal{U}_\mu(X)$;

(2) *множества $\mathcal{D}_\mu(X)$ и $\mathcal{U}_\mu(X)$ замкнуты относительно счетных объединений и счетных пересечений*;

(3) *множество $\mathcal{D}_\mu(X)$ замкнуто относительно разностей*;

(4) *разность любых двух элементов из $\mathcal{U}_\mu(X)$ лежит в $\mathcal{D}_\mu(X)$*;

(5) $\mathcal{D}_\mu(X) = X \setminus \mathcal{U}_\mu(X)$ *и* $\mathcal{U}_\mu(X) = X \setminus \mathcal{D}_\mu(X)$;

(6) *множество $\mathcal{D}_\mu(X) \cup \mathcal{U}_\mu(X)$ является σ-алгеброй.*

Замечание 4.13. Из предложения 4.12 вытекает ряд "приемов", обычно считающихся в теории меры очевидными и использующихся без комментариев. Например, если каждое свойство из не более чем счетного набора выполняется почти всюду, то и все вместе эти свойства выполняются почти всюду. Важный частный случай: если каждый элемент последовательности функций определен почти всюду на X, то и все вместе эти функции определены почти всюду, т.е. существует множество $Y \subset X$ полной меры, на котором все эти функции определены.

4.3.2 Пополнение

Мера μ на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$ называется *полной*, если для каждого $B \subset X$ такого, что существует $A \in \mathcal{D}_\mu(X)$, $A \supset B$, выполняется $B \in \mathcal{A}$. Не всякая мера является полной, например, если $\#X > 1$, то на σ-алгебре $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ нулевая мера неполна.

Следующая конструкция строит наименьшее расширение σ-алгебры и продолжает на него меру так, что полученная функция оказывается полной мерой.

Конструкция 4.14. Для пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ положим

$$Z_\mu(X) = \big\{B \subset X \mid \exists A \in \mathcal{D}_\mu(X),\ B \subset A\big\},$$

и пусть $\bar{\mathcal{A}}_\mu = \sigma\big(\mathcal{A} \cup Z_\mu(X)\big)$. Выясним, как устроено $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Предложение 4.15. *Имеем*

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu = \big\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in Z_\mu(X)\big\}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (4.2) через $\mathcal{A}'$. Включение $\mathcal{A}' \subset \bar{\mathcal{A}}_\mu$ имеет место по определению $\sigma\big(\mathcal{A} \cup Z_\mu(X)\big)$.

Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что $\mathcal{A}'$ является σ-алгеброй. Ясно, что $\emptyset \in Z_\mu(X) \subset \mathcal{A}'$.

Проверим замкнутость $\mathcal{A}'$ относительно счетных объединений. Для $\{A_i \cup B_i\}_{i=1}^\infty$, $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in Z_\mu(X)$ имеем

$$\cup_{i=1}^\infty (A_i \cup B_i) = (\cup_{i=1}^\infty A_i) \cup (\cup_{i=1}^\infty B_i).$$

Так как $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй, то $A := \cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$. Далее, для каждого B_i существует $C_i \in \mathcal{D}_\mu(X)$ такой, что $B_i \subset C_i$, поэтому $B := \cup_{i=1}^\infty B_i \subset \cup_{i=1}^\infty C_i =: C$, причем $C \in \mathcal{D}_\mu(X)$ в силу предложения 4.12. Таким образом, $B \in Z_\mu(X)$ и, значит, $\cup_{i=1}^\infty (A_i \cup B_i) = A \cup B \in \mathcal{A}'$.

Проверим, что если $A \cup B \in \mathcal{A}'$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in Z_\mu(X)$, то $X \setminus (A \cup B) \in \mathcal{A}'$. Без ограничения общности, будем считать, что $A \cap B = \emptyset$, так как $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ и $B \setminus A \in Z_\mu(X)$. Пусть $C \in \mathcal{D}_\mu(X)$ таково, что $B \subset C$. Положим $C' = C \setminus A$, так что снова $B \subset C' \in \mathcal{D}_\mu(X)$. Но тогда $X \setminus (A \sqcup B) = \big[X \setminus (A \sqcup C')\big] \cup (C' \setminus B)$, $X \setminus (A \sqcup C') \in \mathcal{A}$ и $C' \setminus B \in Z_\mu(X)$.

Наконец, из сказанного выше вытекает, что $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}'$, таким образом, $\mathcal{A}'$ является σ-алгеброй. $\square$

Определим теперь функцию $\bar{\mu}\colon \bar{\mathcal{A}}_\mu \to [0, \infty]$, положив $\bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in Z_\mu(X)$. Проверим корректность этого определения, т.е. если $A \cup B = A' \cup B'$, $A' \in \mathcal{A}$, $B' \in Z_\mu(X)$, то $\mu(A) = \mu(A')$. Действительно, положим $A'' = A \cup A' \in \mathcal{A}$ и $B'' = (A \cup B) \setminus A''$. Достаточно проверить, что $\mu(A) = \mu(A'')$. Но $A'' \setminus A \subset B$, поэтому, в силу существования $C \in \mathcal{D}_\mu(X)$, для которого $B \subset C$, имеем $\mu(A'' \setminus A) = 0$. Осталось воспользоваться аддитивностью меры μ, в силу чего получаем $\mu(A'') = \mu(A) + \mu(A'' \setminus A) = \mu(A)$.

Далее, $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

Наконец, проверим σ-аддитивность: пусть $A_i \in \mathcal{A}$ и $B_i \in Z_\mu(X)$ таковы, что последовательность $\{A_i \cup B_i\}_{i=1}^\infty$ дизъюнктна, тогда

$$\bar{\mu}\big(\sqcup_{i=1}^\infty (A_i \cup B_i)\big) = \bar{\mu}\big((\sqcup_{i=1}^\infty A_i) \cup (\sqcup_{i=1}^\infty B_i)\big) = \mu(\sqcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \bar{\mu}(A_i \cup B_i).$$

Определение 4.16. Описанная в конструкции 4.14 σ-алгебра $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ называется *пополнением* σ-алгебры $\mathcal{A}$ (с помощью меры μ), а мера $\bar{\mu}$ — *пополнением* меры μ.

Следующий результат мгновенно вытекает из предложения 4.5.

Следствие 4.17. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция на пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$, тогда f также измерима и на пополнении $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu)$.*

Предложение 4.18. *Пусть f — функция, определенная и измеримая почти всюду на пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$ с конечной мерой μ, т.е. существует $Y \in \mathcal{U}_\mu(X)$ такое, что $f\colon Y \to \mathbb{R}$ — измеримая функция на пространстве $(Y, \mathcal{A}_Y)$. В частности, f может быть определена на всем X, но измерима лишь почти всюду. Тогда $f|_Y$ можно доопределить на множестве $X \setminus Y$ (например, сделав ее там постоянной) так, что полученная функция g будет измеримой на всем X. Если же мера μ полна, а функция f определена на всем X, то f измерима на всем X.*

Доказательство. Пусть мы доопределили функцию $f|_Y$ на $X \setminus Y$, положив ее там равной некоторому числу. Тогда для любого борелевского $A \subset \mathbb{R}$ имеем

$$g^{-1}(A) = g|_Y^{-1}(A) \cup g|_{X\setminus Y}^{-1}(A) = f|_Y^{-1}(A) \cup g|_{X\setminus Y}^{-1}(A).$$

По условию, $f|_Y^{-1}(A) \in \mathcal{A}_Y$, и так как $Y \in \mathcal{A}$, то $f|_Y^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Множество $g|_{X\setminus Y}^{-1}(A)$ или пусто, или же совпадает с $X \setminus Y$, поэтому в любом случае содержится в $\mathcal{A}$, что и доказывает первую часть предложения.

Пусть теперь мера μ полная. Аналогично проделанному выше, выполняется

$$f^{-1}(A) = f|_Y^{-1}(A) \cup f|_{X\setminus Y}^{-1}(A),$$

и $f|_Y^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Так как $f|_{X\setminus Y}^{-1}(A) \subset X \setminus Y$ и $\mu(X \setminus Y) = 0$, то, в силу полноты меры μ, имеем $f|_{X\setminus Y}^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, что и завершает доказательство второй части предложения. $\square$

4.3.3 Произведение мер, отображения мер

Если $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства, то положим $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. Именно эту σ-алгебру будем иметь в виду, говоря про измеримое пространство $X \times Y$, если не оговорено противное.

Предложение 4.19 ([2], теорема 3.3.1)**.** *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерами. Для каждых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ положим $(\mu \times \nu)(A, B) = \mu(A)\nu(B)$, тогда функция $\mu \times \nu$ однозначно продолжается до некоторой меры $\mu \otimes \nu$ на σ-алгебре $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Если меры μ и ν конечны, то $\mu \otimes \nu$ также конечна.*

Мера $\mu \otimes \nu$ из предложения 4.19 называется *произведением мер μ и ν*.

Замечание 4.20. Иногда бывает полезно работать с пополнением σ-алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и меры $\mu \otimes \nu$.[1]

Если $f\colon X \to Y$ — измеримое отображение измеримых пространств $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$, и на $(X, \mathcal{A})$ задана мера μ, то определен *образ* $f_*\mu$ этой меры: $f_*\mu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$. Легко видеть, что $f_*\mu$ — мера на $\mathcal{B}$.

[1] В [2] под $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ имеется в виду продолжение не только на σ-алгебру $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, но и на ее пополнение.

4.4 Сходимость измеримых отображений

Выше мы уже говорили про поточечную сходимость последовательности функций $f_n(x)$ к функции $f(x)$ (см. теорему 4.7), т.е. когда для каждого x числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к числу $f(x)$. Эту сходимость обычно обозначают через $f_n \to f$. Также если функции определены на пространстве с конечной мерой μ, то можно говорить про сходимость μ-почти всюду. Эту сходимость мы обозначали через $f_n \overset{\mu\text{-п.в.}}{\to} f$ или $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f$.

Еще один тип сходимости — равномерная сходимость. Говорят, что последовательность функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, определенных на некотором множестве X, *сходится равномерно* к некоторой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, и пишут $f_n \rightrightarrows f$, если $\sup_{x\in X}\bigl|f(x)-f_n(x)\bigr| \to 0$ при $n \to \infty$.

Равномерная сходимость влечет поточечную, а обратное не верно (пример см. ниже). Однако если на множестве задана мера, то точечная сходимость влечет "почти" равномерную сходимость, однако в более слабом смысле, чем мы говорили выше. Соответствующий результат дается теоремой Д.Ф.Егорова.

Теорема 4.21 (теорема Д.Ф.Егорова [2], теорема 2.2.1)**.** *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой μ, и $Y \in \mathcal{U}_\mu(X)$. Пусть $f_n\colon Y \to \mathbb{R}$ — измеримые функции, поточечно сходящие к некоторой функции $f\colon Y \to \mathbb{R}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$, $X_\varepsilon \subset Y$, что $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_n|_{X_\varepsilon} \rightrightarrows f|_{X_\varepsilon}$.*

Замечание 4.22. В теореме Егорова нельзя положить $\varepsilon = 0$, как показывает следующий пример: $X = (0,1)$, $f_n(x) = x^n$, тогда $f_n \to 0$, однако для каждого множества $Y \subset X$ полной меры в каждой окрестности 1 содержатся точки из Y. Отсюда вытекает, что $\sup_{x\in Y}\bigl|f_n(x) - 0\bigr| = 1$ при всех n, так что этот супремум не стремится к нулю при $n \to \infty$.

На пространстве с мерой, помимо сходимости почти всюду, имеется еще и другой тип сходимости, существенно связанный с мерой — сходимость по мере. Здесь также оказывается полезным понятие фундаментальной по мере последовательности.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой, $Y \in \mathcal{U}_\mu(X)$, $f_n\colon Y \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и $f\colon Y \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Говорят, что последовательность f_n является *фундаментальной по мере* μ, если для каждого $c > 0$ выполняется следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $k, n \geq N$ имеем

$$\mu\Bigl(\bigl\{x \in Y : |f_k(x) - f_n(x)| \geq c\bigr\}\Bigr) < \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность f_n *сходится к f по мере* μ, и пишут $f_n \overset{\mu}{\to} f$, если для каждого $c > 0$ выполняется

$$\mu\Bigl(\bigl\{x \in Y : |f_n(x) - f(x)| \geq c\bigr\}\Bigr) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Приведем ряд свойств сходимости по мере.

Теорема 4.23 ([2], теоремы 2.2.3, 2.2.5 и замечания перед ними)**.** *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой, $Y \in \mathcal{U}_\mu(X)$, f_n, g_n, f, g, $n \in \mathbb{N}$, — определенные на Y измеримые функции. Тогда*

(1) ***фундаментальность и сходимость по мере***: *последовательность f_n сходится по мере, если и только если она фундаментальна по этой мере*;

(2) ***почти-единственность предела***: *если последовательность f_n сходится по мере μ как к функции f, так и к функции g, то $f \overset{\mu\text{-п.в.}}{=} g$*;

(3) ***сходимость почти всюду влечет сходимость по мере***: *если $f_n \overset{\mu\text{-п.в.}}{\to} f$, то $f_n \overset{\mu}{\to} f$*;

(4) ***сходимость по мере влечет сходимость почти всюду подпоследовательности***: *если $f_n \overset{\mu}{\to} f$, то $f_{n_k} \overset{\mu\text{-п.в.}}{\to} f$ для некоторой подпоследовательности f_{n_k} (теорема Ф.Рисса).*

(5) ***сходимость по мере и операции над функциями***: *если $f_n \overset{\mu}{\to} f$, $g_n \overset{\mu}{\to} g$, и Ψ — непрерывная функция на подмножестве плоскости, включающем все точки $\big(f_n(x), g_n(x)\big)$ и $\big(f(x), g(x)\big)$, то $\Psi(f_n, g_n) \overset{\mu}{\to} \Psi(f, g)$, в частности, сходимость по мере уважает линейные комбинации и произведение функций.*

Замечание 4.24. Ниже мы определим интеграл Лебега и тогда будем в состоянии задать на множестве всех почти всюду определенных и измеримых функций псевдометрику, для которой сходимость означает в точности сходимость по мере. Тогда пункт (1) теоремы 4.23 можно будет интерпретировать как полноту соответствующего псевдометрического пространства.

4.4.1 Знакопеременные меры, разложения Хана и Жордана–Хана

Если в определении меры отказаться от требования неотрицательности, но запретить бесконечные значения, т.е. рассматривать $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, то полученную функцию множества будем называть *знакопеременной мерой.* При этом σ-аддитивность понимается в том смысле, что ряд в правой части равенства (4.1) сходится абсолютно. Отметим, что неотрицательные знакопеременные меры в точности соответствуют конечным мерам в первоначальном понимании.[2]

Каждая знакопеременная мера может быть представлена в виде разности двух неотрицательных мер. Такое представление называется *разложением Жордана–Хана.* Имеет место следующий результат.

Предложение 4.25 ([2], теорема 3.1.1, следствие 3.2.1)**.** *Пусть μ — произвольная знакопеременная мера на измеримом пространстве X. Тогда существует разбиение множества $X = X^- \sqcup X^+$ (**разложение Хана**) на измеримые множества X^- и X^+ такое, что для каждого измеримого A выполняется*

$$-\mu^-(A) := \mu(A \cap X^-) \le 0 \quad \text{и} \quad \mu^+(A) := \mu(A \cap X^+) \ge 0.$$

[2] В [2] под мерой понимается знакопеременная мера, причем тот факт, что мера не принимает бесконечные значения, подчеркивается словом “числовая”; меры в нашем понимании называются неотрицательными мерами. Кроме того, иногда рассматриваются и (конечно) аддитивные меры, поэтому автор [2] конечные меры в нашем понимании называет неотрицательными счетно-аддитивными числовыми мерами.

*При этом, функции μ^- и μ^+ являются обычными мерами, причем $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (**разложение Жордана–Хана**).*

*Это разложение μ-единственно, т.е. если $X = X_1^- \sqcup X_1^+$ — другое такое разложение, то X^- и X_1^-, а также X^+ и X_1^+ отличаются друг от друга на множества μ-меры 0. Последнее означает, что $\mu(X^- \vartriangle X_1^-) = \mu(X^+ \vartriangle X_1^+) = 0$, где $A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — **симметрическая разность**.*

Обратно, разность любых двух конечных мер является знакопеременной мерой.

Мера $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ называется *полной вариацией*, а число $\|\mu\| = |\mu|(X)$ — *вариацией знакопеременной меры μ*.

Как по заданной знакопеременной мере μ определить разложения Хана и Жордана–Хана? Для мер μ^- и μ^+ имеют место следующие формулы:

$$\mu^+(A) = \sup\bigl\{\mu(B) : B \subset A,\ B \in \mathcal{A}\bigr\},\quad \mu^-(A) = \sup\bigl\{-\mu(B) : B \subset A,\ B \in \mathcal{A}\bigr\}.$$

Разложение Хана строится так. Назовем множество $E \in \mathcal{A}$ *отрицательным*, если $\mu(A \cap E) \le 0$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Положим $\alpha = \inf\bigl\{\mu(E) : E \in \mathcal{A},\ E \text{ — отрицательно}\bigr\}$. Рассмотрим последовательность $E_1, E_2, \ldots$, для которой $\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \alpha$, тогда в качестве X^- можно взять $\cup_{i=1}^\infty E_i$, а в качестве X^+ соответственно $X \setminus X^-$.

4.4.2 Внешние меры

Здесь мы опишем альтернативный подход к построению теории меры, который особенно популярен в геометрических приложениях (в геометрической теории меры). Начнем с распространения меры на все подмножества рассматриваемого пространства.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Построим новую функцию $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ по следующей формуле:

$$\mu^*(B) = \inf\bigl\{\mu(A) : B \subset A \in \mathcal{A}\bigr\}.$$

Предложение 4.26. *Построенная функция удовлетворяет следующим свойствам.*

(1) *Для каждого $A \in \mathcal{A}$ имеем $\mu^*(A) = \mu(A)$, т.е. μ^* — продолжение функции μ.*

(2) *Для любого счетного семейства $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subset 2^X$ имеем*

$$\mu^*\bigl(\cup_{i=1}^\infty B_i\bigr) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(B_i)$$

*(**счетная субаддитивность функции** μ^*). В частности, если $B \subset C \subset X$, то $\mu^*(B) \le \mu^*(C)$ (**монотонность функции** μ^*).*

(3) *Для любых $C \in \mathcal{A}$ и $B \subset X$ выполняется*

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus C).$$

Доказательство. Докажем последний пункт (доказательство предыдущих пунктов проделайте самостоятельно). Неравенство $\mu^*(B) \le \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus C)$ вытекает из субаддитивности функции μ^*. Проверим противоположное неравенство.

По определению μ^*, для любого $\varepsilon > 0$ существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $\mu^*(B) \geq \mu(A) - \varepsilon$, поэтому

$$\mu^*(B) \geq \mu(A) - \varepsilon = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) - \varepsilon = \\ = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \setminus C) - \varepsilon \geq \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus C) - \varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. □

Определим теперь понятие внешней меры.

Определение 4.27. Для произвольного множества X, функция $\nu\colon 2^X \to [0, \infty]$ называется *внешней мерой*, если

(1) $\nu(\emptyset) = 0$ и

(2) для любого счетного семейства $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset 2^X$ выполняется

$$\nu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)$$

(счетная субаддитивность).

Как было показано выше, построенная по мере μ функция μ^* является внешней мерой.

Пусть ν — внешняя мера на X. Множество $A \subset X$ называется *ν-измеримым по Каратеодори*, если для любого $B \subset X$ выполняется $\nu(B) = \nu(B \cap A) + \nu(B \setminus A)$, т.е. множество A делит каждое B на ν-аддитивные части.

Теорема 4.28. *Пусть ν — внешняя мера на множестве X, тогда семейство*

$$\mathcal{A}_\nu = \{A \subset X : A \text{ является } \nu\text{-измеримым по Каратеодори}\}$$

образует σ-алгебру, причем ограничение ν на эту σ-алгебру σ-аддитивно, таким образом, $(X, \mathcal{A}_\nu, \nu)$ — пространство с мерой.

Более того, если $\nu = \mu^*$ для некоторой меры μ на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$, то $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\nu$.

Пример 4.29. Отметим, что мера μ^* всегда является полной на $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Действительно, если для $B \subset X$ существует $A \in \mathcal{A}$ такое, что $B \subset A$ и $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$, то $\mu^*(B) = 0$, но тогда для любого $C \subset X$ имеем $\mu^*(C \cap B) = 0$ (монотонность). С другой стороны, $\mu^*(C) \leq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B) = \mu^*(C \setminus B)$ в силу субаддитивности, но $\mu^*(C \setminus B) \leq \mu^*(C)$ в силу монотонности, так что $\mu^*(C) = \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B)$ для любого $C \subset X$, поэтому $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Если теперь взять в качестве X множество из не менее чем 2 элементов, положить $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, а в качестве μ взять нулевую меру, то μ^* будет нулевой внешней мерой, причем $\mathcal{A}_{\mu^*} = 2^X \neq \mathcal{A}$.

Пример 4.30. Пусть $\mathcal{A}$ — борелевская σ-алгебра на арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, тогда существует и единственная мера λ на $\mathcal{A}$, называемая *мерой Лебега*, которая инвариантна относительно сдвигов и $\lambda\big([0,1]^n\big) = 1$. Множества из $\mathcal{A}_{\lambda^*}$ называются *измеримыми по Лебегу*. Известно (см. [2]), что существуют неборелевские подмножества $\mathbb{R}^n$, измеримые по Лебегу, т.е. в данном случае $\mathcal{A}_{\lambda^*} \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$.