# Тема 3

# Двойственность в задаче Канторовича.

Запишем задачу Канторовича в виде задачи линейного программирования из правой части формулы в теореме 2.1. Будем рассматривать $\rho$ и $\pi$ как векторы:

$$\rho^t = (\rho_{12}, \dots, \rho_{1n}, \rho_{21}, \dots, \rho_{2n}, \dots) \text{ и } \pi^t = (\pi_{12}, \dots, \pi_{1n}, \pi_{21}, \dots, \pi_{2n}, \dots)$$

соответственно. Таким образом, нахождение минимума функционала Канторовича соответствует минимизации скалярного произведения $\rho^t\pi$. Чтобы получить обозначения теоремы 2.1, положим $b = \rho$ и $y = \pi$, тогда $b, y \in \mathbb{R}^{n^2}$.

Выпишем граничные условия также в терминах теоремы 2.1. Для этого в качестве $c$ возьмем вектор-столбец из $\mathbb{R}^{2n}$, полученный последовательной записью векторов $\lambda$ и $\mu$, а матрицу $A^t$ определим так. Обозначим через $0_n$ столбец высоты $n$, состоящий из одних 0, а через и $1_n$ такой же столбец из одних 1; пусть $E_n$ обозначает единичную матрицу размера $n \times n$, тогда положим

$$A^t = \left( \begin{array}{cccc} 1_n^t & 0_n^t & \cdots & 0_n^t \\ 0_n^t & 1_n^t & \cdots & 0_n^t \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0_n^t & 0_n^t & \cdots & 1_n^t \\ E_n & E_n & \cdots & E_n \end{array} \right).$$

Легко видеть, что граничные условия имеют вид $A^t y = c$, а условие $y \geq 0$ соответствует неотрицательности элементов матрицы $\pi$. Итак, во введенных выше обозначениях двойственная задача (II) — это, в точности, транспортная задача Канторовича.

Выясним, как выглядит исходная к ней задача (I). Для этого мы представим вектор-столбец $x \in \mathbb{R}^{2n}$ в виде двух последовательных векторов $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^n$, $\varphi^t = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\psi^t = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Тогда в задаче (I) мы должны искать супремум скалярного произведения

$$c^t x = \lambda^t \varphi + \mu^t \psi = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \varphi_i + \mu_i \psi_i)$$

при условии $Ax \le b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n & \cdots & 0_n & E_n \\ 0_n & 1_n & \cdots & 0_n & E_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0_n & 0_n & \cdots & 1_n & E_n \end{pmatrix}.$$

Запишем это последнее условие в явном виде. Имеем $\varphi_i+\psi_j \le \rho_{ij}$ при всех $1 \le i,j \le n$.

Тем самым, из теорем 2.1 и 1.5 вытекает следующий результат.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\lambda,\mu \in \Delta(X)$ — произвольные вероятностные меры на метрическом пространстве $(X,\rho)$. Тогда*

$$k_\rho(\lambda,\mu) = \sup_{\varphi,\psi\in\mathbb{R}^n} \Big\{\sum_i(\lambda_i\varphi_i+\mu_i\psi_i) \mid \varphi_i+\psi_j \le \rho_{ij}, 1 \le i,j \le n\Big\},$$

*причем существуют $\varphi$ и $\psi$, удовлетворяющие описанным выше условиям, для которых $k_\rho(\lambda,\mu) = \sum_i(\lambda_i\varphi_i+\mu_i\psi_i)$.*

Положим

$$\Phi_\rho = \big\{(\varphi,\psi) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n : \varphi_i+\psi_j \le \rho_{ij},\ 1 \le i,j \le n\big\}$$
$$J_{\lambda,\mu}(\varphi,\psi) = \sum_i(\lambda_i\varphi_i+\mu_i\psi_i) = \lambda^t\varphi+\mu^t\psi.$$

Тогда, по теореме 3.1,

$$k_\rho(\lambda,\mu) = \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_\rho} J_{\lambda,\mu}(\varphi,\psi).$$

Назовем пару $(\varphi,\psi) \in \Phi_\rho$ *оптимальной для* $(\lambda,\mu)$, если $k_\rho(\lambda,\mu) = J_{\lambda,\mu}(\varphi,\psi)$.

**Лемма 3.2.** *Для каждой пары $(\varphi,\psi) \in \Phi_\rho$ выполняется $\varphi \le -\psi$.*

*Доказательство.* Для $i=j$ имеем $\varphi_i+\psi_j = \varphi_i+\psi_i \le 0$, что и требовалось. □

Напомним, что отображение $f\colon Z \to W$ метрических пространств называется *липшицевым*, если существует $L \ge 0$ такое, что $\big|f(z)f(z')\big| \le L|zz'|$ при всех $z,z' \in Z$. Каждое такое число $L$ называется *константой Липшица*, само отображение $f$ называется $L$-липшицевы, а точная нижняя грань констант Липшица $L$ — *растяжением отображения* $f$ и обозначается через $\operatorname{dil} f$. Семейство всех $L$-липшицевых функций на метрическом пространстве $X$ обозначим через $\operatorname{Lip}_L(X)$.

**Лемма 3.3.** *Для $\psi \in \mathbb{R}^n$ выполняется $(\psi,-\psi) \in \Phi_\rho$, если и только если $\psi \in \operatorname{Lip}_1(X)$, а последнее равносильно условию $(-\psi,\psi) \in \Phi_\rho$.*

*Доказательство.* Условие $(\psi,-\psi) \in \Phi_\rho$ для любых $1 \le i,j \le n$ равносильно условию $\psi_i-\psi_j \le \rho_{ij}$ при всех $1 \le i,j \le n$, что эквивалентно условию $|\psi_i-\psi_j| \le \rho_{ij}$ для любых $1 \le i,j \le n$, а это и есть условие 1-липшицевости, т.е. $\varphi \in \operatorname{Lip}_1(X)$. Аналогично поступаем с условием $(-\psi,\psi) \in \Phi_\rho$. □

Найдем теперь максимальное $\varphi \in \mathbb{R}^n$, для которого при фиксированном $\psi \in \mathbb{R}^n$ выполняется $(\varphi, \psi) \in \Phi_\rho$. Для любого $\varphi$, $(\varphi, \psi) \in \Phi_\rho$, имеем $\varphi_i \le \rho_{ij} - \psi_j$, поэтому $\varphi_i \le \min_j(\rho_{ij} - \psi_j)$ для всех $i$. Положим $\psi_i^c = \min_j(\rho_{ij} - \psi_j)$, тогда, учитывая неотрицательность $\lambda$ и $\mu$, получаем следующий результат.

**Следствие 3.4.** *Для любого $\psi \in \mathbb{R}^n$ выполняется $(\psi^c, \psi) \in \Phi_\rho$, и для любого $\varphi$, $(\varphi, \psi) \in \Phi_\rho$, имеем $\varphi \le \psi^c$. Кроме того, для любых $\lambda, \mu \in \Delta(X)$ и $(\varphi, \psi) \in \Phi_\rho$ выполняется $J_{\lambda,\mu}(\varphi, \psi) \le J_{\lambda,\mu}(\psi^c, \psi)$. Таким образом, если $(\varphi, \psi)$ — оптимальная пара для $(\lambda, \mu)$, то $(\psi^c, \psi)$ — также оптимальная пара для $(\lambda, \mu)$.*

**Лемма 3.5.** *Для каждого $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеем $\psi^c \in \mathrm{Lip}_1(X)$.*

*Доказательство.* По определению, имеем

$$\psi_i^c - \psi_j^c = \min_p(\rho_{ip} - \psi_p) - \min_q(\rho_{jq} - \psi_q).$$

Пусть $r$ таково, что $\min_p(\rho_{ip} - \psi_p) = \rho_{ir} - \psi_r$, тогда

$$\psi_i^c - \psi_j^c = \rho_{ir} - \psi_r - \min_q(\rho_{jq} - \psi_q) \le \rho_{ir} - \psi_r - (\rho_{jr} - \psi_r) \le \rho_{ij},$$

что и требовалось. □

**Лемма 3.6.** *Для любых $\lambda, \mu \in \Delta(X)$ имеем*

$$k_\rho(\lambda, \mu) \le \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1(X)} \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\theta_i.$$

*Доказательство.* Пусть $(\varphi, \psi)$ — оптимальная пара для $(\lambda, \mu)$, существующая в силу теоремы 3.1, т.е. $k_\rho(\lambda, \mu) = J_{\lambda,\mu}(\varphi, \psi)$. По следствию, пара $(\psi^c, \psi)$ также оптимальна для $(\lambda, \mu)$, поэтому $k_\rho(\lambda, \mu) = J_{\lambda,\mu}(\psi^c, \psi)$. По лемме 3.2, откуда $\psi \le -\psi^c$, поэтому

$$k_\rho(\lambda, \mu) = \sum_i (\lambda_i \psi_i^c + \mu_i \psi_i) \le \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\psi_i^c \le \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1(X)} \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\theta_i,$$

где последнее неравенство имеет место в силу леммы 3.5. □

**Лемма 3.7.** *Для любых $\lambda, \mu \in \Delta(X)$ имеем*

$$k_\rho(\lambda, \mu) \ge \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1(X)} \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\theta_i.$$

*Доказательство.* В следующей цепочке неравенство имеет место в силу леммы 3.3:

$$k_\rho(\lambda, \mu) = \sup_{(\varphi,\psi) \in \Phi_\rho} J_{\lambda,\mu}(\varphi, \psi) \ge \sup_{\psi \in \mathrm{Lip}_1(X)} J_{\lambda,\mu}(\psi, -\psi) = \sup_{\psi \in \mathrm{Lip}_1(X)} \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\psi_i,$$

что и требовалось. □

Положим

$$J_{\lambda,\mu}(\theta) = \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\theta_i = (\lambda - \mu)^t \theta.$$

Леммы 3.6 и 3.7 приводят к следующему результату.

**Теорема 3.8.** *Для любых $\lambda, \mu \in \Delta(X)$ имеем*

$$k_\rho(\lambda, \mu) = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1(X)} J_{\lambda,\mu}(\theta) = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1(X)} \sum_i (\lambda_i - \mu_i)\theta_i.$$

Положим

$$V_0(X) = \bigl\{v \in V(X) : \sum_i v_i = 0\bigr\},$$
$$\mathrm{Lip}_L^0(X) = \mathrm{Lip}_L(X) \cap V_0,$$
$$p\colon V(X) \to V_0(X),\ p\colon v \mapsto v - \frac{\sum_i v_i}{n}(1, \dots, 1).$$

Отметим, что $p$ — линейное отображение, переводящее каждую аффинную гиперплоскость $\sum_i v_i = a$ параллельным переносом в аффинную гиперплоскость $V_0(X)$, при этом точка $(1/n)(a, \dots, a)$ переходит в 0.

**Предложение 3.9.** *Имеем $p\bigl(\mathrm{Lip}_L(X)\bigr) = \mathrm{Lip}_L^0(X)$, причем для любого $v \in V_0(X)$ и любого $\theta \in \mathrm{Lip}_L(X)$ выполняется $v^t\theta = v^t p(\theta)$.*

*Доказательство.* Для любого $\theta \in \mathrm{Lip}_L(X)$ имеем $p(\theta)_i - p(\theta)_j = \theta_i - \theta_j \le L\rho_{ij}$, поэтому $p\bigl(\mathrm{Lip}_L(X)\bigr) \subset \mathrm{Lip}_L^0(X)$. Кроме того, для каждого $\theta \in \mathrm{Lip}_L^0(X)$ имеем $p(\theta) = \theta$, так что $p$ сюръективно.

Докажем теперь второе утверждение. Выберем произвольные $v \in V_0(X), \theta \in \mathrm{Lip}_L(X)$ и положим $c = \bigl(\sum_i \theta_i\bigr)/n$, тогда

$$v^t p(\theta) = v^t\bigl(\theta - c(1, \dots, 1)\bigr) = v^t\theta,$$

где последнее равенство выполняется в силу того, что $\sum_i v_i = 0$. □

**Следствие 3.10.** *Для любого $v \in V_0(X)$ имеем*

$$\sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_L(X)} v^t\theta = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_L^0(X)} v^t\theta.$$

*В частности, для любых $\lambda, \mu \in \Delta(X)$ выполняется*

$$k_\rho(\lambda, \mu) = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)} (\lambda - \mu)^t\theta = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)} J_{\lambda,\mu}(\theta).$$

## 3.1 Задание метрики Канторовича нормой

Определим функцию $g_\rho\colon V_0(X) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ так:

$$g_\rho(v) = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1(X)} v^t\theta = \sup_{\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)} v^t\theta.$$

**Лемма 3.11.** *Для каждого $v \in V_0(X)$ выполняется $g_\rho(v) < \infty$. Иными словами, функция $g_\rho$ отображает $V_0(X)$ в $\mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Возьмем произвольное $\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)$, тогда $\sum_i \theta_i = 0$, откуда

$$|v^t\theta| = \left|\sum_i v_i\theta_i\right| = \left|\sum_i v_i\Big(\theta_i - \frac{\sum_j \theta_j}{n}\Big)\right| = \left|\sum_i \frac{v_i}{n}\sum_j(\theta_i - \theta_j)\right| \le$$
$$\le \sum_i \frac{|v_i|}{n}\sum_j |\theta_i - \theta_j| \le \sum_{i,j}\frac{|v_i|}{n}\rho_{ij} =: D < \infty,$$

где величина $D$ не зависит от выбора $\theta$. □

**Теорема 3.12.** *Функция $g_\rho$ является нормой на $V_0(X)$.*

*Доказательство.* Докажем положительную определенность функции $g_\rho$. Функция $g_\rho$ неотрицательна, так как для каждого $\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)$ выполняется $-\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)$. При $v = 0$ имеем $g_r(v) = \sup 0^t\theta = 0$. Функция $g_\rho$ невырождена: выберем произвольное ненулевое $v \in V_0(X)$, для него возьмем любое $L > \max_{i\neq j}\frac{v_i - v_j}{\rho_{ij}}$ и положим $\theta = v/L$, тогда $\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)$ и $v^t\theta = v^tv/L > 0$, так что $g_\rho(v) > 0$.

Докажем теперь положительную однородность $g_\rho$. Выберем произвольное $\alpha \in \mathbb{R}$ и $v \in V_0(X)$, тогда

$$g_\rho(\alpha v) = \sup_{\theta\in\mathrm{Lip}_1^0(X)} \alpha v^t\theta = \sup_{\theta\in\mathrm{Lip}_1^0(X)} |\alpha| v^t\theta = |\alpha| g_\rho(v).$$

Наконец, проверим субаддитивность $g_\rho$. Для этого выберем произвольные $v, w \in V_0(X)$, тогда

$$g_\rho(v+w) = \sup_{\theta\in\mathrm{Lip}_1^0(X)} (v+w)^t\theta = \sup_{\theta\in\mathrm{Lip}_1^0(X)} (v^t\theta + w^t\theta) \le$$
$$\le \sup_{\theta\in\mathrm{Lip}_1^0(X)} v^t\theta + \sup_{\theta\in\mathrm{Lip}_1^0(X)} w^t\theta = g_\rho(v) + g_\rho(w),$$

что и требовалось. □

**Следствие 3.13.** *Для любых $\lambda, \mu \in \Delta(X)$ выполняется $k_\rho(\lambda,\mu) = g_\rho(\lambda - \mu)$, т.е. метрика Канторовича порождена нормой $g_\rho$.*

Норму $g_\rho$ обозначим через $\|\cdot\|_\rho$ и будем называть *нормой Канторовича–Рубинштейна.*

Положим $e_{ij} = (e_i - e_j)/\rho_{ij}$, $i \neq j$.

**Предложение 3.14.** *Имеем $\|e_{ij}\|_\rho = 1$.*

*Доказательство.* По теореме 1.5, выполняется $k_\rho(e_i, e_j) = \rho_{ij}$. □

Обозначим через $B_X$ единичный в смысле нормы $\|\cdot\|_\rho$ шар в $V_0(X)$ с центром в 0, а через $R_X$ — выпуклую оболочку векторов $e_{ij}$, $i \neq j$.

**Теорема 3.15.** *Имеем $B_X = R_X$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем ряд фактов из теории выпуклых множеств, в частности, напомним определение поляры и докажем ряд нужных нам фактов о ней. Наше изложение частично следует [5].

## 3.2 Выпуклые подмножества арифметического пространства и поляры

В этом разделе через $\mathcal{L}$ мы обозначили произвольное линейное пространство (над полем вещественных чисел).

Напомним, что подмножество $W \subset \mathcal{L}$ называется *выпуклым*, если для любых точек $x, y \in W$ отрезок $[x, y]$ также лежит в $W$. Приведем два удобных аналитических представления отрезка:

$$[x, y] = \{\lambda_1 x + \lambda_2 y \mid \lambda_1 \geq 0,\, \lambda_2 \geq 0,\, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = \big\{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\big\}.$$

Далее, для любого множества $V \subset \mathcal{L}$ через $\operatorname{conv} V$ обозначим пересечение всех выпуклых множеств $W \subset \mathcal{L}$, содержащих $V$. Множество $\operatorname{conv} V$ называется *выпуклой оболочкой множества* $V$. Так как пересечение выпуклых множеств выпукло, $\operatorname{conv} V$ является выпуклым подмножеством в $\mathcal{L}$.

**Лемма 3.16.** *Для любого подмножества $V \subset \mathcal{L}$ имеем*

$$\operatorname{conv} V = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid v_i \in V,\ i = 1, \ldots, n,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

*Доказательство.* Обозначим правую часть равенства из утверждения леммы через $V^c$. Кроме того, подмножество в $V^c$, сформированное из сумм, состоящих ровно из $n$ слагаемых, обозначим через $V_n^c$. Ясно, что $V_1^c \subset V_2^c \subset \cdots$ и $V^c = \cup_{n=1}^{\infty} V_n^c$.

Покажем сначала, что $V^c \subset \operatorname{conv} V$. Последнее равносильно тому, что $V_n^c \subset \operatorname{conv} V$ при всех $n$. Доказательство проведем индукцией по $n$.

Если $n = 1$, то каждая сумма $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ имеет вид $v_1 \in V$, но все множества $W$, пересечение которых равно $\operatorname{conv} V$, содержат $V$, поэтому все такие $v_1$ лежат в $\operatorname{conv} V$. Итак, мы проверили, что $V_1^c \subset \operatorname{conv} V$.

Если $n = 2$, то $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, поэтому при фиксированных $v_1$ и $v_2$ множество всех таких сумм (при соответствующих условиях на $\lambda_i$) образует отрезок $[v_1, v_2]$. В силу выпуклости всех $W$, отрезок $[v_1, v_2]$ содержится в каждом из них, поэтому он содержится и в $\operatorname{conv} V$. Таким образом, $V_2^c \subset \operatorname{conv} V$.

Предположим теперь, что для всех $m < n$, $n \geq 3$, мы доказали включение $V_m^c \subset \operatorname{conv} V$. Возьмем произвольную сумму $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, положим $\Lambda_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i$, тогда $\Lambda_k \geq 0$ и $\Lambda_k + \lambda_k = 1$, поэтому существует не более одного нулевого $\Lambda_k$, и так как $n \geq 3$, некоторое из $\Lambda_k$ должно быть отличным от нуля. Пусть для определенности $\Lambda_k \neq 0$, тогда определены $\mu_i = \lambda_i / \Lambda_k$, $i \neq k$. Ясно, что $\mu_i \geq 0$ и $\sum_{i \neq k} \mu_k = 1$. По индукции, $\bar{v} := \sum_{i \neq k} \mu_i v_i \in \operatorname{conv} V$ и $v_k \in \operatorname{conv} V$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \Lambda_k \frac{\sum_{i \neq k} \lambda_i v_i}{\Lambda_k} + \lambda_k v_k = \Lambda_k \sum_{i \neq k} \mu_i v_i + \lambda_k v_k = \Lambda_k \bar{v} + \lambda_k v_k \in \operatorname{conv} V$$

в силу доказанного выше.

Покажем теперь, что $V^c \supset \operatorname{conv} V$. Для этого достаточно проверить, что $V^c$ выпукло. Имеем

$$v := (1-\lambda)\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\Big) + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda'_i v'_i\Big),\ \lambda \in [0,1],$$

но

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)\lambda_i + \sum_{i=1}^{m}\lambda\lambda_i' = 1-\lambda+\lambda = 1,$$

поэтому $v \in V^c$. □

**Следствие 3.17.** *Пусть* $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathcal{L}$, *тогда*

$$\operatorname{conv} V = \Big\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\Big\},$$

*в частности, если* $\mathcal{L} = \mathbb{R}^d$, *то* $\operatorname{conv} V$ *— компактное подмножество* $\mathbb{R}^d$.

*Доказательство.* Докажем компактность $\operatorname{conv} V$. Рассмотрим отображение

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d,\ f\colon (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i,$$

тогда $f$ — линейно и, значит, непрерывно. Множество

$$\Delta^{n-1} := \Big\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\Big\}$$

компактно, и $\operatorname{conv} V = f(\Delta^{n-1})$, поэтому $\operatorname{conv} V$ также компактно как непрерывный образ компакта. □

### 3.2.1 Поляры

Пусть $W \subset \mathbb{R}^d$ — произвольное непустое множество, тогда *полярой* называется следующее подмножество $\mathbb{R}^d$:

$$W^* = \{y \in \mathbb{R}^d : y^t w \leq 1 \text{ для всех } w \in W\}.$$

**Пример 3.18.** (1) Пусть $W = \{a\}$, тогда $W^* = \{y \in \mathbb{R}^d : y^t a \leq 1\}$, поэтому $W^*$ или содержащее 0 полупространство для $a \neq 0$, или $W^* = \mathbb{R}^d$ при $a = 0$.

(2) Для непустых $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^d$ имеем $(W_1 \cup W_2)^* = W_1^* \cap W_2^*$.

(3) Пусть $W = B_r(0)$, $r > 0$, — замкнутый шар с центром в начале координат и радиусом $r$, тогда $W^* = B_{1/r}(0)$ (мгновенно вытекает из предыдущего пункта).

**Замечание 3.19.** Поляра $W^*$ является пересечением всего $\mathbb{R}^d$ и полупространств, поэтому $W^*$ всегда выпукло, даже если таковым не является $W$. Более того, если $W \neq \{0\}$, то $W^* \neq \mathbb{R}^d$.

Приведем еще ряд нужных нам свойств поляры.

**Лемма 3.20.** *Пусть* $V$ *— непустое подмножество* $\mathbb{R}^d$. *Тогда*

(1) *если* $V \subset W \subset \mathbb{R}^d$, *то* $V^* \supset W^*$;

(2) *если* $W = \operatorname{conv} V$, *то* $V^* = W^*$.

*Доказательство.* Доказательство первого пункта очевидно. Докажем второй.

Из первого пункта вытекает, что $V^* \supset W^*$, поэтому остается проверить, что $V^* \subset W^*$. Берем произвольный $y \in V^*$, тогда для любого $v \in V$ выполняется $y^t v \le 1$. Для доказательства того, что $y \in W^*$, мы должны проверить выполнение неравенств $y^t w \le 1$ для всех $w \in W$. Однако каждый такой $w$, в силу леммы 3.16, имеет вид $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, где $v_i$ и $\lambda_i$ — как в цитированной лемме, но тогда

$$y^t w = y^t \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y^t v_i \le \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

что и требовалось. □

**Лемма 3.21.** *Пусть* $W \subset \mathbb{R}^d$ *— непустое замкнутое выпуклое множество (например,* $W = \operatorname{conv} V$, $\#V < \infty$*). Предположим, что* $0 \in W$*, тогда* $W^{**} = W$.

*Доказательство.* Покажем сначала, что $W \subset W^{**}$. Выберем произвольный $w \in W$, тогда для каждого $y \in W^*$ выполняется $w^t y \le 1$, но это означает, что $w \in W^{**}$, поэтому $W \subset W^{**}$.

Проверим теперь, что $W \supset W^{**}$. Предположим противное, т.е. что существует $a \in W^{**} \setminus W$. По лемме 2.4, существует аффинная гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^d$, строго разделяющая $W$ и $a$. Пусть $H^+$ и $H^-$ — открытые полуплоскости, ограниченные $H$, причем $a \in H^+$ и $W \subset H^-$, в частности, $0 \in H^-$.

Выберем ненулевой вектор $\nu \in \mathbb{R}^d$, перпендикулярный $H$ и направленный в $H^+$, тогда $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \nu^t x = \alpha\}$, причем $\alpha > 0$, так как $0 \in H^-$ и $\nu$ направлен в $H^+$. Положим $c = \nu/\alpha$, тогда $H = \{x \in \mathbb{R}^d : c^t x = 1\}$. Кроме того, $c^t a > 1$ и $c^t w < 1$ для всех $w \in W$. Однако последнее условие гарантирует, что $c \in W^*$, но, так как $a \in W^{**}$, имеем $c^t a \le 1$, противоречие. □

**Замечание 3.22.** Ниже мы используем лемму 3.21 для доказательства теоремы 3.15. Сейчас же приведем еще одно приложение этой леммы.

Обозначим через $e_i$ вектора стандартного базиса арифметического пространства $\mathbb{R}^d$. Напомним, что пространство линейных функционалов $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется *двойственным* или *сопряженным к* $\mathbb{R}^d$; это пространство обозначим через $(\mathbb{R}^d)'$. Выбирая в $(\mathbb{R}^d)'$ *двойственный базис* $e^1, \ldots, e^d$, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, мы можем отождествить $(\mathbb{R}^d)'$ с $\mathbb{R}^d$, и тогда $\varphi(v) = \varphi^t v$.

Если на $\mathbb{R}^d$ задана произвольная норма $\|\cdot\|$, то на $(\mathbb{R}^d)'$ определяется *двойственная норма* $\|\cdot\|_*$ так:

$$\|\varphi\|_* = \sup\{\varphi^t v : v \in \mathbb{R}^d,\ \|v\| \le 1\}.$$

Таким образом, если $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ обозначает единичный шар с центром в 0 относительно нормы $\|\cdot\|$, т.е. $B_1(0) = \big\{v \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le 1\big\}$, то единичный шар в $(\mathbb{R}^d)'$ будет полярой к $B_1(0)$, т.е. равен $B_1(0)^*$. Аналогичным образом определяется *второе сопряженное пространство* $(\mathbb{R}^d)''$ как сопряженное с $(\mathbb{R}^d)'$, и это пространство наделяется нормой $\|\cdot\|_{**}$ аналогичным образом. Но тогда единичный шар с центром в 0 во втором сопряженном пространстве будет равен $B_1(0)^{**}$. По лемме 3.21, имеем $B_1(0)^{**} = B_1(0)$, поэтому второе сопряженное пространство, вместе с определенной выше нормой, изометрично исходному нормированному пространству. Это свойство называется *рефлексивностью.*

## 3.3 Доказательство теоремы 3.15

Вернемся к доказательству теоремы 3.15.

*Доказательство.* Заметим, что условие $\theta \in \mathrm{Lip}_1^0(X)$ равносильно выполнению всех условий $\theta^t e_{ij} \le 1$ при $i \ne j$. Таким образом, $\mathrm{Lip}_1^0(X)$ является полярой множества $\{e_{ij} : i \ne j\}$. По лемме 3.20, $\{e_{ij} : i \ne j\}^* = R_X^*$, таким образом, $\mathrm{Lip}_1^0(X) = R_X^*$. С другой стороны, по определению нормы $g_\rho = \|\cdot\|_\rho$, единичный шар $B_X$ является полярой для $\mathrm{Lip}_1^0(X)$, так что $B_X = \mathrm{Lip}_1^0(X)^* = R_X^{**}$. Заметим, что $0 \in R_X$, поэтому, в силу леммы 3.21, имеем $B_X = R_X^{**} = R_X$, что и требовалось. $\square$

**Определение 3.23.** Многогранник $R_X := \mathrm{conv}\{e_{ij} : 1 \le i, j \le n,\ i \ne j\}$ называется *фундаментальным для метрического пространства* $X$.

Интересно разобраться, как связана комбинаторная структура фундаментального многогранника и свойства определяющей его метрики $\rho$. В частности, если все ненулевые расстояния в метрике $\rho$ равны 1, то фундаментальный многогранник является выпуклой оболочкой корней простой алгебры Ли $A_n$, см. [24].

Приведем примеры фундаментальных многогранников, взятые нами из [24].

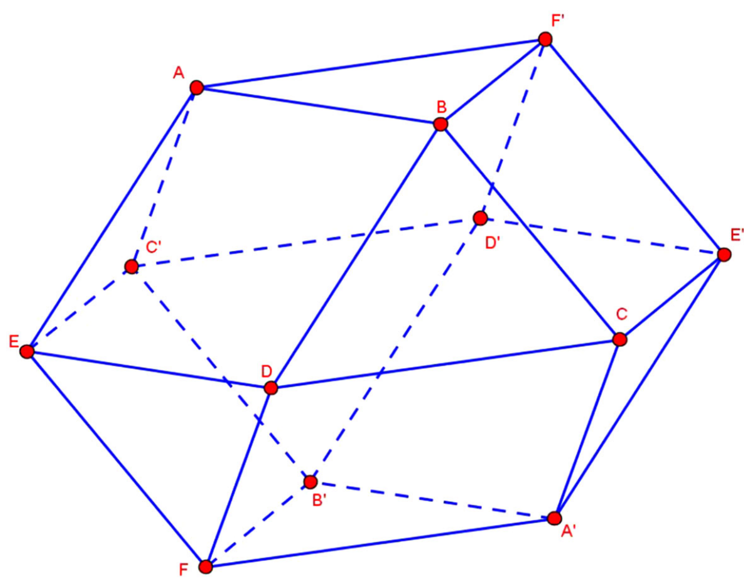


Рис. 3.1: Трехмерный фундаментальный многогранник, соответствующий четырехточечному пространству, в котором все ненулевые расстояния равны 1.

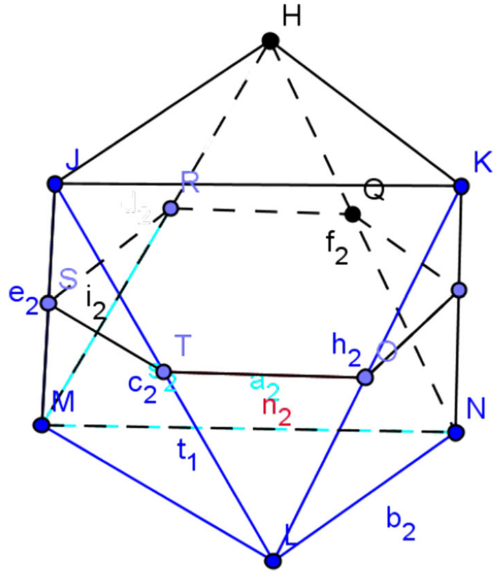


Рис. 3.2: Трехмерный фундаментальный многогранник, соответствующий четырехточечному пространству $\{1, 2, 3, 4\}$, в котором $|4i| = 1/2$, $i = 1, 2, 3$, а оставшиеся три ненулевых расстояния равны 1.