Вопросы по спецкурсу “Проблема Штейнера: подход геометрической теории меры” часть вторая

(1) Достаточное условие существования минимального дерева Штейнера на конечном подмножестве в ограниченно компактном метрическом пространстве.

(2) Теорема о структуре связного замкнутого подмножества C конечной меры $H^1(C)$ в полном метрическом пространстве (вторая теорема спрямляемости).

(3) Проблема Штейнера для множеств бесконечной H^1-меры. Связь со стандартной постановкой.

(4) Континуумы в метрическом пространстве. Разделяющие точки связного множества. Доказать, что в каждом континууме, содержащем не менее двух точек, найдется не менее двух точек, которые его не разделяют.

(5) Теорема Банаха–Алаоглу.

(6) Формулировка теоремы Рисса. Доказательство единственности меры с помощью леммы Урысона.

(7) Формулировка теоремы Рисса. Определение меры μ. Доказательство того, что μ — внешняя мера.

(8) Формулировка теоремы Рисса. Семейство множеств $\mathfrak{M}_F$. Проверка того, что $\mathfrak{M}_F$ содержит все компакты и все открытые множества конечной меры.

(9) Формулировка теоремы Рисса. Семейство множеств $\mathfrak{M}_F$. Проверка сигма аддитивности меры μ на $\mathfrak{M}_F$.

(10) Формулировка теоремы Рисса. Семейства множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_F$. Доказательство того, что $\mathfrak{M}_F$ состоит в точности из всех множеств из $\mathfrak{M}_F$, имеющих конечную меру.

(11) Более слабые и более сильные топологии. Доказать, что если $\tau_1 \subset \tau_2$ — топологии на X, причем (X, τ_1) — хаусдорфово, а (X, τ_2) — компактно, то $\tau_1 = \tau_2$.

(12) Доказать, что для связного подмножества S метрического пространства $H^1(S) = H^1(\bar{S})$ (здесь черта обозначает замыкание).

(13) Верно ли, что $H^1(S) = H^1(\bar{S})$ (здесь черта обозначает замыкание)?.

(14) Верно ли, что связное замкнутое подмножество C конечной меры $H^1(C)$ в полном метрическом пространстве представляет собой не более чем счетное объединение отрезков липшицевых кривых?

(15) Пусть C и A — подмножества некоторого топологического пространства X. Если C связно и оба множества $A \cap C$ и $C \setminus A$ не пусты, то $C \cap \partial A$ не пусто.

(16) Пусть $\mathcal{F} = \{f\ X \to Y_f\}$ семейство отображений из множества X в хаусдорфовы топологические пространства Y_f, и семейство $\mathcal{F}$ *отделяет точки* из X, т.е. для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует такое $f \in \mathcal{F}$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $\mathcal{F}$-топология на X — хаусдорфова.

(17) Пусть X — линейное топологическое пространство, X' — линейное пространство линейных функционалов на X, отделяющее X. Тогда X'-топология на X превращает X в локально выпуклое линейное топологическое пространство, двойственное пространство к которому совпадает с X'.

(18) Что такое слабая топология на линейном топологическом пространстве X? Проверьте, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x в слабой топологии, если и только если $f(x_n) \to f(x)$ для любого $f \in X^*$. В частности, если последовательность сходится в исходной топологии, то она сходится и в слабой.

(19) Приведите пример последовательности, сходящейся в слабой топологии, но не сходящейся в исходной топологии линейном топологическом пространстве X.

(20) Что такое слабая $*$-топология на линейном топологическом пространстве X^*? Покажите, что каждый непрерывный в этой топологии функционал на X^* имеет вид $\ll_x\ f \mapsto f(x)$ для некоторой точки $x \in X$.