Тема 9

Двойственные пространства.

Классическое доказательство теоремы Голомба (Gołąb) опирается на идеи, тесно связанные с геометрией двойственных пространств. Грубо говоря, оказывается, двойственные пространства обладают топологией, гарантирующей существование предельных точек у ограниченных последовательностей, что позволяет выделять в них сходящиеся подпоследовательности и доказывать самые разные теоремы существования. Этот раздел основан на материалах замечательных учебников по анализу, написанных австрийским и американским математиком Вальтером (Уолтером) Рудиным (Walter Rudin), см. [23] и [24].

9.1 Теорема Банаха–Алаоглу

На одном и том же множестве, как известно, можно заводить разные топологии. Для нас будет актуальная топология двойственного пространства, то есть пространства X^* непрерывных линейных функций с компактным носителем на линейном топологическом пространстве X.

Напомним, что если на одном и том же множестве X заданы две топологии, скажем, τ_1 и τ_2, причем $\tau_1 \subset \tau_2$, то говорят, что τ_1 *слабее*, чем τ_2, а τ_2 *сильнее*, чем τ_1. Заметим, что тождественное отображение из (X, τ_2) в (X, τ_1) — непрерывно, а из (X, τ_1) в (X, τ_2) — открыто.

Например, компактная хаусдорфова топология является в «экстремальной» в следующем смысле: ее нельзя ослабить, не потеряв хаусдофовость, и нельзя усилить не потеряв компактность.

Утверждение 9.1. *Если $\tau_1 \subset \tau_2$ — топологии на X, причем (X, τ_1) — хаусдорфово, а (X, τ_2) — компактно, то $\tau_1 = \tau_2$.*

Доказательство. Действительно, пусть $F \subset X$ замкнуто в τ_2. Так как (X, τ_2) — компакт, то F компакт в τ_2. Так как любое открытое в τ_1 покрытие F является открытым покрытием в τ_2, то F компакт и в τ_1. Наконец, так как τ_1 хаусдорфова, то F замкнуто в τ_1. Итак, каждое замкнутое в τ_2 множество замкнуто и в τ_1, поэтому каждое открытое в τ_2 множество открыто и в τ_1. $\square$

Упражнение 9.2. Проверьте, что фактор топология, порожденная канонической проекцией $\pi\colon X \to X/\tau$ является самой сильной топологией, в которой π непрерывно

Пусть X — множество, и пусть задано непустое семейство $\mathcal{F} = \{f\colon X \to Y_f\}$ отображений из множества X в топологические пространства Y_f. (Часто содержательные примеры получаются, когда Y_f одинаковы для разных f.) Пусть τ — семейство всевозможных объединений конечных пересечений множеств вида $f^{-1}(V)$, где $f \in \mathcal{F}$ и $V \subset Y_f$ — открыто.

Упражнение 9.3. Проверьте, что τ — топология на X, причем это — самая слабая топология, относительно которой каждое $f \in \mathcal{F}$ — непрерывно.

Топология τ называется *слабой топологией, порожденной* $\mathcal{F}$ *на* X или, для краткости, $\mathcal{F}$*-топологией.*

Самый известный пример, наверное, так называемая тихоновская топология прямого произведения. Напомним, что если задано произвольное семейство $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, топологических пространств, то их прямым произведением называется семейство $\bigtimes_\alpha X_\alpha = \big\{f\colon \mathcal{A} \to \sqcup_\alpha X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\big\}$. Обозначим через $\pi_\alpha\colon \bigtimes_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ каноническую проекцию $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$. Тогда $\{\pi_\alpha\}$-топология на $\bigtimes_\alpha X_\alpha$ — это и есть тихоновская топология прямого произведения.

Упражнение 9.4 (теорема Тихонова)**.** Если все X_α компактны и хаусдорфовы, то $\bigtimes_\alpha X_\alpha$ компактно в тихоновской топологии топологии.

Упражнение 9.5. Пусть $\mathcal{F} = \{f\colon X \to Y_f\}$ семейство отображений из множества X в хаусдорфовы топологические пространства Y_f, и семейство $\mathcal{F}$ *отделяет точки* из X, т.е. для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует такое $f \in \mathcal{F}$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $\mathcal{F}$-топология на X — хаусдорфова.

Упражнение 9.6. Пусть X — линейное топологическое пространство, X' — линейное пространство линейных функционалов на X, отделяющее X. Тогда X'-топология на X превращает X в локально выпуклое линейное топологическое пространство, двойственное пространство к которому совпадает с X'.

Пусть X — линейное топологическое пространство, и двойственное пространство X^* отделяет его точки. (Это так, например, для локально выпуклых ЛТП, то есть таких, что существует база окрестностей, состоящая из выпуклых множеств.) Тогда X^*-топология на X называется *слабой топологией на* X. Обозначим слабую топологию на X через τ_w. Ясно, что так как каждый функционал $f \in X^*$ непрерывен в исходной топологии пространства X, то τ_w слабее исходной топологии.

Из предыдущего упражнения вытекает, что (X, τ_w) — локально выпуклое топологическое пространство, двойственное к которому совпадает с X^*.

Упражнение 9.7. Проверьте, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x в слабой топологии, если и только если $f(x_n) \to f(x)$ для любого $f \in X^*$. В частности, если последовательность сходится в исходной топологии, то она сходится и в слабой. Обратное не верно (приведите пример).

Снова, пусть X — линейное топологическое пространство, и X^* — двойственное к нему. Ясно, что каждая точка $x \in X$ индуцирует линейный функционал λ_x на X^*, а именно, $\lambda_x(f) = f(x)$, и множество $\{\lambda_x : x \in X\}$ разделяет точки. Поэтому на X^* определена X-топология, относительно которой X^* — локально выпуклое линейное топологическое пространство, и каждый непрерывный в этой топологии линейный функционал на X^* имеет вид λ_x. Эта топология на X^* называется *слабой звездочка топологией.*

Из упражнения 9.6 вытекает, что слабая звездочка топология на X^* является локально выпуклой, и каждый непрерывный в этой топологии функционал на X^* имеет вид $\lambda_x \colon f \mapsto f(x)$ для некоторой точки $x \in X$.

Теорема 9.8 (Banach–Alaoglu). *Пусть V — окрестность нуля в линейном топологическом пространстве X. Рассмотрим следующее множество $K \subset X^*$*

$$K = \bigl\{\lambda \in X^* : |\lambda(x)| \leq 1 \text{ для всех } x \in V\bigr\}.$$

Тогда K компактно в слабой звездочка топологии.

Доказательство. Заметим, что для каждого $x \in X$ найдется число $\gamma(x) < \infty$, для которого $x \in \gamma(x)V$, откуда $|\lambda(x)| \leq \gamma(x)$ для любых $x \in X$ и $\lambda \in K$.

Положим $D_x = \bigl\{\alpha : |\alpha| \leq \gamma(x)\bigr\} \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим $P = \bigtimes_{x\in X} D_x$ с тихоновской топологией прямого произведения. Так как каждое D_x — компакт, то и P в тихоновской топологии — компакт. Элементы P — это такие функции на X, что $f(x) \in D_x$, то есть $|f(x)| \leq \gamma(x)$ для любого $x \in X$. Поэтому $K = X^* \cap P$, поэтому K наследует две топологии: одна наследуется из X^* — это слабая звездочка топология из формулировки теоремы, а другая, которую мы обозначим через τ, — наследуется из P. Мы покажем, что

a. эти две топологии совпадают на K, и

b. K — замкнутое подмножество P.

Тогда, в силу пункта (b), K компакт в топологии τ как замкнутое подмножество компакта P, и в силу пункта (a) K также компактен в слабой звездочка топологии.

Докажем (a). Для этого фиксируем $\lambda_0 \in K$, любое n, любые $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, и любое $\delta > 0$. Положим

$$W_1 = \bigl\{\lambda \in X^* : |\lambda(x_i) - \lambda_0(x_i)| < \delta \text{ при всех } 1 \leq i \leq n\bigr\},$$

и

$$W_2 = \bigl\{f \in P : |f(x_i) - \lambda_0(x_i)| < \delta \text{ при всех } 1 \leq i \leq n\bigr\}.$$

Тогда множества вида W_1 образуют локальную базу слабой звездочка топологии в λ_0, а множества вида W_2 — локальную базу топологии произведения в λ_0. Но так как $K = P \cap X^*$, то $W_1 \cap K = W_2 \cap K$, откуда и следует (a).

Докажем (b). Пусть f_0 принадлежит замыканию K в топологии τ. Фиксируем любые $x, y \in X$ и скаляры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и $\varepsilon > 0$. Тогда множество

$$\bigl\{f \in P : |f - f_0| < \varepsilon \text{ в точках } x,\, y \text{ и } \alpha x + \beta y\bigr\}$$

является окрестностью f_0 в P, поэтому K содержит такой функционал f. В силу линейности $f \in K = P \cap X^*$ имеем:

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = \\ = (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) + \alpha(f - f_0)(x) + \beta(f - f_0)(y),$$

поэтому

$$\big|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)\big| \le \big(1 + |\alpha| + |\beta|\big)\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, отображение f_0 — линейно. Наконец, для любого $x \in V$ и любого $\varepsilon > 0$ аналогичные рассуждения показывают, что найдется такое $f \in K$, что $\big|f(x) - f_0(x)\big| < \varepsilon$. По определению K имеем: $\big|f(x)\big| \le 1$, поэтому $\big|f_0(x)\big| \le 1$ в силу произвольности ε, откуда $f_0 \in K$, то есть K_0 замкнуто в τ, что и доказывает (b). $\square$

9.2 Теорема Рисса–Маркова–Какутани

Пусть E — топологическое пространство. Через $C_c(E)$ обозначим линейное пространство непрерывных функций на E с компактным носителем. Определим на нем норму $\|f\|_\infty = \sup\big\{\|f(x)\| : x \in E\big\}$. Пополнение пространства $C_c(E)$ по норме $\|\cdot\|_\infty$ обозначим через $C_0(E)$. Оно состоит из всех таких непрерывных функций $f\colon E \to \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset E$, что $|f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in E \setminus K$.

Функционал L называется *неотрицательным*, если $L(f) \ge 0$ для всех $f \ge 0$.

Теорема 9.9 (Riesz–Марков–Kakutani). *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, и L — неотрицательный линейный функционал на $C_c(X)$. Тогда существует σ-алгебра $\mathfrak{M}$, содержащая борелевскую σ-алгебру, а также единственная положительная борелевская мера μ на X, такая что*

$$L(f) = \int_X f\,d\mu \qquad \text{для любой функции } f \in C_c(E),$$

причем $\mu(K) < \infty$ для любого компакта $K \subset X$, и для любого открытого E, а также для любого $E \in \mathfrak{M}$ конечной меры выполнено

$$\mu(E) = \sup\big\{\mu(K) : K \subset E \text{ — компакт }\big\}.$$

Единственность.

Начнем с единственности, которая следует из леммы Урысона.

Лемма 9.10 (П. Урысон). *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, K — компакт в X, и V — открытое подмножество в X, содержащее K. Тогда существует $f \in C_c(X)$, $0 \le f(x) \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset V$, равная тождественно 1 на K.*

Мера μ — борелевская, поэтому она определяется своими значениями на открытых подмножествах. Так как, по утверждению теоремы, значение μ на открытых подмножествах определяется ее значениями на компактных подмножествах, достаточно проверить, что если μ_1 и μ_2 — две меры, удовлетворяющие условиям теоремы, то $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ для любого компакта $K \subset X$. Так как мера любого множества из $\mathfrak{M}$ приближается сверху мерами содержащих его открытых множеств, то есть $\mu(K) = \inf\big\{\mu(V) : K \subset E,\, E - \text{открыто}\big\}$, то для любого компакта K и $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество V, $K \subset V \subset X$, что $\mu_2(K) + \varepsilon > \mu_2(V)$. Возьмем функцию f, отделяющую K от дополнения до V, которая существует благодаря лемме Урысона. Тогда

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K \, d\mu_1 \le \int_X f \, d\mu_1 = L(f) = \int_X f \, d\mu_2 \le \\ \le \int_X \chi_V \, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon,$$

поэтому $\mu_1(K) \le \mu_2(K)$. Поменяв в этих рассуждениях местами μ_1 и μ_2, получим обратное неравенство. Тем самым единственность доказана.

Построение $\mathfrak{M}$ и μ.

Для каждого открытого подмножества $V \subset X$ положим

$$\mu(V) = \sup\big\{L(f) : \operatorname{supp} f \subset V, \quad 0 \le f(x) \le 1\big\}.$$

Если $V_1 \subset V_2$, то $\mu(V_1) \subset \mu(V_2)$ (для $\mu(V_2)$ супремум берется по большему множеству). Для произвольного подмножества $E \subset X$ положим

$$\mu(E) = \inf\big\{\mu(V) : V - \text{открыто в } X, \text{ и } E \subset V\big\}.$$

Из сделанного только что замечания следует, что если E — открыто, то оба определения согласованы.

Счетная аддитивность μ имеет, разумеется, место не везде, а только на подходящей σ-алгебре. Обозначим через $\mathfrak{M}_F$ семейство таких подмножеств $E \subset X$, что $\mu(E) < \infty$ и

$$\mu(E) = \sup\big\{\mu(K) : K - \text{компакт в } X, \text{ и } K \subset E\big\}.$$

Наконец,

$$\mathfrak{M} = \big\{E \subset X : E \cap K \in \mathfrak{M}_F \text{ для каждого компакта } K\big\}.$$

Проверка свойств $\mathfrak{M}$ и μ.

Утверждение 9.11. *Определенная нами функция μ является внешней мерой на X.*

Доказательство. Пустое множество открыто в X, единственная функция с пустым носителем — это тождественный нуль, поэтому $\mu(\emptyset) = 0$.

Монотонность функции μ, то есть, из $A \subset B$ следует $\mu(A) \le \mu(B)$, очевидна по определению. Кроме того, если $\mu(E) = 0$, то из монотонности следует, что $\mu(K) = 0$ для любого $K \subset E$, поэтому любое такое E входит и в $\mathfrak{M}_F$, и в $\mathfrak{M}$.

Положительность функционала L так же обеспечивает монотонность в следующем смысле: если $f \leq g$, то $L(f) \leq L(g)$. Действительно, $L(g) = L(f) + L(g - f) \geq L(f)$, так как $g - f \geq 0$ и L — неотрицательный.

Лемма 9.12. *Пусть $V_1, \dots, V_n$ — открытые подмножества локально компактного Хаусдорфова пространства X, и $K \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ — компактное подмножество. Тогда существуют функции h_i, $0 \leq h \leq 1$, $\operatorname{supp} h_i \subset V_i$, такие, что $\sum_i h_i(x) = 1$ при всех $x \in K$.*

Лемма 9.13 (Полуаддитивность)**.** *Пусть $E_1, E_2, \dots$ — произвольные подмножества X. Тогда*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Доказательство. Сначала проверим полуаддитивность для двух открытых множеств V_1 и V_2. Для этого выберем функцию g, $0 \leq g \leq 1$, носитель которой лежит в $V_1 \cup V_2$. По лемме 9.12 существуют функции h_1 и h_2, $0 \leq h_i \leq 1$, $\operatorname{supp} h_i \subset V_i$, $i = 1, 2$, $h_1(x) + h_2(x) = 1$ для всех $x \in \operatorname{supp} g$. Поэтому $\operatorname{supp} h_i g \subset V_i$, $i = 1, 2$, и $g = gh_1 + gh_2$, откуда, по определению μ, имеем:

$$L(g) = L(gh_1) + L(gh_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Это неравенство выполнено для всех g, $\operatorname{supp} g \in V_1 \cup V_2$, $0 \leq g \leq 1$, поэтому, переходя к точной верхней грани, заключаем, что

$$\mu\big(V_1 \cup V_2\big) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Применяя индукцию, легко доказать, что для конечного набора открытых множеств V_i имеем:

$$\mu\big(V_1 \cup \dots \cup V_k\big) \leq \mu(V_1) + \dots + \mu(V_k).$$

Перейдем к общему случаю. Если $\mu(E_i) = \infty$ для некоторого i, то утверждение леммы выполнено автоматически. Поэтому можно предполагать, что $\mu(E_i) < \infty$ для всех i. Выберем $\varepsilon > 0$. По определению μ существуют такие открытые множества V_i, что $E_i \subset V_i$ и $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/2^i$, $i = 1, 2, \dots$. Положим $V = \cup_i V_i$ и выберем f, $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset V$. Так как носитель f — компакт, то найдется n такое, что $\operatorname{supp} f \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$. Тогда

$$L(f) \leq \mu(V_1 \cup \dots \cup V_k) \leq \mu(V_1) + \dots + \mu(V_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Снова, так как последнее неравенство выполнено для любой функции f, $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset V$, и так как $\cup E_i \subset V$, переходя в точной верхней грани, заключаем, что

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы в силу произвольности ε. □

Итак, μ — внешняя мера. □

Лемма 9.14. *Каждый компакт $K \subset X$ принадлежит $\mathfrak{M}_F$, причем $\mu(K) = \inf\{L(f) : f = 1$ на K, $0 \le f \le 1\}$. В частности, $\mu(K) < \infty$.*

Доказательство. Пусть f — непрерывная функция, $0 \le f(x) \le 1$, $f|_K = 1$, и $0 < \alpha < 1$, и пусть $V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$. Тогда $K \subset V_\alpha$, и для каждой функции g, $0 \le g(x) \le 1$, $\operatorname{supp} g \subset V_\alpha$, выполнено $\alpha g(x) \le f(x)$ при $x \in V_\alpha$. Тогда

$$\mu(K) \le \mu(V_\alpha) = \sup\{L(g) : 0 \le g(x) \le 1, \operatorname{supp} g \subset V_\alpha\} \le \alpha^{-1} L(f).$$

Устремив α к 1, получаем, что $\mu(K) \le L(f)$. Поэтому $\mu(K)$ — нижняя грань для величин $L(f)$. Кроме того, $\mu(K) < \infty$, откуда $K \in \mathfrak{M}_F$.

Наконец, для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое V, $K \subset V$, такое, что $\mu(V) < \mu(K)+\varepsilon$. По лемме Урысона существует функция f, равная на K единице, $0 \le f(x) \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset V$. Тогда

$$L(f) \le \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon \le L(f) + \varepsilon,$$

откуда $\mu(K)$ — точная нижняя грань, что и требовалось. □

Лемма 9.15. *Для каждого открытого множества E конечной меры выполнено*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ — компакт в } X, \text{ и } K \subset E\}.$$

В частности, каждое открытое множество конечной меры принадлежит $\mathfrak{M}_F$.

Доказательство. Выше мы отмечали, что каждое множество нулевой меры входит в $\mathfrak{M}_F$. Пусть V — открытое подмножество положительной конечной меры. Фиксируем произвольное такое число α, что $\alpha < \mu(V)$. По определению $\mu(V) = \sup\{L(f)\}$, поэтому существует функция f, $0 \le f \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset V$ такая, что $\alpha < L(f)$. Возьмем произвольное открытое подмножество W, содержащее компакт $K = \operatorname{supp} f$. Тогда $\operatorname{supp} f \subset W$, поэтому $\mu(W) \ge L(f)$. Но $\mu(K) = \inf\{\mu(W)\}$, поэтому $\mu(K) \ge L(f)$. Таким образом, для любого $\alpha < \mu(V)$ мы построили компакт K, $K \subset V$, для которого $\mu(K) > \alpha$, откуда и вытекает требуемое. □

Лемма 9.16 (Аддитивность на $\mathfrak{M}_F$)**.** *Пусть $E = \bigsqcup_{i=1}^\infty E_i$, где E_i — попарно непересекающиеся элементы из $\mathfrak{M}_F$. Тогда*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i).$$

Если к тому же $\mu(E) < \infty$, то $E \in \mathfrak{M}_F$.

Доказательство. Покажем сначала, что для двух непересекающихся компактов K_1 и K_2 аддитивность имеет место. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме Урыснона (лемма 9.10) существует такая функция $f \in C_c(X)$, $0 \le f \le 1$, что $f(x) = 1$ на K и $f(x) = 0$ на K_2. Объединение компактов — компакт, поэтому, в силу леммы 9.14, существует функция g, $0 \le g \le 1$, равная на $K_1 \cup K_2$ единице, для которой

$$L(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon.$$

Заметим, что функция fg равна единице на K_1, а функция $(1-f)g$ равна единице на K_2. В силу леммы 9.14 и линейности L, заключаем, что

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq L(fg) + L(g - gf) = L(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon,$$

и в силу произвольности ε получаем неравенство $\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$, из которого, вместе с леммой 9.13, следует аддитивность.

Из соображений индукции имеем аддитивность для конечного набора попарно непересекающихся компактов.

Далее, если $\mu(E) = \infty$, то требуемая аддитивность снова следует из полуаддитивности (лемма 9.13). Предположим теперь, что $\mu(E) < \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как по предположению $E_i \in \mathfrak{M}_F$, то существуют компакты H_i, $H_i \subset E_i$, для которых $\mu(H_i) > \mu(E_i) - \varepsilon/2^i$, $i = 1, 2, \ldots$. Положим $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$, тогда, в силу монотонности,

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon.$$

Так как последняя оценка справедлива для любых $\varepsilon > 0$ и n, получаем неравенство, из которого, вместе с леммой 9.13, вытекает аддитивность.

Наконец, если $\mu(E) < \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N, для которого

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon,$$

откуда, так как, как было показано выше,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) < \sum_{i=1}^{N} \mu(H_i) + \varepsilon = \mu(K_N) + \varepsilon,$$

имеем: $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon$. Поэтому $\mu(E) = \sup\big\{\mu(K) : K \subset E\big\}$, где точная верхняя грань берется по компактам K. Поэтому $E \in \mathfrak{M}_F$. $\square$

Лемма 9.17. *Для любого $E \in \mathfrak{M}_F$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K и открытое множество V такие, что $K \subset E \subset V$ и $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$.*

Доказательство. По определению меры μ и семейства $\mathfrak{M}_F$ существуют компакт $K \subset E$ и открытое множество $V \supset E$, для которых

$$\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $V \backslash K$ открыто, то $V \backslash K \in \mathfrak{M}_F$ в силу леммы 9.15. Кроме того, в силу леммы 9.14 $K \in \mathfrak{M}_F$. Далее, в силу доказанной аддитивности на $\mathfrak{M}_F$ имеем:

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon,$$

откуда и вытекает требуемое. $\square$

Лемма 9.18. *Если $A \in \mathfrak{M}_F$, $B \in \mathfrak{M}_F$, то множества $A \setminus B$, $A \cup B$, и $A \cap B$ принадлежат $\mathfrak{M}_F$.*

Доказательство. В силу леммы 9.17 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компакты K_i и открытые множества V_i, $i = 1, 2$, такие, что $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset B \subset V_2$, и $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Так как

$$A \setminus B \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2).$$

В силу полуаддитивности (лемма 9.13),

$$\mu(A \setminus B) \leq \varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2) + \varepsilon.$$

Так как $K_1 \setminus V_2$ — компактное подмножество в $A \setminus B$, то мера множества $A \setminus B$ приближается мерами компактов, которые в нем содержатся, то есть $A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$.

Далее, так как $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, то, применяя лемму 9.16, заключаем, что $A \cup B \in \mathfrak{M}_F$. Наконец, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, откуда $A \cap B \in \mathfrak{M}_F$. Лемма доказана. □

Лемма 9.19. *Семейство $\mathfrak{M}$ — борелевская σ-алгебра на X.*

Доказательство. Пусть K — произвольное компактное подмножество в X.

Если $A \in \mathfrak{M}$, то $(X \setminus A) \cap K = K \setminus (A \cap K)$, то есть $(X \setminus A) \cap K$ — разность двух множеств из $\mathfrak{M}_F$. Значит, в силу леммы 9.18 $(X \setminus A) \cap K \in \mathfrak{M}_F$. Таким образом, если $A \in \mathfrak{M}$, то $(X \setminus A) \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in \mathfrak{M}$. Положим $B_1 = A_1 \cap K$, и

$$B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Тогда $\{B_i\}$ — семейство попарно непересекающихся множеств, которые, по лемме 9.18, принадлежат $\mathfrak{M}_F$. Далее, $A \cap K = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, и из леммы 9.16 следует, что $A \cap K \in \mathfrak{M}_F$, поэтому $A \in \mathfrak{M}$.

Наконец, пусть C — замкнуто, тогда $C \cap K$ — компакт, поэтому $C \cap K \in \mathfrak{M}_F$ по лемме 9.14, и, значит, $C \in \mathfrak{M}$. В частности, $X \in \mathfrak{M}$.

Таким образом, доказано, что $\mathfrak{M}$ является σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества. Поэтому $\mathfrak{M}$ содержит все борелевские подмножества из X. □

Следствие 9.20. *Внешняя мера μ является борелевской внешней мерой на X.*

Лемма 9.21. *Семейство $\mathfrak{M}_F$ состоит в точности из элементов E алгебры $\mathcal{M}$ конечной меры.*

Доказательство. Если $E \in \mathfrak{M}_F$, то из лемм 9.14 и 9.18 вытекает, что $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$ для каждого компакта K, поэтому $E \in \mathfrak{M}$.

Обратно, пусть $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < \infty$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению μ, существует открытое множество V, $E \subset V$, и $\mu(V) < \infty$. Далее, по лемме 9.15 $V \in \mathfrak{M}_F$, а по лемме 9.17 найдется компакт $K \subset V$, для которого $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Так как $E \cap K \in \mathfrak{M}_F$ по определению $\mathfrak{M}$, найдется такой компакт $H \subset E \cap K$, что $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon$. Так как $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, то

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, заключаем, что $E \in \mathfrak{M}_F$. □

Из лемм 9.21 и 9.16 вытекает σ-аддитивность μ на множествах из $\mathfrak{M}$ конечной меры. Поэтому, принимая во внимание общую полуаддитивность, поучаем следующий результат.

Следствие 9.22. *Мера μ является σ-аддитивной на $\mathfrak{M}$.*

Завершение доказательства.

Итак, нам осталось проверить интегральное равенство.

Лемма 9.23. *Для произвольной функции $f \in C_c(X)$ имеет место равенство*

$$L(f) = \int_X f\, d\mu.$$

Доказательство. Заметим сначала, что достаточно доказать неравенство

$$L(f) \le \int_X f\, d\mu$$

для всех $f \in C_c(X)$. Действительно, если это неравенство доказано, то из линейности функционала L и интеграла следует, что

$$-L(f) = L(-f) \le \int_X (-f)\, d\mu = -\int_X f\, d\mu,$$

то есть обратное неравенство.

Пусть $f \in C_c(X)$, $K = \operatorname{supp} f$ и $[a, b]$ — отрезок, содержащий множество значений функции f. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем y_i так, что $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ и

$$y_0 < a < y_1 < \cdots < y_n = b.$$

Положим

$$E_i = \big\{x : y_{i-1} < f(x) \le y_i\big\} \cap K, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как f — непрерывна, то множества E_i — борелевские, объединение которых равно K. Далее, существуют такие открытые множества V_i, $E_i \subset V_i$, что

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

и $f(x) < y_i + \varepsilon$ для всех $x \in V_i$. По лемме 9.12 существуют функции h_i, $0 \le h_i(x) \le 1$, и $\operatorname{supp} h_i \subset V_i$, $\sum_i h_i = 1$. Следовательно $f = \sum h_i f$, и из леммы 9.14 следует, что

$$\mu(K) \le L\Big(\sum h_i\Big) = \sum_i L(h_i).$$

Так как $h_i f \le (y_i+\varepsilon)h_i$ и $y_i-\varepsilon<f(x)$ на E_i, имеем:

$$
\begin{aligned}
L(f) = \sum_{i=1}^{n} L(h_i\, f) \le \sum_{i=1}^{n}(y_i+\varepsilon)L(h_i) = \sum_{i=1}^{n}\bigl(|a|+y_i+\varepsilon\bigr)L(h_i) - |a|\sum_{i=1}^{n} L(h_i) \le \\
\le \sum_{i=1}^{n}\bigl(|a|+y_i+\varepsilon\bigr)\bigl(\mu(E_i)+\varepsilon/n\bigr) - |a|\mu(K) = \\
= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl(|a|+y_i+\varepsilon\bigr) \le \\
\int_X f\,d\mu + \varepsilon\bigl(2\mu(K)+|a|+b+\varepsilon\bigr).
\end{aligned}
$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, мы доказали требуемое неравенство. Теорема доказана. $\square$