Тема 8

Кратчайшие деревья.

В этом разделе мы обсудим альтернативные формулировки проблемы Штейнера, также структуру решений — кратчайших деревьев.

8.1 Другие постановки проблемы Штейнера

В литературе встречаются и другие постановки общей проблемы Штейнера. Напомним формулировку из раздела 5.2 и приведем еще одну из работы [25].

Пусть X — метрическое пространство, $M \subset X$ — замкнутое и непустое его подмножество,
$$\mathcal{C}(M) = \big\{\Gamma : \Gamma \text{ — замкнутое связное подмножеств } X,\ M \subset \Gamma\big\}$$
и
$$\mathrm{sn}(M) = \inf\{H^1(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{C}(M)\}, \qquad \mathrm{SN}(M) = \big\{\Gamma \in \mathcal{C}(M) : H^1(\Gamma) = \mathrm{sn}(M)\big\}.$$
Каждое $\Gamma \in \mathcal{C}(M)$ мы назвали в разделе 5.2 *кратчайшей сетью, соединяющей* M.

Можно минимизировать меру только «самой сети», не включая «границу», а именно, вместо $\mathcal{C}(M)$ можно рассмотреть класс
$$\mathcal{C}_0(M) = \big\{S \subset X : S \cup M \text{ связно}\big\}$$
и определить
$$\mathrm{sn}_0(M) = \inf\{H^1(S) : S \in \mathcal{C}_0(M)\}, \quad \text{и} \quad \mathrm{SN}_0(M) = \big\{S \in \mathcal{C}_0(M) : H^1(S) = \mathrm{sn}_0(M)\big\}.$$
Заметим, что при таких определениях множество M может быть «большим» (то есть иметь бесконечную H^1-меру), а задача поиска кратчайшей сети остается осмысленной.

Лемма 8.1. *Пусть S — связное подмножество метрического пространства. Тогда $\bar{S}$ тоже связно и $H^1(S) = H^1(\bar{S})$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. При доказательстве второго достаточно рассмотреть случай $H^1(S) < \infty$.

Положим $\mu = H^1 \llcorner S$. Из связности S и следствия 4.3 следует, что для любой точки $x \in S$ и любого $r \le (\operatorname{diam} S)/2$ выполнено

$$\mu\bigl(B_r(x)\bigr) = H^1\bigl(B_r(x) \cap S\bigr) \ge r.$$

Та же самая оценка справедлива и для любого $x \in \bar S$. Действительно, пусть $x_k \to x$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $x \in \bar S$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех k, для которых $|xx_k| < \varepsilon$ выполнено включение $B_r(x_k) \subset B_{r+\varepsilon}(x)$, поэтому $\mu\bigl(B_{r+\varepsilon}(x)\bigr) \ge \limsup_k \mu\bigl(B_r(x_k)\bigr)$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем $\mu\bigl(B_r(x)\bigr) \ge \limsup_k \mu\bigl(B_r(x_k)\bigr) \ge r$, поэтому $\overline{\Theta}_1(\mu, x) \ge 1/2$ для всех $x \in \bar S$, и, применяя теорему 2.20 получаем

$$0 = \mu(\bar S \setminus S) \ge \frac{1}{2} H^1(\bar S \setminus S),$$

откуда и вытекает требуемое. □

Из леммы 8.1 следует, что если рассмотреть вместо $\mathcal{C}(M)$ большее множество

$$\mathcal{C}_1(M) = \bigl\{\Gamma : \Gamma \text{ — связное подмножеств } X,\ M \subset \Gamma\bigr\},$$

т.е. отказаться от замкнутости сети, то

$$\operatorname{sn}_1(M) = \inf\{H^1(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{C}_1(M)\} = \operatorname{sn}(M),$$

и для каждого $\Gamma \in \mathcal{C}_1(M)$, для которого $H^1(\Gamma) = \operatorname{sn}_1(M)$, имеем: $\bar\Gamma \in \mathcal{C}(M)$ и $H^1(\bar\Gamma) = \operatorname{sn}(M)$.

Связь между оставшимися двумя задачами такова.

Утверждение 8.2. *Если $H^1(M) < \infty$, то две описанные выше постановки проблемы Штейнера эквивалентны в следующем смысле*:

- *для любого $S \in \mathrm{SN}_0(M)$ замыкание $\bar\Gamma$ связного множества $\Gamma = S \cup M$ принадлежит $\mathrm{SN}(M)$;*
- *для любого $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ выполнено $S = \Gamma \setminus M \in \mathrm{SN}_0(M)$.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{SN}_0(M)$. Рассмотрим $\Gamma = S \cup M$, тогда $\Gamma \in \mathcal{C}_1(M)$, и предположим, что существует $\Gamma' \in \mathcal{C}_1(M)$, для которого $H^1(\Gamma') < H^1(\Gamma)$. В частности, $H^1(\Gamma') < \infty$, и так как M измеримо, и $M \cap \Gamma' = M \cap \Gamma = M$, то

$$H^1(\Gamma' \setminus M) = H^1(\Gamma') - H^1(M) < H^1(\Gamma) - H^1(M) = H^1(\Gamma \setminus M),$$

а так как $\Gamma = S \cup M$, то $\Gamma \setminus M = S \setminus M$, поэтому

$$H^1(\Gamma' \setminus M) < H^1(\Gamma \setminus M) = H^1(S \setminus M) \le H^1(S),$$

что противоречит минимальности S в $\mathcal{C}_0(M)$, поскольку $\Gamma' \setminus S$ также принадлежит $\mathcal{C}_0(M)$. Таким образом, $\Gamma \in \mathrm{SN}_1(M)$, а $\bar\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$.

Обратно, пусть $\Gamma \in \mathrm{SN}_1(M)$. Предположим, что существует $S \in \mathcal{C}_0(M)$ такое, что $H^1(S) < H^1(\Gamma \setminus M)$. Тогда

$$H^1(S \cup M) \le H^1(S) + H^1(M) < H^1(\Gamma \setminus M) + H^1(M) = H^1(\Gamma),$$

что противоречит минимальности Γ (последнее равенство снова следует из измеримости M). Утверждение доказано. □

Из теоремы существования кратчайшей сети (теорема 5.4) вытекает следующая теорема существования.

Следствие 8.3. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство и $M \subset X$ — замкнутое, непустое и $H^1(M) < \infty$. Если $\mathrm{sn}_0(M) < \infty$, то $\mathrm{SN}_0(M) \neq \emptyset$ и для каждого $S \in \mathrm{SN}_0(M)$ замыкание множества $S \cup M$ является континуумом.*

8.2 Континуумы

Напомним, что связное компактное хаусдорфово пространство, в частности, непустое связное компактное метрическое пространство называется *континуумом*. Именно континуумы являются кандидатами в решения проблемы Штейнера. Обсудим их свойства более детально.

Пусть S — связное пространство. Его точка $x \in S$ называется *разделяющей* или *точкой разреза*, если $S \setminus \{x\}$ не связно.

Теорема 8.4. *Во всяком метрическом континууме X, содержащем не менее двух точек, найдется по крайней мере две точки, которые его не разделяют.*

Доказательство. Покажем, что для любой точки $p \in X$ найдется точка $q \neq p$, которая не разделяет X. Напомним, что компактное метрическое пространство сепарабельно. Поэтому в X существует всюду плотная последовательность точек $p_0 = p, p_1, p_2, \ldots$, причем можно предполагать, что каждая из этих точек, кроме быть может $p_0 = p$, разделяет X (иначе все уже доказано).

Построим последовательность открытых подмножеств $A_0, A_1, A_2, \ldots$ так. Положим $A_0 = X$. Точка p_1 разделяет X, поэтому $X \setminus \{p_1\}$ допускает разложение на два непустых непересекающихся открытых множества. То из них, которое не содержит p_0, обозначим через A_1. Далее, выберем наименьший индекс $i_2 > 1 = i_1$ так, что $p_{i_2} \in A_1$. Тогда снова $X \setminus \{p_{i_2}\}$ допускает разложение на два непустых непересекающихся открытых множества. То из них, которое не содержит $p_{i_1} = p_1$, обозначим через A_2. И так далее: если A_{n-1} уже построено, то выберем такой наименьший индекс $i_n > i_{n-1}$, что $p_{i_n} \in A_{n-1}$ и обозначим через A_n то из двух открытых множеств, на которые распадется $X \setminus \{p_{i_n}\}$, которое не содержит $p_{i_{n-1}}$.

Ясно, что $\bar{A}_n = A_n \cup \{p_{i_n}\}$. Далее,

$$p_{i_n} \in \bar{A}_n \cap A_{n-1}, \qquad \partial A_{n-1} = \{p_{i_{n-1}}\},$$

откуда $\bar{A}_n \cap \partial A_{n-1} = \emptyset$, поэтому $\bar{A}_n \subset A_{n-1}$. Последнее следует из такой леммы.

Лемма 8.5. *Пусть C и A — подмножества некоторого топологического пространства X. Если C связно и оба множества $A \cap C$ и $C \setminus A$ не пусты, то $C \cap \partial A$ не пусто.*

Доказательство. Действительно, $\overline{C \cap A}$ и $\overline{C \setminus A}$ — не пустые замкнутые подмножества в X, поэтому $C \cap (\overline{C \cap A}) \supset A \cap C$ и $C \cap (\overline{C \setminus A}) \supset C \setminus A$ — замкнутые не пустые подмножества C, откуда

$$\emptyset \neq C \cap \overline{C \cap A} \cap \overline{C \setminus A} \subset C \cap \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = C \cap \partial A.$$

Лемма доказана. □

Таким образом, мы получаем монотонную систему замкнутых множеств $\{\bar{A}_i\}$, пересечение которых не пусто и содержится в каждом A_i, пересечение которых поэтому тоже не пусто. Рассмотрим $q \in \cap_i A_i$. По построению, $q \neq p_{i_k}$ для всех $k = 0, 1, \ldots$. Покажем теперь, что точка q не разделяет X, что и завершит доказательство.

Предположим, что M и N — открытые множества, $X \setminus \{q\} = M \cup N$, $M \cap N = \emptyset$, и покажем, что одно из этих множеств пусто. Предположим, что существует бесконечно много i_n, для которых $p_{i_n} \in N$, тогда для каждого такого n имеем $p_{i_n} \notin M \cup \{q\}$, поэтому $\big(M \cup \{q\}\big) \cap \partial A_n = \emptyset$. Далее, как и выше, $\bar{M} = M \cup \{q\}$ — связное подмножество, $q \in A_n$, поэтому $\bar{M} \cap A_n \neq \emptyset$, откуда, снова по лемме 8.5, $M \cup \{q\} \subset A_n$, и значит $M \cup \{q\} \subset \cap_i A_i$.

Если при этом $M \neq \emptyset$, то в нем найдется $p_k \in M$. Выберем n так, чтобы $i_n > k \geq i_{n-1}$. По определению i_n — наименьший индекс, для которого $p_{i_n} \in A_{n-1}$. Но $p_k \in M \subset A_p$ для любого p, в том числе и для $p = n-1$, что противоречит минимальности i_n. Значит M пусто. Теорема доказана. $\square$