Тема 7

Теоремы спрямляемости.

В данном разделе мы выясним, как устроены все связные замкнутые подмножества конечной одномерной меры Хаусдорфа в полном метрическом пространстве.

7.1 Первая теорема спрямляемости

Теорема 7.1 (Первая теорема спрямляемости)**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, и C — непустое связное замкнутое подмножество X, причем $H^1(C) < \infty$. Тогда C компактно, и любые две точки из C соединяются инъективной липшицевой (и, значит, спрямляемой) кривой, лежащей в C.*

Доказательство. Компактность C — это результат предложения 4.4. Нам осталось показать, что любые две точки из C соединяются инъективной липшицевой кривой.

Напомним, что для $\delta > 0$ последовательность $(x_0, \ldots, x_n)$ точек метрического пространства называется *δ-цепью, соединяющей x_0 и x_n*, если расстояния между последовательными точками x_{i-1} и x_i не превосходит δ. По предложению 4.34, для любого $\delta > 0$ любые точки $x, y \in C$ соединяются в C некоторой δ-цепью.

Укорачивая, если необходимо, δ-цепь $(x = x_1, \ldots, x_n = y)$, добьемся того, чтобы $|x_i x_{i+1}| > 0$ при всех i, а также чтобы $|x_i x_j| > \delta$ при $|i-j| > 1$. Обозначим через n_1 и n_2 количества нечетных и четных i между 1 и n. Тогда семейства шаров $\{B_{\delta/2}(x_{2i-1})\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{B_{\delta/2}(x_{2i})\}_{i=1}^{n_2}$ являются дизъюнктными. До конца этого доказательства будем рассматривать только такие δ-цепи.

Выберем теперь $\delta < \operatorname{diam} C$, тогда, в силу следствия 4.3, имеем $H^1\big(B_{\delta/2}(x_i) \cap C\big) \geq \delta/2$, откуда

$$H^1(C) \geq \frac{\delta}{2}\, n_1, \quad H^1(C) \geq \frac{\delta}{2}\, n_2,$$

поэтому, учитывая, что $n_1 + n_2 = n$, получаем $n\,\delta \leq 4H^1(C) =: L$.

Так как C компактно, то оно также сепарабельно, поэтому, в силу предложения 6.31, существует изометричное вложение $\nu\colon C \to \ell^\infty$. Соединяя в ℓ^∞ последовательные точки $\nu(x_i)$ прямолинейными отрезками, получим непрерывную кривую $\bar\gamma_\delta$, длина которой не превосходит L. Очевидным образом параметризуем кривую $\bar\gamma_\delta$ натуральным параметром, и продолжим эту параметризацию на весь отрезок $[0,L]$, положив ее равной постоянному отображению на $\bigl[|\bar\gamma_\delta|, L\bigr]$. Полученное продолжение также обозначим через $\bar\gamma_\delta$. Заметим, что кривая $\bar\gamma_\delta\colon [0,L]\to\ell^\infty$ является 1-липшицевой.

Итак, мы построили семейство 1-липшицевых кривых $\bar\gamma_{1/k} : [0,L]\to\ell^\infty$, которое, в силу предложения 3.9, является равностепенно непрерывным. Кроме того, каждая из этих кривых лежит в $U_{2/k}\bigl(\nu(C)\bigr)$, поэтому применима теорема 6.32, гарантирующая существование кривой $\bar\gamma\colon[0,L]\to\nu(C)$, к которой равномерно сходится некоторая подпоследовательность в последовательности $\bar\gamma_{1/k}$. Последнее дает нам то, что $\bar\gamma$ соединяет $\nu(x)$ и $\nu(y)$, а также, в силу предложения 3.7, что $\bar\gamma$ также является 1-липшицевой кривой.

Положим $\gamma=\nu^{-1}\circ\bar\gamma$, тогда, в силу только что сказанного, γ является 1-липшицевой и, значит, спрямляемой кривой в C, соединяющей x и y. В силу следствия 6.34, существует кратчайшая в C кривая $\gamma_{\min}$, соединяющая эти же точки. Воспользовавшись предложением 6.18, введем на $\gamma_{\min}$ натуральный параметр. Осталось применить предложение 6.25. □

Следствие 7.2. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $M=\{x,y\}\subset X$, и пусть существует непустое замкнутое связное $\Gamma_0\subset X$ такое, что $M\subset\Gamma_0$ и $H^1(\Gamma_0)<\infty$. Тогда $\mathrm{SN}(M)\ne\emptyset$, и каждое $\Gamma\in\mathrm{SN}(M)$ представляет собой образ кратчайшей кривой, соединяющей x и y.*

Доказательство. Непустота $\mathrm{SN}(M)$ вытекает из теоремы 5.4. Таким образом, существует замкнутое связное непустое $\Gamma'\subset X$, $M\subset\Gamma'$, для которого $H^1(\Gamma')=\mathrm{sn}(M)\le H^1(\Gamma_0)<\infty$. В силу теоремы 7.1, множество Γ' компактно, и в Γ' существует спрямляемая кривая γ', соединяющая x и y. По следствию 6.34, точки x и y соединяются некоторой кривой γ, являющейся кратчайшей в Γ'. Обозначим через Γ образ кривой γ, тогда $\Gamma\in\mathcal{C}(M)$ и $H^1(\Gamma)\le H^1(\Gamma')$ в силу монотонности, так что $H^1(\Gamma)=H^1(\Gamma')$, откуда $\Gamma\in\mathrm{SN}(M)$.

Покажем, что $\Gamma=\Gamma'$, чем и завершим доказательство. Предположим противное, т.е. что существует точка $z\in\Gamma'$, не принадлежащая Γ. Так как Γ компактно, то $|z\Gamma|>0$, и существует $w\in\Gamma$ такое, что $|zw|=|z\Gamma|$. Снова воспользуемся следствием 6.34 и построим кратчайшую в Γ' кривую δ, соединяющую z и w, и пусть Δ — образ кривой δ. Так как δ — кратчайшая кривая, то $\Delta\cap\Gamma=\{w\}$ (иначе кривую δ можно укоротить). Это означает, что Γ и Δ почти не пересекаются. По следствию 6.28 и предложению 6.4, имеем $H^1(\Delta)=|\delta|\ge|wz|>0$. Наконец, из монотонности внешней меры и предложения 1.59 вытекает, что

$$H^1(\Gamma')\ge H^1(\Gamma\overset{\text{п.в.}}{\sqcup}\Delta)=H^1(\Gamma)+H^1(\Delta)>H^1(\Gamma),$$

противоречие. □

Пусть V — некоторое конечное подмножество топологического пространства X, а E — конечное семейство образов инъективных кривых в X, каждая из которых соединяет некоторые точки из V. Тогда пара $G=(V,E)$ называется *геометрическим графом в X*, а элементы множеств V и E называются соответственно *вершинами* и *ребрами* графа G. Также *геометрическим графом* будем называть подмножество топологического пространства X, представимое в виде объединения множества вершин и множества ребер некоторого графа G, при этом ребра графа будем отождествлять с их образами. Такое подмножество будем обозначать той же буквой G. Также сохраним те же самые обозначения и для ребер.

Замечание 7.3. Отметим, что каждое бесконечное подмножество можно представить в виде графа бесконечным числом способов, например, мы может "подразбивать ребра" такого геометрического графа, относя произвольные внутренние точки некоторых ребер к вершинам и очевидным образом измельчая такие ребра.

Граф G называется *инъективным*, если различные его ребра пересекаются только по своим концам. Ясно также, что G можно рассматривать как обычный граф, в котором ребра имеют геометрическую интерпретацию. Последнее позволяет применять к геометрическим графам всю терминологию теории графов, см. например [22].

Если геометрический граф $G = (V, E)$ лежит в метрическом пространстве, то определены *длины* $|e|$ *ребер* $e \in E$ как длины кривых e, а также *длина* $|G|$ *всего графа* как сумма длин всех ребер $e \in E$. Так как каждое ребро — инъективная кривая (замкнутая или незамкнутая), то, в силу предложения 6.27, имеем $|e| = H^1(e)$. Кроме того, для инъективного графа $G = (V, E)$ в метрическом пространстве, его семейство ребер E является H^1-почти дизъюнктным покрытием G, поэтому $H^1(G) = \sum_{e\in E} H^1(e) = |G|$.

Пусть M — произвольное конечное подмножество топологического пространства X. Будем говорить, что геометрический граф $G = (V, E)$ в X *соединяет* M, если G связен и $M \subset V$.

Следствие 7.4. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $M \subset X$ — конечное множество, и пусть существует непустое замкнутое связное $\Gamma_0 \subset X$ такое, что $M \subset \Gamma_0$ и $H^1(\Gamma_0) < \infty$. Тогда $\mathrm{SN}(M) \neq \emptyset$, и каждое $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ представляет собой связное инъективное дерево в X, соединяющее M.*

Доказательство. То, что $\mathrm{SN}(M) \neq \emptyset$ доказывается точно так же, как это было сделано в доказательстве следствия 7.2. Кроме того, в доказательстве этого следствия было показано, что каждое $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ является компактным подмножеством X, причем любая пара точек из Γ соединяется кратчайшей в Γ (и, значит, инъективной спрямляемой) кривой. Выберем произвольные две точки $x, y \in M \subset \Gamma$, и пусть γ_1 — кратчайшая в Γ кривая, соединяющая x и y. Через Γ_1 обозначим образ γ_1.

Если все точки из M попали на Γ_1, то они разбивают Γ_1 на образы инъективных спрямляемых кривых, так что Γ_1 — геометрический граф с множеством вершин M, причем, в силу инъективности отображения γ_1, граф Γ_1 является деревом.

Если же в M существует точка z, не лежащая на Γ_1, то, в силу компактности Γ_1, имеем $|z\Gamma_1| > 0$, и существует точка $w \in \Gamma_1$ такая, что $|zw| = |z\Gamma_1|$. Соединим точки z и w кратчайшей в Γ кривой γ_2, и пусть Γ_2 — образ γ_2. В силу минимальности γ_2, имеем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{w\}$. Снова, разбивая множество $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ попавшими на него точками из M, а также точкой w, получим геометрическое дерево. Описанный только что процесс повторим до тех пор, пока все точки из M не будут задействованы. В результате получим дерево $\Gamma' \subset \Gamma$, для которого $H^1(\Gamma') = H^1(\Gamma)$. Остается повторить рассуждения из заключительной части доказательства следствия 7.2 и убедиться, что $\Gamma' = \Gamma$. $\square$

Определение 7.5. Дерево Γ из следствия 7.4 называется *минимальным деревом Штейнера* или *кратчайшим деревом на M*.

Теорема 7.6 (Вторая теорема спрямляемости)**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, и C — непустое связное замкнутое подмножество X, причем $H^1(C) < \infty$. Тогда существует не более чем счетное семейство липшицевых кривых $\gamma_i\colon [0,1] \to C$, $\Gamma_i = \gamma_i\big([0,1]\big)$, такое, что*

$$H^1\Big(C \setminus \bigcup_i \Gamma_i\Big) = 0.$$

Доказательство. По теореме 7.1, множество C компактно, поэтому существуют $x, y \in C$ такие, что $\operatorname{diam} C = |xy|$. По теореме 7.1, точки x и y соединяются липшицевой кривой $\gamma_1\colon [0,1] \to C$. Положим $\Gamma_1 = \gamma_1\big([0,1]\big)$. Дальнейшее построение проведем по индукции.

Предположим, что мы уже построили $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ такие, что $\Gamma_i \subset C$ при всех i, и Γ_i при всех $i \ge 2$ пересекает $\cup_{j<i}\Gamma_j$ ровно по одной точке. Покажем, что если $\{\Gamma_i\}$ не покрывают C, то такое построение можно продолжить.

Итак, пусть $C \ne \cup_{i=1}^k \Gamma_i$. Положим $A_k = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$, тогда $d_k := \sup_{x\in C}\big|xA_k\big| > 0$. Так как C компактно, то существуют $x_k \in C$ такое, что $\big|xx_k\big| = d_k$. Так как A_k компактно, существует $y_k \in A_k$ такое, что $|x_k y_k| = |x_k A_k| = d_k$.

Точки x_k и y_k соединяются липшицевой кривой $\gamma\colon [0,1] \to C$ (теорема 7.1). Пусть t' — точная нижняя грань тех t, для которых $\gamma(t) \in A_k$. Так как A_k замкнуто, то $\gamma(t') \in A_k$. В силу определения, кривая $\gamma|_{[0,t']}$ пересекает A_k только по своей концевой точке. Положим $\Gamma_{k+1} = \gamma\big([0,t']\big)$. Итак, мы получили искомое семейство $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{k+1}$.

В силу следствия 6.5, имеем $d_k \le \big|x\gamma(t')\big| \le H^1(\Gamma_{k+1})$. Кроме того, так как Γ_i и Γ_j при $i \ne j$ пересекаются самое большое по одной точке, то $\{G_i\}_{i=1}^{k+1}$ является H^1-почти дизъюнктивным семейством. В силу предложения 1.59 и монотонности внешней меры, получаем

$$\sum_{i=1}^{k+1} d_i \le \sum_{i=1}^{k+1} H^1(\Gamma_i) = H^1(A_{k+1}) \le H^1(C).$$

Таким образом, или мы за конечное число шагов покроем все C и, тем самым, утверждение теоремы будет выполнено, или же проделанный только что индуктивный переход можно продолжать до бесконечности. Рассмотрим второй случай. Положим $A = \cup_{i=1}^\infty \Gamma_i$.

Из сказанного выше вытекает, что $\sum_{i=1}^\infty d_i \le H^1(C)$, в частности, $d_i \to 0$ при $i \to \infty$. Кроме того, последовательность d_i не возрастает, и расстояние от каждой точки $x \in X \setminus A_k$ до A_k не превосходит d_k, так что

$$C \subset B_{d_k}(A_k) \subset B_{d_k}(A).$$

В силу пункта (4) упражнения 1.6, имеем $\bar A = \cap_{k=1}^\infty B_{d_k}(A)$, поэтому $C \subset \bar A$.

Положим $A^k = \cup_{i=k}^\infty \Gamma_i$ и $A_p^q = \cup_{i=p}^q \Gamma_i$.

Лемма 7.7. *В сделанных обозначениях, при каждом $x \in C \setminus A_k$ и каждом $r > 0$ таком, что $B_r(x) \cap A_k = \emptyset$, выполняется*

$$H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big) \ge r.$$

Доказательство. При каждом i существует точка $x_i \in A_i$ такая, что $|xx_i| = |xA_i|$. Имеется две возможности.

(1) Начиная с некоторого i точка x попала в A_i, тогда при всех $j \geq i$ выполняется $x_i = x$. По построению, $i > k$, множество A_i связно и содержит некоторую точку вне шара $B_r(x)$, так как $B_r(x) \cap A_k = \emptyset$, поэтому, в силу предложения 4.2, имеем $H^1(B_r(x) \cap A_i) \geq r$. Так как $B_r(x) \cap A_k = \emptyset$, то

$$B_r(x) \cap A_i = B_r(x) \cap A_{k+1}^i \subset B_r(x) \cap A^{k+1},$$

откуда

$$H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big) \geq H^1\big(B_r(x) \cap A_i\big) \geq r,$$

что и требовалось.

Пусть теперь x не принадлежит ни одному A_i, тогда при каждом i имеем $0 < |xx_i| \leq d_i$. Так как $d_i \to 0$ при $i \to \infty$, последовательность x_i сходится к x. Выберем произвольное r', тогда, начиная с некоторого i, имеем $B_{r'}(x_i) \subset B_r(x)$, поэтому $H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big) \geq H^1\big(B_{r'}(x_i) \cap A^{k+1}\big)$ и $B_{r'}(x_i) \cap A_k = \emptyset$. Последнее, вместе с предложением 4.2, дает оценку $H^1\big(B_{r'}(x_i) \cap A_i\big) \geq r'$. Снова заметим, что

$$B_{r'}(x_i) \cap A_i = B_{r'}(x_i) \cap A_{k+1}^i \subset B_{r'}(x_i) \cap A^{k+1},$$

поэтому

$$H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big) \geq H^1\big(B_{r'}(x_i) \cap A^{k+1}\big) \geq H^1\big(B_{r'}(x_i) \cap A_i\big) \geq r'.$$

В силу произвольности r', получаем требуемое. □

Определим теперь внешнюю меру μ на X, положив $\mu = H^1 \llcorner A^{k+1}$. Так как A^{k+1} является H^1-измеримым (и даже борелевским), $H^1(A^{k+1}) \leq H^1(C) < \infty$, а внешняя мера H^1 — борелевски регулярна (пункт (5) теоремы 5), то, в силу теоремы 1.43, мера μ — также борелевски регулярна. Тем самым, мы можем применить теорему 2.20, в которой в качестве “A_1” возьмем $C \setminus A_k$, а в качестве “A_2” — множество A.

По лемме 7.7, для каждой точки $x \in C \setminus A_k$ и для всех достаточно маленьких $r > 0$ выполняется $H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big)/r \geq 1$, поэтому, с учетом равенства $\omega_1 = 2$ и того, что $B_r(x) \cap A^{k+1} = B_r(x) \cap A$, получим

$$\overline{\Theta}(\mu, A, x) = \frac{H^1\big(B_r(x) \cap A\big)}{\omega_1\, r} = \frac{H^1\big(B_r(x) \cap A^{k+1}\big)}{2r} \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает, что, в силу теоремы 2.20, выполняется

$$\frac{1}{2} H^1(C \setminus A_k) \leq \mu(A) = (H^1 \llcorner A^{k+1})(A) = H^1(A^{k+1} \cap A) = H^1(A^{k+1}).$$

Так как $C \setminus A \subset C \setminus A_k$, имеем

$$H^1(C \setminus A) \leq H^1(C \setminus A_k) \leq 2H^1(A^{k+1}). \tag{7.1}$$

Так как семейство $\{\Gamma_i\}$ является H^1-почти дизъюнктным, то, в силу предложения 1.59, имеем $H^1\big(\cup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} H^1(\Gamma_i) \le H^1(C) < \infty$, поэтому величина

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} H^1(\Gamma_i) = H^1\Big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Gamma_i\Big) = H^1(A^{k+1})$$

стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, в силу оценки (7.1), получаем

$$H^1(C \setminus A) = H^1\Big(C \setminus \bigcup_i \Gamma_i\Big) = 0,$$

что и требовалось. $\square$