Тема 6

Кривые.

Пусть X — метрическое пространство. Каждое непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to X$ будем называть *кривой в* X. Точки $A = \gamma(a)$ и $B = \gamma(b)$ называются *концами* или *концевыми точками кривой* γ. Также говорят, что γ *соединяет* A *и* B. Если $A = B$, то кривая γ называется *замкнутой* или *петлей*, а если $A \neq B$ — то *незамкнутой*. Незамкнутая кривая γ *инъективна*, если таким является отображение γ. Замкнутая кривая γ *инъективна*, если γ-образы пары различных точек отрезка $[a,b]$ совпадают только в случае пары $\{a,b\}$.

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — произвольная кривая. Для каждого разбиения $\xi = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$ отрезка $[a,b]$ рассмотрим соответствующую ему ломаную $L_\gamma(\xi) = \big(\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)\big)$ (такие ломаные будем называть *вписанными в кривую* γ), тогда величина

$$|\gamma| = \sup\Big\{\big|L_\gamma(\xi)\big| : \xi \text{ — разбиение отрезка } [a,b]\Big\}$$

называется *длиной кривой* γ. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $|\gamma| < \infty$.

Каждый гомеоморфизм $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ (фактически, биективное строго монотонное отображение) будем называть называть *заменой параметра* или *перепараметризацией* кривой γ. Замена параметра φ *сохраняет ориентацию*, если функция φ — монотонно возрастающая. Будем говорить, что кривая $\bar\gamma = \gamma \circ \varphi$ *получается из* γ *заменой параметра*. Иногда, поступая неформально, кривую γ будем записывать как $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, а вместо кривой $\bar\gamma$ с параметром $s = \varphi^{-1}(t)$ будем писать $\gamma(s)$.

Замечание 6.1. Очевидно, длина кривой не меняется при замене параметра, в частности, свойство кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от выбора параметризации.

Приведем примеры спрямляемых кривых.

Пример 6.2. Каждая C-липшицева кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ спрямляемая, так как для любого разбиение ξ отрезка $[a,b]$ имеем $|L_\gamma(\xi)| \le C(b-a)$ и, значит, $|\gamma| \le C(b-a) < \infty$.

Пример 6.3. Любая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема, так как является липшицевой (с константой Липшица, равной максимуму модуля вектора скорости кривой).

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

Предложение 6.4 (Обобщенное неравенство треугольника)**.** *Пусть точки $A, B \in X$ соединяются некоторой кривой γ, тогда $|\gamma| \geq |AB|$.*

Так как образ отрезка — связное множество, из предложения 4.1 получаем следующий результат.

Следствие 6.5. *Пусть γ — кривая в метрическом пространстве X, соединяющая точки A и B, и пусть Γ — образ кривой γ. Тогда $|AB| \leq H^1(\Gamma)$.*

Обозначим через $\Omega(X)$ семейство всех кривых в метрическом пространстве X.

Определение 6.6. Каждое отображение $\Psi\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ называется *функционалом*. Обозначим через $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ функционал, определенный правилом $\mathcal{L}\colon \gamma \mapsto |\gamma|$, и назовем его *функционалом длины*.

Отметим, что на $\Omega(X)$ определены

(1) *ограничение* каждой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ на каждый подотрезок $[c,d] \subset [a,b]$ (это ограничение будем обозначать через $\gamma|_{[c,d]}$);

(2) *склейка* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ тех пар кривых $\gamma_1\colon [a,b] \to X$, $\gamma_2\colon [b,c] \to X$, для которых $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, а именно, $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)\colon [a,c] \to X$ — кривая, ограничения которой на $[a,b]$ и $[b,c]$ совпадают соответственно с γ_1 и γ_2;

(3) *замена параметра*;

(4) *эквивалентность*, отождествляющая кривые, отличающиеся на замену параметризации.

Следующий результат описывает свойства функционала длины.

Теорема 6.7. *Пусть $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ — функционал длины, определенный на кривых метрического пространства X. Тогда $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами*:

(1) **аддитивность:** *если $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ — склейка кривых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X)$, то $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$*;

(2) **непрерывность:** *для любой спрямляемой $\gamma\colon [a,b] \to X$ функция $f(t) = \mathcal{L}\big(\gamma|_{[a,t]}\big)$ непрерывна*;

(3) **независимость от параметра:** *для каждой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ и замены параметра $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ выполняется $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma \circ \psi)$*;

(4) **согласованность с топологией:** *для каждого $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $y \in X \setminus U_\varepsilon(x)$ и кривой $\gamma \in \Omega(X)$, соединяющей x и y, выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \geq \varepsilon$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь пункт (2), докажем его. Выберем произвольное $t \in [a,b]$ и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при всех $s \in [a,b] \cap (t-\delta, t+\delta)$ выполняется $\big|f(t) - f(s)\big| < \varepsilon$. Положим $\ell = |\gamma|$. По определению, существует разбиение ξ отрезка $[a,b]$ такое, что $\ell - \varepsilon/2 < \big|L_\gamma(\xi)\big| \leq \ell$.

Если $t \notin \xi$, добавим его к ξ (полученное разбиение обозначим той же буквой). Ясно, что для полученного разбиения по-прежнему выполняется $\ell - \varepsilon/2 < \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| \le \ell$.

В качестве δ_1 возьмем расстояние от t до ближайшего отличного от t элемента разбиения ξ. Так как подразбиениями разбиения ξ мы можем менять длину ломаной $L_\gamma(\xi)$ лишь в пределах $(\ell - \varepsilon/2, \ell]$, то для каждого $s \in [a,b] \cap (t-\delta_1, t+\delta_1)$ длина $\ell_{ts} = \bigl|f(t) - f(s)\bigr|$ фрагмента кривой γ между точками $\gamma(t)$ и $\gamma(s)$ отличается от $\bigl|\gamma(t)\gamma(s)\bigr|$ менее чем на $\varepsilon/2$. С другой стороны, в силу непрерывности отображения γ, существует такое $\delta_2 > 0$, что при всех $s \in [a,b] \cap (t-\delta_2, t+\delta_2)$ имеем $\bigl|\gamma(t)\gamma(s)\bigr| < \varepsilon/2$. Осталось положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

Приведем еще одно важное свойство функционала длины $\mathcal{L}$.

Предложение 6.8 (Полунепрерывность снизу). *Функционал $\mathcal{L}$ полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности $\gamma_n\colon [a,b] \to X$ спрямляемых кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой кривой γ, имеем*

$$\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n).$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших n выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$, а раз так, то $\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получим требуемое.

Итак, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Выберем такое разбиение $\xi = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$ отрезка $[a,b]$, что $\mathcal{L}(\gamma) - \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| < \varepsilon/2$. Существует N такое, что для любого $n > N$ и всех i выполняется $\bigl|\gamma(t_i)\gamma_n(t_i)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4m}$. Отсюда мгновенно вытекает, что

$$\bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr| < \bigl|\gamma_n(t_{i-1})\gamma_n(t_i)\bigr| + \frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому $\bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| < \bigl|L_{\gamma_n}(\xi)\bigr| + \varepsilon/2$. Таким образом,

$$\mathcal{L}(\gamma) < \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| + \varepsilon/2 < |L_{\gamma_n}(\xi)| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось. □

6.1 Натуральная параметризация, безостановочные кривые

Определение 6.9. Кривая $\gamma(s)$, $s \in [a,b]$, называется *натурально параметризованной*, а параметр s — *натуральным*, если для любых $a \le s_1 \le s_2 \le b$ выполняется $\mathcal{L}(\gamma|_{[s_1,s_2]}) = s_2 - s_1$. Параметр t кривой $\gamma(t)$ называется *равномерным*, а кривая $\gamma(t)$ — *равномерно параметризованной*, если для некоторого $\lambda \ge 0$ кривая $\gamma(\lambda s)$ натурально параметризована. При этом λ называется *скоростью кривой* γ. В частности, скорость натурально параметризованной кривой равна 1.

Замечание 6.10. Натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$ является 1-липшицевой, а равномерная кривая $\gamma(t)$ такая, что $\gamma(\lambda s)$ — натурально параметризованная кривая, также является липшицевой, но с константой Липшица λ.

Замечание 6.11. Не всякая кривая может быть параметризована натуральным параметром, например, это нельзя сделать с кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$, $a\ne b$, являющейся отображением в точку. Более общо, это нельзя сделать, если кривая γ "останавливается" на некотором невырожденном отрезке $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, т.е. ограничение γ на этот отрезок есть отображение в точку. Если запретить такие "остановки", то этого оказывается достаточным для существования натуральной параметризации.

Определение 6.12. Кривая $\gamma:[a,b]\to X$ называется *безостановочной*, если любых любых $a\le t_1<t_2\le b$ ограничение $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ не является постоянным отображением.

Предложение 6.13. *Пусть $\gamma:[a,b]\to X$ — безостановочная спрямляемая кривая, тогда функция $f(t)=\mathcal{L}(\gamma|_{[a,t]})$ строго монотонна.*

Доказательство. Пусть $a\le t_1<t_2\le b$, тогда $f(t_2)-f(t_1)=\mathcal{L}\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big)>0$, так как отображение $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ — не постоянное. □

Предложение 6.14. *Для любой безостановочной спрямляемой кривой $\gamma(t)$, $t\in[a,b]$, существует такая замена параметра φ, что кривая $\gamma\circ\varphi$ — натурально параметризована.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t)=\mathcal{L}\big(\gamma_{[a,t]}\big)$, тогда, в силу пункта (2) предложения 6.7, эта функция непрерывна, а, в силу предложения 6.13, она еще и строго монотонна, поэтому f непрерывно и биективно отображает отрезок $[a,b]$ на отрезок $\big[0,\mathcal{L}(\gamma)\big]$. Так как отрезок компактен, отображение f — гомеоморфизм, поэтому $\varphi=f^{-1}$ — замена параметра на кривой γ. Для любых $0\le s_1\le s_2\le\mathcal{L}(\gamma)$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma\circ\varphi|_{[s_1,s_2]})=\mathcal{L}(\gamma|_{[\varphi(s_1),\varphi(s_2)]})=\mathcal{L}(\gamma|_{[a,\varphi(s_2)]})-\mathcal{L}(\gamma|_{[a,\varphi(s_1)]})=\\ =f\big(\varphi(s_2)\big)-f\big(\varphi(s_1)\big)=s_2-s_1,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Замечание 6.15. Если в предложении 6.14 в качеств φ взять функцию f^{-1}/λ, $\lambda>0$, то получим равномерно параметризованную кривую, скорость которой равна λ. Важный частный случай таких кривых возникает при $\lambda=|\gamma|$: здесь равномерная кривая $\gamma\circ\varphi$ параметризована отрезком $[0,1]$ и имеет скорость, равную $|\gamma|$.

В [3] предлагается расширить класс замен параметра, а именно, рассматривать монотонные (не обязательно строго монотонные) сюръективные отображения между параметризующими отрезками. Оказывается, при таком определении замены параметризации удается ввести натуральный параметр на любой спрямляемой кривой.

Определение 6.16. Скажем, что кривые $\gamma\colon[a,b]\to X$ и $\bar\gamma\colon[c,d]\to X$ получены друг из друга *монотонной заменой параметра*, если или существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$ такое, что $\bar\gamma=\gamma\circ\varphi$, или же существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon[a,b]\to[c,d]$ такое, что $\gamma=\bar\gamma\circ\varphi$.

Пункт (3) из теоремы 6.7 непосредственно обобщается и на монотонные замены.

Предложение 6.17. *Кривые, отличающиеся друг от друга на монотонную замену параметра, имеют одинаковые длины.*

Имеет место следующий результат (идею доказательства см. в наших предыдущих лекциях).

Предложение 6.18. *Для произвольной спрямляемой кривой* $\gamma\colon [a,b]\to X$ *в метрическом пространстве* X *существует натурально параметризованная кривая* $\big[0,|\gamma|\big]\to X$ *и равномерно параметризованная кривая* $[0,1]\to X$ *со скоростью* $|\gamma|$*, причем обе эти кривые получены из* γ *некоторыми монотонными заменами параметра.*

Замечание 6.19. Если кривая γ представляет собой отображение в точку, то параметризующий отрезок $\big[0,|\gamma|\big]$ вырождается в точку (в этом случае замена параметра φ отображает $[a,b]$ в точку $\{0\}=[0,0]$); чтобы получить равномерно параметризованную кривую $[0,1]\to X$ со скоростью $|\gamma|=0$, достаточно рассмотреть любое сюръективное монотонное отображение из $[0,1]$ в $[a,b]$ и взять композицию его и γ.

6.2 Кратчайшие кривые и геодезические

Определение 6.20. Спрямляемая кривая $\gamma\colon [a,b]\to X$ в метрическом пространстве X, соединяющая точки A и B из X, называется *кратчайшей*, если $\mathcal{L}(\gamma)$ равно точной нижней грани длин $\mathcal{L}(\delta)$ всех спрямляемых кривых δ, соединяющих A и B.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 6.21. *Кривая* γ *в метрическом пространстве является кратчайшей, если и только если каждый ее отрезок — кратчайшая кривая.*

Определение 6.22. Кривая $\gamma\colon [a,b]\to X$ в метрическом пространстве X называется *локально кратчайшей*, если для каждого $t\in[a,b]$ существует такой содержащий t интервал $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$, что $\gamma|_{[\alpha,\beta]\cap[a,b]}$ — кратчайшая кривая.

Определение 6.23. Равномерно параметризованная локально кратчайшая кривая называется *геодезической*.

Следующий результат мгновенно вытекает из предложения 6.18.

Следствие 6.24. *Пусть* $\gamma\colon [a,b]\to X$ *— локально кратчайшая кривая. Тогда существует монотонная замена параметра, превращающая* γ *в натурально параметризованную геодезическую.*

Предложение 6.25. *Каждая кратчайшая натурально параметризованная кривая* $\gamma\colon [a,b]\to X$ *в метрическом пространстве* X *является инъективным отображением.*

Доказательство. Если кривая γ является отображением в точку, то $[a,b]=[a,a]=\{a\}$, поэтому γ — инъективно.

Пусть теперь $\gamma(s)$, $s\in[a,b]$, — неточечная натурально параметризованная кривая, и предположим, что для некоторых $a\le s_1<s_2\le b$ имеем $\gamma(s_1)=\gamma(s_2)$. Выкинув из кривой γ ее часть между s_1 и s_2, мы снова получим непрерывную кривую, соединяющую те же точки, но имеющую длину $|\gamma|-(s_2-s_1)<|\gamma|$, противоречие с тем, что γ — кратчайшая. □

Предложение 6.26. *Если $\gamma\colon [a,b] \to X$ — произвольная кривая в метрическом пространстве X, и Γ — ее образ. Тогда $H^1(\Gamma) \le |\gamma|$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\delta > 0$ имеем $H^1_\delta(\Gamma) \le |\gamma|$. Так как γ — непрерывная функция на компакте $[a,b]$, она — равномерно непрерывна, поэтому существует такое разбиение $\xi = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$ отрезка $[a,b]$, что если $\Gamma_i = \gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big)$, то $\operatorname{diam}\Gamma_i < \delta$. Отсюда вытекает, что семейство $\{\Gamma_i\}_{i=1}^m$ является δ-покрытием Γ, откуда

$$H^1_\delta(\Gamma) \le \sum_{i=1}^m \operatorname{diam}\Gamma_i.$$

С другой стороны, если $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, то, по предложению 6.4, имеем $\operatorname{diam}\Gamma_i \le |\gamma_i|$, откуда, учитывая, что $|\gamma| = \sum_{i=1}^m |\gamma_i|$ (аддитивность функционала длины, пункт (1) теоремы 6.7), заключаем требуемое. □

Предложение 6.27. *Если $\gamma\colon [a,b] \to X$ — инъективная кривая в метрическом пространстве X, и Γ — ее образ, то $|\gamma| = H^1(\Gamma)$.*

Доказательство. В силу предложения 6.26, для инъективной кривой γ достаточно проверить, что $H^1(\Gamma) \ge |\gamma|$. Последнее равносильно тому, что для любого разбиения $\xi = (a = t_0 < t_1 \big\langle \cdots < t_m = b)$ отрезка $[a,b]$ выполняется

$$H^1(\Gamma) \ge \sum_{i=1}^m \big|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\big|.$$

Положим $\Gamma_i = \gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big)$, тогда Γ_i — компактное связное подмножество в X. По предложению 4.1, имеем $H^1(\Gamma_i) \ge \operatorname{diam}\Gamma_i$. Учитывая, что $\operatorname{diam}\Gamma_i \ge \big|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\big|$, а также что Γ_i пересекаются не более чем по точке, т.е. $\{G_i\}$ является H^1-почти дизъюнктным покрытием множества Γ, получаем, в силу предложения 1.59,

$$H^1(\Gamma) = \sum_{i=1}^m H^1(\Gamma_i) \ge \sum_{i=1}^m \operatorname{diam}\Gamma_i \ge \sum_{i=1}^m \big|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\big|,$$

что и требовалось. □

Комбинируя предложения 6.18, 6.25 и 6.27, а также то, что длина кривой не зависит от монотонной параметризации (предложение 6.17), приходим к следующему результату.

Следствие 6.28. *Пусть γ — кратчайшая кривая в метрическом пространстве и Γ — ее образ. Тогда $|\gamma| = H^1(\Gamma)$.*

6.3 Теорема Арцела–Асколи и ее следствия

Напомним несколько нужных нам понятий и теорем (подробности можно найти в наших предыдущих лекциях).

Определение 6.29. Для метрического пространства X и вещественного числа $\varepsilon > 0$, множество $A \subset X$ называется *ε-сетью*, если для любого $x \in X$ существует $a \in A$ такое, что $|xa| < \varepsilon$. Пространство X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть.

Предложение 6.30. *Метрическое пространство X является компактным, если и только если оно полное и вполне ограниченное.*

Пусть ℓ^∞ обозначает векторное пространство вещественных ограниченных последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots)$ с нормой $\|a\|_\infty = \sup\big\{|a_i| : i = 1, 2, \ldots\big\}$. Эта норма определяет стандартным образом функцию расстояния на ℓ^∞, превращая это векторное пространство в полное метрическое.

Предложение 6.31. *Для каждого сепарабельного метрического пространства X существует изометричное вложение $\nu\colon X \to \ell^\infty$.*

Ниже приводится модификация [5] теоремы Арцела-Асколи, которая доказывается так же, как и оригинал (см. наши предыдущие лекции). Понятия равномерной сходимости и равностепенной непрерывности были введены нами выше, см. определения 3.3 и 3.8.

Теорема 6.32 (Арцела–Асколи, модифицированная)**.** *Пусть $\{\gamma_i\colon K \to X\}_{i=1}^\infty$ — равностепенно непрерывное семейство отображений из компактного метрического пространства K в метрическое пространство X. Предположим, что существует такое компактное $C \subset X$, что для любого $\delta > 0$, начиная с некоторого i, зависящего от δ, выполняется $\gamma_i(K) \subset U_\delta(C)$. Тогда существует такое $\gamma\colon K \to C$, что некоторая подпоследовательность $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots$ равномерно сходится к γ.*

Приводимое ниже следствие в предыдущих наших лекциях фигурировало как теорема Арцела–Асколи. Сейчас же мы выведем этот результат из теоремы 6.32

Следствие 6.33. *Пусть X — компактное метрическое пространство, и γ_n — последовательность кривых в X. Предположим, что длины кривых γ_i равномерно ограничены, т.е. существует $M \ge 0$ такое, что $|\gamma_i| \le M$ для всех i. Тогда в этой последовательности существует подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой кривой γ, причем*

$$|\gamma| \le \liminf |\gamma_i| \le M.$$

Доказательство. По предложению 6.18, все кривые γ_i можно равномерно параметризовать отрезком $[0, 1]$, при этом скорость так параметризованной кривой γ_i будет равна $|\gamma_i|$ и, в силу предположения, эти скорости будут ограничены числом M. Полученные после такой замены параметра кривые снова обозначим через γ_i.

В силу замечания 6.10, отображения γ_i являются M-липшицевыми, поэтому, по предложению 3.9, семейство $\{\gamma_i\}$ является равностепенно непрерывным. Так как X — компактно, то его можно взять в качестве “C” из теоремы 6.32, следовательно, в силу этой теоремы, последовательность γ_i равномерно сходится к некоторой кривой $\gamma\colon [0, 1] \to X$. Осталось применить предложение 6.8. $\square$

Следствие 6.34. *Любые две точки A и B компактного метрического пространства X, которые соединяются спрямляемой кривой, соединяются также кратчайшей кривой.*

Доказательство. Пусть ℓ равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих A и B. По определению инфимума, существует последовательность γ_i кривых, соединяющих A и B, для которой $|\gamma_i| \to \ell$. Но тогда длины кривых γ_i равномерно ограничены и применимо следствие 6.33, в соответствии с которым в последовательности γ_i имеется подпоследовательность γ_{i_k}, равномерно сходящаяся к некоторой кривой γ, для которой выполняется $|\gamma| \le \liminf_{n\to\infty} |\gamma_{k_n}| = \ell$. Но, по определению ℓ, имеем $|\gamma| \ge \ell$, поэтому $|\gamma| = \ell$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. $\square$