Тема 5

Теорема Голомба и существование кратчайших сетей.

Доказательство следующего результата, обобщающего знаменитую теорему Голомба [14], [15], взято из [16]. Менее элементарные предыдущие версии доказательства теоремы Голомба можно найти в [5], где имеется неточность, и в [17], где неточность исправлена.

5.1 Теорема Голомба

Теорема 5.1 (Голомб). *Пусть X — произвольное метрическое пространство, $m \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{F}_m$ — семейство всех непустых компактных подмножеств X, каждое из которых имеет не более чем m связных компонент. Превратим $\mathcal{F}_m$ в метрическое пространство, наделив его метрикой Хаусдорфа. Тогда функция $H^1\colon \mathcal{F}_m \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной снизу, т.е. для любой последовательности K_n элементов из $\mathcal{F}_m$, сходящейся в некоторому $K \in \mathcal{F}_m$, выполняется*

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge H^1(K).$$

Доказательство. Из теоремы 4.27 вытекает, что для доказательство достаточно проверить следующее условие: для любого конечного дизъюнктного семейства $\{C_i\}_{i=1}^p$ континуумов $C_i \subset K$ выполняется

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge \sum_{i=1}^p \operatorname{diam} C_i.$$

Рассмотрим два случая.

(1) Пусть сначала $p = 1$. Положим $C = C_1$. Мы должны показать, что

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge \operatorname{diam} C.$$

Так как множество C компактно, то существуют $x, x' \in C$ такие, что $\operatorname{diam} C = |xx'|$. Так как множество C связно, оно, в силу предложения 4.34, является и δ-связным для любого $\delta \in (0, \infty)$ и, значит, существует δ-цепь $C' := (x_0 = x, x_1, \ldots, x_s = x') \subset C$.

Пусть N выбрано так, что для любого $n \ge N$ выполняется $d_H(K_n, K) < \delta$. Тогда, в силу определения расстояния Хаусдорфа, $C \subset K \subset U_\delta(K_n)$, поэтому для каждой точки x_j найдется точка $y_j \in K_n$ такая, что $|x_j y_j| < \delta$. Положим $K_n' = (y_0, \ldots, y_s)$. Тогда K_n' является (3δ)-цепью в K_n, причем $\operatorname{diam} K_n' \ge |y_0 y_s| > |xx'| - 2\delta = \operatorname{diam} C - 2\delta$.

Применим теперь теорему 4.40, в которой “K”, “A”, “F” и “δ” заменены нашими K_n, K_n', X и 3δ соответственно, а “r” выбрано любым (это можно сделать в силу того, что $\partial X = \emptyset$, поэтому $|K_n' \, \partial X| = \infty$ и, значит, неравенство $|K_n' \, \partial X| \ge r$ выполняется для любого r). Получим

$$H^1(K_n) = H^1(K_n \cap X) \ge \Big(1 - \frac{3\delta}{r}\Big) \operatorname{diam} K_n' - 3\delta(m-1) \ge \Big(1 - \frac{3\delta}{r}\Big)(\operatorname{diam} C - 2\delta) - 3\delta(m-1).$$

Чтобы завершить доказательство в этом случае, перейдем сначала к $\liminf$ при $n \to \infty$, а затем устремим δ к 0.

(2) Пусть теперь $p > 1$. Так как компакты C_i попарно не пересекаются и их конечное число, то $R := \min\big\{|C_i C_j| : i \ne j\big\} > 0$. Выберем произвольное $0 < r < R/2$, тогда $F_i := B_r(C_i)$ — замкнутые подмножества X, образующие дизъюнктное семейство $\{F_i\}$.

Напомним нужные нам свойства нижнего предела.

Лемма 5.2. *Пусть a_n и b_n — произвольные числовые последовательности. Тогда*

(1) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$, *если правая часть неравенства определена*;

(2) *если $a_n \le b_n$ при всех n, то* $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$.

Так как $\{K_n \cap F_i\}_{i=1}^p$ — дизъюнктное семейство борелевских подмножеств X, а внешняя мера H^1 — борелевская, имеем

$$H^1(K_n) \ge H^1\Big(\bigcup_{i=1}^p (K_n \cap F_i)\Big) = \sum_{i=1}^p H^1(K_n \cap F_i).$$

Из леммы 5.2 вытекает, что

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n) \ge \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^p H^1(K_n \cap F_i) \ge \sum_{i=1}^p \liminf_{n\to\infty} H^1(K_n \cap F_i),$$

поэтому для завершения доказательства в этом случае достаточно показать, что

$$\liminf_{n\to\infty} H^1(K_n \cap F_i) \ge \operatorname{diam} C_i.$$

Именно это мы сейчас и сделаем.

Фиксируем некоторое i и произвольное $\delta \in (0, r)$. Выберем точки $x, x' \in C_i$ так, чтобы $|xx'| = \operatorname{diam} C_i$. Как мы уже отвечали, в силу предложения 4.34 множество C_i является δ-связным, поэтому существует δ-цепь $C_i' := (x_0 = x, x_1, \ldots, x_s = x') \subset C_i$.

Пусть снова N выбрано так, что для любого $n \ge N$ выполняется $d_H(K_n, K) < \delta$, а $K'_n := (y_0, \dots, y_s) \subset K_n$ — это (3δ)-цепь такая, что $|x_j y_j| < \delta$ при всех $j = 0, \dots, s$. Как и выше, $\operatorname{diam} K'_n > \operatorname{diam} C_i - 2\delta$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, а Y и Z — непустые подмножества X. Тогда*

(1) *если $Z \subset Y$, то $|Z\,\partial Y| \ge \bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr|$;*

(2) *если $d_H(Y, Z) < \delta$ для некоторого $\delta \in (0, \infty)$, то для любого $A \subset X$ имеем $|YA| \ge |ZA| - \delta$;*

(3) *если $Z \subset Y$, то для любого $A \subset X$ имеем $|ZA| \ge |YA|$;*

(4) *если Z — непустое подмножество X, $r \in (0, \infty)$ и $Y = B_r(Z)$, то $\bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr| \ge r$.*

Доказательство. (1) Пусть сначала $\partial Y = \emptyset$ (например, $Y = X$), тогда, в силу соглашения 4.39, получаем $|Z\,\partial Y| = \infty$, и неравенство выполняется при любой правой части.

Пусть теперь $\partial Y \ne \emptyset$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существуют такие $z \in Z$ и $y \in \partial Y$, что $|zy| < |Z\,\partial Y| + \varepsilon$. Так как $y \in \partial Y$, множество $U_\varepsilon(y) \cap (X \setminus Y)$ непусто, то существует $x \in X \setminus Y$ такой, что $|yx| < \varepsilon$. Но тогда

$$\bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr| \le |zx| \le |zy| + |yx| < |Z\,\partial Y| + 2\varepsilon.$$

Осталось устремить ε к 0.

(2) Выберем произвольные $y \in Y$ и $a \in A$. Так как $d_H(Y, Z) < \delta$, то $Y \subset U_\delta(Z)$, поэтому существует $z \in Z$ такое, что $|zy| < \delta$. Но тогда $|ya| \ge |za| - |zy| > |za| - \delta$. Так как y и a произвольны, имеем $|YA| \ge |zA| - \delta \ge |ZA| - \delta$.

(3) Это следует из того, что при вычислении величины $|ZA|$ мы берем инфимум по множеству, содержащемуся во множестве, по которому берется инфимум, равный $|YA|$.

(4) Если $Y = X$, то, в силу соглашения 4.39, имеем $\bigl|Z\,(X \setminus Y)\bigr| = \infty$, так что неравенство имеет место.

Пусть теперь $Y \ne X$. Тогда для каждых $z \in Z$ и $x \in X \setminus Y$ выполняется $|xz| > r$, так как в противном случае $x \in B_r(Z) = Y$. $\square$

Замечая, что $d_H(K'_n, C'_i) < \delta$ и применяя лемму 5.3, получим

$$|K'_n\,\partial F_i| \ge \bigl|K'_n\,(X \setminus F_i)\bigr| \ge \bigl|C'_i\,(X \setminus F_i)\bigr| - \delta \ge \bigl|C_i\,(X \setminus F_i)\bigr| - \delta \ge r - \delta.$$

Заметим также, что $K'_n \subset F_i$. Действительно, так как для каждой точки $y_j \in K'_n$ и точки $x_j \in C'_i \subset C_i$ выполняется $|y_j x_j| < \delta < r$, то $y_j \in B_r(C_i) = F_i$.

Последнее замечание позволяет применить теорему 4.40, в которой “K”, “A”, “F”, “δ” и “r” заменены на K_n, K'_n, F_i, 3δ и $r - \delta$ соответственно. Имеем

$$H^1(K_n \cap F_i) \ge \Bigl(1 - \frac{3\delta}{r - \delta}\Bigr) \operatorname{diam} K'_n - 3\delta(m-1) \ge \Bigl(1 - \frac{3\delta}{r - \delta}\Bigr)(\operatorname{diam} C_i - 2\delta) - 3\delta(m-1).$$

Чтобы получить требуемое, перейдем сначала к $\liminf$ при $n \to \infty$, а затем устремим δ к 0. $\square$

5.2 Теорема существования кратчайших сетей

Пусть X — метрическое пространство, и $M \subset X$ — замкнутое и непустое. Обозначим через $\mathcal{C}(M)$ множество всех замкнутых связных подмножеств X, содержащих M.

Положим
$$\operatorname{sn}(M) = \inf\{H^1(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{C}(M)\}.$$
Каждое $\Gamma \in \mathcal{C}(M)$, для которого $H^1(\Gamma) = \operatorname{sn}(M)$, будем называть *кратчайшей сетью, соединяющей* M или *на* M. Множество всех кратчайших сетей на M обозначим через $\operatorname{SN}(M)$. Отметим, что $\operatorname{SN}(M)$ может быть пустым.

Напомним, что метрическое пространство называется *ограниченно компактным*, если все его замкнутые ограниченные подмножества компактны. Эквивалентное условие: все замкнутые шары конечного радиуса компактны (при этом можно рассматривать не все шары, а лишь шары с некоторым фиксированным центром).

Теорема 5.4. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство и $M \subset X$ — замкнутое и непустое. Если $\operatorname{sn}(M) < \infty$, то $\operatorname{SN}(M) \neq \emptyset$ и каждое $\Gamma \in \operatorname{SN}(M)$ является континуумом.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_n \in \mathcal{C}(M)$, $n \in \mathbb{N}$, — минимизирующая последовательность, т.е. $H^1(\Gamma_n) \to \operatorname{sn}(M) < \infty$. Без ограничения общности, будем считать, что $H^1(\Gamma_n) \le \operatorname{sn}(M) + 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Сведем доказательство к случаю компактного X. Для этого выберем произвольное $x \in M$ и положим $r_n = (\operatorname{diam}\Gamma_n)/4$. Если $r_n = 0$, то $\Gamma_n = \{x\}$; если же $r_n > 0$, то $r_n < (\operatorname{diam}\Gamma_n)/2$ и, по следствию 4.3,
$$\operatorname{sn}(M) + 1 \ge H^1\big(\Gamma_n \cap B_{r_n}(x)\big) \ge r_n = \frac{\operatorname{diam}\Gamma_n}{4},$$
поэтому $\operatorname{diam}\Gamma_n \le 4\big(\operatorname{sn}(M)+1\big)$, так что все Γ_n лежат в шаре $B_r(x)$ радиуса $r = 4\big(\operatorname{sn}(M)+1\big)$. В силу того, что X — ограниченно компактное, этот шар — компакт. Таким образом, мы будем сразу, не ограничивая общности, предполагать, что X — компакт.

Из пункта (3) теоремы 3.16 вытекает, что некоторая подпоследовательность последовательности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ сходится по Хаусдорфу к непустому компактному $\Gamma \subset X$. Без ограничения общности, сразу будем считать, что $\Gamma_n \xrightarrow{\mathrm{H}} \Gamma$.

Лемма 5.5. *В сделанных выше предположениях, имеем $M \subset \Gamma$.*

Доказательство. Если это не так, то существует $x \in M \setminus \Gamma$. Так как Γ — компакт, то $d := |x\Gamma| > 0$. Так как $\Gamma_n \xrightarrow{\mathrm{H}} \Gamma$, существует N такой, что для любого $n \ge N$ выполняется $d_H(\Gamma_n, \Gamma) < d/2$, поэтому для этих n имеем $x \in M \subset \Gamma_n \subset U_{d/2}(\Gamma)$. Однако, $x \notin U_{d/2}(\Gamma)$ в силу $|x\Gamma| = d$, противоречие. $\square$

Лемма 5.6. *В сделанных выше предположениях, Γ — связно.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть Γ' и Γ'' — непустые замкнутые подмножества Γ такие, что $\Gamma = \Gamma' \sqcup \Gamma''$. Так как Γ — компакт, что Γ' и Γ'' — тоже компакты, поэтому $d := |\Gamma'\Gamma''| > 0$, так что $U_{d/4}(\Gamma) = U_{d/4}(\Gamma') \sqcup U_{d/4}(\Gamma'')$.

Так как $\Gamma_n \xrightarrow{\text{H}} \Gamma$, существует N такой, что для любого $n > N$ выполняется $d_H(\Gamma_n, \Gamma) < d/4$, поэтому для таких n имеем $\Gamma_n \subset U_{d/4}(\Gamma)$ и $\Gamma \subset U_{d/4}(\Gamma_n)$.

Так как Γ_n связно, то Γ_n целиком лежит или в $U_{d/4}(\Gamma')$, или в $U_{d/4}(\Gamma'')$. Без ограничения общности, предположим, что $\Gamma_n \subset U_{d/4}(\Gamma')$, но тогда, в силу пункта (6) упражнения 1.6, выполняется $|\Gamma_n\Gamma''| \ge 3d/4$, поэтому $\Gamma'' \not\subset U_{3d/4}(\Gamma_n)$, а, значит, $\Gamma \not\subset U_{3d/4}(\Gamma_n)$ и $d_H(\Gamma_n, \Gamma) \ge 3d/4$, противоречие. $\square$

Из лемм 5.5 и 5.6 вытекает, что $\Gamma \in \mathcal{C}(M)$. По теореме 5.1, имеем

$$\operatorname{sn}(M) = \lim_{n\to\infty} H^1(\Gamma_n) = \liminf_{n\to\infty} H^1(\Gamma_n) \ge H^1(\Gamma),$$

поэтому $H^1(\Gamma) = \operatorname{sn}(M)$ и, значит, $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$, так что $\mathrm{SN}(M)$ непусто. Компактность каждого $\Gamma \in \mathrm{SN}(M)$ следует из того, что такие Γ — замкнутые подмножества компакта X. $\square$

Следующий шаг состоит в изучении геометрии кратчайших сетей, чему посвящены дальнейшие лекции.