Тема 4

Одномерная мера Хаусдорфа.

Пусть X — произвольное метрическое пространство.

Предложение 4.1. *Для связного $C \subset X$ и любого $\delta \in (0,\infty)$ выполняется*

$$H^1_\delta(C) \ge \operatorname{diam} C, \ \text{\textit{так что}}\ H^1(C) \ge \operatorname{diam} C.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $H^1_\delta(C) \ge |xy|$ для любых $x, y \in C$ (утверждение для H^1 получается предельным переходом при $\delta \to 0+$). Выберем некоторый $x \in C$ и положим $\varphi(y) = |xy|$, тогда, в силу пункта (2) замечания 3.2, функция φ является 1-липшицевой. Следствие 3.13, пример 2.14 и то, что непрерывный образ связного множества связен, приводят к следующей цепочке:

$$H^1_\delta(C) \ge H^1_\delta\big(\varphi(C)\big) = L^1\big(\varphi(C)\big) = \operatorname{diam}\varphi(C) \ge \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| = |xy|,$$

что и требовалось. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть $C \subset X$ связно, $x \in C$, $r \in [0,\infty)$ и $C \setminus B_r(x) \ne \emptyset$. Тогда*

$$H^1\big(C \cap B_r(x)\big) \ge r.$$

Доказательство. Положим $\varphi(y) = |xy|$, $y \in X$. По пункту (2) замечания 3.2, отображение φ является 1-липшицевым, поэтому, в силу следствия 3.13,

$$H^1\Big(\varphi\big(C \cap B_r(x)\big)\Big) \le H^1\big(C \cap B_r(x)\big).$$

Так как $C \setminus B_r(x) \ne \emptyset$, существует $y \in C \setminus B_r(x)$. Покажем, что $\varphi\big(C \cap B_r(x)\big)$ — отрезок $[0, r]$ (возможно вырожденный).

Действительно, предположим противное, т.е. существует $s \in [0, r]$ такое, что $s \notin \varphi\big(C \cap B_r(x)\big)$. Так как $\varphi(x) = 0$, то $s > 0$, но тогда

$$C = \big(C \cap U_s(x)\big) \sqcup \Big(C \cap \big(X \setminus B_s(x)\big)\Big),$$

причем $x \in C \cap U_s(x)$, $y \in C \cap \big(X \setminus B_s(x)\big)$, поэтому C — несвязно, противоречие.

Из сказанного и примера 2.14 вытекает, что $H^1\Big(\varphi\big(C \cap B_r(x)\big)\Big) = L^1\Big(\varphi\big(C \cap B_r(x)\big)\Big) = r$, так что $H^1\big(C \cap B_r(x)\big) \ge r$. $\square$

Следствие 4.3. *Пусть $C \subset X$ связно, причем $0 \le r < (\operatorname{diam} C)/2$, тогда для любого $x \in C$ выполняется*
$$H^1\big(C \cap B_r(x)\big) \ge r.$$

Доказательство. Так как $r < (\operatorname{diam} C)/2$, то $C \setminus B_r(x) \ne \emptyset$, и остается применить предложение 4.2. □

Следствие 4.3 играет важную роль в доказательстве следующего результата.

Предложение 4.4. *Пусть X — полное метрическое пространство, и C — непустое связное замкнутое подмножество X, причем $H^1(C) < \infty$. Тогда C компактно.*

Доказательство. Так как X — полное пространство и $C \subset X$ — замкнутое, то C также полное. Поэтому для доказательства компактности C достаточно проверить, что C — вполне ограничено.

Предположим противное, т.е. нашлось такое $\varepsilon > 0$, что для него нет конечной ε-сети. Выберем произвольную точку $x_1 \in C$. В силу предположения, существует $x_2 \in C$ такая, что $|x_1x_2| \ge \varepsilon$. Далее, снова в силу предположения, существует $x_3 \in C$ такое, что $|x_1x_3| \ge \varepsilon$ и $|x_2x_3| \ge \varepsilon$, причем этот процесс можно продолжать до бесконечности. Тем самым, мы построили счетное подмножество $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ множества C такое, что $|x_ix_j| \ge \varepsilon$ при $i \ne j$. Отсюда вытекает, что семейство $\{B_i := B_{\varepsilon/3}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ — дизъюнктно. Так как C и все B_i — борелевские, а внешняя мера H^1 — также борелевская, то

$$H^1(C) \ge H^1\Big(\bigcup_{i=1}^\infty (C \cap B_i)\Big) = \sum_{i=1}^\infty H^1(C \cap B_i).$$

Так как $\operatorname{diam} C \ge \varepsilon$, то, в силу следствия 4.3, имеем $H^1(C \cap B_i) \ge \varepsilon/3$, откуда $H^1(C) = \infty$, противоречие, доказывающее компактность C. □

Для доказательства следующего результата нам понадобится следствие из общей топологии, относящегося к теории квазикомпонент. Приведен необходимые нам определения и утверждения этой теории.

4.1 Квазикомпоненты

В данном разделе X обозначает произвольное топологическое пространство. Нам понадобится понятие квазикомпоненты, см. [18].

Определение 4.5. *Квазикомпонентой точки $x \in X$* называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств X, содержащих точку x.

Перечислим некоторые простые свойства квазикомпонент.

Предложение 4.6.

(1) *Квазикомпоненты являются замкнутыми подмножествами X.*

(2) *Семейство всех открыто-замкнутых подмножеств замкнуто относительно конечных пересечений, конечных объединений и дополнений.*

(3) *Каждая квазикомпонента некоторой точки является квазикомпонентой каждой своей точки, так что имеет смысл говорить о квазикомпонентах пространства.*

(4) *Квазикомпоненты либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, в совокупности квазикомпоненты задают разбиение пространства X на замкнутые подмножества.*

Доказательство. (1) и (2) тривиальны.

(3) Пусть A — квазикомпонента точки x, и $a \in A$. Покажем, что A — квазикомпонента точки a. Предположим, что это не так, тогда существует открыто-замкнутое множество $C \subset X$ такое, что $a \in C$ и некоторая точка $y \in A$ не содержится в C. Заметим, что $x \notin C$, так как все открыто-замкнутые множества, содержащие x, должны содержать и A. Таким образом, открыто-замкнутое множество $X \setminus C$ содержит x, но не содержит a, что опять же приводит к противоречию.

(4) По определению, квазикомпонента каждого $x \in X$ определена однозначно, и так как каждая квазикомпонента является квазикомпонентой каждой своей точки, разные квазикомпоненты не могут пересекаться. □

Предложение 4.7. *Связная компонента пространства X содержится в некоторой квазикомпоненте пространства X. Таким образом, каждая квазикомпонента является дизъюнктным объединением некоторого числа связных компонент.*

Доказательство. Пусть C — связная компонента пространства X, содержащая точку x, и Q — квазикомпонента точки x. Рассмотрим произвольное открыто-замкнутое множество $W \subset X$, содержащее x. Тогда $W \supset C$ в силу связности C, поэтому C содержится в пересечении всех таких W, т.е. в Q. □

Замечание 4.8. Квазикомпонента может отличаться от компоненты связности, см. [1]. В качестве примера рассмотрим подмножество плоскости с индуцированной топологией, составленное из отрезков $I_n = [A_n, B_n]$, где $A_n = (0, 1/n)$, $B_n = (1, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, а также двух точек $A = (0,0)$ и $B = (1,0)$. Тогда связными компонентами являются отрезки I_n и одноточечные множества $\{A\}$ и $\{B\}$, а квазикомпонентами — те же отрезки I_n, а также двухточечное множество $\{A, B\}$ (проверьте).

Предложение 4.9. *Предположим, что пространство X компактно, $U \subset X$ открыто и $\{F_s\}_{s\in S}$ — семейство замкнутых множеств такое, что $\cap_{s\in S} F_s \subset U$. Тогда существует конечный набор $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$, для которого $\cap_{i=1}^k F_{s_i} \subset U$.*

Доказательство. Положим $A = X \setminus U$ и $U_s = X \setminus F_s$. Тогда A — замкнутое подмножество компакта X и, значит, само является компактом. Кроме того, $\{U_s\}$ — открытое покрытие компакта A. Действительно,

$$\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{s\in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s\in S} F_s \supset X \setminus U = A.$$

Таким образом, в этом покрытии существует конечное подпокрытие $\{U_{s_i}\}_{i=1}^k$. Но это означает, что $\cap_{i=1}^k F_{s_i} \subset U$. □

Предложение 4.10. *Пусть топологическое пространство X компактно и хаусдорфово. Тогда для любой точки $x \in X$ связная компонента $C \subset X$, содержащая точку x, совпадает с квазикомпонентой $Q \subset X$ точки x.*

Доказательство. В силу предложения 4.7, достаточно показать, что $Q \subset C$. Мы покажем это, доказав, что квазикомпонента Q связна.

Предположим противное, т.е. существуют замкнутые в Q непересекающиеся непустые множества A и B такие, что $Q = A \sqcup B$, и пусть $x \in A$. Так как Q замкнуто в X, а X — компакт, то Q — также компакт. Аналогично, A и B — непустые компакты (как в Q, так и в X).

Лемма 4.11. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, и $A, B \subset X$ — непустые компакты такие, что $A \cap B = \emptyset$. Тогда существуют открытые множества $U \supset A$ и $V \supset B$ такие, что $U \cap V = \emptyset$.*

Доказательство. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ обозначим через U_b^a и U_a^b некоторые непересекающиеся открытые окрестности точек a и b соответственно. Тогда $\{U_a^b\}_{b \in B}$ — открытое покрытие B, которое, в силу компактности B, содержит конечное подпокрытие $\{U_a^{b_i}\}_{i=1}^n$. Положим $V_a = \cup_{i=1}^n U_a^{b_i} \supset B$ и $V^a = \cap_{i=1}^n U_{b_i}^a$. Тогда $V_a \cap V^a = \emptyset$.

Далее, семейство $\{V^a\}_{a \in A}$ — открытое покрытие A, поэтому, в силу компактности A, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{V^{a_j}\}_{j=1}^m$. Положим $U = \cup_{j=1}^m V^{a_j} \supset A$ и $V = \cap_{j=1}^m V_{a_j} \supset B$, тогда U и V — искомые. □

Вернемся к доказательству предложения. В силу леммы 4.11, существуют открытые непересекающиеся множества $U \supset A$ и $V \supset B$, в частности, $Q \subset U \cup V$.

По определению квазикомпоненты, $Q = \cap F_s$, где $F_s \subset X$ — всевозможные открыто-замкнутые множества, содержащие Q. По предложению 4.9, существует конечный набор $\{s_1, \ldots, s_k\}$ такой, что $F := \cap F_{s_i} \subset U \cup V$. Заметим, что F — открыто-замкнутое множество. Мы покажем, что $U \cap F$ — также открыто-замкнуто, но каждое открыто-замкнутое множество, пересекающее Q, должно содержать $Q = A \sqcup B$ целиком, однако $A \subset (U \cap F)$, а $B \cap (U \cap F) = \emptyset$, противоречие.

Итак, заключительная часть доказательства посвящена проверке того, что множество $U \cap F$ открыто-замкнуто. Имеем

$$\overline{U \cap F} \subset \bar{U} \cap F = \bar{U} \cap (U \cup V) \cap F = \big((\bar{U} \cap U) \cup (\bar{U} \cap V)\big) \cap F = U \cap F,$$

где предпоследнее равенство выполняется в силу того, что $\bar{U} \cap V = \emptyset$. Таким образом, $U \cap F$ является не только открытым в силу открытости U и F, но и замкнутым, т.е. открыто-замкнутым. □

Теорема 4.12. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $K \subset X$ — непустой компакт, и C — связная компонента K. Тогда если $C \cap \partial K = \emptyset$, то C также является связной компонентой X. В частности, если X связно и $K \neq X$, то $C \cap \partial K \neq \emptyset$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех открыто-замкнутых подмножеств K, содержащих C. Так как K — компакт, то все элементы из $\mathcal{F}$ — также компакты. По предложению 4.10, $C = \cap_{F \in \mathcal{F}} F$. Так как $C \cap \partial K = \emptyset$, то $\cap_{F \in \mathcal{F}} (F \cap \partial K) = \emptyset$.

Так как компакт в хаусдорфовом топологическом пространстве является замкнутым подмножеством, то $\partial K \subset K$.

Лемма 4.13. *Пусть Y — произвольное непустое подмножество хаусдорфова топологического пространства X, тогда ∂Y — замкнутое подмножество как в X, так и в $\bar{Y}$ — замыкании Y.*

Доказательство. Действительно, пусть $\operatorname{Int} Y$ обозначает внутренность Y, тогда $\operatorname{Int} Y$ — открытое подмножество как в X, так и в $\bar{Y}$. С другой стороны, $\bar{Y} = \partial Y \sqcup \operatorname{Int} Y$, поэтому $\partial Y = \bar{Y} \setminus \operatorname{Int} Y$, так что граница ∂Y замкнута в $\bar{Y}$. Наконец, $\partial Y = (X \setminus \operatorname{Int} Y) \cap \bar{Y}$, поэтому ∂Y также замкнута в X. $\square$

Из леммы 4.13 и замкнутости K вытекает, что ∂K — замкнутое подмножество K, поэтому ∂K — компакт. Таким образом, все множества $F \cap \partial K$ — компакты.

Лемма 4.14. *Пусть $\{K_i\}_{i \in I}$ — семейство компактов в компакте K, причем $\cap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Тогда существует конечный набор $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$, для которого $\cap_{p=1}^k K_{i_p} = \emptyset$.*

Доказательство. Действительно, дополнения $U_i = K \setminus K_i$ образуют открытое покрытие компакта K, поэтому из него можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}\}$, а это означает, что $\cap_{p=1}^k K_{i_p} = \emptyset$. $\square$

Из леммы 4.14 вытекает, что существует конечное семейство $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\} \subset \mathcal{F}$, для которого $\cap_{p=1}^k (F_{i_p} \cap \partial K) = \emptyset$. Так как $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, то $G := \cap_{p=1}^k F_{i_p}$ принадлежит $\mathcal{F}$ и, в силу сказанного выше, не пересекает ∂K. Но тогда G принадлежит внутренности K, поэтому G не только открыто в K, но еще и открыто в X. Так как K — замкнутое множество, то G не только замкнуто в K, но и в X. Итак, G — открыто-замкнуто в X.

Далее, так как каждое $F \in \mathcal{F}$ замкнуто в K, а K замкнуто в X, то F замкнуто в X, поэтому $F \cap G$ замкнуто в X. Кроме того, каждое такое F, а также G открыты в K, поэтому $F \cap G$ открыто в K, и так как $(F \cap G) \cap \partial K = \emptyset$, то $F \cap G \subset \operatorname{Int} K$, поэтому $F \cap G$ открыто в X. Итак, мы показали, что для любого $F \in \mathcal{F}$ множество $F \cap G$ открыто-замкнуто в X.

Так как C связно в K, то C также связно и в X. Отсюда и из предложения 4.7 вытекает, что C содержится в некоторой (однозначно определенной) квазикомпоненте Q пространства X. Обозначим через $\mathcal{H}$ семейство всех открыто-замкнутых множеств, содержащих C, тогда $Q = \cap_{H \in \mathcal{H}} H$. Как было показано выше, каждое множество $G \cap F$, $F \in \mathcal{F}$, принадлежит $\mathcal{H}$, и $C = \cap_{F \in \mathcal{F}} F = \cap_{F \in \mathcal{F}} (F \cap G)$, поэтому $C \supset Q$, значит, $C = Q$.

Из предложения 4.7 вытекает, что $Q = \sqcup C_i$, где C_i — связные компоненты в X, но, как мы показали, $Q = C$ — связно, поэтому Q состоит ровно одного C_i, так что C — связная компонента в X. $\square$

4.2 Геометрическое следствие

Следствие 4.15. *Пусть A — связное подмножество X, $x \in A$ и $r \geq 0$ такие, что $K := B_r(x) \cap A$ — компакт, не совпадающий с A. Пусть $C \ni x$ — связная компонента компакта K. Тогда $H^1(K) \geq H^1(C) \geq \operatorname{diam} C \geq r$.*

Доказательство. Применим теорему 4.12, выбрав в качестве “X” множество A, а к качестве “K” — компакт K. Тогда из этой теоремы вытекает, что C пересекает границу K в пространстве A. В A множество K является шаром радиуса r с центром в x, поэтому его граничные точки удалены от x на расстояние r. Отсюда следует, что $\operatorname{diam} C \geq r$, поэтому, в силу предложения 4.1, получаем требуемое. □

4.3 δ-упаковки

Определение 4.16. Непустое связное компактное хаусдорфово пространство, в частности, непустое связное компактное метрическое пространство называется *континуумом.*

Далее в этом разделе X обозначает метрическое пространство.

Определение 4.17. Для любого $\delta \in (0, \infty]$, каждое дизъюнктное семейство $\{A_i\}$ подмножеств множества $A \subset X$, состоящее из континуумов A_i таких, что $\operatorname{diam} A_i \leq \delta$, назовем *$\delta$-упаковкой в A.*

Конструкция 4.18. Для каждого $\delta \in (0, \infty]$ определим функцию $L_\delta \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ так:

$$L_\delta(A) = \sup\Big\{\sum \operatorname{diam} A_i : \{A_i\} \text{ — конечная } \delta\text{-упаковка в } A\Big\}.$$

Замечание 4.19. Отметим, что каждое множество A при каждом $\delta \in (0, \infty]$ имеет хотя бы одну конечную δ-упаковку (пустую для пустого A, и непустую, скажем, состоящую из конечного положительного числа одноточечных множеств для непустого A). Для пустого A имеем $L_\delta(A) = 0$ в силу соглашения $\sup \emptyset = 0$.

Предложение 4.20. *Для каждого $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset X$ имеем*

$$L_\delta(A) = \sup\Big\{\sum \operatorname{diam} A_i : \{A_i\} \text{ — любая } \delta\text{-упаковка в } A\Big\}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как в правой части равенства (4.1) точная верхняя грань берется по не меньшему множеству δ-упаковок, чем в конструкции 4.18, эта правая часть будет больше или равна $L_\delta(A)$. Нам осталось доказать обратное неравенство.

Для любой δ-упаковки $\{A_i\}$ множества A имеем, по определению суммы, см. раздел 1,

$$\sum \operatorname{diam} A_i = \sup\Big\{\sum \operatorname{diam} B_j : \{B_j\} \text{ — конечное подсемейство в } \{A_i\}\Big\} \leq L_\delta(A),$$

так что и правая часть равенства (4.1) не превосходит $L_\delta(A)$. □

Предложение 4.21. *Для каждого $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset B \subset X$ имеем $L_\delta(A) \leq L_\delta(B)$.*

Доказательство. Это мгновенно вытекает из того, что каждая конечная δ-упаковка A является также конечной δ-упаковкой B. □

Предложение 4.22. *Для любого $A \subset X$ и $\delta \in (0, \infty]$ имеем $H^1(A) \geq L_\delta(A)$.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$ — произвольная конечная δ-упаковка для A. Так как H^1, в силу теоремы 2.11, является борелевской внешней мерой (в частности, счетно аддитивной на борелевских и монотонной на всех множествах), а каждое A_i, являясь компактным подмножеством метрического пространства, замкнуто и, значит, борелевское, то, используя предложение 4.1, заключаем, что

$$H^1(A) \geq H^1(\cup A_i) = \sum H^1(A_i) \geq \sum \operatorname{diam} A_i.$$

Осталось перейти к супремуму по всем конечным δ-упаковкам для A. $\square$

Предложение 4.23 (аддитивность L_δ)**.** *Для $A \subset X$ обозначим через $\{A_i\}$ семейство всех связных компонент A (это семейство может иметь любую мощность). Тогда при каждом $\delta \in (0, \infty]$ выполняется $L_\delta(A) = \sum L_\delta(A_i)$.*

Доказательство. Заметим, что каждый континуум, входящий в δ-упаковку множества A, целиком лежит в одной из компонент A_i. Пусть $\{B_k\}$ — произвольная конечная δ-упаковка A. Тогда $\{B_k\}$ распадается на конечные δ-упаковки множеств A_i (некоторые из этих упаковок могут быть пустыми). Отсюда вытекает, что $\sum \operatorname{diam} B_k \leq \sum L_\delta(A_i)$. Переходя в супремуму по всем конечным δ-упаковкам множества A, заключаем, что $L_\delta(A) \leq \sum L_\delta(A_i)$.

Докажем обратное неравенство, т.е. что $L_\delta(A) \geq \sum L_\delta(A_i)$. Если $L_\delta(A) = \infty$, то неравенство выполняется автоматически. Пусть теперь $L_\delta(A) < \infty$. Покажем, что и тогда $\sum L_\delta(A_i) \leq L_\delta(A)$. Предположим противное, т.е. что $\sum L_\delta(A_i) > L_\delta(A)$. По определению, $\sum L_\delta(A_i)$ является точной верхней гранью сумм всех конечных поднаборов $\big\{L_\delta(A_{i_1}), \ldots, L_\delta(A_{i_n})\big\}$, откуда вытекает, что существует такой поднабор, для которого

$$\sum_{p=1}^{n} L_\delta(A_{i_p}) > L_\delta(A).$$

Положим $\varepsilon = \sum_{p=1}^{n} L_\delta(A_{i_p}) - L_\delta(A)$. Так как $L_\delta(A) < \infty$ и, в силу предложения 4.21, $L_\delta(A_i) \leq L_\delta(A) < \infty$, то $\varepsilon < \infty$ и $L_\delta(A) = \sum_{p=1}^{n} L_\delta(A_{i_p}) - \varepsilon$. Далее, для каждого A_{i_p} выберем конечную δ-упаковку $\{B_{i_p j_p}\}$ такую, что $\sum_{j_p} \operatorname{diam} B_{i_p j_p} > L_\delta(A_{i_p}) - \varepsilon/n$, тогда

$$\sum_{i_p, j_p} \operatorname{diam} B_{i_p j_p} > \sum_{p=1}^{n} L_\delta(A_{i_p}) - \varepsilon = L_\delta(A).$$

Но $\{B_{i_p j_p}\}_{i_p, j_p}$ является конечной δ-упаковкой A, противоречие. $\square$

Напомним определение локально компактного пространства. Существует много, причем неэквивалентных, определений в случае топологических пространств (см. [21]). Для хаусдорфова пространства эти определения эквивалентны. В случае метрических пространств, являющихся основными объектами нашего курса, можно воспользоваться шарами, что даст наиболее удобное определение для дальнейших наших целей.

Определение 4.24. Метрическое пространство называется *локально компактным*, если для каждой его точки можно найти компактный невырожденный шар с центром в этой точке.

Предложение 4.25. *Пусть X — локально компактное метрическое пространство, и $A \subset X$ замкнуто. Тогда A также локально компактно.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $a \in A$, и пусть $B_r(a)$ — компактный невырожденный шар в X. Тогда $B_r(a) \cap A$ также является невырожденным шаром в A, см. замечание 1.3. Так как A — замкнуто в X, то $B_r(a) \cap A$ замкнуто в $B_r(a)$. Но замкнутое подмножество компакта также компактно, поэтому $B_r(a) \cap A$ — компактный невырожденный шар в A с центром в a. □

Предложение 4.26. *Пусть $A \subset X$ — связно и локально компактно. Тогда при каждом $\delta \in (0, \infty]$ выполняется*

$$H^1_\delta(A) \le L_\delta(A).$$

Доказательство. Случай пустого A очевиден, поэтому будем предполагать, что $A \neq \emptyset$.

Если $L_\delta(A) = \infty$, то неравенство имеет место. Пусть теперь $L_\delta(A) < \infty$. Так как $A \neq \emptyset$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует непустая конечная δ-упаковка $\{A_i\}$ множества A такая, что

$$\sum \operatorname{diam} A_i \ge L_\delta(A) - \varepsilon.$$

Положим $A' = A \setminus \bigl(\cup A_i\bigr)$. Если $A' = \emptyset$, то

$$H^1_\delta(A) \le \sum \operatorname{diam} A_i \le L_\delta(A).$$

Пусть теперь $A' \neq \emptyset$. Так как $\cup A_i$ — компакт, то для любой точки $x \in A'$ имеем $\bigl|x(\cup A_i)\bigr| > 0$. Так как A — локально компактно, для каждой точки $x \in A$ существует $R > 0$ такое, что для каждого $r \le R$ множество $A \cap B_r(x)$ — шар радиуса r в A — компакт. Из сказанного вытекает, что для каждой точки $x \in A'$ существует положительное $r_x < \delta/10$ такое, что множество $A \cap B_{r_x}(x)$ компактно и содержится в A'. Таким образом, мы построили покрытие множества A' шарами $B_{r_x}(x)$. Используя теорему 1.7, выделим из построенного покрытия дизъюнктное семейство $\mathcal{B}' = \bigl\{B_j := B_{r_j}(x_j)\bigr\}$ такое, что $5\mathcal{B}'$ покрывает A'. Учитывая оценку $\operatorname{diam} B_j \le 2r_j < \delta/5$, заключаем, что $5\mathcal{B}' \cup \{A_i\}$ образует δ-покрытие A, поэтому

$$H^1_\delta(A) \le \sum \operatorname{diam} A_i + 5 \sum \operatorname{diam} B_j \le L_\delta(A) + 10 \sum r_j.$$

Пусть C_j — связная компонента компакта $A \cap B_j = A \cap B_{r_j}(x_j)$, содержащая x_j. Так как $B_{r_j}(x_j) \subset A'$, и $\{A_i\}$ непустое семейство, состоящее из непустых A_i (каждый континуум, оп определению, непуст), то $A' = A \setminus \cup A_i \neq A$, поэтому и $B_{r_j}(x_j) \subset A' \neq A$. Это, а также связность A, дает нам возможность применить следствие 4.15, откуда заключаем, что $\operatorname{diam} C_j \ge r_j$ при всех j.

Далее, так как $A \cap B_j$ — компакт, а связные компоненты — замкнуты, то каждое C_j является континуумом. Таким образом, мы получили, вообще говоря, не конечную, δ-упаковку $\{C_j\} \cup \{A_i\}$ множества A. Тем не менее, предложения 4.20 дает нам следующую оценку:

$$L_\delta(A) \ge \sum \operatorname{diam} A_i + \sum \operatorname{diam} C_k \ge L_\delta(A) - \varepsilon + \sum r_k,$$

из которой мгновенно вытекает неравенство $\sum r_k \le \varepsilon$. Но тогда

$$H^1_\delta(A) \le L_\delta(A) + 10\sum r_j \le L_\delta(A) + 10\varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. □

Теорема 4.27. *Пусть $A \subset X$ — локально компактно и состоит из не более чем счетного числа компонент. Тогда для каждого $\delta \in (0,\infty]$ имеем*

$$H^1(A) = L_\delta(A).$$

Доказательство. Предложение 4.22 влечет, что достаточно доказать $H^1(A) \le L_\delta(A)$.

Предположим сначала, что A связно. Тогда, из предложения 4.26 и определения функции L_δ вытекает, что для любых $0 < \delta' \le \delta$ выполняется

$$L_\delta(A) \ge L_{\delta'}(A) \ge H^1_{\delta'}(A).$$

Осталось устремить δ' к 0.

Пусть теперь A несвязно. Обозначим через A_i связные компоненты множества A. Так как каждая связная компонента замкнута, то, по предложению 4.25, каждое A_i — локально компактно, и мы можем применить ко всем A_i только что доказанное неравенство: $H^1(A_i) \le L_\delta(A_i)$. Воспользовавшись счетной субаддитивностью внешней меры H^1 (здесь нам требуется, чтобы число связных компонент множества A было не более чем счетным) и предложением 4.23, получим

$$H^1(A) \le \sum H^1(A_i) \le \sum L_\delta(A_i) = L_\delta(A),$$

доказательство закончено. □

4.4 δ-разбиения

Определение 4.28. Для $A \subset X$, $\delta \in (0,\infty]$ и борелевской внешней меры μ на X, семейство $\{A_i\}$ подмножеств A называется *δ-разбиением A по отношению к μ*, если

(1) все A_i — связные борелевские,

(2) при всех i имеем $\operatorname{diam} A_i \le \delta$,

(3) семейство $\{A_i\}$ является μ-почти дизъюнктным,

(4) семейство $\{A_i\}$ является μ-почти покрытием.

Замечание 4.29. Отметим, что в δ-разбиение могут выходить и пустые множества, поэтому в приводимых ниже результатах, где добавление к разбиению или выбрасыванию из него пустых множеств не влияет на результат, условие того, что все рассматриваемые δ-разбиения счетные эквивалентно условию не более чем счетности. Этим мы будем пользоваться в некоторых доказательствах, не оговаривая специально.

Предложение 4.30. *Пусть $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — некоторое δ-разбиение множества A по отношению к борелевской внешней мере μ на X. Тогда*

$$\mu(A) = \sum \mu(A_i).$$

Доказательство. Так как все A_i лежат в A, имеем $\cup A_i \subset A$ и, значит, $\cup A_i \overset{\text{п.в.}}{\subset} A$. Так как $\{A_i\}$ является μ-почти покрытием множества A, то $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} \cup A_i$, откуда $A \overset{\text{п.в.}}{=} \cup A_i$. Так как все A_i — борелевские, а мера μ — тоже борелевская, то все A_i являются μ-измеримыми; кроме того, $\{A_i\}$ — это μ-дизъюнктное семейство, поэтому, в силу следствия 1.57 и предложения 1.59, имеем

$$\mu(A) = \mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i),$$

что и требовалось. □

Предложение 4.31. *Пусть $K \subset X$ — континуум, $A \subset X$ — борелевское подмножество, содержащее H^1-почти все K, и $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — δ-разбиение A по отношению к H^1. Тогда*

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} A_i \ge \operatorname{diam} K.$$

Доказательство. Пусть $a, b \in K$ — такие точки, что $|ab| = \operatorname{diam} K$ (эти точки существуют в силу компактности K). Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — это 1-липшицева функция, заданная так: $f(x) = |xa|$. Так как K и каждое A_i — связны, а K — компактно, множество $f(K)$ — отрезок, а множества $f(A_i)$ — промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи или прямые), поэтому $\operatorname{diam} f(K) = L^1\big(f(K)\big)$ и $\operatorname{diam} f(A_i) = L^1\big(f(A_i)\big)$. Так как функция f является 1-липшицевой, то $\operatorname{diam} A_i \ge \operatorname{diam} f(A_i)$, откуда

$$\sum \operatorname{diam} A_i \ge \sum \operatorname{diam} f(A_i) = \sum L^1\big(f(A_i)\big).$$

Лемма 4.32. *Семейство $\big\{f(A_i)\big\}$ является L^1-почти покрытием множества $f(K)$.*

Доказательство. Так как $K \overset{H^1\text{-п.в.}}{\subset} A \overset{H^1\text{-п.в.}}{\subset} \cup A_i$, то, в силу предложения 1.55, $K \overset{H^1\text{-п.в.}}{\subset} \cup A_i$, т.е. $\{A_i\}$ покрывает H^1-почти все K.

Так как $H^1(K \setminus \cup A_i) = 0$ и отображение f является 1-липшицевым, то, по следствию 3.13, $H^1\big(f(K \setminus \cup A_i)\big) \le H^1(K \setminus \cup A_i) = 0$. Из замечания 2.14 вытекает, что и $L^1\big(f(K \setminus \cup A_i)\big) = 0$.

Так как для любых $U, V \subset X$ имеем $f(U) \setminus f(V) \subset f(U \setminus V)$, то

$$f(K) \setminus f(\cup A_i) \subset f(K \setminus \cup A_i),$$

поэтому из монотонности внешней меры следует, что $L^1\big(f(K) \setminus f(\cup A_i)\big) = 0$, т.е. $f(K) \overset{L^1\text{-п.в.}}{\subset} f(\cup A_i) = \cup f(A_i)$. Доказательство закончено. □

Из леммы 4.32 и следствия 1.58 выводим, что

$$\operatorname{diam} f(K) = L^1\bigl(f(K)\bigr) \le \sum L^1\bigl(f(A_i)\bigr) = \sum \operatorname{diam} A_i.$$

Осталось заметить, что $f(K)$ содержит $f(a) = 0$ и $f(b) = \operatorname{diam} K$, откуда $\operatorname{diam} f(K) \ge \operatorname{diam} K$. □

Теорема 4.33. *Для любого $A \subset X$, $\delta \in (0, \infty]$ и δ-разбиения $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A по отношению к H^1 выполняется*

$$H^1(A) \ge \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} A_i.$$

Если A — локально компактно и имеет конечное или счетное число связных компонент, то для любого $m < H^1(A)$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \delta \le \delta_0$ выполняется

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} A_i \ge m.$$

Доказательство. Доказательство первого неравенства мгновенно вытекает из предложений 4.30 и 4.1.

Докажем теперь второе неравенство. По теореме 4.27, имеем $H^1(A) = L_\delta(A)$. По определению функции L_δ, существует конечная δ-упаковка $\{B_j\}_{j=1}^k$ такая, что

$$L_\delta(A) \ge \sum_{j=1}^k \operatorname{diam} B_j \ge m.$$

Напомним, что $\{B_j\}$ — дизъюнктное семейство континуумов, диаметры которых не превосходят δ. Отсюда вытекает, что для каждых $p \ne q$ выполняется $|B_pB_q| > 0$. Выберем δ_0 меньшим самого маленького из расстояний $|B_pB_q|$ между различными B_p и B_q.

Обозначим через I_j, $j = 1, \ldots, k$, множество всех i, для которых $A_i \cap B_j \ne \emptyset$. Так как $\operatorname{diam} A_i$ меньше расстояний между B_p и B_q при $p \ne q$, то $I_p \cap I_q = \emptyset$. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam} A_i \ge \sum_{j=1}^k \sum_{i \in I_j} \operatorname{diam} A_i.$$

Применим предложение 4.31, в котором в качестве "K" возьмем континуум B_j, в качестве "A" — борелевское множество $\cup_{i \in I_j} A_i$, и в качестве "$\{A_i\}$" — семейство $\{A_i\}_{i \in I_j}$, см. замечание 4.29. Проверим выполнение условий этого предложения.

Требование "$K \overset{\text{п.в.}}{\subset} A$" — это $B_j \overset{\text{п.в.}}{\subset} \cup_{i \in I_j} A_i$. Оно имеет место, так как $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ покрывает H^1-почти все A и, значит, каждое B_j, а $\{A_i\}_{i \in I_j}$ — это семейство ровно тех A_i, которые пересекают B_j.

Второе требование "$\{A_i\}$ — δ-разбиение A" означает, что $\{A_i\}_{i \in I_j}$ является δ-разбиением $\cup_{i \in I_j} A_i$ (по отношению к H^1). Проверим это. То, что A_i — связные борелевские множества диаметра не превосходящего δ, и что $\{A_i\}_{i\in I_j}$ является H^1-почти дизъюнктным семейством вытекает из того, что $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ является δ-разбиением всего A. То, что $\{A_i\}_{i\in I_j}$ покрывает H^1-почти все $\cup_{i\in I_j} A_i$ очевидно.

Таким образом, применяя предложение 4.31, заключаем $\sum_{i\in I_j} \operatorname{diam} A_i \ge \operatorname{diam} B_j$, откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} A_i \ge \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\in I_j} \operatorname{diam} A_i \ge \sum_{j=1}^{k} \operatorname{diam} B_j \ge m,$$

что и требовалось. □

4.5 δ-цепи и δ-связные метрические пространства

В данном разделе X обозначает метрическое пространство, если не оговорено противное.

Последовательность $L = (x_0, \dots, x_n)$ точек пространства X будем называть *ломаной в X, соединяющей x_0 и x_n*. Точки x_i назовем *вершинами ломаной L*, вершины x_{i-1} и x_i назовем *последовательными*, вершины x_0 и x_n — *концевыми* или *концами ломаной L*, пары $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$, часто обозначаемые также через $x_{i-1}x_i$ или x_ix_{i-1}, — *ребрами L*, число $|e_i| := |x_{i-1}x_i|$ — *длиной ребра e_i*, а величину

$$|L| = \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}x_i|,$$

равную сумме длин всех ребер ломаной L, — *длиной ломаной L*. Если все ребра ломаной L не длиннее некоторого $\delta \in (0, \infty)$, то такую ломаную назовем *δ-цепью.*

Подмножество $A \subset X$ называется *δ-связным*, если любые две точки из A соединяются некоторой δ-цепью.

Предложение 4.34. *Пусть A — связное подмножество X, тогда A является δ-связным для любого $\delta \in (0, \infty)$.*

Доказательство. Выберем произвольное $x \in A$, и пусть A_x обозначает множество всех $a \in A$, которые можно соединить с x некоторой δ-цепью. Тогда A_x является непустым открыто-замкнутым подмножеством A. Действительно, $A \ne \emptyset$, так как $x \in A_x$. Далее, для каждого $a \in A_x$ все точки из $U_\delta(a)$ также соединяются с x некоторой δ-цепью (достаточно продолжить δ-цепь, соединяющую x и a), поэтому $U_\delta(a) \subset A_x$ и, значит, A_x — открыто. Наконец, если b — точка прикосновения множества A_x, то существует $a \in A_x \cap U_\delta(b)$, поэтому x и b также соединяются δ-цепью, так что $b \in A_x$ и, значит, A_x — замкнуто. В силу связности A, имеем $A_x = A$, так что A является δ-связным. □

Замечание 4.35. Из δ-связности для любого $\delta \in (0, \infty)$ не вытекает связность. Стандартный пример — множество всех рациональных чисел на прямой.

Предложение 4.36. *Пусть K — компактное подмножество X, состоящее не более чем из $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ связных компонент. Предположим, что для некоторого $\delta \in (0, \infty)$ компакт K содержит δ-связное подмножество A. Тогда*

$$H^1(K) \ge \operatorname{diam} A - (m-1)\delta.$$

Доказательство. При $m=\infty$ неравенство выполняется автоматически, так как диаметр компакта всегда конечен и, значит, $\operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} K < \infty$. Кроме того, если $A=\emptyset$, то неравенство также имеет место. Таким образом, остается рассмотреть случай $m<\infty$ и $A\ne\emptyset$.

Для каждого $\varepsilon>0$ существуют $x_0, x_1 \in A$ такие, что

$$\ell := |x_0x_1| \ge \operatorname{diam} A - \varepsilon.$$

Пусть $f\colon X\to\mathbb{R}$ обозначает 1-липшицеву функцию расстояния: $f(x)=|xx_0|$. Положим $S=f(K)$, тогда S представляет собой объединение m отрезков, каждый из которых — образ соответствующей связной компоненты K. Эти отрезки разделяются не более чем $(m-1)$-им интервалом, которые мы обозначим через I_k.

Так как $f(0)=0$ и $f(x_1)=\ell$ лежат в S, то открытое множество $(0,\ell)\setminus S$ разбивается на интервалы, каждый из которых содержится в одном из I_k (возможно, совпадает с ним), причем каждый I_k содержит не более одного из этих интервалов. Таким образом, $(0,\ell)\setminus S$ состоит не более чем из $(m-1)$-ого интервала.

Так как функция f является 1-липшицевой, то $f(A)$ также δ-связно, поэтому в $f(A)$ и, значит, в $f(K)=S$ существует δ-цепь, соединяющая $f(x_0)=0$ и $f(x_1)=\ell$. Отсюда вытекает, что длина каждого интервала, из которых состоит $(0,\ell)\setminus S$, не превосходит δ, поэтому $L^1\bigl[(0,\ell)\setminus S\bigr]\le(m-1)\delta$.

Так как $[0,\ell]\subset S\cup\bigl[(0,\ell)\setminus S\bigr]$, то, в силу монотонности внешней меры, имеем

$$\ell = L^1\bigl([0,\ell]\bigr) \le L^1(S) + L^1\bigl[(0,\ell)\setminus S\bigr],$$

откуда

$$L^1(S) \ge \ell - L^1\bigl[(0,\ell)\setminus S\bigr] \ge \ell-(m-1)\delta.$$

Из следствия 3.13, примера 2.14 и предыдущих оценок заключаем, что

$$H^1(K)\ge H^1(S) = L^1(S) \ge \ell-(m-1)\delta \ge \operatorname{diam} A - \varepsilon - (m-1)\delta.$$

Осталось устремить ε к нулю. □

Замечание 4.37. Для связных компактов K предложение 4.36 влечет оценку из предложения 4.1, так как $m=1$, а, в силу предложения 4.34, компакт K является δ-связным для любого $\delta>0$, и его можно выбрать в качестве A.

В приводимом ниже предложении нам понадобится явно указывать, относительно какого подмножества рассматривается окрестность точки и граница подмножества.

Обозначение 4.38. Пусть X — топологическое пространство, и $Z\subset Y\subset X$. Тогда через $\partial_Y Z$ и $\partial_X Z$ будем обозначать границу Z относительно Y в первом случае и относительно X во втором; при этом, $\partial Z=\partial_X Z$.

Пусть $x\in Y$, тогда через $U^Y(x)$ и $U^X(x)$ обозначим окрестности точки x в индуцированной на Y топологии в первом случае, и в топологии X — во втором; при этом, $U(x)=U^X(x)$.

Кроме того, ниже, для краткости изложения, нам понадобится доопределить расстояние $|AB|$ между подмножествами метрического пространства X, одно их которых может быть пустым.

Соглашение 4.39. Для метрического пространства X и произвольного непустого $A\subset X$ положим $|A\emptyset|=|\emptyset A|=\infty$ (что, впрочем, вытекает из соглашения $\inf\emptyset=\infty$).

Теорема 4.40. *Пусть K — компактное подмножество метрического пространства X, состоящее не более чем из $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ связных компонент. Предположим, что для некоторого $\delta\in(0,\infty)$ компакт K содержит δ-связное подмножество A, которое, в свою очередь, содержится в замкнутом подмножестве F пространства X таком, что для некоторого $r\in(0,\infty)$ выполняется*

$$|A\,\partial F|\ge r$$

(при этом, граница ∂F может быть пустой, и в этом случае $r\in(0,\infty)$ можно выбрать любым в силу соглашения 4.39*). Тогда*

$$H^1(K\cap F)\ge\Bigl(1-\frac{\delta}{r}\Bigr)\operatorname{diam}A-(m-1)\delta.$$

Доказательство. Случай, когда или $H^1(K\cap F)=\infty$, или $m=\infty$, или $A=\emptyset$ тривиален, поэтому сразу предположим, что первые две величины конечны и $A\ne\emptyset$, в частности, $K\cap F\ne\emptyset$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ семейство всех тех связных компонент множества $K\cap F$, которые пересекают A, и пусть N — количество элементов в $\mathcal{M}$ (величина N может равняться ∞). Разобьем это семейство на два подмножества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$: к первому отнесем все те компоненты, которые не пересекают $\partial_X F$, а ко второму — которые пересекают $\partial_X F$.

Пусть N_1 и N_2 — количества элементов множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно (если $\partial_X F=\emptyset$, то $N_2=0$). Числа N_1 и N_2 мы оценим с помощью теоремы 4.12, в которой в качестве “X” выберем наш компакт K, в качестве “K” — компакт $K\cap F$, а в качестве “C” — связную компоненту компакта $K\cap F$, лежащую в $\mathcal{M}_1$ (эту компоненту мы также обозначим через C).

Однако, в теореме 4.12 требуется, чтобы компонента C не пересекала другую границу, а именно, $\partial_K(K\cap F)$ (мы же потребовали, чтобы C не пересекала $\partial_X F$).

Лемма 4.41. *В сделанных выше обозначениях, имеем $\partial_K(K\cap F)\subset\partial_X F$, поэтому условие $C\cap\partial_X F=\emptyset$ влечет $C\cap\partial_K(K\cap F)=\emptyset$.*

Доказательство. Пусть $x\in\partial_K(K\cap F)$, тогда каждая окрестность $U^K(x)$ точки x пересекает и $K\cap F$, и $K\setminus(K\cap F)=K\setminus F$. Так как семейства всех окрестностей $U^K(x)$ и всех множеств $U^X(x)\cap K$ совпадают, то из сказанного выше вытекает, что каждая окрестность $U^X(x)$ точки x пересекает и $K\cap F$, и $K\setminus(K\cap F)=K\setminus F$. Первое условие дает $U^X(x)\cap F\ne\emptyset$, а второе гарантирует, что $U^X(x)\cap(X\setminus F)\ne\emptyset$, поэтому $x\in\partial_X F$. □

Итак, мы обосновали применимость теоремы 4.12 и, значит, C является связной компонентой K. Отсюда вытекает, что $N_1\le m$ и $N_2\ge N-m$.

Далее, каждое $C\in\mathcal{M}$ является также связным подмножеством X, поэтому, в силу предложения 4.1, имеем $H^1(C)\ge\operatorname{diam}C$. С другой стороны, если $C\in\mathcal{M}_2$, то $\partial F\ne\emptyset$, и условие $|A\,\partial F|\ge r$ влечет $\operatorname{diam}C\ge r$.

Заметим, что семейство $\mathcal{M}$ дизъюнктно, а его элементы, являясь связными компонентами компакта $K \cap F$, замкнуты в $K \cap F$, и, значит, компактны. Тем самым, элементы из $\mathcal{M}$ являются борелевскими подмножествами X. По пункту (2) предложения 2.11, внешняя мера H^1 — борелевская. Все только что сказанное, вместе с неравенством $\operatorname{diam} C \ge r$ для каждого $C \in \mathcal{M}_2$, влечет конечность множества $\mathcal{M}_2$. Действительно, если $\mathcal{M}_2$ — бесконечно, то в нем существует счетное подсемейство $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которого, в силу пункта (1) теоремы 1.23, выполняется

$$H^1(K \cap F) \ge H^1\Bigl(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} H^1(C_i) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_i = \infty,$$

а это противоречит условию $H^1(K \cap F) < \infty$. Тем самым, $\mathcal{M}_2$ — конечное множество, откуда, снова пользуясь пунктом (1) теоремы 1.23, заключаем, что

$$H^1(K \cap F) \ge \sum_{C \in \mathcal{M}_2} \operatorname{diam} C \ge (N - m)r, \tag{4.2}$$

в частности, $N < \infty$, т.е. и все семейство $\mathcal{M}$ — конечно. Последнее влечет компактность множества $K' := \cup_{C \in \mathcal{M}} C$, а это, вместе с очевидным включением $A \subset K'$, дает возможность применить предложение 4.36, в котором в качестве "K" выступает наше K', а в качестве "A" — наше A. Тем самым, мы получаем

$$H^1(K \cap F) \ge H^1(K') \ge \operatorname{diam} A - (N - 1)\delta. \tag{4.3}$$

В заключение, рассмотрим альтернативу: или $(N - m)r$ больше или равно $\operatorname{diam} A$, или меньше. В первом случае доказываемое неравенство выполнено, так как его правая часть меньше $\operatorname{diam} A$, и имеет место неравенство (4.2).

Во втором случае условие $(N - m)r < \operatorname{diam} A$ дает оценку на N:

$$N - 1 < m - 1 + \frac{1}{r} \operatorname{diam} A,$$

которую мы подставим в неравенство (4.3) и получим в точности то, что требуется. $\square$