Тема 3

Липшицевы отображения. Расстояние Хаусдорфа.

В данном разделе мы напомним необходимые в дальнейшем факты из теории липшицевых отображений, а также ряд свойств расстояния Хаусдорфа, определенного на подмножествах метрического пространства.

3.1 Липшицевы отображения

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств.

Определение 3.1. Отображение f называется *липшицевым*, если существует число $L \ge 0$ такое, что $|f(x)f(x')| \le L\,|xx'|$ при всех $x, x' \in X$. Число L в этом случае называется *константой Липшица отображения* f, само отображение f называется L-липшицевым, а наименьшая константа Липшица для f — *растяжением отображения* f и обозначается через $\operatorname{dil} f$.

Замечание 3.2. (1) Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — липшицевы отображения, то $g \circ f$ — также липшицево, и $\operatorname{dil}(g \circ f) \le \operatorname{dil} f \cdot \operatorname{dil} g$.

(2) Каждое отображение $d_{x_0}\colon X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, заданное формулой $d_{x_0}(x) = |xx_0|$, является 1-липшицевым (это мгновенно вытекает из неравенства треугольника).

Определение 3.3. Последовательность отображений $\{f_i\colon X \to Y\}_{i=1}^{\infty}$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y *равномерно сходится* к отображению $f\colon X \to Y$ (обычно это обозначается через $f_i \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что при всех $i \ge n$ выполняется $\sup_{x\in X} |f_i(x)f(x)| < \varepsilon$.

Замечание 3.4. Если все отображения f_i из определения 3.3 непрерывны, то и предельное отображение f — также непрерывно (проверьте).

Замечание 3.5. Легко видеть, что на пространстве всех отображений $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y функция

$$d(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x)g(x)|,$$

является невырожденным расстоянием, удовлетворяющим неравенству треугольника. Это расстояние между f и g будем обозначать через $|fg|_\infty$. Более того, если диаметр пространства Y конечен, то $|\cdot|_\infty$ — метрика.

Замечание 3.6. Равномерная сходимость $f_i \rightrightarrows f$ равносильна условию $|f_i f|_\infty \to 0$ при $i \to \infty$ (убедитесь в этом).

Предложение 3.7. *Пусть $\{f_i\colon X \to Y\}_{i=1}^\infty$ — последовательность L-липшицевых отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда если $f_i \rightrightarrows f$, то f также является L-липшицевым.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда, в соответствии с замечанием 3.6, существует такое n, что для любого $i \ge n$ выполняется $|ff_i|_\infty < \varepsilon$, откуда для любых $x, x' \in X$ имеем

$$\bigl|f(x)f(x')\bigr| \le \bigl|f(x)f_i(x)\bigr| + \bigl|f_i(x)f_i(x')\bigr| + \bigl|f_i(x')f(x')\bigr| < L|xx'| + 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое. $\square$

Определение 3.8. Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство непрерывных отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Будем говорить, что это семейство *равностепенно непрерывно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, x' \in X$, $|xx'| < \delta$, и всех $\alpha \in \mathcal{A}$ имеем $\bigl|f_\alpha(x)f_\alpha(x')\bigr| < \varepsilon$.

Предложение 3.9. *Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — семейство L-липшицевых отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда $\mathcal{F}$ является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Действительно, если $L = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$, любого f_α и любых $x, x' \in X$ имеем $\bigl|f_\alpha(x)f_\alpha(x')\bigr| = 0 < \varepsilon$, так что δ из определения 3.8 можно выбрать любым.

Пусть теперь $L > 0$. Положим $\delta = \varepsilon/L$, тогда для любого f_α и любых $x, x' \in X$ таких, что $|xx'| < \delta$, выполняется

$$\bigl|f_\alpha(x)f_\alpha(x')\bigr| \le L|xx'| < \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 3.10 (теорема Мак-Шейна о продолжении)**.** *Пусть A — непустое подмножество метрического пространства X, и $f\colon A \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Тогда существует липшицева функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $g|_A = f$ и $\operatorname{dil} g = \operatorname{dil} f$.*

Доказательство. Положим $\lambda = \operatorname{dil} f$ и $g(x) = \sup_{a\in A}\bigl(f(a) - \lambda|xa|\bigr)$. Покажем, что g — искомая функция.

Так как $\operatorname{dil} f = \lambda$, то для любых $x, a \in A$ имеем $f(x) - f(a) \ge -\lambda|xa|$, т.е. $f(x) \ge f(a) - \lambda|xa|$, поэтому $f(x) \ge g(x)$. С другой стороны, для каждого $x \in A$ имеем $g(x) \ge f(x) - \lambda|xx| = f(x)$. Следовательно, $f(x) = g(x)$ для всех $x \in A$.

Покажем теперь, что при каждом $x \in X$ величина $g(x)$ — вещественное число (т.е. отлична от $\pm\infty$). Так как $g(x) \ge f(a) - \lambda|xa|$ при каждом $a \in A$ влечет $g(x) > -\infty$. Покажем, что $g(x) < \infty$. Действительно, при каждых $a_0, a \in A$ имеем

$$g(x) - f(a_0) = \sup_{a\in A}\Big[\big(f(a) - \lambda|xa|\big) - f(a_0)\Big] \le \sup_{a\in A}\big(\lambda|aa_0| - \lambda|xa|\big) \le \lambda|a_0x|,$$

поэтому $g(x) \le f(a_0) + \lambda|a_0x| < \infty$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.11. *Пусть* $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ *и* $\psi\colon W \to \mathbb{R}$ *— произвольные функции, причем* $\sup\psi < \infty$. *Тогда*

$$\sup\varphi - \sup\psi \le \sup(\varphi - \psi).$$

Доказательство. Действительно,

$$\sup_{w\in W}\varphi(w) - \sup_{w\in W}\psi(w) = \sup_{w\in W}\big(\varphi(w) - \sup_{w'\in W}\psi(w')\big) \le \sup_{w\in W}\big(\varphi(w) - \psi(w)\big),$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $\psi(w) \le \sup_{w'\in W}\psi(w')$ при каждом $w \in W$. □

Покажем теперь, что $\operatorname{dil} g = \operatorname{dil} f$. Так как $f = g|_A$, то $\operatorname{dil} f \le \operatorname{dil} g$. Осталось доказать обратное неравенство. Для этого выберем произвольные $x, x' \in X$, и пусть, без ограничения общности, $g(x) \le g(x')$, тогда, в силу леммы 3.11, имеем

$$0 \le g(x') - g(x) = \sup_{a\in A}\big(f(a) - \lambda|xa|\big) - \sup_{a\in A}\big(f(a) - \lambda|x'a|\big) \le$$
$$\le \sup_{a\in A}\Big[\big(f(a) - \lambda|xa|\big) - \big(f(a) - \lambda|x'a|\big)\Big] \le \lambda|xx'|,$$

что и требовалось. □

Теорема 3.12. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— липшицево отображение между метрическими пространствами, причем* $\operatorname{dil} f > 0$. *Тогда для любых* $k \in (0,\infty)$, $A \subset X$ *и* $\delta \in (0,\infty)$ *имеем*

$$H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A),$$

так что

$$H^k\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k(A).$$

Доказательство. Положим $\lambda = \operatorname{dil} f$, тогда для любого δ-покрытия $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A семейство $\big\{f(A_i)\big\}_{i=1}^\infty$ будет $(\lambda\delta)$-покрытием множества $f(A)$, поэтому имеем

$$H^k_{\lambda\delta}\big(f(A)\big) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty\big(\operatorname{diam} f(A_i)\big)^k \le \lambda^k\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty\big(\operatorname{diam} A_i\big)^k.$$

Переходя к точной нижней грани по всем δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, получаем $H^k_{\lambda\delta}\big(f(A)\big) \le \lambda^k H^k_\delta(A)$. Второе неравенство получается из первого при $\delta \to 0+$. □

Следствие 3.13. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— липшицево отображение между метрическими пространствами, для которого* $0 \le \operatorname{dil} f \le 1$*. Тогда для любых* $k \in (0,\infty)$*,* $A \subset X$ *и* $\delta \in (0,\infty)$ *имеем*

$$H^k_\delta\big(f(A)\big) \le H^k_\delta(A),$$

так что

$$H^k\big(f(A)\big) \le H^k(A).$$

Доказательство. Если $\operatorname{dil} f = 0$, то множество $f(A)$ — или пустое при $A = \emptyset$, или одноточечное. В обоих случаях $H^k_\delta\big(f(A)\big) = H^k\big(f(A)\big) = 0$, поэтому оба неравенства выполнены.

Пусть теперь $\operatorname{dil} f > 0$. Тогда, по теореме 3.12, имеем $H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big) \le (\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A)$. По замечанию 2.9, при $\operatorname{dil} f \le 1$ выполняется $H^k_\delta\big(f(A)\big) \le H^k_{(\operatorname{dil} f)\delta}\big(f(A)\big)$. Так как $(\operatorname{dil} f)^k \le 1$, то $(\operatorname{dil} f)^k H^k_\delta(A) \le H^k_\delta(A)$. Собирая вместе три приведенных неравенства, выводим первое неравенство из утверждения следствия. Второе неравенство получается из первого при $\delta \to 0+$. □

3.2 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Для произвольных непустых множеств $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \max\Big[\sup\big\{|aB| : a \in A\big\}, \sup\big\{|Ab| : b \in B\big\}\Big].$$

Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа*. Пусть $\mathcal{H}(X)$ обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X.

Теорема 3.14. *Функция* d_H *является конечной метрикой на* $\mathcal{H}(X)$*.*

Упражнение 3.15. Покажите, что для произвольных непустых $A, B \subset X$ выполняется $d_H(A,B) \ge |AB|$.

Пусть $A_n \subset X$ — семейство непустых подмножеств X таких, что для некоторого непустого $A \subset X$ выполняется $d_H(A_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда будем говорить, что последовательность A_n *сходится по Хаусдорфу к* A и писать $A_n \xrightarrow{\mathrm{H}} A$.

Теорема 3.16. *Пусть* X *— произвольное метрическое пространство. Тогда следующие свойства одновременно присутствуют или нет у* X *и* $\mathcal{H}(X)$:

(1) *полнота (Хан 1932),*

(2) *полная ограниченность,*

(3) *компактность (Хаусдорф, Бляшке).*