Тема 2

Меры Хаусдорфа.

На протяжении этой лекции X обозначает метрическое пространство.

Напомним, что *гамма-функция* определяется следующим образом:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx;$$

для целого неотрицательного t имеем $\Gamma(t+1) = t!$ и $\Gamma\big(t+\frac{1}{2}\big) = \frac{(2t-1)!!\sqrt{\pi}}{2^t} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2t-1)\sqrt{\pi}}{2^t}$. В терминах гамма-функции вычисляется объем шара в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, а именно, объем шара радиуса R равен $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} R^k$.

Для каждого, не обязательно целого, $k \in [0,\infty)$ величину $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$ обозначим через ω_k. Таким образом, для для $k = 0$ имеем $\omega_0 = 1$, а для натуральных k число ω_k равно объему единичного шара в $\mathbb{R}^k$, в частности, $\omega_1 = 2$.

Определение 2.1. Для $\delta \in (0,\infty]$ и $A \subset X$ семейство $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ назовем *δ-покрытием множества* A, если $A \subset \cup_{i\in I} A_i$ и $\operatorname{diam} A_i < \delta$ при всех $i \in I$.

Соглашение 2.2. В приводимом ниже определении мы используем естественное допущение $\operatorname{diam}\emptyset = 0$, что соответствует определению диаметра множества A как точной верхней грани **множества** всех расстояний между точками из A (в случае $A = \emptyset$ это множество расстояний также равно $\emptyset$) и тем, что $\sup\emptyset = 0$.

Определение 2.3. Для каждых $\delta \in (0,\infty]$, $k \in (0,\infty)$ и $A \subset X$ положим

$$H^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_i)^k \;\middle|\; \{A_i\}_{i=1}^\infty \text{ — } \delta\text{-покрытие } A\right\}, \tag{2.1}$$

$$H^k(A) = \sup_{\delta>0} H^k_\delta(A). \tag{2.2}$$

Замечание 2.4. Так как для $A_i = \emptyset$ выполняется $(\operatorname{diam} A_i)^k = 0$, то сумма в правой части формулы (2.1) не поменяется, если такие A_i исключить из суммирования. Последнее приводит к тому, что при определении H^k_δ можно рассматривать не только счетные, но и не более чем счетные δ-покрытия. Также, учитывая, что для любой функции $f\colon I \to [0,\infty]$ при пустом I имеем $\sum_I f = 0$, мы может рассматривать и пустые δ-покрытия $\{A_i\}_{i\in I}$ (для пустого множества A).

Таким образом, определение 2.3 эквивалентно следующему: для каждых $\delta \in (0,\infty]$, $k \in (0,\infty)$ и $A \subset X$ положим

$$H^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k}\inf\Big\{\sum_{i\in I}(\operatorname{diam} A_i)^k \;\Big|\; \{A_i\}_{i\in I} \text{ — не более чем счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\},$$
$$H^k(A) = \sup_{\delta>0} H^k_\delta(A).$$

Замечание 2.5. Может оказаться, что для данного $\delta \in (0,\infty]$ не существует ни одного счетного (и, значит, ни одного не более чем счетного) покрытия множества A. Это так, например, если в качестве $A = X$ взять континуальное метрическое пространство, в котором расстояние между различными точками равно 1, а δ выбрать не превосходящим 1. Тогда в правой части формулы (2.1) точная нижняя грань берется у пустого семейства. Так как $\inf\emptyset = \infty$, то $H^k_\delta(A) = \infty$ для любого $k \in (0,\infty)$.

Заметим также, что отсутствие счетных δ-покрытий при некотором $\delta \in (0,\infty]$ влечет отсутствие счетных δ'-покрытий при всех $\delta' \in (0,\delta)$. Отсюда вытекает, что при каждом $k \in (0,\infty)$ не только $H^k_\delta(A) = \infty$, но и $H^k_{\delta'}(A) = \infty$ при всех $\delta' \in (0,\delta)$, так что $H^k(A) = \infty$.

В дальнейшем, чтобы не перегружать доказательства отдельным рассмотрением разобранного случая, **мы всегда будем предполагать, что каждое из рассматриваемых множеств A при каждом $\delta \in (0,\infty]$ обладает хотя бы одним счетным δ-покрытием**.

Замечание 2.6. На самом деле, функции H^k могут быть определены и для $k = 0$. При этом окажется, что H^0 — считающая мера, введенная нами в пункте (3) примера 1.24. В различных текстах, посвященных геометрической теории меры, функция H^0 определяется вместе со всеми остальными H^k, однако такой подход приводит к многочисленным неприятностям. Обсуждение возникающих на этом пути проблем см. в [20]. Так как в дальнейшем мы будем преимущественно иметь дело с H^1, то приведенное определение 2.3 вполне достаточно для наших целей.

Замечание 2.7. При вычислении $H^k_\delta(A)$ можно ограничиться лишь теми счетными (или не более чем счетными) δ-покрытиями $\{A_i\}$ множества A, в которых каждый непустой элемент A_i пересекает A.

Замечание 2.8. При вычислении $H^k_\delta(A)$ можно ограничиться лишь теми счетными (или не более чем счетными) δ-покрытиями $\{A_i\}$ множества A, в которых каждый элемент A_i — замкнутое подмножество X. Это мгновенно вытекает из того, что у подмножества и его замыкания диаметры одинаковы (замыкание пустого множества совпадает с ним самим).

Замечание 2.9. Так как при уменьшении δ множество δ-покрытий для A уменьшается, то H^k_δ монотонно растет при убывании δ, так что $\sup_{\delta>0} H^k_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A)$.

Замечание 2.10. Напомним, что подмножество A метрического пространства называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор

$\{a_1,\ldots,a_m\}\subset A$ такой, что $\bigl\{U_\varepsilon(a_i)\bigr\}_{i=1}^m$ — покрытие A. Ясно, что для вполне ограниченного $A\subset X$, любого $k\in(0,\infty)$ и любого $\delta>0$ имеем $H^k_\delta(A)<\infty$.

Теорема 2.11. *Для каждого* $k\in(0,\infty)$

(1) *функции* H^k_δ *при любом* $\delta\in(0,\infty]$ *и* H^k *являются внешними мерами на* X;

(2) *внешняя мера* H^k *— борелевская*;

(3) *внешняя мера* H^k_δ *борелевской, вообще говоря, не является*;

(4) *внешняя мера* H^k *— борелевски регулярная*;

(5) *если* $H^k(A)>0$, *то для любого* $p<k$ *имеем* $H^p(A)=\infty$;

(6) *если* $H^k(A)<\infty$, *то для любого* $p>k$ *имеем* $H^p(A)=0$.

(7) *если* $H^k_\delta(A)=0$ *для некоторого* $\delta\in(0,\infty]$, *то для любого* $\delta'\in(0,\infty]$ *также* $H^k_{\delta'}(A)=0$, *и, значит,* $H^k(A)=0$.

Доказательство. (1) Рассмотрим произвольное множество $A\subset X$, его покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, а также $\delta\in(0,\infty]$ и $k\in(0,\infty)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют такие δ-покрытия $\{A_{ij}\}_{j=1}^\infty$ множеств A_i, что

$$\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{j=1}^\infty(\operatorname{diam}A_{ij})^k\le H^k_\delta(A_i)+\varepsilon^i.$$

Но тогда семейство $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ является также δ-покрытием A, и для $\varepsilon\in(0,1)$ выполняется

$$H^k_\delta(A)\le\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i,j=1}^\infty(\operatorname{diam}A_{ij})^k\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+\sum_{j=1}^\infty H^k_\delta(A_i).$$

Так как ε можно выбрать сколько угодно малым, то функция H^k_δ субаддитивна.

Заметим также, что $H^k_\delta(\emptyset)=0$, так как $A=\emptyset$ можно покрыть семейством пустых множеств, а диаметр пустого множества равен нулю (см. соглашение 2.2). Таким образом, H^k_δ является (внешней) мерой при любых k и δ. Предельный переход при $\delta\to0+$ дает нам, что и H^k является внешней мерой.

(2) Для доказательства воспользуемся теоремой 1.31. Пусть A и B — отделимые подмножества X, и $\delta=|AB|$. Тогда каждое X_i, для которого $\operatorname{diam}X_i<\delta$, не может пересекать A и B одновременно. В силу замечания 2.7, при вычислении $H^k_\delta(A\cup B)$ мы можем ограничиться лишь теми δ-покрытиями $\{X_i\}$, в которых каждый X_i пересекает $A\cup B$. Но каждое такое покрытие распадается в дизъюнктное объединение покрытия A и покрытия B, так что, переходя к точной нижней грани, получаем $H^k_\delta(A\cup B)=H^k_\delta(A)+H^k_\delta(B)$. Выполнив предельный переход при $\delta\to0+$, заключаем, что $H^k(A\cup B)=H^k(A)+H^k(B)$, и, в силу произвольности выбора отделимых A и B и теоремы 1.31, убеждаемся в борелевости H^k.

(3) Пусть $X=\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость со стандартной функцией расстояния и декартовыми координатами x,y. Положим $A=\bigl\{(x,y):y>0\bigr\}$, тогда A — борелевское (открытое) подмножество $\mathbb{R}^2$. В качестве F возьмем границу квадрата $\bigl\{(x,y):|x|\le 1,\,|y|\le1\bigr\}$, и пусть $\delta=4$.

Лемма 2.12. *Для произвольного связного ограниченного подмножества A метрического пространства X и любого $\delta > \operatorname{diam} A$ имеем $H^1_\delta(A) = \operatorname{diam} A$.*

Доказательство. Действительно, семейство $\{A\}$ является δ-покрытием A, поэтому $H^1_\delta(A) \le \operatorname{diam} A$. С другой стороны, так как A — связно, но $H^1_\delta(A) \ge \operatorname{diam} A$ (это будет доказано в следующих лекциях). □

В силу леммы 2.12, $H^1_4(F) = \operatorname{diam} F = 2\sqrt{2}$, $H^1_4(F \cap A) = \operatorname{diam}(F \cap A) = \sqrt{5}$ и $H^1_4(F \setminus A) = \operatorname{diam}(F \setminus A) = \sqrt{5}$, поэтому $H^1_4(F) \ne H^1_4(F \cap A) + H^1_4(F \setminus A)$.

(4) Выберем произвольное $A \subset X$ и построим борелевское $B \supset A$ такое, что $H^k(A) = H^k(B)$. Если $H^k(A) = \infty$, то в качестве B можно взять X.

Пусть $H^k(A) < \infty$. В силу замечания 2.8, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $(1/n)$-покрытие $\{A_{ni}\}_{i=1}^\infty$ множества A замкнутыми подмножествами A_{ni} пространства X такое, что

$$\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k \le H^k_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Положим $A_n = \cup_{i=1}^\infty A_{ni}$ и $B = \cap_{n=1}^\infty A_n$, тогда B — борелевское множество, $A \subset A_n$ при всех n, $A \subset B$ и

$$H^k_{1/n}(B) \le H^k_{1/n}(A_n) \le \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k \le H^k_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $H^k(B) \le H^k(A)$, но так как $A \subset B$, выполняется противоположное неравенство и, значит, $H^k(B) = H^k(A)$.

(5) Выберем произвольное $\delta \in (0,1)$, рассмотрим любое δ-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A и заметим, что

$$(\operatorname{diam} A_i)^k = (\operatorname{diam} A_i)^{k-p}(\operatorname{diam} A_i)^p \le \delta^{k-p}(\operatorname{diam} A_i)^p.$$

Переходя к точной нижней грани по δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, заключаем, что $H^k_\delta(A) \le \delta^{k-p} H^p_\delta(A)$. Если $H^p(A) < \infty$, то $H^p_\delta(A) \le H^p(A) < \infty$ при всех δ, поэтому $\delta^{k-p}H^p_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$, так что $H^k(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^k_\delta(A) = 0$, противоречие.

(6) Выберем произвольное $\delta \in (0,1)$, рассмотрим любое δ-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A и заметим, что

$$(\operatorname{diam} A_i)^p = (\operatorname{diam} A_i)^{p-k}(\operatorname{diam} A_i)^k \le \delta^{p-k}(\operatorname{diam} A_i)^k.$$

Переходя к точной нижней грани по δ-покрытиям $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, заключаем, что $H^p_\delta(A) \le \delta^{p-k}H^k_\delta(A)$. Так как $H^k_\delta(A) \le H^k(A) < \infty$, то $\delta^{p-k}H^k_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$, поэтому $H^p_\delta(A) \to 0$ при $\delta \to 0+$ и, значит, $H^p(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^p_\delta(A) = 0$.

(7) Так как $H^k_\delta(A) = 0$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ у множества A имеется δ-покрытие $\{A_{ni}\}_{i=1}^\infty$ такое, что $\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_{ni})^k < 1/n$, в частности, $\operatorname{diam} A_{ni} < 1/\sqrt[k]{n}$ при всех i. Так как $1/\sqrt[k]{n} \to 0$ при $n \to \infty$, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta' \in (0,\infty]$ существует такое δ'-покрытие $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ множества A, что $\frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} A_i)^k < \varepsilon$, так что $H^k_{\delta'}(A) < \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, имеем $H^k_{\delta'}(A) = 0$. Осталось устремить δ' к нулю. □

Определение 2.13. Число $H^k(A)$ называется *k-мерной мерой Хаусдорфа множества A*.

Пример 2.14. Пусть $X = \mathbb{R}$ — евклидова прямая, тогда $H^1_\delta = H^1$ — это внешняя мера Лебега L^1. Действительно, так как движение сохраняет диаметры множеств, каждая мера H^k_δ, а, значит, и H^k, на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно движений, поэтому H^n_δ и H^n пропорциональны мере Лебега L^n. Чтобы доказать совпадение мер H^1_δ и H^1 с мерой Лебега L^1 на $\mathbb{R}$, достаточно показать, что их значения на единичном отрезке I равны 1.

Пусть A — произвольное замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$. Так как A компактно, существуют $x, y \in A$ такие, что $\operatorname{diam} A = |xy|$. Но тогда $A \subset [x, y]$. Из монотонности меры заключаем, что $L^1(A) \le L^1\big([x, y]\big) = y - x = \operatorname{diam} A$.

Замечание 2.15. Аналогичное неравенство имеет место и для произвольного $n \in \mathbb{N}$, а именно, для $A \subset \mathbb{R}^n$ выполняется $L^n(A) \le \frac{\omega_n}{2^n}(\operatorname{diam} A)^n$. Последнее неравенство называется *изодиаметрическим*. С помощью него можно показать, что $H^n_\delta = H^n = L^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Вернемся к одномерной мере Хаусдорфа. Замечание 2.8 позволяет нам при вычислении $H^1_\delta(I)$ ограничиться лишь теми δ-покрытиями $\{A_i\}$, в которых все элементы A_i компактны. Тогда для каждого такого покрытия имеем

$$L^1(I) \le L^1(\cup A_i) \le \sum L^1(A_i) \le \sum \operatorname{diam} A_i.$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким $\{A_i\}$, получаем $L^1(I) \le H^1_\delta(I)$.

С другой стороны, разбив I на последовательные отрезки I_p длины меньше δ, получаем

$$H^1_\delta(I) \le \sum \operatorname{diam} I_p = \sum L^1(I_p) = L^1(I).$$

Таким образом, при каждом δ имеем $H^1_\delta(I) = L^1(I)$, откуда и $H^1(I) = L^1(I)$ и, значит, $H^1 = L^1$.

Из теоремы 2.11 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 2.16. *Для любого $A \subset X$ имеем:*

(1) *или $H^k(A) = \infty$ при всех $k \in (0, \infty)$,*

(2) *или $H^k(A) = 0$ при всех $k \in (0, \infty)$,*

(3) *или существует и единственно $k \in (0, \infty)$ такое, что $H^p(A) = 0$ при всех $p > k$ и $H^p(A) = \infty$ при всех $p < k$.*

Таким образом,

$$\inf\{k : H^k(A) = 0\} = \inf\{k : H^k(A) < \infty\} = \sup\{k : H^k(A) = \infty\} = \sup\{k : H^k(A) > 0\}.$$

Определение 2.17. Число $\inf\{k : H^k(A) = 0\}$ называется *хаусдорфовой размерностью множества A* и обозначается через $\dim_H A$.

Замечание 2.18. Эквивалентные определения хаусдорфовой размерности получаются из заключительной части следствия 2.16.

2.1 Плотности

В ряде случаев возникает необходимость сравнения некоторой внешней меры μ с мерой Хаусдорфа H^k, в частности, требуется выяснить, в каких точках пространства мера μ сильнее сконцентрирована, а в каких — слабее. Для этого изучают предельные значения отношения $\mu\big(B_r(x)\big)/(\omega_k r^k)$ при $r \to \emptyset+$. Также интерес представляет соответствие этих мер не на всем пространстве, а на некотором подмножестве. Так возникает понятие плотности внешней меры и, как частный случай, плотности подмножества метрического пространства.

Определение 2.19. Для внешней меры μ на метрическом пространстве X, числа $k \in (0,\infty)$, подмножества $A \subset X$ и точки $x \in X$ положим

$$\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\mu\big(B_r(x)\cap A\big)}{\omega_k\, r^k}, \quad \underline{\Theta}_k(\mu, A, x) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\mu\big(B_r(x)\cap A\big)}{\omega_k\, r^k}.$$

Величины $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu, A, x)$ называются соответственно *верхней* и *нижней k-мерными плотностями внешней меры $\mu \llcorner A$ в точке x*. Если $A = X$, то $\overline{\Theta}_k(\mu, X, x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu, X, x)$ обозначаются для краткости через $\overline{\Theta}_k(\mu, x)$ и $\underline{\Theta}_k(\mu, x)$ и называются *верхней* и *нижней k-мерными плотностями внешней меры μ в точке x*.

Следующий результат взят из [19].

Теорема 2.20. *Пусть μ — борелевская внешняя мера на метрическом пространстве X, $k \in (0,\infty)$ и $t \ge 0$. Тогда*

(1) *если $A_1 \subset A_2 \subset X$, и $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) \ge t$ при всех $x \in A_1$, то $\mu(A_2) \ge t\, H^k(A_1)$;*

(2) *если мера μ регулярна, $A \subset X$ и $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) \le t$ при всех $x \in A$, то $\mu(A) \le 2^k\, t\, H^k(A)$.*

Доказательство. (1) Если $\mu(A_2) = \infty$ или $t = 0$, то утверждение тривиально. Поэтому предположим сразу, что $\mu(A_2) < \infty$ и $t > 0$.

Далее, мы можем предположить, что выполняется строгое неравенство $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) > t$, так как если мы докажем утверждение в этом предположении, то для нестрогого неравенства $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) \ge t$ утверждение будем выполняться для всех $0 < t' < t$, так что доказываемое утверждение будет получено предельным переходом.

Для каждого $\delta > 0$ положим

$$\mathcal{B}_\delta = \Big\{B_r(x) : x \in A_1,\ 0 < r < \delta/2,\ \mu\big(A_2 \cap B_r(x)\big) \ge t\,\omega_k\, r^k\Big\}.$$

В силу выполнения строгого неравенства $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) > t$ для всех $x \in A_1$, для таких x существуют r, сколь угодно близкие к нулю и, значит, удовлетворяющие $0 < r < \delta/2$, для которых даже $\mu\big(A_2 \cap B_r(x)\big) > t\,\omega_k\, r^k$, так что $\mathcal{B}_\delta$ является покрытием A_1 замкнутыми невырожденными шарами, радиусы которых ограничены в совокупности. И сказанного следует, что к $\mathcal{B}_\delta$ применима теорема 1.7, в силу которой из покрытия $\mathcal{B}_\delta$ можно выделить дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'_\delta$ такое, что $\cup\mathcal{B}_\delta \subset \cup 5\mathcal{B}'_\delta$.

Далее, заметим, что для каждого $B_r(x) \in \mathcal{B}_\delta$ выполняется $\mu(B_r(x)\cap A_2) > 0$ (иначе в центре x этого шара будет $\overline{\Theta}_k(\mu, A_2, x) = 0$). Кроме того, по нашему предположению,

$\mu(A_2) < \infty$. Отсюда следует, что дизъюнктное семейство $\mathcal{B}'_\delta$ — не более чем счетно. Действительно, если это не так, то, аналогично решению упражнения 1.1, получаем, что

$$\sum_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} (\mu \llcorner A_2)\big(B_r(x)\big) = \sum_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} \mu\big(B_r(x)\cap A_2\big) = \infty.$$

Но, в силу предложения 1.40, шары $B_r(x)$ и множество A_2 являются $(\mu \llcorner A_2)$-измеримыми, поэтому

$$\mu(A_2) = (\mu \llcorner A_2)(A_2) \geq (\mu \llcorner A_2)\big(\cup_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} B_r(x)\big) = \sum_{B_r(x)\in\mathcal{B}'_\delta} (\mu \llcorner A_2)\big(B_r(x)\big) = \infty,$$

противоречие.

Перенумеруем элементы этого семейства, так что $\mathcal{B}'_\delta = \{B_i\}_{1\leq i<N}$, где N может равняться ∞. По определению, для каждого $1 \leq i < N$ имеем $B_i = B_{r_i}(x_i)$. Если N конечно, то при $i \geq N$ положим $B_i = \emptyset$, $r_i = 0$, $\operatorname{diam} B_i = 0$. С учетом этих соглашений, приводимые ниже формулы будем писать для счетного семейства $\{B_i\}$.

Так как покрытие $\mathcal{B}_\delta$ сгущается в каждой точке из A_1, можно применить следствие 1.12, из которого вытекает, что для любого $1 \leq m < \infty$ выполняется

$$A_1 \setminus \bigcup_{i\leq m} B_i \subset \bigcup_{i>m}^{\infty} 5B_i$$

(заметим, что добавление пустых B_i не влияет на справедливость результата).

Отсюда следует, что $A_1 \subset \Big(\cup_{i\leq m} B_i\Big) \cup \Big(\cup_{i>m} 5B_i\Big)$ при каждом m. Таким образом, семейство $\{B_i\}_{i\leq m} \cup \{5B_i\}_{i>m}$ является (5δ)-покрытием множества A_1, откуда

$$H^k_{5\delta}(A_1) \leq \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i\leq m}(\operatorname{diam} B_i)^k + \frac{\omega_k}{2^k}\sum_{i>m}(5\operatorname{diam} B_i)^k \leq \sum_{i\leq m}\omega_k r_i^k + 5^k\sum_{i>m}\omega_k r_i^k. \tag{2.3}$$

По определению элементов покрытия $\mathcal{B}_\delta$, для непустых B_i имеем

$$\omega_k r_i^k \leq t^{-1}\mu(B_i\cap A_2) = t^{-1}(\mu \llcorner A_2)(B_i);$$

для $B_i = \emptyset$, также выполняется $\omega_k r_i^k \leq t^{-1}(\mu \llcorner A_2)(B_i)$ (правая и левая части последнего неравенства равны нулю).

В силу следствия 1.42, внешняя мера $\mu \llcorner A_2$ является борелевской, откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\omega_k r_i^k \leq t^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}(\mu \llcorner A_2)(B_i) = t^{-1}(\mu \llcorner A_2)(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq t^{-1}\mu(A_2) < \infty, \tag{2.4}$$

поэтому $\sum_{i=m+1}^{\infty}\omega_k r_i^k \to 0$ при $m\to\infty$. Переходя в неравенстве (2.3) к пределу при $m\to\infty$ и учитывая оценку (2.4), получаем $H^k_{5\delta}(A_1) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\omega_k r_i^k \leq t^{-1}\mu(A_2)$. Осталось перейти к пределу при $\delta \to 0+$.

(2) Как и в доказательстве предыдущего пункта, без ограничения общности предположим, что для всех $x\in A$ выполняется строгое неравенство $\overline{\Theta}_k(\mu, A, x) < t$. Положим

$$A_n = \Big\{x\in A : \mu\big(A\cap B_r(x)\big) \leq t\,\omega_k\, r^k \text{ при всех } 0<r<1/n\Big\},$$

тогда, начиная с некоторого n, каждое A_n непусто, так как для достаточно маленьких r все величины $\mu\big(A\cap B_r(x)\big)/(\omega_k\, r^k)$ строго меньше t. Отметим, что $A=\cup_{n=1}^\infty A_n$, $A_1\subset A_2\subset\cdots$ и, хотя A_k не обязаны быть μ-измеримыми и H^k-измеримыми, но μ и H^k — регулярные внешние меры, поэтому, в силу пункта (4) теоремы 1.23, имеем $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ и $H^k(\cup_{n=1}^\infty A_n)=\lim_{n\to\infty}H^k(A_n)$. Отсюда следует, что достаточно проверить выполнение неравенства $\mu(A_n)\le 2^k\, t\, H^k(A_n)$ при всех n. Сделаем это.

Если $H^k(A_n)=\infty$, то неравенство имеет место. Пусть теперь $H^k(A_n)<\infty$. Выберем произвольное $\delta\in\big(0,1/n\big)$, тогда, в силу замечания 2.7, существует δ-покрытие $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ множества A_n, в котором все непустые C_i пересекают A_n. Для каждого непустого C_i выберем произвольную точку $x_i\in A_n\cap C_i$ и положим $r_i=(\operatorname{diam}C_i)/2$, тогда $C_i\subset B_{2r_i}(x_i)$. Для каждого пустого C_i также положим $r_i=(\operatorname{diam}C_i)/2=0$.

Так как, для непустых C_i, имеем $2r_i=\operatorname{diam}C_i<\delta<1/n$ и $x_i\in A_n$, то

$$\mu(A\cap C_i)\le\mu\big(A\cap B_{2r_i}(x_i)\big)\le 2^k\, t\,\omega_k\, r_i^k.$$

Для пустых C_i, в силу $r_i=0$, также выполняется

$$\mu(A\cap C_i)=0=2^k\, t\,\omega_k\, r_i^k.$$

Следовательно,

$$\mu(A_n)=\mu(A\cap A_n)\le\sum_{i=1}^\infty\mu(A\cap C_i)\le 2^k\, t\,\omega_k\sum_{i=1}^\infty r_i^k=2^k\, t\,\omega_k\sum_{i=1}^\infty\Big(\frac{\operatorname{diam}C_i}{2}\Big)^k.$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким δ-покрытиям $\{C_i\}_{i=1}^\infty$, получим оценку $\mu(A_n)\le 2^k\, t\, H_\delta^k(A_n)$. Остается устремить δ к нулю. □