Тема 1

Начала теории меры.

Мы предполагаем, что слушатели знакомы с основами теории множеств и топологии, в частности, с понятиями и основными свойствами метрических пространств. Кроме того, ряд фактов, которые мы рассказывали в наших прошлых курсах, мы будет напоминать без доказательства. За деталями заинтересованные слушатели могут обратиться к `http://dfgm.math.msu.su/courses.php?comments=19` (впрочем, если Вы читаете этот текст, то Вы уже нашли ссылку).

Приведем список основных соглашений и обозначений, которыми мы будем пользоваться.

Так как многие из рассматриваемых нами функций могут принимать бесконечные значения, мы часто будем иметь дело с пополненной неотрицательной полупрямой

$$[0,\infty] = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\} \cup \{\infty\},$$

на которой определены естественный порядок ($r < \infty$ при всех $r \in \mathbb{R}$), соответствующая топология, заданная этим порядком ($[0,\infty]$ гомеоморфно отрезку), и алгебраические операции, непрерывные относительно введенной топологии (например, для неотрицательного вещественного числа r имеем $r + \infty = \infty$; если при этом $r > 0$, то $r \cdot \infty = \infty$, $r/\infty = 0$, $r/0 = \infty$), однако не определены операции, которые можно получить предельным переходом, дающим неоднозначный результат или результат, лежащий вне области $[0,\infty]$, например, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$, $\infty - \infty$, $r - \infty$.

Определим точную нижнюю и верхнюю грани подмножеств $M \subset [0,\infty]$ также для пустого M, а именно, $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = 0$.

Для функции $f\colon X \to [0,\infty]$ из произвольного множества X определим сумму $\sum_X f = \sum_{x\in X} f(x)$ следующим образом: $\sum_\emptyset f = 0$, а для непустого X положим $\sum_X f$ равным точной верхней грани обычных сумм $\sum_{x\in A} f(x)$ по всем конечным подмножествам A множества X.

Упражнение 1.1. Покажите, что если X — бесконечное несчетное множество, и $f\colon X \to [0,\infty]$ всюду положительна, то $\sum_X f = \infty$.

Решение. Заметим, что

$$\{f > 0\} = \{f > 1\} \sqcup \Big(\sqcup_{i=1}^{\infty} \{1/(i+1) < f \leq 1/i\}\Big).$$

Если хотя бы одно из множеств дизъюнктного объединения, стоящего в правой части предыдущего равенства, бесконечно, то $\sum_X f = \infty$. Но если все эти множества конечны, то их объединение, а, значит, и множество точек, в которых f принимает ненулевые значения, не более чем счетно. $\diamondsuit$

Под *расстоянием на множестве* X будем понимать симметричную функцию $d\colon X\times X\to[0,\infty]$ такую, что $d(x,x)=0$ для любого $x\in X$. Расстояние, не принимающее значение ∞, называется *конечным.* Если для **конечного** расстояния d выполняется неравенство треугольника, то d будем называть *псевдометрикой* или *полуметрикой.* Невырожденную псевдометрику будем называть *метрикой.*

Замечание 1.2. Иногда, при определении метрики, допускаются бесконечные значения, а для обозначения метрики в нашем смысле говорят про *конечную метрику.* У нас конечные метрические пространства будут возникать намного чаще, чем и объясняется наше соглашение.

Расстояние между точками x и y в произвольном метрическом пространстве X, если не оговорено противное, будем обозначать через $|xy|$, хотя иногда, особенно, если x и y рассматриваются как элементы разных пространств, будем писать $|xy|_X$ или же вводить для расстояния свой символ, скажем, d, и писать $d(x,y)$.

Пусть X — метрическое или псевдометрическое пространство. Для $x\in X$ и $r\in(0,\infty]$ открытый шар $\{y\in X:|xy|<r\}$ с центром в x и радиусом r будем обозначать через $U_r(x)$. Для $x\in X$ и $r\in[0,\infty]$ замкнутый шар $\{y\in X:|xy|\le r\}$ с центром в x и радиусом r обозначим через $B_r(x)$, а сферу $\{y\in X:|xy|=r\}$ с центром в x и радиусом r — через $S_r(x)$. Замкнутый шар и сферу радиуса r будем называть *вырожденными*, если $r=0$, иначе их назовем *невырожденными.*

Замечание 1.3. Отметим, что одно и то же подмножество метрического пространства *может быть представлено* как шар разного радиуса, в частности, оно может одновременно быть вырожденным шаром и невырожденным. Простейший пример — одноточечное метрическое пространство $X=\{x\}$. Все X является открытым шаром любого положительного радиуса и замкнутым шаром любого неотрицательного радиуса. Представляя X в виде $B_r(x)$, $r>0$, получаем, что X — невырожденный шар. Но X также можно представить как $B_0(x)$, т.е. как вырожденный шар. Таким образом, говоря о шарах в метрическом пространстве, мы имеем в виду не только сами подмножества этого пространства, но и то, как эти подмножества устроены в смысле метрики.

Упражнение 1.4. Покажите, что $\partial U_r(x)$ и $\partial B_r(x)$ лежат в $S_r(x)$, но могут не совпадать с $S_r(x)$.

Замечание 1.5. Часто в литературе можно встретить другие обозначения: открытый шар обозначают через $B_r(x)$ или $B(x,r)$, а замкнутый шар — через $\bar B_r(x)$ или $\bar B(x,r)$.

Если A и B — непустые подмножества X, то положим $|AB|=|BA|=\inf\bigl\{|ab|:a\in A,\,b\in B\bigr\}$ и назовем *расстоянием* между A и B. Если же $A=\{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr|=\bigl|B\{a\}\bigr|$ будем писать $|aB|=|Ba|$. Отметим, что определенное расстояние не является псевдометрикой (не выполняется неравенство треугольника). Тем не менее, в терминах этих расстояний естественно определяются обобщения открытого и замкнутого шаров на случай, когда вместо центра x рассматривается непустое подмножество $Z\subset X$.

Итак, для $r \in (0, \infty]$ положим $U_r(Z) = \{y \in X : |yZ| < r\}$ и назовем *открытой r-окрестностью множества Z*, а для $r \in [0, \infty]$ положим $B_r(Z) = \{y \in X : |yZ| \le r\}$ и назовем *замкнутой r-окрестностью множества Z*.

Упражнение 1.6. Покажите, что для непустого подмножества Z метрического пространства X

(1) $U_r(Z) = \cup_{x \in Z} U_r(x)$, поэтому $U_r(Z)$ является открытым подмножеством X;

(2) $\cup_{x \in Z} B_r(x) \subseteq B_r(Z)$, а равенства, вообще говоря, нет; множество $B_r(Z)$ является замкнутым подмножеством в X;

(3) если Z компактно, то $B_r(Z) = \cup_{x \in Z} B_r(x)$;

(4) если $\bar{Z}$ обозначает замыкание Z, то $\bar{Z} = \bigcap\limits_{r>0} B_r(Z) = \bigcap\limits_{r_i \to 0+} B_{r_i}(Z)$;

(5) $U_r\big(U_s(Z)\big) \subseteq U_{r+s}(Z)$, а равенства, вообще говоря, нет;

(6) для непустых подмножеств Y и Z метрического пространства X таких, что $d := |YZ| > 0$, любого $0 < r < d$ и непустого $W \subset X$, $W \subset U_r(Y)$, имеем $|WZ| \ge d - r$.

1.1 Теорема Витали о покрытии

Детали обсуждения приводимой ниже теоремы Витали можно найти в [6]–[13].

Введем удобные обозначения. Пусть X обозначает метрическое пространство, а $Y \subset X$ — шар или сфера радиуса r. Тогда для вещественного числа $\lambda > 0$ через λY обозначим тот же объект с тем же центром, но уже радиуса λr. Если $\mathcal{C} = \{Y_\alpha\}$ — семейство шаров или сфер в X, то через $\lambda \mathcal{C}$ будем обозначать семейство $\{\lambda Y_\alpha\}$.

Напомним, что семейство множеств $\mathcal{C} = \{Z_\alpha\}$ называется *дизъюнктным*, если $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$ при всех $\alpha \ne \beta$. Также для произвольного семейства множеств $\mathcal{C} = \{Z_\alpha\}$ положим $\cup \mathcal{C} = \cup_\alpha Z_\alpha$.

Теорема 1.7 (Витали)**.** *Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство замкнутых невырожденных шаров в X, радиусы которых ограничены в совокупности, т.е. не превосходят некоторого числа R. Тогда в $\mathcal{B}$ можно найти дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'$ такое, что для каждого $B \in \mathcal{B}$ существует $B' \in \mathcal{B}'$, для которого $B \cap B' \ne \emptyset$ и $B \subset 5B'$. В частности, $\cup \mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$. Если пространство X сепарабельно, то каждое такое $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно.*

Рисунок 1.1 иллюстрирует теорему Витали.

Доказательство. Разобьем $\mathcal{B}$ на подсемейства $\mathcal{B}_j$, $j \in \mathbb{N}$, положив в $\mathcal{B}_j$ все $B \in \mathcal{B}$, радиусы r которых удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{R}{2^j} < r \le \frac{R}{2^{j-1}}.$$

Теперь выберем максимальное дизъюнктное объединение в $\mathcal{B}$ специального вида. Чтобы это сделать, нам понадобится лемма Цорна. Напомним, в чем она заключается.

Пусть X — множество, на котором задан частичный порядок, т.е., вообще говоря, не все пары элементов сравнимы. Типичные пример — семейство подмножеств некоторого множества, где порядок задается

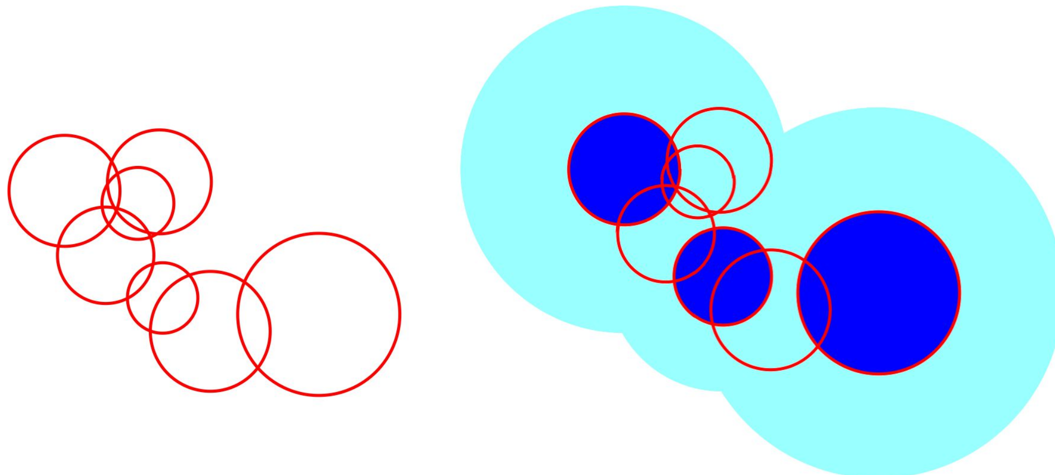

Рис. 1.1: Иллюстрация к теореме Витали.

отношением принадлежности: одно подмножество не превосходит другого, если оно содержится в этом другом (порядок частичный, так как ни для всякой пары подмножеств верно, что одно из них принадлежит другому).

Порядок называется *линейным*, если сравнима любая пара множеств. *Цепочкой в* X называется каждое подмножество X, порядок на котором — линейный. Элемент частично упорядоченного множества называется *максимальным*, если все остальные элементы или его не превосходят, или не сравнимы. Элемент x называется *верхней гранью для* $Y \subset X$, если для каждого $y \in Y$ выполняется $y \leq x$. В этом случае будем писать $Y \leq x$.

Лемма 1.8 (Цорн)**.** *Если в частично упорядоченном множестве каждая цепочка имеет верхнюю грань, то каждый элемент этого множества не превосходит некоторого максимального.*

Применим теперь лемму Цорна для наших целей. Рассмотрим всевозможные дизъюнктные подсемейства в $\mathcal{B}_1$. На этих подсемействах имеется естественный частичный порядок, заданный отношением принадлежности одного семейства другому. Если $\mathcal{D}$ — цепочка таких подсемейств, то $\cup\mathcal{D}$ также представляет собой дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}_1$ (проверьте). Но тогда $\cup\mathcal{D}$ является верхней гранью цепочки $\mathcal{D}$. Тем самым, каждая цепочка имеет верхнюю грань, значит, по лемме Цорна, семейство дизъюнктных подсемейств в $\mathcal{B}_1$ имеет максимальный элемент. Иными словами, в $\mathcal{B}_1$ имеется максимальное дизъюнктное подсемейство. Выберем одно из таких семейств и обозначим его через $\mathcal{B}'_1$.

Теперь добавим к $\mathcal{B}_1$ семейство $\mathcal{B}_2$, и в $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, пользуясь леммой Цорна, выберем максимальное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'_2$, содержащее $\mathcal{B}'_1$. Продолжим этот процесс, и для каждого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, построим максимальное в $\cup_{i=1}^{j}\mathcal{B}_i$ дизъюнктное подсемейство, содержащее $\mathcal{B}'_j$. Наконец, положим $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}'_j$ и получим, очевидно, дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}$.

Замечание 1.9. Можно было бы сразу выбрать максимальное дизъюнктивное подмножество во всем $\mathcal{B}$. Конечно, при таком выборе каждый $B \in \mathcal{B}$ будет пересекать некоторый $B' \in \mathcal{B}'$ в силу максимальности $\mathcal{B}'$, однако мы не гарантированы, что $B \subset 5B'$. Чтобы добиться последнего, приходится выбирать $\mathcal{B}'$ более тонким образом.

Покажем, что $\mathcal{B}'$ — искомое. Возьмем произвольное $B \in \mathcal{B}$, тогда для некоторого j выполняется $B \in \mathcal{B}_j$. Тогда существует $B' \in \mathcal{B}'_j$, для которого $B' \cap B \neq \emptyset$. Действительно, если такого нет, то, добавив B к $\mathcal{B}'_j$, получим также дизъюнктное подсемейство, что противоречит максимальности $\mathcal{B}'_j$.

Далее, радиус шара B' больше $R/2^j$, а радиус шара B не превосходит $R/2^{j-1}$, поэтому $B \subset 5B'$ (проверьте), откуда, в частности, вытекает, что $\cup\mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$.

Пусть теперь X сепарабельно, и подмножество $Y \subset X$ — всюду плотное и не более чем счетное. Так как все шары из $\mathcal{B}'$ имеют положительные радиусы, в каждом из них можно выбрать по одной точке из Y. Так как семейство $\mathcal{B}'$ дизъюнктно, количество элементов в $\mathcal{B}'$ такое же, как и число выбранных точек из Y, поэтому семейство $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно. $\square$

Определение 1.10. Будем говорить, что семейство шаров $\mathcal{B}$ *сгущается* в некоторой точке $x \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует содержащий x шар $B \in \mathcal{B}$ радиуса меньше ε.

Замечание 1.11. В англоязычной литературе покрытия, которые сгущаются в каждой точке, называют fine coverings.

Следствие 1.12. *Предположим, что семейство $\mathcal{B}$ невырожденных замкнутых шаров в X с ограниченными в совокупности радиусами сгущается в каждой точке некоторого множества $A \subset X$. Тогда семейство $\mathcal{B}'$, построенное в теореме* 1.7, *удовлетворяет следующему свойству: для любого конечного набора $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{B}$ имеем*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}} 5B'.$$

Доказательство. Если $A \subset \cup_{i=1}^m B_i$, то все доказано. Пусть теперь существует $x \in A \setminus \cup_{i=1}^m B_i$. Так как покрытие $\mathcal{B}$ сгущается в x, можно найти $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $B \cap B_i = \emptyset$ при всех i. По свойству семейства $\mathcal{B}'$, существует $B' \in \mathcal{B}'$ такой, что $B \cap B' \neq \emptyset$ и $B \subset 5B'$. Осталось заметить, что B' отличен от шаров B_i, так как последние не пересекают B, а B' — пересекает; следовательно, $B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}$. □

1.2 Внешняя мера

Для произвольного множества X обозначим через $\mathcal{P}(X)$ семейство всех подмножеств X.

Определение 1.13. Функция $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ называется *внешней мерой*, если $\mu(\emptyset) = 0$ и μ — *счетно субаддитивна*, т.е. для любых $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots$, и $A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$ выполняется $\mu(A) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

Замечание 1.14.
(1) Из счетной субаддитивности внешней меры и условия $\mu(\emptyset) = 0$ вытекает *конечная субаддитивность*: для любых $A_i \subset X$, $i = 1, \ldots, n$, и $A \subset \cup_{i=1}^n A_i$ выполняется $\mu(A) \le \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Действительно, в условии субаддитивности достаточно положить $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

(2) Каждая внешняя мера μ на множестве X является *монотонной функцией*, т.е. для любых $A \subset B \subset X$ выполняется $\mu(A) \le \mu(B)$, что является частным случаем конечной субаддитивности.

Определение 1.15. Для внешней меры μ на множестве X, подмножество $A \subset X$ называется *μ-измеримым* (по Каратеодори) или просто *измеримым*, когда понятно, о какой мере идет речь, если для любого $F \subset X$ выполняется $\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$ (т.е. если множество A разбивает каждое F “аддитивным образом” по отношению к μ).

Замечание 1.16. В силу условия субаддитивности, для доказательства μ-измеримости множества A достаточно проверять лишь неравенство $\mu(F) \ge \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$, причем только для тех F, у которых $\mu(F) < \infty$ (если $\mu(F) = \infty$, но неравенство очевидно выполняется).

Определение 1.17. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ называется *σ-алгеброй на X*, если $X \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ замкнуто относительно дополнений и счетных объединений.

Замечание 1.18. Так как $\emptyset$ является дополнением до $X \in \mathcal{F}$, то $\emptyset \in \mathcal{F}$. Также $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных объединений. Кроме того, $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных и счетных пересечений.

Теорема 1.19. *Для каждой внешней меры μ на множестве X семейство всех μ-измеримых подмножеств X является σ-алгеброй.*

Определение 1.20. Пусть μ — внешняя мера на множестве X и $A \subset X$. Каждое μ-измеримое множество $\widehat{A} \subset X$ такое, что $A \subset \widehat{A}$ и $\mu(A) = \mu(\widehat{A})$, называется *$\mu$-оболочкой множества A*. Другими словами, μ-оболочка множества A — это "μ-измеримое расширение" A той же меры μ.

Определение 1.21. Внешняя мера μ на множестве X называется *регулярной*, если каждое A имеет μ-оболочку.

Определение 1.22. Внешнюю меру μ на множестве X назовем *счетно-аддитивной на σ-алгебре $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$*, если для любых попарно не пересекающихся $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, выполняется

$$\mu\big(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Теорема 1.23. *Для каждой внешней меры μ на множестве X и любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ измеримых множеств выполняется*

(1) *если A_i попарно не пересекаются, то $\mu\big(\sqcup_i A_i\big) = \sum_i \mu(A_i)$, т.е. внешняя мера μ является счетно-аддитивной на σ-алгебре μ-измеримых множеств*;

(2) *если $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, то $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\big(\cup_i A_i\big)$*;

(3) *если $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ и $\mu(A_1) < \infty$, то $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\big(\cap_i A_i\big)$*;

(4) *если внешняя мера μ регулярна, то пункт* (2) *имеет место для любых, не обязательно μ-измеримых, $A_i \subset X$.*

Пример 1.24. (1) Для произвольного множества X и любой его точки $x \in X$ определим внешнюю меру δ_x на X, положив $\delta_x(A) = 1$, если $x \in A$, и $\delta_x(A) = 0$ в противном случае. Полученная внешняя мера называется *дельта-функцией Дирака с центром в x*. Легко видеть, что каждое $A \subset X$ является δ_x-измеримым.

(2) Определим на том же X внешнюю меру μ, положив $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(A) = 1$ для любого $A \neq \emptyset$. Тогда σ-алгебра μ-измеримых множеств равна $\{\emptyset, X\}$. Таким образом, если X состоит более чем из одного элемента, то σ-алгебры измеримых множеств для внешних мер δ_e и μ различны.

(3) Определим на X еще одну внешнюю меру, которая называется *считающей*: для конечного A число $\mu(A)$ равно количеству элементов в A, а для бесконечного A имеем $\mu(A) = \infty$. Легко проверяется, что каждое $A \subset X$ является μ-измеримым.

Замечание 1.25. Пересечение любого набора σ-алгебр также является σ-алгеброй, поэтому для любого семейства $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ существует и единственна наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{M}$.

1.2.1 Борелевская внешняя мера

Определение 1.26. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ. Наименьшая σ-алгебра на X, содержащая τ, называется *борелевской* и обозначается через $\mathcal{B}(X)$. Элементы борелевской σ-алгебры называются *борелевским множествами.*

Замечание 1.27. Эквивалентное определение борелевской σ-алгебры на топологическом пространстве X: это наименьшая σ-алгебра на X, содержащая все замкнутые множества.

Определение 1.28. Внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевской*, если все борелевские множества являются μ-измеримыми.

Определение 1.29. Подмножества A и B метрического пространства X называются *отделимыми*, если они находятся друг от друга на ненулевом расстоянии: $|AB| > 0$.

Определение 1.30. Внешняя мера μ на метрическом пространстве называется *аддитивной на отделимых множествах*, если для любых отделимых множеств A и B выполняется $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Теорема 1.31 (Критерий Каратеодори)**.** *На метрическом пространстве X внешняя мера μ является борелевской, если и только если она аддитивна на отделимых множествах.*

Доказательство. Пусть все борелевские множества измеримы, а расстояние между множествами A и B равно положительному ε. Положим $U = U_{\varepsilon/2}(A)$, тогда $U \cap B = \emptyset$, поэтому $(A \cup B) \cap U = A$ и $(A \cup B) \setminus U = B$. Так как множество U открыто и, значит, μ-измеримо, имеем

$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap U\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus U\big) = \mu(A) + \mu(B).$$

Обратно, пусть для любых A и B, находящихся на положительном расстоянии, выполняется $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$. Покажем, что все борелевские множества измеримы.

Лемма 1.32. *Внешняя мера μ на топологическом пространстве является борелевской, если и только если все открытые (все замкнутые) множества являются μ-измеримыми.*

Доказательство. Так как открытые и замкнутые множества, по определению, являются борелевскими, то измеримость всех борелевских множеств влечет измеримость и открытых множеств, и замкнутых. Обратно, пусть все открытые (замкнутые) множества измеримы. По теореме 1.19, семейство всех измеримых множеств образует σ-алгебру, которая, по условию, содержит все открытые (все замкнутые) множества. Так как борелевская σ-алгебра — наименьшая из всех, содержащих все открытые (замкнутые) множества, заключаем, что она содержится в σ-алгебре всех измеримых множеств, т.е. все борелевские множества измеримы. Решение закончено. □

В силу леммы 1.32, достаточно проверить измеримость всех открытых множеств.

Пусть $U \subset X$ — открытое, а $B \subset X$ — произвольное множества. В силу замечания 1.16, достаточно показать, что $\mu(B \cap U) + \mu(B \setminus U) \leq \mu(B)$ для любого B конечной меры μ. Для каждого натурального n положим

$$U_n = \big\{x \in U : \operatorname{dist}(x, X \setminus U) > 1/n\big\},$$

тогда $\operatorname{dist}(B \cap U_n, B \setminus U) \geq \operatorname{dist}(U_n, X \setminus U) \geq 1/n$, поэтому, в силу условия,

$$\mu(B \cap U_n) + \mu(B \setminus U) = \mu\big((B \cap U_n) \cup (B \setminus U)\big) \leq \mu(B).$$

Покажем, что $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$ при $n \to \infty$, чем и завершим доказательство.

Положим $A_n = B \cap (U_{n+1} \setminus U_n)$. Пусть I — множество всех индексов n таких, что $A_{2n} \neq \emptyset$, а J — множество всех n таких, что $A_{2n-1} \neq \emptyset$. Заметим, что для любых различных p, $q \in I$ (а также p, $q \in J$) имеем $\operatorname{dist}(A_{2p}, A_{2q}) > 0$ (соответственно $\operatorname{dist}(A_{2p-1}, A_{2q-1}) > 0$), поэтому, учитывая, что $\mu(\emptyset) = 0$, для любого натурального n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k}) = \mu\big(\cup_{k \leq n} A_{2k}\big) \leq \mu(B), \quad \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k-1}) = \mu\big(\cup_{k \leq n} A_{2k-1}\big) \leq \mu(B),$$

и, значит, ряд $\sum \mu(A_k)$ сходится (напомним, что $\mu(B) < \infty$).

Заметим, что $B \cap U = (B \cap U_n) \cup (\cup_{k \geq n} A_k)$. Из монотонности и субаддитивности вытекает, что

$$\mu(B \cap U_n) \leq \mu(B \cap U) \leq \mu(B \cap U_n) + \sum_{k \geq n} \mu(A_k),$$

откуда, в силу сходимости ряда $\sum \mu(A_k)$, имеем $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$. Доказательство закончено. □

Определение 1.33. Внешнюю меру μ назовем *конечной*, если она не принимает значение ∞.

Теорема 1.34. *Для произвольного метрического пространства X, конечной борелевской внешней меры μ и произвольного борелевского множества $B \subset X$ выполняется*

$$\mu(B) = \sup\big\{\mu(C) : C \subset B \text{ — замкнутое множество в } X\big\}, \tag{1.1}$$

$$\mu(B) = \inf\big\{\mu(C) : B \subset C \subset X \text{ — открытое множество в } X\big\}. \tag{1.2}$$

Замечание 1.35. Формула (1.1) имеет место и в более общем случае, а именно, когда X представляет собой счетное объединение замкнутых множеств конечной меры. Формула (1.2) также имеет место в более общем случае: достаточно потребовать, чтобы X равнялось счетному объединению открытых множеств конечной меры.

Определение 1.36. Борелевская внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевски регулярной*, если у каждого $A \subset X$ существует борелевская μ-оболочка, т.е. такое борелевское $B \supset A$, что $\mu(A) = \mu(B)$. Другими словами, каждое подмножество в X имеет "μ-измеримое борелевское расширение" той же меры.

1.2.2 Индуцированная внешняя мера

Пусть μ — внешняя мера на множестве X, а Y — произвольное подмножество X. Определим функцию $\mu \llcorner Y : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, положив $(\mu \llcorner Y)(A) = \mu(A \cap Y)$ для любого $A \subset X$.

Замечание 1.37. Иногда вместо $\mu \llcorner Y$ бывает удобно писать μ_Y, что мы и делали в наших предыдущих лекциях.

Предложение 1.38. *Функция $\mu \llcorner Y$ является внешней мерой на X и, значит, на Y.*

Доказательство. Покажем, что $(\mu \llcorner Y)(\emptyset) = 0$.

$$(\mu \llcorner Y)(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap Y) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Проверим субаддитивность. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие множества $A \subset X$, тогда $\{A_i \cap Y\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие $A \cap Y$, поэтому

$$(\mu \llcorner Y)(A) = \mu(A \cap Y) \leq \sum_i \mu(A_i \cap Y) = \sum_i (\mu \llcorner Y)(A_i),$$

что и требовалось. □

Определение 1.39. Определенную выше внешнюю меру $\mu \llcorner Y$ на Y называют *индуцированной из μ*.

Предложение 1.40. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X, и A — некоторое μ-измеримое подмножество X. Тогда для произвольного $Y \subset X$ множество A и, значит, $A \cap Y$ будут также $(\mu \llcorner Y)$-измеримыми. В частности, положив $A = X$, заключаем, что Y всегда является $(\mu \llcorner Y)$-измеримым.*

Доказательство. Для произвольного множества $B \subset X$ имеем

$$(\mu \llcorner Y)(B) = \mu(B \cap Y) = \mu\big((B \cap Y) \cap A\big) + \mu\big((B \cap Y) \setminus A\big) = \\ = \mu\big((B \cap A) \cap Y\big) + \mu\big((B \setminus A) \cap Y\big) = (\mu \llcorner Y)(B \cap A) + (\mu \llcorner Y)(B \setminus A),$$

что и требовалось. □

Замечание 1.41. Не каждое $(\mu \llcorner Y)$-измеримое множество является μ-измеримым. Действительно, так как Y всегда $(\mu \llcorner Y)$-измеримо, даже если Y не μ-измеримо, достаточно привести пример неизмеримого Y. Внешнюю меру, у которой есть неизмеримые множества, мы уже рассматривали в пункте (2) примера 1.24.

Из предложения 1.40 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 1.42. *Если μ — борелевская внешняя мера на топологическом пространстве X, то для любого $Y \subset X$ внешняя мера $\mu \llcorner Y$ — также борелевская.*

Идея доказательства следующего предложения взята из [8].

Теорема 1.43. *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на топологическом пространстве X, и Y — произвольное μ-измеримое множество, причем $\mu(Y) < \infty$, тогда внешняя мера $\mu \llcorner Y$ — также борелевски регулярна.*

Доказательство. То, что $\mu \llcorner Y$ — борелевская вытекает из следствия 1.42.

Сведем задачу к борелевскому Y. Так как μ — борелевски регулярна, существует $Z \in \mathcal{B}(X)$ такой, что $Y \subset Z$ и $\mu(Y) = \mu(Z)$. Мы покажем, что $\mu \llcorner Y = \mu \llcorner Z$, а для этого достаточно проверить, что $\mu \llcorner Z \le \mu \llcorner Y$, так как обратное неравенство мгновенно вытекает из монотонности.

В силу того, что Y является μ-измеримым, имеем

$$\mu(Z) = \mu(Z \cap Y) + \mu(Z \setminus Y) = \mu(Y) + \mu(Z \setminus Y),$$

откуда $\mu(Z \setminus Y) = 0$ (здесь мы воспользовались конечностью $\mu(Y)$). Снова учитывая μ-измеримость Y, для произвольного $A \subset X$ получим

$$(\mu \llcorner Z)(A) = \mu(A \cap Z) = \mu\big((A \cap Z) \cap Y\big) + \mu\big((A \cap Z) \setminus Y\big) = \mu(A \cap Y) + \mu\big((A \cap Z) \setminus Y\big) \le \\ \le \mu(A \cap Y) + \mu\big(Z \setminus Y\big) = \mu(A \cap Y) = (\mu \llcorner Y)(A).$$

Итак, нам осталось доказать предложение в предположении, что Y — борелевское. Пусть это так.

Снова выберем произвольное $A \subset X$. Так как μ — борелевски регулярна, существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $A \cap Y \subset B$ и $\mu(A \cap Y) = \mu(B)$. Положим $C = B \cup (X \setminus Y)$ и покажем, что C — борелевская $\mu \llcorner Y$-оболочка множества A.

Заметим, что $C \cap Y = B \cap Y$, а также, что

$$A \subset (A \cap Y) \cup (X \setminus Y) \subset B \cup (X \setminus Y) = C.$$

Так как B и Y — борелевские, то C — также борелевское. Мы завершим доказательство, показав, что $(\mu \llcorner Y)(A) = (\mu \llcorner Y)(C)$, для чего, в силу монотонности, достаточно проверить неравенство $(\mu \llcorner Y)(C) \leq (\mu \llcorner Y)(A)$. Сделаем это:

$$(\mu \llcorner Y)(C) = \mu(C \cap Y) = \mu(B \cap Y) \leq \mu(B) = \mu(A \cap Y) = (\mu \llcorner Y)(A),$$

что и требовалось. $\square$

1.3 Мера

В классической теории меры построение обычно начинается с некоторой σ-алгебры и функции, определенной не на всех подмножествах, а только на тех, что лежат в этой σ-алгебре.

Определение 1.44. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества X. Функция $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ называется *мерой на* $\mathcal{M}$, если $\mu(\emptyset) = 0$ и μ является счетно аддитивной: мера счетного дизъюнктного объединения множеств из $\mathcal{M}$ равна сумме мер этих множеств.

Замечание 1.45. Как и в случае внешней меры, мера является также и конечно аддитивной функцией.

Определение 1.46. Тройка $(X, \mathcal{M}, \mu)$, состоящая из множества X, некоторой σ-алгебры $\mathcal{M}$ на X и произвольной меры μ на $\mathcal{M}$, называется *пространством с мерой*; при этом элементы σ-алгебры $\mathcal{M}$ называются *измеримыми множествами*, а если требуется указать, какая мера порождает рассматриваемую σ-алгебру, то — *μ-измеримыми множествами.*

Теорема 1.47. *Пусть μ — мера на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) ***Монотонность***: *если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(2) ***Счетная субаддитивность***: *$\mu(\cup A_i) \leq \sum \mu(A_i)$ для любого счетного набора $\{A_i\}$ измеримых множеств.*

(3) ***Непрерывность снизу***: *пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cup A_i)$.*

(4) ***Непрерывность сверху***: *пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Предположим, что $\mu(A_1) < \infty$. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cap A_i)$.*

Имеется естественная конструкция, продолжающая меру, определенную на σ-алгебре, на семейство всех подмножеств.

Конструкция 1.48. Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Определим функцию $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, положив

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid A \subset B \in \mathcal{M}\}.$$

Теорема 1.49. *Определенная только что функция μ^* является внешней мерой, продолжающей μ.*

Доказательство. Покажем сначала, что μ^* продолжает μ. Пусть $A \in \mathcal{M}$. В силу пункта (1) теоремы 1.47, для любого $B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, имеем $\mu(A) \le \mu(B)$, поэтому $\mu^*(A) = \mu(A)$, что и требовалось. В частности, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Далее, покажем, что функция μ^* монотонна (нам это понадобится для доказательства субаддитивности). Пусть $A \subset B$, тогда

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(C) \mid B \subset C \in \mathcal{M}\} \ge \inf\big\{\mu(C) \mid A \subset C \in \mathcal{M}\big\} = \mu^*(A),$$

так как если $C \supset B$, то также $C \supset A$, поэтому первый inf берется по меньшему или такому же множеству, что и второй.

Наконец, проверим, что функция μ^* субаддитивна. Пусть $\{A_i\}$ — произвольное не более чем счетное покрытие произвольного множества $A \subset X$. Для каждого i рассмотрим произвольное $B_i \supset A_i$, $B_i \in \mathcal{M}$, тогда $B = \cup_i B_i \in \mathcal{M}$ и $A \subset B$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) = \mu(B) \le \sum_i \mu(B_i).$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для каждого i существует такое $B_i^\varepsilon \in \mathcal{M}$, $A_i \subset B_i^\varepsilon$, что $\mu(B_i^\varepsilon) \le \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \sum_i \mu(B_i^\varepsilon) \le \varepsilon + \sum_i \mu^*(A_i).$$

В силу произвольности ε, заключаем требуемое. □

Определение 1.50. Описанная в конструкции 1.48 внешняя мера μ^*, построенная по мере μ, называется *лебеговым продолжением меры μ.*

1.4 Мера Лебега

Наиболее популярная мера в математическом анализе называется мерой Лебега. Мы не будем приводить ее конструкцию, а вместо этого зададим эту меру неявно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.51 (Лебег)**.** *Существует единственная мера $\mathcal{L}^n$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантная относительно параллельных переносов (сдвигов) и такая, что*

$$\mathcal{L}^n\big([0,1]^n\big) = 1.$$

Определение 1.52. Мера из теоремы 1.51 называется *n-мерной мерой Лебега* или *n-мерным евклидовым объемом.*

Замечание 1.53. Из теоремы 1.51 мгновенно вытекает существование и единственность меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантной относительно сдвигов и такой, что $\mu\big([0,1]^n\big) = a$ для произвольного $a \ge 0$. Эта мера равна $a\,\mathcal{L}^n$.

Определение 1.54. Лебегово продолжение меры Лебега называется *внешней мерой Лебега.*

1.5 “Почти” в смысле меры

В теории меры часто приняты не точные соотношения, а почти-соотношения, по какой-либо мере μ. Приведем ряд примеров, которые нам понадобятся.

Итак, пусть μ — некоторая внешняя мера на множестве X.

Почти принадлежность. Пусть A и B — подмножества в X. Будем говорить, что *μ-почти все A лежит в B* и писать $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ или $B \overset{\text{п.в.}}{\supset} A$, если $\mu(A \setminus B) = 0$.

Предложение 1.55. *Если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B \overset{\text{п.в.}}{\subset} C$, то $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} C$.*

Доказательство. По определению, имеем $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\mu(B \setminus C) = 0$, но $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, поэтому, в силу монотонности внешней меры, $\mu(A \setminus C) = 0$, что и требовалось. □

Предложение 1.56. *Если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

Доказательство. Из субаддитивности внешней меры заключаем, что $\mu(A) \le \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B)$, что и требовалось. □

Почти равенство. Пусть A и B — подмножества в X. Будем говорить, что A и B являются *μ-почти равными* и писать $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$, если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ или $B \overset{\text{п.в.}}{\subset} A$, т.е. если $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$.

Из предложения 1.56 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 1.57. *Если $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$, то $\mu(A) = \mu(B)$.*

Почти покрытие. Пусть $A \subset X$, и $\{A_i\}$ — семейство подмножеств X. Будем говорить, что $\{A_i\}$ является *μ-почти покрытием* A, или что $\{A_i\}$ *покрывает μ-почти все* A, если $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} \cup A_i$, т.е. $\mu\big(A \setminus (\cup A_i)\big) = 0$.

Из предложения 1.56 и субаддитивности внешней меры вытекает следующий результат.

Следствие 1.58. *Пусть $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — счетное μ-почти покрытие множества A. Тогда $\mu(A) \le \sum \mu(A_i)$.*

Почти непересекающиеся множества. Пусть A и B — подмножества в X. Будем говорить, что A и B являются *μ-почти непересекающимися* или *μ-почти дизъюнктными*, если $\mu(A \cap B) = 0$. Для μ-почти непересекающихся A и B их объединение будем называть *μ-почти дизъюнктным объединением* и обозначать через $A \overset{\text{п.в.}}{\sqcup} B$. Аналогично определяется произвольное μ-почти дизъюнктное семейство подмножеств в X: каждая пара таких подмножеств должна быть μ-почти дизъюнктной.

Предложение 1.59. *Пусть $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — семейство μ-измеримых подмножеств X, являющееся μ-почти дизъюнктным. Тогда*

$$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i).$$

Доказательство. Положим $B_k = A_k \cap (\cup_{i \ne k} A_i) = \cup_{i \ne k}(A_k \cap A_i) \subset A_k$. Так как $\mu(A_k \cap A_i) = 0$, то $\mu(B_k) = 0$. Пусть $C_k = A_k \setminus B_k$, тогда $A_k = C_k \sqcup B_k$, причем C_k и B_k являются μ-измеримыми, поэтому $\mu(A_k) = \mu(C_k) + \mu(B_k) = \mu(C_k)$. Легко видеть, что

$\{C_k\}$ является (μ-измеримым) дизъюнктным семейством. Положим $A = \cup A_k$, $C = \cup C_k$, тогда, так как $C_k \subset A_k$ при каждом k, имеем $C \subset A$, откуда

$$\mu(A) \geq \mu(C) = \sum \mu(C_k) = \sum \mu(A_k).$$

С другой стороны, в силу счетной субаддитивности внешней меры, имеем $\mu(A) \leq \sum \mu(A_k)$, что и требовалось. $\square$

Явное указание меры. Иногда нам нужно будет явно указать ту внешнюю меру, для которой выполняется почти-соотношение. Тогда мы будем к п.в. добавлять обозначение меры, например, μ-п.в. Так появляются почти-соотношения

$$A \overset{\mu\text{-п.в.}}{\subset} B,\ A \overset{\mu\text{-п.в.}}{=} B,\ A \overset{\mu\text{-п.в.}}{\sqcup} B.$$