Лекция 8

Расстояние Громова–Хаусдорфа: некомпактный случай

Данный раздел посвящен обобщению расстояния Громова–Хаусдорфа на случай некомпактных метрических пространств. В некомпактном случае часто определяют только сходимость пространств по Громову–Хаусдорфу, хотя в оригинальной работе Громова [5] было определено расстояние. Мы приведем тут оригинальное определение и опишем основные свойства полученной функции расстояния и соответствующей сходимости. В качестве основного источника используется работа [24].

8.1 Расстояние по Громову-Хаусдорфу между пунктированными пространствами

Напомним, что в компактном случае расстояние Громова–Хаусдорфа можно определить с помощью так называемых допустимых метрик на дизъюнктном объединении пространств. А именно, метрика ρ на $X \sqcup Y$ — допустимая, если ее ограничения на X и Y совпадают с исходными метриками. Множество всех допустимых метрик для данных X и Y обозналось через $\mathcal{D}(X,Y)$ и был получен следующий результат (Теорема 6.3):

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{\rho_H(X,Y) : \rho \in \mathcal{D}(X,Y)\bigr\}.$$

Переформулируем его так. Для $t>0$ назовем метрику ρ на множестве $x \sqcup Y$ *t-допустимой*, если ее ограничения на X и Y совпадают с исходными метриками и $X \subset U_t(Y)$ и $Y \subset U_t(X)$. Последнее равносильно $\rho_H(X,Y) < t$. Множество t-допустимых метрик обозначим через $\mathcal{D}_t(X,Y)$. Тогда

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{t > 0 : \text{существует } \rho \in \mathcal{D}_t(X,Y)\bigr\}.$$

8.1.1 Пунктированные пространства, определение расстояния

Пунктированным метрическим пространством называется тройка (X,ρ,a), где (X,ρ) — обычное метрическое пространство, и $a \in X$. Часто будем обозначать просто через (X,a). *Отображение* $f\colon (X,a) \to (Y,b)$ *пунктированных пространств* переводит отмеченную точку в отмеченную: $f(a)=b$.

Пусть (X,a) и (Y,b) — пунктированные метрические пространства. Для $t>0$ метрику на $X \sqcup Y$ назовем *$(t;a,b)$-допустимой*, если ограничения ρ на X и Y совпадают с исходными метриками и выполнены следующие условия:

$$\rho(a,b) < t, \qquad B^\rho_{1/t}(a) \subset U^\rho_t(Y), \qquad B^\rho_{1/t}(b) \subset U^\rho_t(X), \tag{8.1}$$

где, напомним, $B^d_r(x)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в x в метрике d, а $U^d_r(A)$ — объединение открытых шаров $U^d_r(a)$, $a \in A$, в метрике d.

Замечание 8.1. Если ρ — $(t;a,b)$-допустимая метрика и $s \ge t$, то ρ также является $(s;a,b)$-допустимой.

Замечание 8.2. Включение $B^\rho_{1/t}(a) \subset U^\rho_t(Y)$ равносильно включению $B^\rho_{1/t}(a) \cap X \subset U^\rho_t(Y)$.

Лемма 8.3. *Из условий 8.1 следует, что для каждого* $r \in (0, 1/t]$ *выполнено:*

$$B^\rho_r(a) \subset U^\rho_t\big(U^\rho_{r+2t}(b) \cap Y\big), \qquad B^\rho_r(b) \subset U^\rho_t\big(U^\rho_{r+2t}(a) \cap X\big).$$

Доказательство. Пусть $r \in (0, 1/t]$ и $w \in B^\rho_r(a)$. Тогда $\rho(b, w) \le \rho(b, a) + \rho(a, w) < t + r$. По условию существует $y \in Y$ для которого $\rho(y, w) < t$. Но тогда $\rho(y, b) \le \rho(y, w) + \rho(w, b) < t + t + r = 2t + r$, то есть $w \in U^\rho_t(y)$, где $y \in U^\rho_{r+2t}(b) \cap Y$, что и требовалось. Второе включение доказывается точно так же. □

Положим

$$\tilde d_{GH^*}\big((X, a), (Y, b)\big) = \inf\big\{t > 0 : \text{существует } (t; a, b)\text{-допустимая метрика на } X \sqcup Y\big\},$$

и

$$d_{GH^*}\big((X, a), (Y, b)\big) = \min\big\{1/2, \tilde d_{GH^*}\big((X, a), (Y, b)\big)\big\}.$$

Пример 8.4. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — сфера радиуса $R \ge 1$ с центром в точке $(0, \dots, 0, R)$, касающаяся координатной плоскости $\Pi = \mathbb{R}^n(x^{n+1} = 0)$ в точке $O = (0, \dots, 0)$. Метрика на сфере индуцирована из $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $d_{GH*}\big((S, O), (\Pi, O)\big) \le 1/R^{1/3}$.

Положим $r = R^{1/3}$. Покажем, что стандартное евклидово расстояние на $\mathbb{R}^{n+1}$ задает $(1/r, O, O)$-допустимую метрику на $S \sqcup \Pi$.

Из симметрии картинки относительно вращения вокруг оси Ox^{n+1} ясно, что достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Соответствующая окружность задается уравнением $x^2 + (y - R)^2 = R^2$. Отмеченные точки совпадают, поэтому остается изучить шары радиуса $1/(1/r) = r$. Так как $r < R$, то $R^2 - r^2 > 0$, и найдется такое $0 < y_1 < R$, что $(r, y_1) \in S$. Пересечение $S \cap \partial B_r(O)$, пусть (x_0, y_0) — точка из этого пересечения, $x_0 \in (0, r)$, $y_0 \in (0, y_1)$. Имеем:

$$y_1 = R - \sqrt{R^2 - r^2} = r^3 - r\sqrt{r^4 - 1} < \frac{1}{r}$$

(последнее неравенство проверяется непосредственно). Поэтому для всех $(x, y) \in S \cap B_r(O)$ выполнено неравенство

$$\big|(x, y), \mathbb{R}\big| = y \le y_0 \le y_1 < 1/r,$$

и значит $S \cap B_r(O) \subset U_{1/r}(\Pi)$. С другой стороны, для всех $(x, 0) \in \mathbb{R} \cap B_r(O)$ имеем: $\big|(x, 0), S\big| \le y_1 < 1/r$, поэтому $\Pi \cap B_r(O) \subset U_{1/r}(S)$. Таким образом, $d_{GH*}\big((S, O), (\Pi, O)\big) \le 1/R^{1/3}$.

Утверждение 8.5. *Функция* $\tilde d_{GH^*}$ *симметрична, неотрицательна и, если расстояния между рассматриваемыми пунктированными пространствами не превосходят* $1/2$, *удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. То, что функция $\tilde d_{GH^*}\big((X, a), (Y, b)\big)$ симметрична и неотрицательна — очевидно.

Проверим неравенство треугольника для $\tilde d_{GH^*}$. Выберем произвольные пунктированные метрические пространства (X, a), (Y, b) и (Z, c), произвольную $(t_{XY}; a, b)$-допустимую метрику μ на $X \sqcup Y$, произвольную $(t_{YZ}; b, c)$-допустимую метрику ν на $Y \sqcup Z$, а также число $\delta > 0$. Определим на $X \sqcup Z$ функцию расстояния ρ, положив ее равной исходным метрикам на X и Z, а для $x \in X$ и $z \in Z$ определим ее так:

$$\rho(x, z) = \rho(z, x) = \inf_{y \in Y}\big\{\mu(x, y) + \nu(y, z)\big\} + \delta.$$

Покажем, что ρ — $(t_{XY} + t_{YZ}; a, c)$-допустимая. Ясно, что $\rho(a, c) \le \rho(a, b) + \rho(b, c) < t_{XY} + t_{YZ}$. Далее, положим $t = t_{XY} + t_{YZ}$ и возьмем произвольную точку $x \in B^\rho_{1/t}(a) \cap X$. Ограничение ρ на X совпадает с исходной метрикой на X, поэтому, так как μ — допустимая и $r = 1/t < 1/t_{XY}$, то найдется точка $y \in Y$, для которой $\mu(x, y) < t_{XY}$, причем, в силу леммы 8.3, можно предполагать, что $\mu(y, b) < r + 2t_{XY}$. Далее, μ на Y совпадает с исходной метрикой, поэтому, так как ν является допустимой, если $r + 2t_{XY} < 1/t_{YZ}$, то найдется такая точка $z \in Z$, что $\nu(y, z) < t_{YZ}$ и $\nu(z, c) < r + 2t_{XY} + 2t_{YZ}$. Таким образом, $\rho(x, z) \le \mu(x, y) + \nu(y, z) < t_{XY} + t_{YZ}$.

Остается заметить, что неравенство $r + 2t_{XY} < 1/t_{YZ}$, где $r = 1/(t_{XY} + t_{YZ})$ справедливо при $t_{XY}, t_{YZ} \in (0, 1/2]$. □

Замечание 8.6. Как и в компактном случае легко проверить, что при определении $\tilde d_{GH^*}$ вместо метрик можно рассматривать более широкий и удобный класс псевдометрик. Кроме того, снова как и в компактом случае, $\tilde d_{GH^*}\big((X, a), (\bar X, a)\big) = 0$, где $\bar X$ — пополнение пространства X.

Лемма 8.7. *Для любых пунктированных пространств (X,a), (Y,b) выполнено*

$$\tilde d_{GH^*}\big((X,a),(Y,b)\big)\le 1.$$

Доказательство. Действительно, положим:

$$\rho(x,y)=\rho(y,x)=\begin{cases}|xy|, & \text{если } x,y\in X \text{ или } x,y\in Y,\\ |xa|+|yb|, & \text{если } x\in X \text{ и } y\in Y.\end{cases}$$

Достаточно показать, что для любого $t>1$ функция ρ — (t,a,b)-допустимая псевдометрика на $X\sqcup Y$. Симметричность и неотрицательность ρ очевидны, неравенство треугольника — почти очевидно (проверьте). Далее, $\rho(a,b)=0<t$, а $B^\rho_{1/t}(a)=B^\rho_{1/t}(b)\subset U_t(Y)$, так как $1/t<1<t$. □

Ниже мы покажем, что d_{GH^*} — метрика на классах изометрий собственных пунктированных метрических пространств (см. следствие 8.26).

8.1.2 Сходимость пунктированных пространств

Последовательность $\big\{(X_n,a_n)\big\}$ пунктированных метрических пространств *сходится по Громову–Хаусдорфу* к пунктированному метрическому пространству (Z,a), будем обозначать это через $(X,a_n)\xrightarrow{\mathrm{GH}^*}(Z,a)$, если $\lim_{n\to\infty} d_{GH^*}\big((X_n,a_n),(Z,a)\big)=0$.

Утверждение 8.8. *Пусть Z — метрическое пространство, $\{A_n\}$ — последовательность его непустых подмножеств, и $\{a_n\}$ — последовательность точек в Z, сходящаяся к некоторой точке $a\in Z$, причем $a_i\in A_i$ для любого i. Если существует такое $A\subset Z$, что для любого $r>0$ выполнено:*

$$d_H(A_n\cap B_r(a_n),A\cap B_r(a))\to 0,$$

то $(A_n,a_n)\xrightarrow{GH^*}(A,a)$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем $r>1/\varepsilon$ и такое натуральное N, что для всех $n>N$ выполнено:

$$|a-a_n|<\varepsilon,\qquad d_H(A_n\cap B_r(a_n),A\cap B_r(a))<\varepsilon.$$

Тогда легко проверить, что расстояние на Z задает $(\varepsilon;a_n,a)$-допустимую псевдометрику на $A_n\sqcup A$. □

Связь с компактным случаем описывает следующее утверждение.

Утверждение 8.9. *Пусть $\{X_n\}$ и X — компактные метрические пространства.*

- *Если $\lim_{n\to\infty} d_{GH}(X_n,X)=0$, то для любой точки $a\in X$ найдется такая последовательность точек $a_n\in X_n$, что $(X_n,a_n)\xrightarrow{GH^*}(X,a)$.*

- *Если диаметры пространств X_n равномерно ограничены и $(X_n,a_n)\xrightarrow{GH^*}(X,a)$, то $\lim_{n\to\infty} d_{GH}(X_n,X)=0$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно: если $d_{GH}(X_n,X)\to 0$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, что для $n>N$ существует ε-допустимая метрика на $X_n\sqcup X$, которая будет $(\varepsilon;a_n,a)$-допустимой метрикой для любой точки $a_n\in X_n$, удаленной от a в этой метрике меньше чем на ε. Остается аккуратно выбрать последовательность точек a_n. Для этого фиксируем положительную последовательность ε_k, сходящуюся к нулю, и, повторяя предыдущее рассуждение, построим возрастающую последовательность $N_k=N(\varepsilon_k)$ и для $n>N_k$ построим точки $a_n\in X_n$. Заметим, что для $n<N_k$ точки a_k при этом уже не меняются. Таким образом, искомая последовательность $a_k\in X_k$ построена.

Для доказательства второго утверждения достаточно выбрать $\varepsilon<1/D$, где $D>0$ — ограничивающая сверху диаметры константа. Для любого такого ε из $(\varepsilon;a_n,a)$-допустимости метрики на $X_n\sqcup X$ вытекает ее ε-допустимость, так как шар $B_{1/\varepsilon}(a)$ содержит все X для любой точки $a\in X$. □

8.1.3 Сети и грубые изометрии для оценки расстояния

Следующее утверждение позволяет оценивать расстояния с помощью конечных ε-сетей.

Утверждение 8.10. *Пусть (X, a) и (Y, b) — пунктированные метрические пространства. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Предположим, что существуют конечные подмножества $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ и $\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ со следующими свойствами:*

- $|x_1 a| + |y_1 b| < \varepsilon$;
- $\{x_1, \dots, x_n\}$ *является ε-сетью в замкнутом шаре $B_{1/2\varepsilon}(a) \subset X$, и $\{y_1, \dots, y_n\}$ является ε-сетью в замкнутом шаре $B_{1/2\varepsilon}(b) \subset Y$;*
- $\big||x_i x_j| - |y_i y_j|\big| < \varepsilon$ *для любых i и j.*

Тогда $d_{GH^*}\big((X, a), (Y, b)\big) \le 2\varepsilon$.

Доказательство. Достаточно построить на $X \sqcup Y$ некоторую $(2\varepsilon; a, b)$-допустимую метрику. Положим

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = \min_i \big(|x x_i| + |y y_i|\big) + \varepsilon, \qquad x \in X, y \in Y$$

(на X и Y допустимая метрика должна совпадать с исходной, что мы и будем всегда предполагать, не оговаривая специально). Заметим, что $\rho(x_j, y_j) = \varepsilon$ для любого j.

Сначала покажем, что ρ — метрика. Симметричность, неотрицательность и невырожденность очевидны. Проверим неравенство треугольника $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, x)$. Если x и z принадлежат разным пространствам, то предположим без ограничения общности, что $x \in X$, а y, $z \in Y$. Тогда

$$\rho(x, z) \le |x x_i| + |z y_i| + \varepsilon \le \big(|x x_i| + |y y_i| + \varepsilon\big) + |yz| = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

где первое неравенство выполнено для любого i, второе неравенство выполнено в силу неравенства треугольника на Y, а последнее равенство выполнено для того i, на котором достигается минимум из определения функции ρ. Если же x и z принадлежат одному пространству, то случай, когда y принадлежит тому же тривиален, и мы предположим без ограничения общности, что x, $z \in X$, а $y \in Y$. Тогда

$$\begin{aligned}\rho(x, z) = |xz| \le |x x_i| + |x_i x_j| + |x_j z| \le |x x_i| + |y_i y_j| + \varepsilon + |x_j z| \le \\ \le \big(|x x_i| + |y_i y|\big) + \big(|y y_j| + |x_j z| + \varepsilon\big) < \rho(x, y) + \rho(y, z),\end{aligned}$$

где первое неравенство выполнено для любых i и j в силу неравенства треугольника на X, второе в силу последнего условия утверждения, третье — в силу неравенства треугольника на Y, а последнее имеет место для тех i и j, на которых достигаются минимумы.

Теперь проверим допустимость. По определению ρ имеем: $\rho(a, b) \le \rho(a, x_1) + \rho(y_1, b) + \varepsilon < 2\varepsilon$, где последнее неравенство выполнено в силу первого свойства. Далее, для любого $x \in B_{1/2\varepsilon}(a)$ существует x_i такое, что $|x x_i| < \varepsilon$. Тогда $\rho(x, y_i) \le \rho(x, x_i) + \rho(x_i, y_i) < 2\varepsilon$, поэтому $B_{1/2\varepsilon}(a) \subset U_{2\varepsilon}(Y)$. Включение $B_{1/2\varepsilon}(b) \subset U_{2\varepsilon}(X)$ доказывается точно так же. $\square$

Как и в компактном случае, близкие пространства связывают отображения, мало отличающиеся от изометрии. Пусть $f\colon A \to Z$ — отображение метрических пространств. Пусть фиксированы $\varepsilon > 0$, $a \in A$, $B \subset Z$ и $b \in B$. Назовем отображение f *ε-грубой изометрией из (A, a) в (B, b)*, если выполнены следующие условия:

- $\big|f(a) b\big| < \varepsilon$;
- $f(A)$ является ε-сетью для B, т.е. $B \subset N_\varepsilon\big(f(A)\big)$;
- $\operatorname{dist} f < \varepsilon$.

Замечание 8.11. Заметим, что последнее условие записывается в виде неравенства $|xy| - \varepsilon < \big|f(x) f(y)\big| < |xy| + \varepsilon$ для любых x, $y \in X$. Последнее означает, что f является $(1, \varepsilon)$-квазиизометрией, см. ниже.

Замечание 8.12. Грубая изометрия не обязана быть непрерывной, точка $f(a)$ не должна совпадать с b, и $f(A)$ не должно ни содержать B, ни содержаться в B.

Утверждение 8.13. *Пусть (X,a) и (Y,b) — пунктированные метрические пространства.*

(1) *Предположим, что $d_{GH^*}\big((X,a),(Y,b)\big) < t < 1/2$. Тогда существует отображение $f\colon B_{1/t}(a)\to Y$, являющееся $2t$-грубой изометрией из $\big(B_{1/t}(a),a\big)\subset(X,a)$ в $\big(B_{1/t-2t}(b),b\big)\subset(Y,b)$, причем $f(a)=b$.*

(2) *Обратно, пусть $R>\varepsilon>0$, и пусть $f\colon B_R(a)\to Y$ является ε-грубой изометрией из $\big(B_R(a),a\big)\subset(X,a)$ в $\big(B_{R-\varepsilon}(b),b\big)\subset(Y,b)$. Тогда*

$$d_{GH^*}\big((X,a),(Y,b)\big) < \max\big\{2\varepsilon, 1/(R-\varepsilon)\big\}.$$

Доказательство. Первое утверждение доказывается стандартным образом. Пусть ρ — некоторая $(t;a,b)$-допустимая метрика на $X\sqcup Y$, существующая по предположению. Определим отображение $f\colon B_{1/t}(a)\to Y$, положив $f(a)=b$ и для любой $x\in B_{1/t}(a)$ выберем в качестве $f(x)$ любую точку из Y, для которой $\rho(x,f(x))<t$ (так как метрика допустима, то, по определению, $B_{1/t}(a)\subset N_t(Y)$, поэтому такое $f(x)$ найдется). Проверим, что полученное отображение является $2t$-грубой изометрией. Расстояние от $f(a)$ до b равно нулю. Так как $B_{1/t}(b)\subset N_t(X)$, то для каждого $y\in B_{1/t-2t}(b)\subset B_{1/t}(b)$ найдется такая $x\in X$, что $\rho(x,y)<t$. Тогда

$$|xa| < \rho(x,y)+\rho(y,b)+\rho(b,a) < t+|yb|+t \le 2t+1/t-2t = 1/t,$$

поэтому $x\in B_{1/t}(a)$ и

$$\big|f(x)y\big| \le \rho\big(f(x),x\big)+\rho(x,y) < t+t = 2t,$$

таким образом, $f\big(B_{1/t}(a)\big)$ является $2t$-сетью в $B_{1/t-2t}(b)$. Остается оценить искажение отображения f. Пусть $x,\,x'\in B_{1/t}(a)$. Тогда

$$\big|f(x)f(x')\big| = \rho\big(f(x)f(x')\big) \le \rho\big(f(x)x\big)+\rho(x,x')+\rho\big(x'f(x')\big) < 2t+|xx'|,$$

откуда $\big|f(x)f(x')\big|-|xx'|<2t$. Второе неравенство доказывается точно также. Первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения определим на $X\sqcup Y$ допустимую метрику так:

$$\rho(x,y)=\rho(y,x)=\inf\Big\{|xu|+\frac{3\varepsilon}{2}+|vy| : u\in B_R(a), v\in B_\varepsilon(f(u))\Big\}.$$

Заметим, что если $x\in B_R(a)$, то можно взять $u=x$, $v=f(x)$, откуда в этом случае $\rho(x,y)\le 3\varepsilon/2+\big|f(x)y\big|$. В частности, $\rho\big(x,f(x)\big)=3\varepsilon/2$ для любого $x\in B_R(a)$.

Покажем, что это действительно $(t;a,b)$-допустимая метрика, где $t=\max\{2\varepsilon,1/(R-\varepsilon)\}$. Симметричность, неотрицательность и невырожденность очевидны. Проверим неравенство треугольника $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$. Как всегда, если все три точки лежат в одном из исходных пространств, то неравенство выполнено автоматически.

Пусть сначала одна точка попала в X, а две другие — в Y. Если $x\in X$, $y,\,z\in Y$, то для любых $u\in B_R(a)$ и $v\in B_\varepsilon(f(u))$ выполнено

$$\rho(x,z)\le |xu|+\frac{3\varepsilon}{2}+|vz| \le \Big(|xu|+\frac{3\varepsilon}{2}+|vy|\Big)+|yz|,$$

и, так как $|yz|=\rho(y,z)$, то взяв точную нижнюю грань по всем таким u и v получим требуемое. Случай $z\in X$, $x,\,y\in Y$ полностью аналогичен.

Пусть теперь $y\in X$, $x,\,z\in Y$. Тогда для любых $u,\,u'\in B_R(a)$, $v\in B_\varepsilon(f(u))$, $v'\in B_\varepsilon(f(u'))$ выполнено

$$\begin{aligned}\rho(x,z)=|x,z| &\le |xv|+|vf(u)|+|f(u)f(u')|+|f(u')v'|+|v'z| \le\\ &\le |xv|+|f(u)f(u')|+|v'z|+2\varepsilon \le |xv|+|uu'|+\varepsilon+|v'z|+2\varepsilon \le |xv|+|uy|+|yu'|+|v'z|+3\varepsilon =\\ &= \Big(|xv|+|uy|+\frac{3\varepsilon}{2}\Big)+\Big(|yu'|+|v'z|+\frac{3\varepsilon}{2}\Big),\end{aligned}$$

поэтому, беря в правой части точные нижние грани, получаем требуемое.

Пусть теперь две точки лежат в X, а одна — в Y. Если $x,\,y\in X$, $z\in Y$, то для любой $u\in B_R(a)$, $v\in B_\varepsilon(f(u))$ выполнено:

$$\rho(x,z)\le |xu|+\frac{3\varepsilon}{2}+|vz| < |xy|+\Big(|yu|+\frac{3\varepsilon}{2}+|vz|\Big) = \rho(x,y)+\Big(|yu|+\frac{3\varepsilon}{2}+|vz|\Big),$$

и, переходя справа к точной нижней грани, получаем требуемое. Случай $z,\, y \in X$, $x \in Y$ полностью аналогичен.

Пусть теперь $x,\, z \in X$, $y \in Y$. Тогда для любых $u,\, u' \in B_R(a)$, $v \in B_\varepsilon(f(u))$, $v' \in B_\varepsilon(f(u'))$ выполнено

$$\rho(x,z) = |x,z| \le |xu| + |uu'| + |u'z| \le |xu| + \bigl|f(u)f(u')\bigr| + \varepsilon + |u'z| \le \\ \le |xu| + \bigl|f(u)v\bigr| + |vy| + |yv'| + \bigl|v'f(u')\bigr| + \varepsilon + |u'z| \le |xu| + \varepsilon + |vy| + |yv'| + \varepsilon + \varepsilon + |u'z| = \\ = \Bigl(|xu| + |vy| + \frac{3\varepsilon}{2}\Bigr) + \Bigl(|yv'| + |u'z| + \frac{3\varepsilon}{2}\Bigr),$$

поэтому, беря в правой части точные нижние грани, получаем требуемое.

Наконец, проверим $(t;a,b)$-допустимость. Напомним, $t = \max\{2\varepsilon, 1/(R-\varepsilon)\}$, в частности, $t \ge 2\varepsilon$ и $t > 1/R$. Взяв $u = a$, $v = b \in B_\varepsilon(f(a))$, получаем $\rho(a,b) = 3\varepsilon/2 < t$. Далее, если $x \in B_{1/t}(a) \subset B_R(a)$, то $\rho(x, f(x)) \le 3\varepsilon/2 < t$, поэтому $B_{1/t}(a) \subset N_t(Y)$. Теперь возьмем $y \in B_{1/t}(b) \subset B_{R-\varepsilon}(b)$. Поскольку $f\bigl(B_R(a)\bigr)$ является ε-сетью в шаре $B_{R-\varepsilon}(b)$, найдется $x \in B_R(a)$, для которого $|yf(x)| < \varepsilon$. Тогда при определении $\rho(x,y)$ можно взять $u = x$, $v = y$, откуда $\rho(x,y) \le 3\varepsilon/2 < t$, поэтому $B_{1/t}(b) \subset N_t(X)$. Утверждение доказано. $\square$

8.1.4 Эквивалентные определения сходимости

В следующем утверждении собраны эквивалентные определения сходимости.

Утверждение 8.14. *Пусть $\bigl\{(X_n,a_n)\bigr\}$ — последовательность пунктированных метрических пространств и (Z,b) — тоже пунктированное метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $(X_n,a_n) \xrightarrow{GH^*} (Z,b)$.

(2) *Для каждого $R > 0$ существуют числовые последовательности $\{R_n\}$, $R_n > R$, $R_n \to R$, и $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, а также последовательность отображений $f_n\colon B_{R_n}(a_n) \to Z$, являющихся ε_n-грубыми изометриями из $(B_{R_n}(a_n), a_n)$ в $(B_R(b), b)$.*

(3) *Для всех $\varepsilon > 0$ и $R > \varepsilon$ существует такое натуральное N, что для каждого $n \ge N$ существует отображение $f_n\colon B_R(a_n) \to Z$, являющееся ε-грубой изометрией из $(B_R(a_n), a_n)$ в $(B_{R-\varepsilon}(b), b)$.*

Доказательство. Докажем следующую цепочку импликаций: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Заметим сначала, что импликация (3) $\Rightarrow$ (1) вытекает из второго пункта утверждения 8.13. Действительно, достаточно фиксировать любую последовательность $R_n \to \infty$ и любую последовательность $\varepsilon_n \to \emptyset$. Из предположений пункта (3) для каждой пары R_n, ε_n и утверждения 8.13 следует, что $d_{GH^*}\bigl((X,a),(Z,b)\bigr) < \max\bigl\{2\varepsilon_n, 1/(R_n-\varepsilon_n)\bigr\}$. Остается заметить, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю.

Предположим теперь, что выполнено (1), и пусть задано $R > 0$. Положим

$$t_n = 2d_{GH^*}\bigl((X_n,a_n),(Z,b)\bigr).$$

По предположению, $t_n \to 0$. Выберем натуральное N настолько большим, чтобы для всех $n \ge N$ было выполнено $t_n < \min\bigl\{\frac12, \frac{1}{R+1}\bigr\}$. Определим числовые последовательности ε_n и R_n так: положим $R_n = 2R$ и $\varepsilon_n = 3R$ при $1 \le n < N$, а для $n \ge N$ положим $R_n = R + \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n = 2t_n$. Тогда $\varepsilon_n \to 0$ по предположению, откуда $R_n \to R$. Кроме того, при $n \ge N$

$$\frac{1}{t_n} > R+1 > R+2t_n = R+\varepsilon_n = R_n > R.$$

Наконец, на $X_n \sqcup Z$ существует $(t_n;a_n,b)$-допустимая метрика ρ_n (напомним, t_n вдвое больше расстояния между (X_n,a_n) и (Z,b)).

Определим отображение $f_n\colon B_{R_n}(a_n) \to Z$ так. Для начального отрезка $1 \le n < N$ положим $f_n(x) = b$ (т.е. f — постоянное отображение). Для $n \ge N$ положим $f(a_n) = b$, а для $x \in B_{R_n}(a_n) \setminus \{a_n\}$ выберем в качестве $f(x)$ произвольную точку из Z, для которой $\rho_n\bigl(x, f_n(x)\bigr) < t_n$. Отметим, что так как ρ_n является (t_n, a_n, b) допустимой, то $B_{R_n}(a_n) \subset B_{1/t_n} \subset U_{t_n}(Z)$ и такая точка $f(x) \in Z$ действительно существует. Покажем, что f_n является ε_n-грубой изометрией из $(B_{R_n}(a_n), a_n)$ в $(B_R(b), b)$.

Действительно, если $1 \le n < N$, то, напомним, $R_n = 2R$, $\varepsilon_n = 3R$, и f — постоянное отображение, переводящее весь $B_{R+1}(a_n)$ в точку b. Очевидно, $\bigl|f(a)b\bigr| = 0 < 3R$, образ шара — точка b, — является $3R$ сетью в шаре $(B_R(b), b)$, и $\operatorname{dist} f = \operatorname{diam} B_R(a) = 2R < 3R$.

Пусть теперь $n \geq N$. Так как $\rho_n\big(x, f_n(x)\big) < t_n$ для всех $x \in B_{R_n}(a_n)$, то для любых $x,\, x' \in B_{R_n}(a_n)$ имеем:

$$\big|f(x)f(x')\big| \leq \big|f(x)x\big| + |xx'| + \big|x'f(x')\big| < 2t_n + |xx'|,$$

поэтому $\operatorname{dist} f_n \leq 2t_n = \varepsilon_n$. Кроме того, $f(a_n) = b$ по определению, поэтому остается проверить, что $f\big(B_{R_n}(a_n)\big)$ является ε_n-сетью в $B_R(b)$. Действительно, $B_R(b) \subset B_{1/t_n}(b) \subset N_{t_n}(X_n)$, поэтому для каждого $y \in B_R(b)$ найдется $x \in X_n$, для которого $\rho_n(x, y) < t_n$. Тогда

$$|xa_n| = \rho_n(x, a_n) \leq \rho_n(x, y) + \rho_n(y, b) + \rho_n(b, a_n) < t_n + R + t_n = R + \varepsilon_n = R_n,$$

поэтому $x \in B_{R_n}(a_n)$ и

$$\big|f_n(x)y\big| = \rho_n\big(f_n(x), y\big) \leq \rho_n\big(f_n(x), x\big) + \rho_n(x, y) < t_n + t_n = \varepsilon_n,$$

и, таким образом, мы доказали импликацию (1) $\Rightarrow$ (2).

Пусть теперь имеет место (2) и заданы величины $\varepsilon >$ и $R > \varepsilon$. Выберем последовательности $R_n > R$, $\varepsilon_n > 0$ и f_n как в (2). Отображения $f_n\colon B_{R_n}(a_n) \to Z$ являются ε_n-грубыми изометриями из $B_{R_n}(a_n)$ в $B_R(b)$, поэтому их искажения не превосходят ε_n и $\big|f_n(a_n)b\big| < \varepsilon_n$. Выберем $N > 0$ так, чтобы $\varepsilon_n < \varepsilon/3$ при $n \geq N$. Фиксируем $n \geq N$.

Покажем, что отображение f_n определяет ε-грубую изометрию из $(B_R(a_n), a_n)$ в $(B_{R-\varepsilon}(b), b)$. Условие на искажение отображения f_n и на $f(a_n)$ выполнены по предположению. Нужно проверить только, что $f_n\big(B_R(a_n)\big)$ является ε-сетью в $B_{R-\varepsilon}(b)$. Возьмем произвольный $y \in B_{R-\varepsilon}(b)$. Тогда $y \in B_R(b)$, а $B_R(b) \subset N_{\varepsilon_n}\big(f_n(B_{R_n}(a_n))\big)$ так как образ ε_n-грубой изометрии f_n является ε_n-сетью, а f_n по предположению (2) является грубой изометрией. Поэтому существует точка $x \in B_{R_n}(a_n)$, для которой $|f_n(x)y| < \varepsilon_n < \varepsilon$. Тогда

$$|xa_n| < \big|f_n(x)f_n(a_n)\big| + \varepsilon_n \leq \big|f_n(x)y\big| + |yb| + \big|bf_n(a_n)\big| + \varepsilon_n < \varepsilon_n + (R - \varepsilon) + \varepsilon_n + \varepsilon_n < R.$$

Таким образом, $x \in B_R(a_n)$, что и требовалось. $\square$

8.1.5 Примеры

Пример 8.15. Для любых двух точек a, $b \in X$ выполнено: $\tilde d_{GH^*}\big((X,a),(X,b)\big) \le |ab|$. Действительно, достаточно взять на $X \sqcup X$ (псевдо-)метрику, совпадающую с исходной. В частности, для любой сходящейся последовательности $a_n \to a$ точек в X, выполнено $(X,a_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (X,a)$.

Пример 8.16. Пусть $a_n \to a$ — сходящаяся последовательность точек в метрическом пространстве X, а $t_n \to t$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к некоторому положительному числу $t \in (0,\infty)$. Положим $X_n = (X, d_n)$, где $d_n(x,y) = |xy|/t_n$, и $Z = (X,d)$, где $d(x,y) = |xy|/t$. Тогда $(X_n,a_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Z,a)$.

Действительно, покажем, что выполнены предположения пункта (2) утверждения 8.14. Для любого $R > 0$ положим

$$R_n = \max\big\{R + 1/n, (tR + |aa_n|)/t_n\big\}, \qquad \varepsilon_n = 2\big(|aa_n|/t + |1/t_n - 1/t|R_n\big),$$

тогда, как легко проверить, $R_n > R$, $R_n \to R$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$. В качестве f_n возьмем тождественное отображение. Проверим, что тождественное отображение является грубой ε_n-изометрией из $\big(B_{R_n}(a_n), a_n\big) \subset X_n$ (т.е. с метрикой d_n) в $(B_R(a), a) \subset Z$ (т.е. с метрикой d) для всех n. Действительно, $d\big(f_n(a_n), a\big) = |a_na|/t < \varepsilon_n$. Далее, возьмем любую точку $y \in B_R(a)$. Имеем:

$$d_n(a_n,y) = \frac{|a_ny|}{t_n} \le \frac{|a_na| + |ay|}{t_n} = \frac{|a_na|}{t_n} + \frac{|ay|t}{t\,t_n} = \frac{|a_na|}{t_n} + d(a,y)\frac{t}{t_n} < \frac{|a_na| + R\,t}{t_n} \le R_n,$$

поэтому $y \in B_{R_n}(a_n)$, поэтому $f_n\big(B_{R_n}(a_n)\big) = B_{R_n}(a_n)$ является ε-сетью в $B_R(a)$ для любого ε. Наконец, оценим искажение отображения f_n. Имеем:

$$\Big|d\big(f_n(x), f_n(y)\big) - d_n(x,y)\Big| = \Big|d(x,y) - d_n(x,y)\Big| = |xy|\Big|\frac{1}{t} - \frac{1}{t_n}\Big| < \varepsilon_n,$$

что и требовалось.

Пример 8.17. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — сфера радиуса $R \ge 1$ с центром в точке $(0,\dots,0,R)$, касающаяся координатной плоскости $\Pi = \mathbb{R}^n(x^{n+1} = 0)$ в точке $O = (0,\dots,0)$. Метрика на сфере индуцирована из $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $d_{GH*}\big((S,O),(\Pi,O)\big) \le 1/R^{1/3}$.

Положим $r = R^{1/3}$. Покажем, что стандартное евклидово расстояние на $\mathbb{R}^{n+1}$ задает $(1/r, O, O)$-допустимую метрику на $S \sqcup \Pi$.

Из симметрии картинки относительно вращения вокруг оси Ox^{n+1} ясно, что достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Соответствующая окружность задается уравнением $x^2 + (y-R)^2 = R^2$. Отмеченные точки совпадают, поэтому остается изучить шары радиуса $1/(1/r) = r$. Так как $r < R$, то $R^2 - r^2 > 0$, и найдется такое $0 < y_1 < R$, что $(r, y_1) \in S$. Пересечение $S \cap \partial B_r(O)$, пусть (x_0,y_0) — точка из этого пересечения, $x_0 \in (0,r)$, $y_0 \in (0,y_1)$. Имеем:

$$y_1 = R - \sqrt{R^2 - r^2} = r^3 - r\sqrt{r^4 - 1} < \frac{1}{r}$$

(последнее неравенство проверяется непосредственно). Поэтому для всех $(x,y) \in S \cap B_r(O)$ выполнено неравенство

$$\big|(x,y), \mathbb{R}\big| = y \le y_0 \le y_1 < 1/r,$$

и значит $S \cap B_r(O) \subset U_{1/r}(\Pi)$. С другой стороны, для всех $(x,0) \in \mathbb{R} \cap B_r(O)$ имеем: $\big|(x,0), S\big| \le y_1 < 1/r$, поэтому $\Pi \cap B_r(O) \subset U_{1/r}(S)$. Таким образом, $d_{GH*}\big((S,O),(\Pi,O)\big) \le 1/R^{1/3}$.

8.1.6 Демфирование (dampening)

Пусть (X,δ) — неограниченное метрическое пространство с внутренней метрикой. Фиксируем точку $o \in X$ и положим $|x| = \delta(o,x)$. Предположим, что задана непрерывная функция $f\colon [0,\infty) \times [0,T] \to (0,1]$, $f(s,0) = 1$ при всех $s \in (0,\infty)$. Положим

$$\ell_t(\gamma) = \int_\gamma f\big(|\gamma(s)|, t\big)\,ds, \qquad \gamma \text{ — спрямляемая кривая в } X,$$

и

$$d_t(x,y) = \inf\big\{\ell_t(\gamma) : \gamma \text{ — спрямляемая кривая, соединяющая } x \text{ и } y\big\},$$

определив тем самым семейство пространств $X_t = (X, d_t)$ с внутренней метрикой.

Например, $X = \mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой, $f(s,t) = e^{-ts}$. Тогда

$$d_t(O,x) = \int_0^{|x|} e^{-st}\,ds = -\frac{1}{t}e^{-st}\Big|_0^{|x|} = \frac{1-e^{-t|x|}}{t} \to |x|, \qquad t \to 0^+.$$

Утверждение 8.18. *В сделанных предположениях,* $(X_t, o) \xrightarrow{GH^*} (X, o)$ *при* $t \to 0^+$.

8.1.7 Основные свойства d_{GH^*}

Начнем со следующей связи с числами покрытия и упаковки. Напомним, что $\operatorname{cov}(X,r)$ равно минимальному числу открытых шаров радиуса r, покрывающих X. Если речь идет о подмножестве $A \subset X$ метрического пространства, то имеет смысл различать два числа:

$$\operatorname{cov}_i(A,r) = \min\{n : \exists\, a_1,\dots,a_n \in A,\ \cup_i U_r(a_i) \supset A\},$$
$$\operatorname{cov}_o(A,r) = \min\{n : \exists\, x_1,\dots,x_n \in X,\ \cup_i U_r(x_i) \supset A\}.$$

Очевидно, $\operatorname{cov}_o(A,r) \le \operatorname{cov}_i(A,r)$. Кроме того, было определено число упаковки $\operatorname{pack}(X,r)$, равное наибольшему числу попарно непересекающихся открытых шаров радиуса $r/2$, лежащих в A.

Лемма 8.19. *Пусть* (X,a) *и* (Y,b) *— пунктированные метрические пространства,* $d_{GH^*}\big((X,a),(Y,b)\big) < t < 1/2$. *Тогда для всех* $R > 0$, $r > 0$ *выполнено*

- *если* $R + 2t \le 1/t$, *то* $\operatorname{cov}_o\big(B_R(b) \cap Y, r+2t\big) \le \operatorname{cov}_i\big(B_{R+2t}(a) \cap X, r\big)$;
- *если* $R + r \le 1/t$, *то* $\operatorname{pack}\big(B_{R-2t}(b) \cap Y, 2r+4t\big) \le \operatorname{pack}\big(B_R(a) \cap X, 2r\big)$.

Доказательство. Пусть ρ — некоторая $(t; a, b)$-допустимая метрика на $X \sqcup Y$.

Пусть $a_1,\dots,a_n \in A = B_{R+2t}(a) \cap X$, для которых $A \subset \cup_i U_r(a_i)$. По предположению $R + 2t \le 1/t$ и $B_{R+2t}(a) \cap X \subset B_{1/t}(a) \cap X \subset U_t(Y)$, поэтому для каждой a_i найдется $b_i \in Y$, для которой $\rho(a_i, b_i) < t$. Кроме того, $|bb_i| \le \rho(b,a) + |aa_i| + \rho(a_i,b_i) < t + R + t = 2t + R$.

Возьмем произвольный $y \in B_R(b) \cap Y$. Снова, так как $R \le 1/t$, $B_R(b) \cap Y \subset B_{1/t}(b) \cap Y \subset U_t(X)$, поэтому найдется $x \in X$, для которой $\rho(x,y) < t$. Кроме того, $|xa| \le |xy| + |yb| + |ab| < 2t + R$, поэтому существует a_i, для которой $|a_i x| < r$. Тогда $yb_i \le \rho(y,x) + |xa_i| + \rho(a_i,b_i) < 2t + r$ и поэтому $B_R(b) \cap Y \subset \cup_i U_r(b_i)$.

Пусть теперь $b_1,\dots,b_p \in B_{R-2t}(b) \cap Y$, причем шары $U_{r+2t}(b_i)$ попарно не пересекаются. Действуя как выше, выберем $a_i \in X$, $\rho(a_i,b_i) < t$. Тогда $|a_i a| \le \rho(a_i b_i) + |b_i b| + \rho(b,a) < t + (R-2t) + t = R$, т.е. $a_i \in B_R(a) \cap X$. Остается проверить, что шары $B_r(a_i)$ попарно не пересекаются. Действительно, $\rho(b_i,a_i) + |a_i a_j| + \rho(a_j,b_j) \ge |b_i b_j| \ge 2r + 4t$, откуда $|a_i a_j| \ge 2r + 4t - \rho(a_i b_i) - \rho(a_j b_j) > r$. □

Следствие 8.20. *Пусть* $\big\{(X_n, a_n)\big\}$ *— последовательность пунктированных метрических пространств и* (Z,b) *— тоже пунктированное метрическое пространство. Предположим, что* $(X_n,a_n) \xrightarrow{GH^*} (Z,b)$. *Тогда, если каждое* X_n *— собственное (т.е. каждый замкнутый шар компактен), а* Z *— полное, то* Z *тоже собственное.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждый замкнутый шар $B_R(b)$ вполне ограничен. Возьмем $\varepsilon \in (0, \frac{3}{2R}]$, $t = \varepsilon/3 = r$. Тогда $R \le 3/\varepsilon 2 = 1/2t < 1/t - 2t$ при $t < 1/2$. Поэтому применима лемма 8.19, и, выбрав n настолько большим, чтобы $d_{GH^*}\big((X_n,a_n),(Z,b)\big) < t$, получим, что $\operatorname{cov}_o(B_R(b) \cap Z) < \infty$, поскольку любой шар в (X_n, a) может быть покрыт конечным числом шаров любого фиксированного радиуса. □

Следствие 8.21. *Если* X *— собственное,* Y *—полное, и* $d_{GH^*}\big((X,a),(Y,b)\big) = 0$, *то* Y *— тоже собственное.*

Теорема 8.22. *Пусть* (X,a) *и* (Y,b) *— пунктированные метрические пространства, и пусть одно из них собственное, а другое — полное. Тогда* $d_{GH^*}\big((X,a),(Y,b)\big) = 0$, *если и только если* (X,a) *и* (Y,b) *изометричны как пунктированные пространства, т.е. существует изометрия, совмещающая отмеченные точки.*

Доказательство. Достаточность очевидна (и не требует дополнительных предположений о собственности и полноте). Докажем необходимость. В силу следствия 8.21 можно сразу предполагать, что оба пространства собственные.

По утверждению 8.13 для каждого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ существуют отображения $B_{1/\varepsilon}(a) \to Y$ и $B_{1/\varepsilon}(b) \to X$, являющиеся 2ε-грубыми изометриями из $(B_{1/e}(a), a)$ на $(B_{1/\varepsilon-2\varepsilon}(b), b)$ и из $(B_{1/\varepsilon}(b), b)$ на $(B_{1/\varepsilon-2\varepsilon}(a), a)$ соответственно.

Для каждого натурального n положим $R_n = 2^n$, $\varepsilon_n = 1/2^n$ и обозначим через f_n соответствующую $2\varepsilon_n$-грубую изометрию $B_{R_n}(a) \to Y$. Так как $f_n(a) = b$ и искажение f_n не превосходит $2\varepsilon_n$, то

$$\big|bf(x)\big| = \big|f(a)f(x)\big| \le |xa| + 2\varepsilon_n \le R_n + 2\varepsilon_n,$$

т.е. $f_n\colon B_{R_n}(a) \to B_{R_n+2\varepsilon_n}(b)$. Выберем счетные множества $S_1 \subset S_2 \subset \cdots X$, $S_n \subset B_{R_n}(a)$ и всюду плотно в нем. Рассмотрим $f_n\colon S_1 \to B_{2R_1}(b)$. Так как $B_{2R_1}(b)$ — компакт, то, используя стандартный диагональный процесс, построим отображение $F_1\colon S_1 \to B_{2R_1}(b)$, которое является поточечным пределом некоторой подпоследовательности последовательности $\{f_n\}$. Так как $\operatorname{dist} f_n \le 2\varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$, то отображение F_1 сохраняет расстояния.

Повторяя эти рассуждения для каждого n, построим последовательность сохраняющих расстояние отображений $\{F_n\colon S_n \to B_{2R_n}(b)\}$, при этом будем строить каждое следующее отображение F_{k+1} как продолжение предыдущего F_k, т.е., $F_{k+1}|_{S_k} = F_k$. В результате получим сохраняющее расстояния отображение $F\colon S \to Y$, $S = \cup S_i$. А именно, для каждой фиксированной точки $s \in S$ найдется такое k, что $s \in S_k$, поэтому $F_{k+p}(s) = F_k(s)$ для всех p, и мы положим $F(s) = F_k(s)$.

Лемма 8.23. *Если X и Y — собственные метрические пространства, $S \subset X$ — всюду плотное подмножество, и $f\colon S \to Y$ — сохраняет расстояния, то существует единственное сохраняющее расстояния продолжение $f\colon X \to Y$.*

Поскольку S всюду плотно в X, отображение F может быть продолжено до сохраняющего расстояния отображения $F\colon X \to Y$, $F(a) = b$. Точно также строится сохраняющее расстояния отображение $G\colon Y \to X$, $G(b) = a$.

Для каждого $R > 0$ покажем, что $F\big(B_R(a)\big) = B_R(b)$ и $G\big(B_R(b)\big) = B_R(a)$, откуда F и G — изометрии пунктированных пространств, что и требовалось.

Напомним, что подмножество A метрического пространства X называется *ε-разделенным*, если $|xy| \ge \varepsilon$ для любых двух точек $x, y \in A$. Очевидно, компактное пространство не может содержать бесконечного ε-разделенного подмножества.

Лемма 8.24. *Для любого фиксированного компакта X и положительного ε существует такая константа N, что любое ε-разделенное множество содержит не более N элементов.*

Доказательство. Действительно, фиксируем любую $\varepsilon/3$ сеть S в X, и пусть N количество элементов в ней. Пусть A — любое εразделенное множество. Тогда каждая точка из A содержится в некотором шаре $U_{\varepsilon/3}(s)$, $s \in S$, и ни один такой шар не может содержать пару точек из A, поэтому $\#A \le \#S = N$. □

Так как F сохраняет расстояния и $F(a) = b$, то $F\big(B_R(a)\big) \subset B_R(b)$. Предположим, что $F\big(B_R(a)\big) \ne B_R(b)$, тогда существует точка $y \in B_R(b)$, которая не лежит в $F\big(B_R(a)\big)$. Так как образ компакта — компакт и, значит, замкнут, существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(y) \subset B_R(b)$ и не пересекается с $F\big(B_R(a)\big)$. Выберем в $B_R(a)$ максимальное по числу элементов ε-разделенное множество A. Тогда $F(A)$ будет ε-разделенным множеством и, более того, $F(A) \cup \{y\} \subset B_R(b)$ — тоже ε-разделенное множество. Остается заметить, что $G\big(F(A) \cup \{y\}\big)$ является ε-разделенным множеством в $B_R(a)$, но содержит на один элемент больше, противоречие. Доказательство закончено. □

Следствие 8.25. *Пусть (Y, b) и (Z, c) — пунктированные метрические пространства, одно из них — собственное, а другое — полное. Пусть $(X_n, a_n) \xrightarrow{GH^*} (Y, b)$ и $(X_n, a_n) \xrightarrow{GH^*} (Z, c)$ для некоторой последовательности $\big\{(X_n, a_n)\big\}$ пунктированных метрических пространств. Тогда оба пространства (Y, b) и (Z, c) — собственные, и (Y, b) и (Z, c) — изометричны как пунктированные пространства.*

Следствие 8.26. *Семейство $\mathcal{M}^*$ классов изометрий пунктированных ограниченно компактных метрических пространств, вместе с функцией расстояния d_{GH^*} образует метрическое пространство.*

8.1.8 Пространства с внутренней метрикой

Утверждение 8.27. *Пусть $\big\{(X_n,a_n)\big\}$ — последовательность пунктированных метрических пространств и (Z,b) — тоже пунктированное метрическое пространство, и $(X_n,a_n)\xrightarrow{GH^*}(Z,b)$. Если каждое X_n — пространство с внутренней метрикой, а Z — полное, то Z — тоже пространство с внутренней метрикой.*

Доказательство. В соответствие с теоремой 4.30 достаточно доказать, что для любых $x,\,y\in Z$ и любого $\varepsilon>0$ существует ε-середина. Фиксируем настолько большое $R>\max\{1,10\varepsilon\}$, чтобы $x,\,y\in B_{R/10}(b)$. Применим утверждение 8.14, согласно которому существуют числовые последовательности $R_n>R$, $R_n\to R$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ и последовательность отображений $f_n\colon B_{R_n}(a_n)\to Z$, являющихся грубыми ε_n изометриями из $(B_{R_n}(a_n),a_n)$ в $(B_R(b),b)$.

Фиксируем n настолько большое, чтобы $\varepsilon_n<\varepsilon/10$. Так как $x,\,y\in B_{R/10}(b)\subset B_R(b)$, то найдутся такие точки $x_n,\,y_n\in B_{R_n}(a_n)$, что $\big|f(x_n)x\big|<\varepsilon_n$ и $\big|f(y_n)y\big|<\varepsilon_n$ (так как образ f_n является ε_n-сетью). Так как $\operatorname{dis}f_n<\varepsilon_n$ и $\big|bf(a_n)\big|<\varepsilon_n$, то имеем:

$$|x_na_n|\le\big|f(x_n)f(a_n)\big|+\varepsilon_n\le\big|f(x_n)x\big|+|xb|+\big|bf(a_n)\big|+\varepsilon_n<|xb|+3\varepsilon_n\le\frac{R}{10}+3\varepsilon_n<\frac{R}{10}+3\frac{\varepsilon}{10}<\frac{R}{5},$$

так как $\varepsilon<R/10$. Аналогично,

$$|x_ny_n|\le\big|f(x_n)f(y_n)\big|+\varepsilon_n\le\big|f(x_n)x\big|+|xy|+\big|yf(y_n)\big|+\varepsilon_n<3\varepsilon_n+|xy|<3\frac{\varepsilon}{10}+2\frac{R}{10}<3\frac{R}{10}.$$

Так как X_n — пространство с внутренней метрикой, то в нем существует $\varepsilon/10$-середина z_n для точек x_n и y_n. Тогда, используя полученную выше оценку на $|x_na_n|$, имеем:

$$|z_na_n|\le|z_nx_n|+|x_na_n|\le\frac12\big(|x_ny_n|+\varepsilon/10\big)+\frac{R}{5}\le 3\frac{R}{20}+\frac{\varepsilon}{20}+\frac{R}{5}<R,$$

поэтому $z_n\in B_R(a_n)\subset B_{R_n}(a_n)$. Покажем, что $f_n(z_n)$ является ε-серединой для x и y. Имеем:

$$\begin{aligned}\big|xf_n(z_n)\big|\le\big|xf_n(x_n)\big|+\big|f_n(x_n)f_n(z_n)\big|\le\varepsilon_n+\big(|x_nz_n|+\varepsilon_n\big)\le 2\varepsilon_n+\frac12\Big(|x_ny_n|+\varepsilon/10\Big)=\\=\frac12\Big(|x_ny_n|+\varepsilon/10+4\varepsilon_n\Big)\le\frac12\Big(\big(3\varepsilon_n+|xy|\big)+\varepsilon/10+4\varepsilon_n\Big)\le\frac12\Big(|xy|+\varepsilon\Big),\end{aligned}$$

так как $7\varepsilon_n<7\varepsilon/10$. Аналогично проверяется, что

$$\big|yf_n(z_n)\big|\le\frac12\Big(|xy|+\varepsilon\Big),$$

что и завершает доказательство. □

Следующее утверждение демонстрирует преимущества пространств с внутренней метрикой при изучении сходимости по Громову–Хаусдорфу.

Утверждение 8.28. *Пусть $\big\{(X_n,a_n)\big\}$ — последовательность пунктированных метрических пространств и (Z,b) — тоже пунктированное метрическое пространство, и $(X_n,a_n)\xrightarrow{GH^*}(Z,b)$. Если Z — пространство с внутренней метрикой, то для любого положительного R выполнено:*

$$X_n\supset B_R(a_n)\xrightarrow{\mathrm{GH}}B_R(b)\subset Z$$

Доказательство. Фиксируем произвольные $R>0$, $\varepsilon\in\big(0,\min\{1/2,1/R\}\big)$ и такое N, что для любого $n\ge N$ выполнено $d_{GH^*}\big((X_n,a_n),(Z,b)\big)<\varepsilon$. Также фиксируем некоторое $n\ge N$.

Пусть ρ_n — некоторая $(\varepsilon;a_n,b)$-допустимая метрика на $X_n\sqcup Z$. Положим

$$A_n=\big\{z\in Z:\text{существует такое }x\in B_R(a_n),\text{ что }\rho_n(x,z)<\varepsilon\ \big\}.$$

Тогда $A_n\subset U_\varepsilon\big(B_R(a_n)\big)$ (в метрике ρ_n), и $B_R(a_n)\subset U_\varepsilon(A_n)$ (напомним, что $B_R(a_n)\subset U_\varepsilon(Z)$, поэтому для каждой точки $x\in B_R(a_n)$ найдется точка $z\in Z$ на расстоянии меньше чем ε). Поэтому $d_{GH}\big(A_n,B_R(a_n)\big)<\varepsilon$. Кроме того,

$$B_{R-2\varepsilon}(b)\subset A_n\subset B_{R+2\varepsilon}(b)$$

Действительно, если $z \in A_n$, то существует $x \in B_R(a_n)$, что $\rho_n(x,z) < \varepsilon$, поэтому

$$|zb| = \rho_n(z,b) \le \rho_n(z,x) + |xa_n| + \rho_n(a_n,b) \le \varepsilon + R + \varepsilon = R + 2\varepsilon.$$

Наоборот, если $z \in B_{R-2\varepsilon}(b)$, то, с одной стороны,

$$\rho_n(z,a_n) \le |zb| + \rho_n(b,a_n) \le R - 2\varepsilon + \varepsilon = R - \varepsilon,$$

а с другой — $B_{R-2\varepsilon}(b) \subset B_R(b) \subset U_\varepsilon(X_n)$, поэтому существует такая точка $x \in X_n$, что $\rho_n(z,x) < \varepsilon$. Но тогда

$$|xa_n| \le \rho_n(x,z) + \rho_n(z,a_n) < \varepsilon + R - \varepsilon = R,$$

т.е. для $z \in B_{R-2\varepsilon}(b)$ нашлась такая точка $x \in B_R(a_n)$, что $\rho_n(z,x) < \varepsilon$, откуда $z \in A_n$.

Итак,

$$B_{R-2\varepsilon}(b) \subset A_n \subset B_{R+2\varepsilon}(b).$$

Так как Z — пространство с внутренней метрикой, то оно удовлетворяет условию Хопфа–Ринова. Поэтому

$$d_{GH}\big(A_n, B_R(b)\big) \le d_H\big(A_n, B_R(b)\big) \le 2\varepsilon,$$

откуда

$$d_{GH}\big(B_R(a_n), B_R(b)\big) \le d_{GH}\big(B_R(a_n), A_n\big) + d_{GH}\big(A_n, B_R(b)\big) < 3\varepsilon,$$

что и требовалось. □

Замечание 8.29. Вообще говоря, из пунктированной сходимости и даже просто сходимости по Громову–Хаусдорфу не следует сходимость шаров произвольного радиуса как в предыдущем утверждении. Например, последовательность двухточечных пространств $X_n = \{0, 1+1/n\} \subset \mathbb{R}$ сходится к $Z = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$, но шары радиуса $R > 1$ в X_n при достаточно большом n состоят из одной точки, а в Z — из двух.

Обратно, если сходимость шаров есть и центры их также сходятся куда надо, то пунктированная сходимость, разумеется будет иметь место. Однако одной сходимости шаров — недостаточно, как следует из следующего примера.

Лемма 8.30. *Существует такое компактное метрическое пространство X и точки $p, q \in X$, что для любого $R > 0$ имеет место равенство $B_R(p) = B_R(q)$, однако $(X,p) \ne (X,q)$. В частности, для постоянной последовательности $(X_n, a_n) = (X,p)$ шары любого фиксированного радиуса R равны (а значит и сходятся к) соответствующим шарам в $(Z,b) = (X,q)$, но сама последовательность не сходится к (X,q).*

Доказательство. Можно построить пример такого конечного пространства, а именно, достаточно пяти точек. Рассмотрим $X = \{p,q,a,b,c\}$ и положим $|pa| = |qb| = r$, $|pc| = |qa| = s$, $0 < r < s \le 1$, $r + s > 1$. Неравенства треугольника выполнены (равные стороны треугольников равны 1). Рассмотрим шары с центрами в p и q. Имеем:

$$\begin{aligned}
B_R(p) = \{p\} &\approx \{q\} = B_R(q), \quad 0 \le R < r;\\
B_R(p) = \{p,a\} &\approx \{q,b\} = B_R(q), \quad r \le R < s;\\
B_R(p) = \{p,a,c\} &\approx \{q,b,a\} = B_R(q), \quad s \le R < 1;\\
B_R(p) = X &= X = B_R(q), \quad 1 \le R.
\end{aligned}$$

Таким образом, шары эволюционируют так: сначала — точка, потом — отрезок длины r, потом — треугольник со сторонами r, s, 1, и потом — все X.

С другой стороны, пунктированной изометрии $f\colon (X,p) \to (X,q)$ не существует. Действительно, если бы такая была, то $f(p) = q$ по определению, поэтому $f(a) = b$ (сохранить единственное расстояние r от p), аналогично $f(c) = a$. Но тогда $f\big(\{q,b\}\big) = \{p,c\}$, однако $|qb| = r < |pc| = s$, противоречие. □

Замечание 8.31. Пятиточечное пространство с аналогичными свойствами можно построить даже на плоскости. Например $\big\{(0,\pm 1), \pm(1,2), (5,0)\big\}$.

8.1.9 Теорема о вложении

Следующий результат является ключевым для доказательства полноты пространства $\mathcal{M}^*$ и критерия Громова предкомпактности.

Пусть X — метрическое пространство. Обозначим через $\bar{X}$ пополнение пространства X, и положим $\partial X = \bar{X} \setminus X$.

Теорема 8.32. *Пусть $\big\{(X_n, d_n, a_n)\big\}$ — последовательность пунктированных ограниченно компактных метрических пространств, и предположим, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{GH^*}\big((X_n, d_n, a_n), (X_{n+1}, d_{n+1}, a_{n+1})\big) < \infty.$$

Тогда существует не полное, локально полное (т.е. каждая точка имеет полную окрестность) пространство $(Y = \sqcup X_n, d)$ и точка $b \in Z = \partial Y$, для которой $d(a_n, b) \to 0$, такие, что:

(a) *для каждого n пространство (X_n, d_n) изометрично вложено в (Y, d),*

(b) *пространство $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$ ограниченно компактно,*

(c) $(X_n, d_n, a_n) \xrightarrow{GH^*} (Z, b, d)$, *и*

(d) *для любого $R > 0$ существует последовательность $\{R_n\}$, $R_n > R$, $R_n \to R$, для которой $B^d_{R_n}(a_n) \cap X_n \xrightarrow{H} B^d_R(b) \cap Z$.*

Более того, если в добавок каждое пространство (X_n, d_n) — пространства с внутренней метрикой, то (Z, d) — геодезическое и для любого $R > 0$ имеет место сходимость $B^d_R(a_n) \cap X_n \xrightarrow{H} B^d_R(b) \cap Z$.

Доказательство. Фиксируем $t_n > d_{GH^*}\big((X_n, d_n, a_n), (X_{n+1}, d_{n+1}, a_{n+1})\big)$ такие, что $t_n < 1/2$ (при необходимости мы выбросим начало последовательности) и $\sum t_n < \infty$. Положим $R_n = 1/t_n$, и для каждого n выберем на $X_n \sqcup X_{n+1}$ какую-нибудь $(t_n; a_n, a_{n+1})$-допустимую метрику ρ_n. Напомним, см. лемму 8.3, что для любого $R \in (0, R_n]$ выполнено

$$B_R(a_n) \cap X_n \subset U_{t_n}\big(B_{R+2t_n}(a_{n+1}) \cap X_{n+1}\big), \quad B_R(a_{n+1}) \cap X_{n+1} \subset U_{t_n}\big(B_{R+2t_n}(a_n) \cap X_n\big). \tag{8.2}$$

Построение пространств (Y, d) и (Z, d, b). Положим $Y = \sqcup X_i$, и определим функцию d на $Y \times Y$, положив ее равной d_n на каждом $X_n \times X_n$, а для $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$, $i < j$, положим

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = \inf \sum_{k=i}^{j-1} \rho_k(z_k, z_{k+1}),$$

где точная нижняя грань берется по всем таким цепочкам $x_i = z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j = x_j$, что $z_k \in X_k$. Заметим, что d является допустимой на каждом (X_k, d_k) и на каждом $(X_k \sqcup X_{k+1}, \rho_k)$.

Лемма 8.33. *Определенная только что функция d является метрикой на Y.*

Доказательство. Неотрицательность, симметричность и конечность — очевидны.

Проверим неравенство треугольника $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$. Без ограничения общности можно предположить, что $x \in X_i$, $z \in X_j$, $i \le j$.

Если $y \in X_k$, $i < k < j$, то неравенство очевидно из определения (объединение оптимальных цепочек для xy и yz дает цепочку для xz, может и не оптимальную).

Пусть теперь $y \in X_i$, $i < j$ (случай $y \in X_j$, $i < j$, рассматривается точно так же). Пусть $y = y_i, \ldots y_j = z$, $y_k \in X_k$ — некоторая цепочка, соединяющая y и z. Тогда

$$d(x, y) + \rho_i(y_i, y_{i+1}) = \rho_i(x, y) + \rho_i(y_i, y_{i+1}) \ge \rho_i(x, y_{i+1}),$$

откуда

$$d(x, y) + \sum_{k=i}^{j-1} \rho_k(y_k, y_{k+1}) \ge \rho_i(x, y_{i+1}) + \sum_{k=i+1}^{j-1} \rho_k(y_k, y_{k+1}) \ge d(x, z),$$

где последнее неравенство справедливо, так как $x, y_{i+1}, \ldots, y_j = z$ — цепочка, соединяющая x и z. Взяв теперь в последнем неравенстве точную нижнюю грань по цепочкам $y = y_i, \ldots z$, получим требуемое неравенство.

Остается рассмотреть случай, когда $y \in X_k$, где или $k < i$, или $k > j$. Рассмотрим первый случай, второй полностью аналогичен. Пусть $y = x_k, \ldots, x_i = x$ и $y = y_k, \ldots, y_j = z$ — цепочки, соединяющие y с x и y с z соответственно. Рассмотрим величину

$$\sum_{m=k}^{i-1} \rho_m(x_m, x_{m+1}) + \sum_{n=k}^{j-1} \rho_n(y_n, y_{n+1}).$$

Первые слагаемые этих сумм дают

$$\rho_k(y, x_{k+1}) + \rho_n(y, y_{k+1}) \geq \rho_k(x_{k+1}, y_{k+1}) = d_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = \rho_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Теперь берем первые два слагаемых в каждой сумме и получаем для них оценку снизу:

$$\rho_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) + \rho_{k+1}(x_{k+1}, x_{k+2}) + \rho_{k+1}(y_{k+1}, y_{k+2}) \geq \rho_{k+1}(x_{k+2}, y_{k+2}) = \rho_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2}).$$

Продолжая до тех пор, пока можно, получаем оценку

$$\sum_{m=k}^{i-1} \big(\rho_m(x_m, x_{m+1}) + \rho_m(y_m, y_{m+1})\big) \geq \rho_i(x_i, y_i).$$

Положим теперь $z_i = x_i$ и $z_n = y_n$ при $i < n \leq j$. Тогда $x = x_i = z_i, \ldots, z_j = y_j = z$ — цепочка, соединяющая x и z. Поэтому

$$\begin{aligned}
d(x,z) \leq \sum_{n=i}^{j-1} \rho_n(z_n, z_{n+1}) = \rho_i(x_i, y_{i+1}) + \sum_{n=i+1}^{j-1} \rho_n(z_n, z_{n+1}) \leq \\
\leq \rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, y_{i+1}) + \sum_{n=i+1}^{j-1} \rho_n(z_n, z_{n+1}) = \rho_i(x_i, y_i) + \sum_{n=i}^{j-1} \rho_n(z_n, z_{n+1}) \leq \\
\leq \sum_{m=k}^{i-1} \big(\rho_m(x_m, x_{m+1}) + \rho_m(y_m, y_{m+1})\big) + \sum_{n=i}^{j-1} \rho_n(z_n, z_{n+1}) = \\
= \sum_{m=k}^{i-1} \rho_m(x_m, x_{m+1}) + \sum_{n=k}^{j-1} \rho_n(z_n, z_{n+1}).
\end{aligned}$$

Взяв справа точные нижние грани по соответствующим цепочкам, получаем требуемое.

Наконец, проверим невырожденность функции d.

Лемма 8.34. *Пусть (X_i, d_i) — метрические пространства, и ρ — некоторая допустимая метрика на $Y = \sqcup X_i$. Пусть какое-нибудь X_j ограниченно компактно. Тогда для всех $i \neq j$ и любого $x \in X_i$ выполнено неравенство $\rho(x, X_j) > 0$.*

Доказательство. Действительно, если $\rho(x, X_j) = 0$, то существует последовательность $y_j \in X_j$, для которой $\rho(x, y_j) \to 0$. Из ограниченной компактности следует существование сходящейся подпоследовательности $\{y_{j_k}\}$, которая сходится к $y \in X_j$, для которой $\rho(x, y) = 0$, противоречие. □

Невырожденность функции d следует из леммы. Действительно, если $x \in X_m$, $y \in X_n$, $m < n$, то $d(x, y) \geq \rho_m(x, X_{m+1}) > 0$, что и требовалось. □

Вложенность (X_n, d_n), неполнота Y и точка b. По определению пространства Y каждое пространство (X_n, d_n) изометрично вкладывается в (Y, d). Так как $\bar{Y}$ — пополнение Y, то метрика d естественным образом продолжается на $\bar{Y}$, которое представляет собой полное метрическое пространство. Далее, $d(a_k, a_{k+1}) = \rho_k(a_k, a_{k+1}) < t_k$, поэтому последовательность $\{a_k\}$ фундаментальна в полном $\bar{Y}$ и, значит, существует предел $\lim_{n\to\infty} a_n = b \in \bar{Y}$.

Лемма 8.35. *Пусть* $\{y_n\}$ *— последовательность в* Y*, сходящаяся к некоторой точке* $y \in \bar{Y}$*. Предположим, что существуют такие возрастающие последовательности* $\{n_k\}$ *и* $\{m_k\}$*, что* $y_{n_k} \in X_{m_k}$ *для каждого* k*. Тогда* $y \in \partial Y = Z$*.*

Доказательство. Покажем, что в сделанных предположениях предельная точка не может лежать в Y. Пусть $x \in Y$, тогда $x \in X_i$ для некоторого i. Тогда для любого $j > i$ и любого $z \in X_j$ в силу леммы 8.34 имеем: $d(x,z) \ge \rho_i(x, X_{i+1}) > 0$. В частности, для всех $m_k > i$ выполнено $d(x, y_{n_k}) \ge \rho_i(x, X_{i+1}) > 0$, поэтому предел y последовательности $\{y_n\}$ отличен от x, значит y не лежит в Y. □

Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 8.35 для $n_k = m_k = k$, поэтому предельная точка $b \in \partial Y = Z$, в частности, Y не полно.

Сходимость $(X_n, a_n) \xrightarrow{\mathbf{GH}^*} (Z, b)$**.** Для доказательства сходимости достаточно показать, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $R = 1/\varepsilon$, найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех n, $n \ge N$, метрика d является ε-допустимой на $X_n \sqcup Z$, то есть

$$d(a_n, b) < \varepsilon, \qquad B_R(a_n) \cap X_n \subset U_\varepsilon(Z), \qquad B_R(b) \cap Z \subset U_\varepsilon(X_n). \tag{8.3}$$

В предыдущем пункте показано, что $a_n \to b \in Z$, так что первое условие можно считать выполненным. Выберем N настолько большим, чтобы $d(a_n, b) < \varepsilon$ при $n \ge N$ и $\sum_{i=N}^{\infty} t_i < \varepsilon/4$. Тогда для всех $n \ge N$ выполнено $t_n < \varepsilon/4$, откуда $R_n = 1/t_n > 4/\varepsilon$, и для любого n

$$R + 4\sum_{i=N}^{\infty} t_i < \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon < \frac{2}{\varepsilon} < \frac{1}{2} R_n.$$

Зафиксируем $n \ge N$ и любой $x \in B_R(a_n) \cap X_n$. Чтобы проверить первое включение из (8.3), построим последовательность Коши $\{x_k\}$, $x_k \in X_k$, которая сходится к $y \in Z$ и $d(x,y) < \varepsilon$. Положим $x_n = x$. Так как $R < R_n$ из условия (8.2) вытекает, что $x_n \in U_{t_n}\big(B_{R+2t_n}(a_{n+1}) \cap X_{n+1}\big)$, поэтому существует такая $x_{n+1} \in B_{R+2t_n}(a_{n+1}) \cap X_{n+1}$, что $d(x_n, x_{n+1}) < t_n$ (тут мы пользуемся тем, что d совпадает с ρ_n на $X_n \sqcup X_{n+1}$). Так как

$$R + 2t_n < R + 4\sum_{i=N}^{\infty} t_i < \frac{1}{2} R_{n+1} < R_{n+1},$$

то, применив снова (8.2), имеем:

$$B_{R+2t_n}(a_{n+1}) \cap X_{n+1} \subset U_{tn+1}\big(B_{R+2t_n+2t_{n+1}}(a_{n+2}) \cap X_{n+2}\big),$$

поэтому найдется $x_{n+2} \in B_{R+2t_n+2t_{n+1}}(a_{n+2}) \cap X_{n+2}$, $d(x_{n+1}, x_{n+2}) < t_{n+1}$. Далее, так как для любого $k \ge N$

$$R + 2\sum_{i=N}^{k} t_i < R + 4\sum_{i=N}^{\infty} t_i < \frac{1}{2} R_k < R_k,$$

мы можем продолжить этот процесс и в результате получить последовательность точек $\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$, где $x_k \in X_k$ и $d(x_k, x_{k+1}) < t_k$. Для любых k, j, $k > j \ge n$ имеем:

$$d(x_j, x_k) \le \sum_{i=j}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \le \sum_{i=j}^{\infty} t_i \to 0 \quad \text{при } j \to \infty,$$

поэтому последовательность $\{x_k\}$ — фундаментальна, и существует $y = \lim_{k\to\infty} x_k$, причем $y \in Z$ в силу леммы 8.35. Наконец,

$$d(x,y) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k) \le \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \le \sum_{i=N}^{\infty} t_i < \varepsilon,$$

что и требовалось. Таким образом первое включение из (8.3) доказано, и остается доказать второе.

Для этого мы фиксируем произвольное $n \ge N$, положим $a = a_N$ и докажем, что для любого $m \ge N$ выполнено включение

$$B_{R+\varepsilon}(a) \cap X_m \subset U_{\varepsilon/2}(X_n). \tag{8.4}$$

Покажем сначала, что этого достаточно. Действительно, из (8.4) следует, что

$$B_{R+\varepsilon}(a)\cap\Big(\sqcup_{m\ge N}X_m\Big)\subset U_{\varepsilon/2}(X_n),$$

откуда, поскольку $d(a,b)<\varepsilon$, получаем, что

$$B_R(b)\cap Z\subset B_{R+\varepsilon}(a)\cap Z\subset B_{R+\varepsilon}(a)\cap \operatorname{cl}\Big(\sqcup_{m\ge N}X_m\Big)\subset U_\varepsilon(X_n),$$

где последнее включение справедливо, так как замыкание подмножества метрического пространства содержится в $\varepsilon/2$-окрестности этого подмножества.

Итак, остается доказать (8.4). Для этого заметим, что для $m\ge N$ выполнено включение $B_{R+\varepsilon}(a)\subset B_{R+2\varepsilon}(a_m)$. Действительно, если $x\in B_{R+\varepsilon}(a)$, то

$$d(x,a_m)\le d(x,a)+\sum_{k=N}^{m-1}d(a_k,a_{k+1})\le R+\varepsilon+\sum_{k=N}^{m-1}t_k<R+2\varepsilon.$$

Поэтому достаточно проверить, что для любого $m\ge N$ выполнено включение $B_{R+2\varepsilon}(a_m)\cap X_m\subset U_{\varepsilon/2}(X_n)$.

Лемма 8.36 (О поглощении)**.** *Пусть задано $T>0$. Выберем N так, чтобы для любого $n\ge N$ выполнялось*

$$T+2\sum_{k=N}^{\infty}t_k\le R_n.$$

Тогда для любых $n\ge N$ и $m\ge N$, $m\ne n$, выполнено включение

$$B_T(a_m)\cap X_m\subset U_R(X_n),\quad \textit{где}\quad R=\sum_{k=\min\{m,n\}}^{\max\{m,n\}-1}t_k.$$

Заметим, что если в лемме 8.36 взять $T=R+2\varepsilon$ и выбрать N настолько большим, чтобы $T+2\sum t_k=T+2\varepsilon+2\sum t_k<T+4\varepsilon\le R_n$ и $\sum t_k<\varepsilon/2$, то мы получим искомое включение $B_{R+2\varepsilon}(a_m)\cap X_m\subset U_{\varepsilon/2}(X_n)$, что и завершит доказательство сходимости.

Доказательство. Пусть сначала $n>m\ge N$. Для $n=m+1$ включение $B_T(a_m)\cap X_m\subset U_{t_m}(X_{m+1})$ выполнено в силу (8.2) и оценки $T<R_m$. Для остальных $n>m$ проведем доказательство по индукции. Пусть включение

$$B_T(a_m)\cap X_m\subset U_R(X_n),\quad\text{где}\quad R=\sum_{k=m}^{n-1}t_k$$

верно для некоторого $n>m$. Тогда для каждого $x\in B_T(a_m)\cap X_m$ найдется $y\in X_n$, для которого $d(x,y)\le\sum_{k=m}^{n-1}t_k$, откуда

$$d(y,a_n)\le d(y,x)+d(x,a_m)+\sum_{k=m}^{n-1}d(a_k,a_{k+1})<\sum_{k=m}^{n-1}t_k+T+\sum_{k=m}^{n-1}t_k,$$

поэтому найденный y лежит на самом деле в шаре $B_{T+2\sum t_k}(a_n)$ с центром в a_n радиусом $T+2\sum_{k=m}^{n-1}t_k$, то есть

$$B_T(a_m)\cap X_m\subset U_R(B_{T+2\sum t_k}(a_n)),\quad\text{где}\quad R=\sum_{k=m}^{n-1}t_k$$

Далее, так как $T+2\sum_{k=m}^{n-1}t_k<R_n$, то снова из (8.2) заключаем, что $B_{T+2\sum t_k}(a_n)\cap X_n\subset U_{t_n}(X_{n+1})$. Итак,

$$B_T(a_m)\cap X_m\subset U_{\sum t_k}(B_{T+2\sum t_k}(a_n))\cap X_n\subset U_{\sum t_k}\Big(U_{t_n}(X_{n+1})\Big)\subset U_{\sum t_k}(X_{n+1}),$$

где последняя сумма берется уже от m до n, что и требовалось.

Пусть теперь $n < m$. Для $n = m-1$ включение $B_T(a_{n+1}) \cap X_{n+1} \subset U_{t_n}(X_n)$ снова следует из (8.2). Снова воспользуемся индукцией. Пусть для $n = m-i$, $m > n > N$ уже доказано включение

$$B_T(a_m) \cap X_m \subset U_R(X_{m-i}), \quad \text{где} \quad R = \sum_{k=m-i}^{m-1} t_k.$$

Снова возьмем любой $x \in B_T(a_m) \cap X_m$ и найдем для него такой $y \in X_{m-i}$, что $d(x,y) \le \sum_{k=m-i}^{m-1} t_k$, и снова оценим

$$d(y, a_{m-i}) \le d(y,x) + d(x,a_m) + \sum_{k=m-i}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=m-i}^{m-1} t_k + T + \sum_{k=m-i}^{m-1} t_k = T + 2\sum_{k=m-i}^{m-1} t_k,$$

откуда $y \in B_{T+2\sum t_k}(a_{m-i})$, поэтому $B_T(a_m) \cap X_m \subset U_{\sum t_k}(B_{T+2\sum t_k}(a_{m-i}))$. Так как $T + 2\sum_{k=m-i}^{m-1} t_k < R_{m-(i+1)}$, то, снова используя (8.2), заключаем, что $B_{T+2\sum t_k}(a_{m-i}) \cap X_{m-i} \subset U_{t_{m-(i+1)}}(X_{t-(i+1)})$. В итоге,

$$B_T(a_m) \cap X_m \subset U_{\sum t_k}(B_{T+2\sum t_k}(a_{m-i})) \cap X_{m-i} \subset U_{\sum t_k}\Big(U_{t_{m-(i+1)}}(X_{m-(i+1)})\Big) \subset U_{\sum t_k}(X_{m-(i+1)}),$$

где последняя сумма берется уже от $m-(i+1)$ до $m-1$, что и требовалось. □

Локальная полнота и ограниченная компактность. Как мы уже проверили, пространство Y не полно. Покажем, что оно локально полное. Для этого покажем, что для любого $x \in Y$ расстояние до границы ∂Y положительно, и, значит, в малой окрестности x нет точек из ∂Y. Пусть $x \in X_m$ и $z \in Z = \partial Y$. Выберем последовательность $\{y_n\}$ в Y, сходящуюся к z.

Нам понадобится следующая лемма, которая является, в некотором смысле, обращением леммы 8.35.

Лемма 8.37. *Пусть $\{y_n\}$ — последовательность в Y, сходящаяся к $y \in Z$. Тогда существует последовательность $\{z_n\}$ в Y такая, что*

- *$z_n \in X_n$ для каждого n,*
- *последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют бесконечно много общих элементов, т.е. таких, что $y_n = z_m$,*
- *последовательность $\{z_n\}$ сходится к y.*

Доказательство. Построим сначала такие возрастающие последовательности $\{i_n\}$ и $\{j_n\}$ натуральных числе, что они «возрастают согласованно» (то есть, $\min\{i_{n+1}, j_{n+1}\}) \ge \max\{i_n, j_n\}$), и $y_{i_n} \in X_{j_n}$ для любого n. Для этого положим $i_1 = 1$, и обозначим через j_1 номер того X_n, в котором лежит y_1. Получим $y_{i_1} \in X_{j_1}$. Положим $m_1 = \max\{i_1, j_1$. Если бы все y_n лежали бы в $\sqcup_{k \le m_1} X_k$, то нашлось бы X_m, $m \le m_1$, содержащее бесконечно много элементов сходящейся последовательности y_n, но тогда эта последовательность сходилась бы к элементу из X_m, что противоречит предположению $y \in Z$. Поэтому существует такое $n > m_1$, что $y_n \notin \sqcup_{k \le m_1} X_k$. Выберем в качестве i_2 первое такое n и определим $j_2 > m_1$ из соотношения $y_{i_2} \in X_{j_2}$. Повторяя описанную процедуру, получим искомые последовательности.

Теперь построим последовательность $\{z_n\}$. Положим сначала $z_{j_n} = y_{i_n}$, определив тем самым бесконечную подпоследовательность элементов из $\{z_n\}$, совпадающую с бесконечной же подпоследовательностью элементов из $\{y_n\}$. Теперь определим z_i для $j_n < i < j_{n+1}$. По определению функции расстояния d существует цепочка $z_{j_n}, z_{j_n+1}, \ldots, z_i, \ldots, z_{j_{n+1}}$, где $z_i \in X_i$ и выполнено неравенство

$$\sum_{k=j_n}^{j_{n+1}-1} \rho_k(z_k, z_{k+1}) < d(z_{j_n}, z_{j_{n+1}}) + \frac{1}{j_n}.$$

Для завершения доказательства остается проверить, что $d(z_n, y) \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $N \ge 1/\varepsilon$ такое, что для всех $n \ge N$ имеет место $d(y_n, y) \le \varepsilon/10$. Положим $M = \min\big\{j_n \mid n > 1, j_{n-1} \ge N\big\}$ и покажем, что если $n \ge M$, то $d(z_n, y) < \varepsilon$. Заметим, что $M \ge N$.

Пусть $n \ge M$. Выберем k так, чтобы $j_k \le n < j_{k+1}$. Заметим, что тогда $j_k \ge M$, так как если $j_k < M \le N$, то $M \ge j_{k+1} > j_k$, противоречие. Кроме того, из определения M следует, что $j_{k-1} \ge N$.

Если $n = j_k$, то $z_n = z_{j_k} = y_{i_k}$, и, так как $i_k \geq j_{k-1} \geq N$, то $d(z_n, y) = d(y_{i_k}, y) \leq \varepsilon/10 < \varepsilon$. Если же $j_k < n < j_{k+1}$, то

$$d(z_{j_k}, z_n) \leq d(z_{j_k}, z_{j_{k+1}}) + \frac{1}{j_k} \leq d(z_{j_k}, y) + d(y, z_{j_{k+1}}) + \frac{1}{M} \leq \varepsilon/3,$$

поэтому

$$d(z_n, y) \leq d(z_n, z_{j_k}) + d(z_{j_k}, y) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Вернемся к локальной полноте. Мы хотим доказать, что для любого $x \in Y$ расстояние до границы ∂Y положительно. Мы фиксировали $x \in X_m$ и $z \in Z = \partial Y$ и выбрали последовательность $\{y_n\}$ в Y, сходящуюся к z. Благодаря лемме 8.35 можно предполагать, что $y_n \in X_n$ при всех n. Далее, по определению расстояния $d(x, y_n)$ для $n > m$ выполнено $d(x, y_n) \geq \rho_m(x, X_{m+1})$, а по лемме 8.34 последнее больше нуля, откуда

$$d(x, z) = \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) \geq \rho_m(x, X_{m+1}) > 0,$$

и, так как последнее не зависит от z, имеем $d(x, Z) > 0$. В частности, $Z \subset \bar{Y}$ замкнуто и полно.

Покажем теперь, что $(\bar{Y}, d)$ ограниченно компактно. Для этого достаточно показать, что каждый замкнутый шар $B_R(b)$ вполне ограничен. Итак, пусть $0 < r \leq 1 \leq R$. Заметим, что

$$B_R(b) = \big(B_R(b) \cap Z\big) \cup \sqcup_{n=1}^{\infty} \big(B_R(b) \cap X_n\big).$$

Так как $(X_n, a_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Z, b)$, и все пространства X_n ограниченно компактны, то, в силу следствия 8.25, пространство (Z, b) также ограниченно компактно. Поэтому $B_{2R}(b) \cap Z$ компакт, и поэтому в нем существует конечная $r/2$-сеть, т.е. точки $z_1, \ldots, z_M \in B_{2R}(b) \cap Z$ для которых выполнено включение

$$B_{2R}(b) \cap Z \subset \cup_{m=1}^{M} B_{r/2}(z_m).$$

Лемма 8.38. *В сделанных обозначениях, существует такое натуральное N, что для любого $n \geq N$ выполнено*

$$B_R(b) \cap X_n \subset \cup_{m=1}^{M} B_r(z_m).$$

Доказательство. Положим $\varepsilon = \min\big\{r/2, 1/(2R)\big\}$. Так как $(X_n, a_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Z, b)$, то существует такое N, что для любого $n \geq N$ выполнено

$$d(a_n, b) < \varepsilon, \qquad B_{1/\varepsilon}(a_n) \cap X_n \subset U_\varepsilon(Z).$$

Фиксируем $n \geq N$, и пусть $x \in B_R(b) \cap X_n$. Тогда

$$d(x, a_n) \leq d(x, b) + d(b, a_n) < R + \varepsilon < 2R \leq 1/\varepsilon,$$

то есть $x \in B_{1/\varepsilon}(a_n)$ и, значит, существует такая $y \in Z$, что $d(x, y) < \varepsilon$.

Далее, $d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b) < \varepsilon + R < 2R$, поэтому существует такая $m \in \{1, \ldots, M\}$, что $d(y, z_m) < r/2$. Таким образом

$$d(x, z_m) \leq d(x, y) + d(y, z_m) < \varepsilon + r/2 \leq r/2 + r/2 = r.$$

Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству. Для каждого $n \in \{1, \ldots, N\}$ множество $B_R(b) \cap X_n$ — компакт (так как X_n ограниченно компактно) и, значит, вполне ограничено. Поэтому в нем есть конечная r-сеть $S_n \subset B_R(b) \cap X_n$, то есть $B_R(b) \cap X_n \subset \cup_{s \in S_n} B_r(s)$. Положим $S = S_1 \cup \cdots \cup S_N$. Тогда по лемме 8.38

$$B_R(b) \subset \cup_{m=1}^{M} B_r(z_m) \cup \Big(\cup_{s\in S} B_r(s)\Big),$$

то есть, $S \cup \{z_1, \ldots, z_M\}$ — конечная r-сеть в шаре $B_R(b)$, что и требовалось.

Сходимость шаров (пункт d). Пусть фиксировано $R > 0$. Для каждого натурального n положим $R_n = R + 2h_n$, где $h_n = 2d_{GH^*}\big((X_n, a_n), (Z, b)\big)$. По построению, $R_n \to R$ и $R_n > R$. Покажем, что последовательность $\{A_n\}$, $A_n = B_{R_n}(a_n) \cap X_n$ сходится по Хаусдорфу к $B = B_R(b) \cap Z$. Так как пространство $\bar{Y}$ ограниченно компактно, то достаточно проверить сходимость по Куратовскому. (Напомним, что последовательность множеств A_n сходится по Куратовскому к A, если A состоит из пределов всех сходящихся последовательностей $\{a_i\}$, $a_i \in A_i$, и любая сходящаяся частичная последовательность $a_{i_k} \in A_{i_k}$ сходится к точке из A.)

Без ограничения общности $h_n < 1/R$ для всех n. Тогда $B = B_R(b) \cap Z \subset U_{h_n}\big(B_{R_n}(a_n) \cap X_n\big)$, $R_n = R + 2h_n$, поэтому для любой точки $c \in B$ существует точка $x_n \in B_{R_n}(a_n) \cap X_n \subset A_n$ для которой $d(x_n, c) < h_n$, то есть c — предел последовательности $x_n \in A_n$. С другой стороны, если $\{c_n\}$ — последовательность $c_n \in A_n$, и пусть подпоследовательность $\{c_{n_k}\}$ сходится к некоторому c. Тогда $c \in Z$ по лемме 8.35. Остается проверить, что $d(b, c) \le R$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, а N — такое, что для любого $k \ge N$ выполнено

$$R_{n_k} < R + \varepsilon/3, \qquad d(a_{n_k}, b) < \varepsilon/3, \qquad d(c_{n_k}, c) < \varepsilon/3.$$

Тогда для таких k выполнено

$$d(b, c) \le d(b, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, c_{n_k}) + d(c_{n_k}, c) < \varepsilon/3 + R_{n_k} + \varepsilon/3 \le R + \varepsilon,$$

откуда $d(b, c) \le R$, то есть последовательность $\{c_{n_k}\}$ сходится к точке из B, что и требовалось.

Случай внутренней метрики. Пусть теперь метрика каждого пространства (X_n, d_n) — внутренняя. Так как X_n — ограниченно компактное, то метрика d_n — строго внутренняя. Пусть x, $y \in Z$ — произвольные точки, и выберем такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в Y, что x_n, $y_n \in X_n$ и $d(x_n, x) \to 0$ $d(y_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через γ_n кратчайшую геодезическую в X_n, соединяющую x_n и y_n. Тогда к последовательности кривых γ_n применима теорема Арцела–Асколи (их образы лежат в некотором подходящем шаре в пространстве $\bar{Y}$ и длины — ограничены в совокупности). Поэтому существует равномерно сходящаяся подпоследовательность, пределом которой будет кратчайшая кривая, соединяющая x и y. Так как каждая точка этой кратчайшей является пределом точек $\gamma_n \in X_n$, предельная кривая лежит в Z и, поэтому, является также кратчайшей в Z.

Нам остается проверить сходимость шаров по Хаусдорфу. Фиксируем произвольное $R > 0$, и положим $C_n = B_R(a_n) \cap X_n$ и $C = B_R(b) \cap Z$. Так как $\bar{Y}$ — ограниченно компактно, а $C_n \subset B_{2R}(b)$, то снова достаточно проверить сходимость по Куратовскому.

Пусть $c \in C \subset Z$. Тогда существует последовательность $\{y_n\}$, $y_n \to c$, причем, в силу леммы 8.37 можно предполагать, что $y_n \in X_n$. Обозначим через γ_n кратчайшую геодезическую в X_n, соединяющую a_n и y_n. Обозначим через c_n первую, считая от y_n, точку на γ_n, которая попала в C_n (если $y_n \in C_n$, то $c_n = y_n$). Покажем, что $d(c_n, y_n) \to 0$, откуда

$$d(c_n, c) \le d(c_n, y_n) + d(y_n, c) \to 0,$$

и значит каждая точка из C есть предел некоторой последовательности точек $c_n \in C_n$.

Итак, покажем, что $d(c_n, y_n) \to 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N такое, что для $n \ge N$ выполняется $d(a_n, b) < \varepsilon/2$ и $d(y_n, c) < \varepsilon/2$. Тогда для всех таких n имеем

$$d(a_n, y_n) \le d(a_n, b) + d(b, c) + d(c, y_n) < \varepsilon/2 + R + \varepsilon/2 = R + \varepsilon,$$

поэтому или $c_n = y_n$, или

$$d(c_n, y_n) = d(y_n, a_n) - d(c_n, a_n) < R + \varepsilon - R = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Пусть теперь $c_n \in C_n$ — произвольная последовательность, и $\{c_{n_k}\}$ — ее сходящаяся к некоторому c подпоследовательность. Тогда по лемме 8.35 $c \in Z$. Остается проверить, что $c \in C$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем N таким, что для каждого $k \ge N$ выполнено $d(a_{n_k}, b) < \varepsilon/2$ и $d(c_{n_k}, c) < \varepsilon/2$. Тогда для таких k имеем:

$$d(b, c) \le d(b, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, c_{n_k}) + d(c_{n_k}, c) \le R + \varepsilon,$$

так как $a_{n_k} \in C_n = B_R(a_{n_k})$, поэтому, в силу произвольности ε, выполнено $d(b, c) \le R$. Теорема полностью доказана. $\square$

8.1.10 Теорема полноты

Теорема 8.39. *Семейство $\mathcal{M}^*$ классов изометрий пунктированных ограниченно компактных метрических пространств, вместе с функцией расстояния d_{GH^*} образует полное метрическое пространство.*

Доказательство. Пусть (X_n, d_n, a_n) — фундаментальная последовательность в $\mathcal{M}^*$. Выберем подпоследовательность (X_{n_k}, a_{n_k}) так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{GH^*}\big((X_{n_k}, a_{n_k}), (X_{n_{k+1}}, a_{n_{k+1}})\big) < \infty.$$

В соответствии с теоремой 8.32, $(X_{n_k}, a_{n_k}) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Z, b)$, где (Z, b) — пунктированное ограниченно компактное пространство. Поэтому класс изометрий пунктированного пространства (Z, d, b) лежит в $\mathcal{M}^*$. Теорема доказана. □

8.1.11 Предкомпактность

Теорема 8.40. *Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}^*$ — семейство классов изометрий пунктированных ограниченно компактных пространств. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *$\mathcal{X}$ предкомпактно в $\mathcal{M}^*$,*

(2) *существует такое отображение $\pi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, что для всех $\varepsilon > 0$ неравенство $\operatorname{pack}\big(B^d_{1/\varepsilon}(a), \varepsilon\big) \le \pi(\varepsilon)$ выполнено для каждого пунктированного пространства $(X, d; a) \in \mathcal{X}$,*

(3) *существует такое отображение $\nu\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, что для всех $\varepsilon > 0$ неравенство $\operatorname{cov}_i\big(B^d_{1/\varepsilon}(a), \varepsilon\big) \le \nu(\varepsilon)$ выполнено для каждого пунктированного пространства $(X, d; a) \in \mathcal{X}$.*

Доказательство. Буде доказывать цепочку импликаций (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1). Сразу отметим, что импликация (2) ⇒ (3) очевидна, так как $\operatorname{cov}_i\big(B^d_{1/\varepsilon}(a)\big) \le \operatorname{pack}\big(B^d_{1/\varepsilon}(a)\big)$, поэтому можно взять $\nu = \pi$.

Пусть теперь $\mathcal{X}$ предкомпактно. Тогда $\mathcal{X}$ вполне ограниченно (так как замыкание его компактно). Фиксируем произвольное $0 < \varepsilon \le 1$. Тогда существует $N = N(\varepsilon)$ и $\big\{(X_1, a_1), \dots, (X_N, a_N)\big\}$ конечная $\varepsilon/5$ сеть в $\mathcal{X}$. Покажем, что функция

$$\pi(\varepsilon) := \max_n \operatorname{pack}\big(B_{2/\varepsilon}(a_n) \cap X_n, \varepsilon\big)$$

удовлетворяет условиям. Действительно, пусть (Y, b) — произвольное пунктированное пространство из $\mathcal{X}$. Выберем такое (X_n, a_n), что $d_{GH^*}\big((X_n, a_n), (Y, b)\big) < \varepsilon/4$. Положим $R = 1/\varepsilon + 2t$, $r = 1/\varepsilon - 2t$, где $t < \varepsilon/4$. Заметим, что $R + r = 2/\varepsilon < 1/t$, поэтому применима лемма 8.19, из которой, так как $R - 2t = 1/\varepsilon$ и $2r + 4t = 2/\varepsilon$, получаем, что

$$\operatorname{pack}\big(B_{1/\varepsilon}(b) \cap Y, 2/\varepsilon\big) = \operatorname{pack}\big(B_{R-2t}(b) \cap Y, 2r + 4t\big) \le \operatorname{pack}\big(B_R(a) \cap X, 2r\big) =$$
$$= \operatorname{pack}\big(B_{1/e+2t}(a) \cap X, 2\varepsilon - 4t\big) \le \operatorname{pack}\big(B_{2/e}(a) \cap X, \varepsilon\big) \le \pi(\varepsilon),$$

где предпоследнее неравенство верно, поскольку $1/e + 2t < 2/\varepsilon$ и $2\varepsilon - 4t > \varepsilon$ (покрываем больший шар меньшими), а последнее — по определению $\pi(\varepsilon)$, что и требовалось.

Докажем теперь (3) ⇒ (1). Пусть $\nu(\varepsilon)$ — такая, как в пункте (3). Так как $\mathcal{M}^*$ — полно, достаточно проверить, что каждая последовательность в $\mathcal{X}$ содержит фундаментальную подпоследовательность.

Пусть $\big\{(X_n, d_n, a_n)\big\} \subset \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$. Достаточно показать, что найдется такая подпоследовательность (X_{n_j}, a_{n_j}), что $d_{GH^*}\big((X_{n_j}, a_{n_j}), (X_{n_k}, a_{n_k})\big) < \varepsilon$ для любых j и k и воспользоваться стандартной диагональной конструкцией.

Из условия (3) вытекает, что для любого натурального n выполнено $\operatorname{cov}_i(A_n, \varepsilon/2) \le \nu(\varepsilon/2)$, где $A_n = B^{d_n}_{2/\varepsilon}(a_n) \subset X_n$. Так как в интервале $\big(0, \nu(\varepsilon/2)\big]$ содержится лишь конечное число натуральных чисел, то найдется такое натуральное $N \in \big(0, \nu(\varepsilon/2)\big]$ и такая подпоследовательность $\{(X_i, a_i)\}$ исходной последовательности, что $\operatorname{cov}_i(A_i, \varepsilon/2) = N$ для любого i. Поэтому существуют попарно различные точки $x_{i1}, \dots, x_{iN} \in A_n$, для которых $A_i \subset \cup_{n=1}^N B_{\varepsilon/2}(x_{in})$. При этом без ограничения общности можно предполагать, что $x_{i1} = a_i$ (если что — увеличим N на 1).

Теперь фиксируем произвольное i, и пусть натуральные m и n удовлетворяют соотношениям $1 \le m < n \le N$. Рассмотрим расстояния

$$d^{(i)}_{mn} = d_i(x_{im}, x_{in}) \le \operatorname{diam} A_i \le 4/\varepsilon$$

и составленный из них L-мерный вектор расстояний

$$D^{(i)} = \big(d^{(i)}_{12}, d^{(i)}_{13}, \dots, d^{(i)}_{1N}, d^{(i)}_{23}, d^{(i)}_{24}, \dots, d^{(i)}_{2N}, \dots, d^{(i)}_{N-1\,N}\big),$$

где $L = N(N-1)/2$. Выберем натуральное M, $8/\varepsilon^2 \le M < 8/\varepsilon^2 + 1$. Тогда

$$\big(0, 4/\varepsilon\big] \subset \big(0, M\varepsilon/2\big] = \cup_{m=0}^{M-1} I_m, \qquad I_m = \big(m\varepsilon/2, (m+1)\varepsilon/2\big].$$

Каждая величина $d^{(i)}_{mn}$ лежит в точности в одном из промежутков I_m, $m = 0, \dots, M-1$, поэтому каждому $d^{(i)}_{mn}$ соответствует однозначно определенное число $p \in \{0, \dots, M-1\}$, для которого $d^{(i)}_{mn} \in I_p$. Положим $p^{(i)}_{mn} = p$. Тем самым, определен вектор положений

$$P^{(i)} = \big(p^{(i)}_{12}, p^{(i)}_{13}, \dots, p^{(i)}_{1N}, p^{(i)}_{23}, p^{(i)}_{24}, \dots, p^{(i)}_{2N}, \dots, p^{(i)}_{N-1\,N}\big),$$

Очевидно, всего существует M^L различных векторов такого вида, поэтому по крайней мере один из них встречается бесконечное число раз. Итак, существует такой вектор $P = (p_1, \dots, P_L)$ и такая подпоследовательность $\{(X_j, a_j)\}$ исходной последовательности, что для каждого j вектору расстояний $D^{(j)}$ соответствует один и тот же вектор положений P. Последнее означает, что для любых натуральных j, k и любых m и n из $1 \le m < n \le N$ величины $d^{(j)}_{mn}$ и $d^{(k)}_{mn}$ принадлежат одному и тому же интервалу I_p, поэтому $\big|d^{(j)}_{mn} - d^{(k)}_{mn}\big| < \varepsilon/2$.

Таким образом, мы построили подпоследовательность $\{(X_j, a_j)\}$ исходной последовательности и точки $x_{j1}, \dots, x_{jN} \in A_j = B_{2/\varepsilon}(a_j) \subset X_j$, $a_j = xj1$, $A_j \subset \cup_{n=1}^{N} B^{(d_j)}_{\varepsilon/2}(x_{jn})$, и для любых натуральных j, k и любых m и n из $1 \le m < n \le N$

$$\big|d_j(x_{im}, x_{jn}) - d_k(x_{km}, x_{kn})\big| < \varepsilon/2.$$

Мы находимся в условиях утверждения 8.10, оценивающего расстояние в терминах ε-сетей. Получаем, что $d_{GH^*}\big((X_j, a_j), (X_k, a_k)\big) < \varepsilon$, что и завершает доказательство. □

8.1.12 Приложения: касательный и асимптотический конусы

Напомним, что если X — метрическое пространство, то через λX, $\lambda > 0$, обозначается «гомотетичное» метрическое пространство, т.е. такое, в котором все расстояния получаются умножением на λ из исходных расстояний. Для пунктированных пространств определение такое же, а именно, пунктированному пространству (X, p) соответствует «гомотетичное» пространство $(\lambda X, p)$ с той же отмеченной точкой.

Пунктированное пространство (X, p) называется *конусом*, если для любого $\lambda > 0$ пространства $(\lambda X, p)$ и (X, p) изометричны как пунктированные пространства.

Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $p \in X$ Если существует предел $(\lambda X, p) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Y, q)$, то предельное пространство (Y, q) называется *касательным конусом по Громову–Хаусдорфу* в точке p к пространству X. Существование предела понимается так: для каждой стремящейся к бесконечности последовательности λ_n существует предел последовательности $(\lambda_n X, p)$, и этот предел не зависит от выбора последовательности.

Предельное пунктированное пространство (Y, q) будет, как не трудно проверить конусом. Это следует из следующей простой леммы.

Лемма 8.41. *Пусть (X_n, p_n) — последовательность пунктированных метрических пространств, причем $(X_n, p_n) \xrightarrow{GH^*} (X, p)$. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеет место сходимость $(\lambda X_n, p_n) \xrightarrow{GH^*} (\lambda X, p)$.*

Справедливость леммы 8.41 легко следует из определений. Для проверки того, что касательный конус (Y, q) является конусом достаточно рассмотреть наряду с последовательностью $(\lambda_n X, p) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Y, q)$ последовательность $(\lambda\lambda_n X, p) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (\lambda Y, q)$ и воспользоваться тем, что предел не должен зависеть от последовательности коэффициентов гомотетии.

Напомним, что метрическое пространство X называется *удваивающимся*, если существует такая постоянная ν, что любой замкнутый шар радиуса $2R$ может быть покрыт ν шарами радиуса R. Другими словами, $\operatorname{cov}(B_{2R}(x), R) \le \nu$ для любой точки $x \in X$ и любого $R > 0$. Например $\mathbb{R}^n$ такое (здесь ν зависит от размерности), а ℓ^{infty} — нет. Заметим, что если X — удваивающееся, то и λX — тоже, причем с той же константой ν. также легко проверяется, что любое подпространство удваивающегося пространство также удваивающееся.

Пусть X — полное удваивающееся пространство, $\{a_n\}$ — произвольная последовательность точек из X, и $\{\tau_n\}$ — числовая последовательность, $0 < \tau_n \le \operatorname{diam} X$. Положим $X_n = 1/\tau_n$. Рассмотрим последовательность

$\big\{(X_n, a_n)\big\}$. Тогда для каждого X_n и любого ε выполнено $\operatorname{cov}(B_{1/e}(a), 1/2\varepsilon) < \nu$, поэтому, если выбрать $k = k(\varepsilon)$ так, чтобы $1/2^k < \varepsilon^2$, то $\operatorname{cov}(B_{1/e}(a), \varepsilon) < \nu^k$, поэтому применима теорема о предкомпактности 8.40.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8.42. *Каждое полное удваивающееся пространство имеет касательный конус в каждой своей точке.*

Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $p \in X$. Если существует предел $(\lambda X, p) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Y, b)$ при $\lambda \to 0$ (то есть, как и в случае касательного конуса, для любой последовательности $\lambda_n \to 0$ существует предел $(\lambda_n X, p) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Y, b)$ и не зависит от выбора последовательности), то (Y, b) называется *асимптотическим конусом пространства X по Громову–Хаусдорфу.*

Утверждение 8.43. *Асимптотический конус не зависит от выбора точки $p \in X$.*

Доказательство. Пусть (Y, b) — асимптотический конус пространства X, построенного по точке $p \in X$. И пусть $p' \in X$ — другая точка. Нам надо доказать, что $(\lambda X, p') \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Y, b)$ при $\lambda \to 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ R Пусть $f_n\colon \lambda_n X \to Y$ — ε-грубая изометрия пунктированных пространств $(\lambda_n X, p) \to (Y, b)$ из утверждения 8.14. Заменим отображение f_n на отображение f'_n, изменив его в одной точке, а именно, положим $f'_n(x) = f_n(x)$ при $x \neq p'$ и $f(p') = b$. То есть, мы сдвинули ровно одну точку на расстояние $\lambda_n|pp'| + \varepsilon$, поэтому отображение f'_n — тоже ε'-грубая изометрия, $\varepsilon' = 2\varepsilon + \lambda_n|pp'|$. Так как $\lambda_n \to 0$, получаем требуемую сходимость. $\square$

8.1.13 Приложения: пределы отображений

Пусть дана последовательность отображений $f_n\colon (X_n, a_n) \to (Y_n, b_n)$ пунктированных ограниченно компактных метрических пространств, соответствующие последовательности которых сходятся:

$$(X_n, a_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (X_\infty, a_\infty), \qquad (Y_n, b_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}^*} (Y_\infty, b_\infty).$$

Общий вопрос: когда последовательность f_n индуцирует отображение $(X_\infty, a_\infty) \to (Y_\infty, b_\infty)$? Так как нас интересуют предельные пространства, будем сразу предполагать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{GH^*}\big((X_n, a_n), (X_{n+1}, a_{n+1})\big) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_{GH^*}\big((Y_n, b_n), (Y_{n+1}, b_{n+1})\big) < \infty,$$

поэтому, по Теореме 8.32 $X_\infty = \bar{X} \setminus X$, $Y_\infty = \bar{Y} \setminus Y$, где $X = \sqcup X_i$, $Y = \sqcup Y_i$, а метрики d_∞ на $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ построены в доказательстве Теоремы 8.32.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ *локально равномерно ограничена*, если для любого $R > 0$ найдется такое $T > 0$, что $f_n\big(B_R(a_n) \cap X_n\big) \subset B_T(b_n)$ для всех натуральных n.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ *локально равностепенно непрерывна*, если для любого $R > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что для всех натуральных n и всех u, $v \in B_R(a_n) \cap X_n$, для которых $d_\infty(u, v) < \eta$, выполнено $d_\infty\big(f_n(u), f_n(v)\big) < \varepsilon$.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ *сходится поточечно* к отображению $(X_\infty, a_\infty) \xrightarrow{f_\infty} (Y_\infty, b_\infty)$, если для любого $x_\infty \in X_\infty$ и любой сходящейся к нему последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$, то есть такой, что $d_\infty(x_n, x_\infty) \to 0$, выполнено

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty\big(f_n(x_n), f_\infty(x_\infty)\big) = 0.$$

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ *сходится локально равномерно* к отображению $(X_\infty, a_\infty) \xrightarrow{f_\infty} (Y_\infty, b_\infty)$, если для любого $R > 0$ и всех $\varepsilon > 0$ существуют такие $N = N(\varepsilon)$ и $\eta > 0$, что для любого $n \geq N$ выполнено следующее: для каждого $x \in B_R(a_n) \cap X_n$ и каждого $x_\infty \in B_R(a_\infty) \cap X_\infty$ таких, что $d_\infty(x, x_\infty) < \eta$, выполнено $d_\infty\big(f_n(x), f_\infty(x_\infty)\big) < \varepsilon$.

Имеет место следующий аналог теоремы Арцела–Асколи.

Теорема 8.44. *Пусть $f_n\colon (X_n, a_n) \to (Y_n, b_n)$ — последовательность отображений пунктированных ограниченно компактных метрических пространств, причем $(X_n, a_n) \xrightarrow{GH^*} (X_\infty, a_\infty)$ и $(Y_n, b_n) \xrightarrow{GH^*} (Y_\infty, b_\infty)$. Предположим, что последовательность $\{f_n\}$ локально равномерно ограничена и локально равностепенно непрерывна. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая локально равномерно сходится к непрерывному отображению $f_\infty\colon (X_\infty, a_\infty) \to (Y_\infty, b_\infty)$.*

Идея доказательства состоит в следующем. Для $x_\infty \in X_\infty$ выберем последовательность $\{x_n \in X_n\}$, сходящуюся к x_∞. Положим $y_n = f_n(x_n) \in Y_n$ и выберем в последовательности $\{y_n\}$ сходящуюся подпоследовательность, которая сходится к $y_\infty \in Y_\infty$. Это позволит нам применить диагонализацию.

Доказательство. Мы будем предполагать, переходя если нужно к подпоследовательностям, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{GH^*}\big((X_n, a_n), (X_{n+1}, a_{n+1})\big) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_{GH^*}\big((Y_n, b_n), (Y_{n+1}, b_{n+1})\big) < \infty,$$

поэтому, по Теореме 8.32, $X_\infty = \bar{X} \setminus X$, $Y_\infty = \bar{Y} \setminus Y$, где $X = \sqcup X_i$, $Y = \sqcup Y_i$.

По той же теореме 8.32 пространство X_∞ ограниченно компактное, поэтому сепарабельное, поэтому в нем существует счетное всюду плотное подмножество $\{x_\infty^{(i)}\}$. По лемме 8.37 для каждого такого $x_\infty^{(i)} \in X_\infty$ можно построить последовательность $\{x_n^{(i)} \in X_n\}$, сходящуюся к $x_\infty^{(i)}$. Каждая такая последовательность — ограниченное подмножество в X, поэтому, так как $\{f_n\}$ — локально равномерно ограничена, то каждая последовательность образов $\big\{f_n(x_n^{(i)})\big\}$ — ограничена а Y. Так как $\bar{Y}$ ограниченно компактно, то каждая последовательность $\big\{f_n(x_n^{(i)})\big\}$ содержит сходящуюся в $\bar{Y}$ подпоследовательность, которая, в силу леммы 8.35, сходится к некоторой точке из Y_∞.

В частности, найдется подпоследовательность $\{x_{1k}^{(1)} \in X_{1k}\}$ последовательности $\{x_n^{(1)}\}$, подпоследовательность $\{f_{1k}\}$ последовательности $\{f_n\}$ и точка $y_1 \in Y_\infty$ такие, что последовательность $f_{1k}\big(x_{1k}^{(1)}\big)$ сходится к y_1 при $k \to \infty$. Заметим, что пары индексов $1k$, которыми мы занумеровали наши подпоследовательности, порождают подпоследовательности $\{x_{1k}^{(i)} \in X_{1k}\}$ последовательностей $\{x_n^{(i)}\}$ для каждого i, состоящие из их элементов с теми же номерами.

Далее, найдутся подпоследовательность $\{x_{2k}^{(2)} \in X_{1k}\}$ последовательности $\{x_{1k}^{(2)}\}$, подпоследовательность $\{f_{2k}\}$ последовательности $\{f_{1k}\}$ и точка $y_2 \in Y_\infty$ такие, что последовательность $f_{2k}\big(x_{2k}^{(2)}\big)$ сходится к y_2 при $k \to \infty$. Точно так же, что пары индексов $2k$, которыми мы занумеровали наши подпоследовательности, порождают подпоследовательности $\{x_{2k}^{(i)} \in X_{2k}\}$ последовательностей $\{x_{1k}^{(i)}\}$, состоящие из их элементов с теми же номерами.

Продолжим этот процесс до бесконечности. В результате, для каждого натурального j мы построили последовательность точек и пространств $\{x_{jk}^{(j)} \in X_{jk}\}_{k=1}^\infty$, последовательность отображений $\{f_{jk}\}_{k=1}^\infty$ и точку $y_j \in Y_\infty$, для которых выполнено следующее:

(1) последовательность $\{x_{jk}^{(j)}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность в $\{x_{j-1,k}^{(j)}\}_{k=1}^\infty$, а последовательность $\{f_{jk}\}$ — подпоследовательность в $\{f_{j-1,k}\}$, выбранные так, чтобы $f_{jk}\big(x_{jk}^{(j)}\big) \to y_j$ в $\bar{X}$ при $k \to \infty$;

(2) последовательность $\{x_{jk}^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ с теми же номерами jk является подпоследовательностью в $\{x_{j-1k}^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ для любого натурального i. В частности, для всех i, $1 \le i \le j$, последовательность $\{x_{jk}^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ является подпоследовательностью в $\{x_{ik}^{(i)}\}_{k=1}^\infty$, поэтому $f_{jk}\big(x_{jk}^{(i)}\big) \to y_i$ при $k \to \infty$. При этом, $x_{jk}^{(i)} \in X_{jk}$ для всех i.

Для любых натуральных i и m положим $g_m = f_{mm}$, $z_m^{(i)} = x_{mm}^{(i)}$, $c_m = a_{mm}$, $Z_m = X_{mm}$. Проверим, что $g_m\big(z_m^{(i)}\big) \to y_i$ при $m \to \infty$. Действительно, $\{g_m\}$ — подпоследовательность в $\{f_{im}\}$, а $\{z_m^{(i)}\}_{m \ge i}$ — подпоследовательность в $x_{im}^{(i)}$, откуда $g_m\big(z_m^{(i)}\big)$ — подпоследовательность в $f_{im}\big(x_{im}^{(i)}\big)$, которая сходится к $y_i \in Y_\infty$.

Положим $f_\infty(x_\infty^{(i)}) = y_i$.

Теперь нужно продолжить отображение f на все пространство X_∞. Для этого зафиксируем $x_\infty \in X_\infty$, и пусть $\{z_m \in Z_m\}$ — любая последовательность, сходящаяся к x_∞.

Лемма 8.45. *Последовательность $\big\{g_m(z_m)\big\}$ является фундаментальной в Y и сходится в $\bar{Y}$ к элементу из Y_∞.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $R = 2\big(d_\infty(x_\infty, a_\infty) + 1\big)$ и, так как последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна, выберем $\eta \in (0,1)$ так, что для всех натуральных n и всех $z, w \in B_R(a_n) \cap X_n$, для которых $d_\infty(z,w) < \eta$, выполнено $d_\infty\big(f_n(z), f_n(w)\big) < \varepsilon/4$. Выберем $x_\infty^{(i)} \in B_{\eta/10}(x_\infty)$ (напомним, что $x_\infty^{(i)}$ — всюду плотное подмножество). Выберем натуральное M так, чтобы для всех $m \ge M$ было выполнено

$$d_\infty(a_m, a_\infty) < \frac{\eta}{10}, \quad d_\infty(z_m, x_\infty) < \frac{\eta}{10}, \quad d_\infty(z_m^{(i)}, x_\infty^{(i)}) < \frac{\eta}{10}, \quad d_\infty\big(g_m(z_m^{(i)}), y_i\big) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда для всех таких $m \ge M$ имеем:

$$d_\infty(z_m, a_m) \le d_\infty(z_m, x_\infty) + d_\infty(x_\infty, a_\infty) + d_\infty(a_\infty, a_m) < 2\eta/10 + d_\infty(x_\infty, a_\infty) < R/2,$$

и

$$d_\infty(z_m, z_m^{(i)}) \le d_\infty(z_m, x_\infty) + d_\infty(x_\infty, x_\infty^{(i)}) + d_\infty(x_\infty^{(i)}, z_m^{(i)}) < 3\eta/10 < \eta/2$$

поэтому

$$\begin{aligned} d_\infty\big(g_m(z_m), g_n(z_n)\big) \le \\ \le d_\infty\big(g_m(z_m), g_m(z_m^{(i)})\big) + d_\infty\big(g_m(z_m^{(i)}), g_n(z_n^{(i)})\big) + d_\infty\big(g_n(z_n^{(i)}), g_n(z_n)\big) \le \\ \le \varepsilon/4 + d_\infty\big(g_m(z_m^{(i)}), y_i\big) + d_\infty\big(y_i, g_n(z_n^{(i)})\big) + \varepsilon/4 < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon, \end{aligned}$$

тем самым, последовательность $\{g_m(z_m)\}$ фундаментальна. Поэтому она сходится в $\bar{Y}$, а так как $g_m(z_m) \in X_{mm}$, то, в силу леммы 8.35, предел $g_m(z_m)$ сходится к точке из Y_∞. $\square$

Несложно проверить, что предел $\lim g_m(z_m)$ не зависит от выбора подпоследовательности z_m, поэтому мы определим отображение в точке x_∞ так: $f_\infty(x_\infty) = g_m(z_m)$. Очевидно, последовательность отображений g_m сходится к f_∞ поточечно.

Лемма 8.46. *Отображение f_∞ локально равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть даны произвольные $R > 0$ и $\varepsilon > 0$. Равностепенная конференция позволяет выбрать $\eta >$ для $3R$ и $\varepsilon/3$ так, чтобы для всех натуральных m и любых таких $u, v \in B_{3R}(c_m) \cap Z_m$, что $d_\infty(u, v) < \eta$, выполнено $d_\infty\big(g_m(u), g_n(u)\big) < \varepsilon/3$. Пусть даны произвольные $u_\infty, v_\infty \in B_R(a_\infty) \cap X_\infty$, для которых $d_\infty(u_\infty, v_\infty) < \eta/2$. Выберем последовательности $\{u_m \in Z_m\}$, $\{v_m \in Z_m\}$, сходящиеся к u_∞ и v_∞, соответственно. Тогда для достаточно больших m точки v_m и u_m лежат в шаре $B_{3R}(c_m)$, а так как $u_m \to u_\infty$, $v_m \to v_\infty$, и $g_m \to f_\infty$ поточечно, то

$$d_\infty\big(g_m(u_m), f_\infty(u_\infty)\big) < \varepsilon/3, \qquad d_\infty\big(g_m(v_m), f_\infty(v_\infty)\big) < \varepsilon/3,$$

и, кроме того,

$$d_\infty(u_m, u_\infty) < \eta/10, \qquad d_\infty(v_m, v_\infty) < \eta/10,$$

поэтому

$$d_\infty(u_m, v_m) \le d_\infty(u_m, u_\infty) + d_\infty(u_\infty, v_\infty) d_\infty(v_\infty, v_m) < \eta/10 + \eta/2 + \eta/10 < \eta.$$

Таким образом, для достаточно больших m имеем:

$$d_\infty\big(f_\infty(u_\infty), f_\infty(v_\infty)\big) \le d_\infty\big(f_\infty(u_\infty), g_m(u_m)\big) + d_\infty\big(g_m(u_m), g_m(v_m)\big) + d_\infty\big(g_m(v_m), f_\infty(v_\infty)\big) < 3\varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Лемма доказана. $\square$

Наконец, проверим, что $\{g_m\}$ сходится к f_∞ локально равномерно. Пусть даны $R > 0$ и $\varepsilon > 0$. Равностепенная непрерывность $\{g_m\}$ вместе с локальной равномерной непрерывностью f_∞ позволяет выбрать $\eta \in (0, R)$ так, чтобы для любого натурального m и любых $u, v \in B_{2R}(c_m) \cap Z_m$ таких, что $d_\infty(u, v) < \eta$, выполнялась оценка $d_\infty\big(g_m(u), g_m(v)\big) < \varepsilon/3$, а также для любых $u, v \in B_{2R}(a_\infty) \cap X_\infty$ таких, что $d_\infty(u, v) < \eta$, выполнялась оценка $d_\infty\big(f_\infty(u), f_\infty(v)\big) < \varepsilon/3$.

Так как $B_R(a_\infty) \cap X_\infty$ — компакт, можно выбрать в нем конечную $\eta/3$-сеть $w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}$. По лемме 8.37 для каждого i, $1 \le i \le k$, найдется последовательность $\{w^{(i)_m \subset Z_m}\}$, сходящаяся к $w^{(i)}$. Выберем M настолько большим, чтобы для всех $m \ge M$ и всех i, $1 \le i \le k$, были выполнены оценки

$$d_\infty(c_m, \alpha_\infty) < \eta/3, \qquad d_\infty(w_m^{(i)}, w^{(i)}) < \eta/3, \qquad d_\infty\big(g_m(w_m^{(i)}), f_\infty(w^{(i)})\big) < \varepsilon/3,$$

где последняя оценка обеспечена определением f_∞.

Фиксируем произвольное $m \ge M$, и пусть $z \in B_R(c_m) \cap Z_m$ и $z_\infty \in B_R(a_\infty)$ такие, что $d_\infty(z, z_\infty) < \eta/3$. Выберем точку $w^{(i)}$ из $\eta/3$-сети так, чтобы $d_\infty(w^{(i)}, z_\infty) < \eta/3$. Тогда

$$d_\infty(c_m, w_m^{(i)}) \le d_\infty(c_m, a_\infty) + d_\infty(a_\infty, w^{(i)}) + d_\infty(w^{(i)}, w_m^{(i)}) < \eta/3 + R + \eta/3 < 2R,$$

таким образом z, $w_m^{(i)} \in B_{2R}(c_m) \cap Z_m$. Кроме того,

$$d_\infty(z, w_m^{(i)}) \le d_\infty(z, z_\infty) + d_\infty(z_\infty, w^{(i)}) + d_\infty(w^{(i)}, w_m^{(i)}) < \eta/3 + \eta/3 + \eta/3 = \eta,$$

поэтому, для $m \ge M$, и для $z \in B_R(c_m) \cap Z_m$ и $z_\infty \in B_R(a_\infty)$ таких, что $d_\infty(z, z_\infty) < \eta/3$, имеем

$$d_\infty\big(g_m(z), f_\infty(z_\infty)\big) \le d_\infty\big(g_m(z), g_m(w_m^{(i)})\big) + d_\infty\big(g_m(w_m^{(i)}, f_\infty(w^{(i)})\big) + d_\infty\big(f_\infty(w^{(i)}, f_\infty(z_\infty)\big) < 3\varepsilon/3 = \varepsilon,$$

где первое слагаемое оценивается в силу равностепенной непрерывности $\{g_m\}$ и неравенства $d_\infty(z, w_m^{(i)}) < \eta/3$, второе слагаемое — благодаря сделанному выше выбору M, и третье — благодаря локальной равномерной непрерывности f_∞ и выбору элемента $w^{(i)}$ из $\eta/3$-сети. Теорема доказана. $\square$

Замечание 8.47. Если предположить (би-)липшицевость отображений f_n с равномерной оценкой констант Липшица, то можно показать (би-)липшицевость предельного отображения.