# Лекция 7

# Пространство метрических компактов.

Данный раздел посвящен описанию различных свойств семейств метрических пространств. Особое внимание уделяется семейству классов изометрии метрических компактов.

## 7.1 Число покрытия и число упаковки

Пусть $X$ — произвольное метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Определяемые ниже числовые характеристики пары $(X, \varepsilon)$ будут в дальнейшем использованы нами при изучении вполне ограниченных семейств метрических компактов, в частности, в терминах этих чисел будет сформулирован критерий Громова предкомпактности семейства компактных метрических пространств.

**Определение 7.1.** *Числом покрытия* $\operatorname{cov}(X, \varepsilon)$ назовем наименьшее число открытых шаров радиуса $\varepsilon$, которыми можно покрыть пространство $X$. *Числом упаковки* $\operatorname{pack}(X, \varepsilon)$ назовем максимальное число открытых попарно непересекающихся шаров радиуса $\varepsilon/2$ в пространстве $X$.

**Упражнение 7.2.** Докажите, что

(1) метрическое пространство $X$ ограничено, если только если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) < \infty$ (аналогичное утверждение для $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) < \infty$);

(2) метрическое пространство $X$ — конечное, если и только если существует $n$ такое, что $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \le n$ при всех $\varepsilon > 0$ (аналогичное утверждение для $\operatorname{pack}(X, \varepsilon)$);

(3) функции $f(\varepsilon) = \operatorname{cov}(X, \varepsilon)$ и $g(\varepsilon) = \operatorname{pack}(X, \varepsilon)$ — монотонно убывающие.

**Предложение 7.3.** *Для любого метрического пространства $X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \le \operatorname{pack}(X, \varepsilon) \le \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4).$$

*Доказательство.* Докажем сначала первое неравенство. Если $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) = \infty$, то неравенство автоматически выполнено. Пусть теперь $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) < \infty$ и $x_1, \ldots, x_n$, $n = \operatorname{pack}(X, \varepsilon)$, — наибольший набор точек в $X$, для которого шары $U_{\varepsilon/2}(x_i)$ попарно не пересекаются. Так как это семейство максимально, то для любого $x \in X$ существует $x_k$ такое, что $U_{\varepsilon/2}(x) \cap U_{\varepsilon/2}(x_k) \ne \emptyset$, откуда $|xx_k| < \varepsilon$. Но тогда семейство $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ покрывает $X$, так что $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \le n = \operatorname{pack}(X, \varepsilon)$.

Докажем второе неравенство. Снова, если $\operatorname{cov}(X, \varepsilon/4) = \infty$, то неравенство выполнено. Пусть теперь $\operatorname{cov}(X, \varepsilon/4) < \infty$ и $x_1, \ldots, x_m$, $m = \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4)$, — наименьший набор точек в $X$, для которого шары $U_{\varepsilon/4}(x_i)$ покрывают $X$. Предположим, что $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) > \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4)$, тогда существуют $x'_1, \ldots, x'_n$, $n > \operatorname{cov}(X, \varepsilon/4)$, такие, что шары $U_{\varepsilon/2}(x'_i)$ попарно не пересекаются. С другой стороны, для некоторых $i \ne j$ существует $k$ такое, что $x'_i, x'_j \in U_{\varepsilon/4}(x_k)$, следовательно, $\{x'_i, x'_j\} \subset U_{\varepsilon/2}(x'_i) \cap U_{\varepsilon/2}(x'_j)$, так что это пересечение непусто, противоречие. $\square$

**Следствие 7.4.** *Пусть $X$ — произвольное метрическое пространство, тогда*

(1) *если* $\operatorname{pack}(X, \varepsilon) < \infty$, *то* $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) < \infty$;

(2) *если* $\mathrm{cov}(X,\varepsilon)<\infty$, *то* $\mathrm{pack}(X,4\varepsilon)<\infty$.

*Таким образом,* $\mathrm{cov}(X,\varepsilon)<\infty$ *при всех* $\varepsilon>0$, *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{pack}(X,\varepsilon)<\infty$ *при всех* $\varepsilon>0$.

**Предложение 7.5.** *Пусть $X$ — произвольное метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $\mathrm{cov}(X,\varepsilon)<\infty$ *для любого* $\varepsilon>0$;

(2) $\mathrm{pack}(X,\varepsilon)<\infty$ *для любого* $\varepsilon>0$;

(3) *пространство $X$ вполне ограничено.*

*Доказательство.* (1) $\Leftrightarrow$ (2) Это вытекает из следствия 7.4.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Условие $\mathrm{cov}(X,\varepsilon)<\infty$ равносильно существованию конечного покрытия $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$, что эквивалентно существованию конечной $\varepsilon$-сети $\{x_i\}_{i=1}^n$. Таким образом, условие пункта (1) равносильно полной ограниченности пространства $X$. □

**Предложение 7.6.** *Пусть $X$, $Y$ — метрические пространства, $\delta>0$, и $d_{GH}(X,Y)<\delta$, тогда*

(1) $\mathrm{cov}(X,\varepsilon)\geq\mathrm{cov}(Y,\varepsilon+2\delta)$,

(2) $\mathrm{pack}(X,\varepsilon)\geq\mathrm{pack}(Y,2\varepsilon+4\delta)$.

*Доказательство.* (1) Случай $\mathrm{cov}(X,\varepsilon)=\infty$ очевиден. Пусть теперь $m:=\mathrm{cov}(X,\varepsilon)<\infty$ и $\bigl\{U_\varepsilon(x_i)\bigr\}_{i=1}^m$ — покрытие $X$. По теореме 6.13, существует $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $\operatorname{dis}R<2\delta$. Для каждого $i$ выберем произвольное $y_i\in R(x_i)$ и покажем, что множество $\{y_i\}_{i=1}^m$ является $(\varepsilon+2\delta)$-сетью, откуда мгновенно получим $\mathrm{cov}(Y,\varepsilon+2\delta)\leq m=\mathrm{cov}(X,\varepsilon)$. Итак, берем произвольное $y\in Y$ и выбираем любое $x\in R^{-1}(y)$. Тогда для некоторого $j$ имеем $|xx_j|\leq\varepsilon$. Так как $\operatorname{dis}R<2\delta$, то $|yy_j|<\varepsilon+2\delta$, что и требовалось.

(2) Так как случай $\mathrm{pack}(Y,2\varepsilon+4\delta)=\infty$ тривиален, будем предполагать, что $n:=\mathrm{pack}(Y,2\varepsilon+4\delta)<\infty$ и $\bigl\{U_{\varepsilon+2\delta}(y_i)\bigr\}_{i=1}^n$ — дизъюнктное семейство шаров в $Y$. Тогда для любых $i\neq j$ имеем $|y_iy_j|\geq\varepsilon+2\delta$. Для каждого $i$ выберем произвольное $x_i\in R^{-1}(y_i)$. Так как $\operatorname{dis}R<2\delta$, имеем $|x_ix_j|>\varepsilon$, поэтому семейство $\bigl\{U_{\varepsilon/2}(x_i)\bigr\}_{i=1}^n$ является дизъюнктным и, значит, $\mathrm{pack}(X,\varepsilon)\geq n=\mathrm{pack}(Y,2\varepsilon+4\delta)$. □

## 7.2 Вполне ограниченные семейства метрических компактов

Перейдем теперь к изучению семейств компактных метрических пространств. Нас будет интересовать, когда то или иное семейство является вполне ограниченным. Начнем со следующего вспомогательного утверждения, которое понадобится нам ниже. Напомним, что через $\mathcal{M}$ мы обозначаем метрическое пространство классов изометрии метрических компактов с метрикой Громова–Хаусдорфа. Для $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}_n\subset\mathcal{M}$ множество всех метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем $n$ точек, а через $\mathcal{M}_{[n]}\subset\mathcal{M}$ — ровно $n$ точек. Для $D\geq0$ через $\mathcal{M}(D)\subset\mathcal{M}$ обозначим множество всех метрических компактов, диаметры которых не превосходят $D$. Положим также $\mathcal{M}_n(D)=\mathcal{M}_n\cap\mathcal{M}(D)$ и $\mathcal{M}_{[n]}(D)=\mathcal{M}_{[n]}\cap\mathcal{M}(D)$. Ясно, что $\mathcal{M}_n=\cup_{k\leq n}\mathcal{M}_{[k]}$ и $\mathcal{M}_n(D)=\cup_{k\leq n}\mathcal{M}_{[k]}(D)$.

**Предложение 7.7.** *Множество $\mathcal{M}_{[n]}(D)$ вполне ограничено.*

*Доказательство.* Для $M\in\mathcal{M}_{[n]}(D)$ рассмотрим всевозможные биекции $\nu\colon M\to\{1,\dots,n\}$, и по каждому такому $\nu$ построим матрицу расстояний $f(M,\nu)=\rho=(\rho_{ij})$, положив $\rho_{ij}=\bigl|\nu^{-1}(i)\nu^{-1}(j)\bigr|$. Пусть $T$ — множество всех таких матриц. Ясно, что отображение $f(M,\nu)\mapsto M$ является некоторой сюръекцией $g\colon T\to\mathcal{M}_{[n]}(D)$.

Зададим на $T$ функцию расстояния, порожденную $\ell^\infty$-нормой, так что $T$ будем рассматривать как подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}_\infty$. Так как для каждых $i,j$ имеем $|\rho_{ij}|\leq D$, то $T$ является ограниченным и, значит, вполне ограниченным подмножеством $\mathbb{R}^{n^2}_\infty$.

Если $M,M'\in\mathcal{M}_{[n]}(D)$, $\rho=f(M,\nu)$ и $\rho'=f(M',\nu')$, то $R=(\nu')^{-1}\circ\nu$ — биективное соответствие между $M$ и $M'$, причем $|\rho\rho'|_\infty=\operatorname{dis}R\geq2d_{GH}(M,M')$. Таким образом, сюръекция $g$ является липшицевым отображением и, значит, $\mathcal{M}_{[n]}(D)=g(T)$ — также вполне ограничено. □

**Следствие 7.8.** *Множество $\mathcal{M}_n(D)$ вполне ограничено.*

**Упражнение 7.9.** Докажите, что множество $\mathcal{M}_n(D)$ компактно, а $\mathcal{M}_{[n]}(D)$ при $n>1$ — нет.

**Теорема 7.10.** *Пусть $\mathcal{C}$ — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется* $\operatorname{diam} X \le D$ *и* $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.

(2) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется* $\operatorname{diam} X \le D$ *и* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.

(3) *Пространство $\mathcal{C}$ с метрикой $d_{GH}$ вполне ограничено.*

*Доказательство.* (3) $\Rightarrow$ (1) Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующие $D$ и $N(\varepsilon)$. Так как $\mathcal{C}$ — вполне ограничено, то для любого $\delta > 0$ существует конечная $\delta$-сеть $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Выберем $\delta$ так, чтобы выполнялось $4\delta < \varepsilon$. Так как все пространства, лежащие в $\mathcal{C}'$, — вполне ограничены, то, по предложению 7.5, их числа упаковки конечны. Кроме того, конечны и их диаметры. Положим $D' = \max_{C\in\mathcal{C}'} \operatorname{diam} C$ и $N'(X,\varepsilon) = \max_{C\in\mathcal{C}'} \operatorname{pack}(C,\varepsilon)$. Для произвольного $X \in \mathcal{C}$ существует такое $C \in \mathcal{C}'$, что $d_{GH}(X,C) < \delta$. Легко видеть, что $\operatorname{diam} X \le \operatorname{diam} C + 2\delta \le D' + 2\delta$, так что можно положить $D = D' + 2\delta$. Кроме того, по предложению 7.6, $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \le \operatorname{pack}(C,\varepsilon/2 - 2\delta) \le N'(\varepsilon/2 - 2\delta)$, так что можно положить $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon/2 - 2\delta)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Это мгновенно вытекает из предложения 7.3.

(2) $\Rightarrow$ (3) Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$, и для каждого $X \in \mathcal{C}$ рассмотрим конечное покрытие пространства $X$ открытыми шарами радиуса $\varepsilon$, состоящее не более чем из $n = N(\varepsilon)$ точек. Через $F_X^\varepsilon$ обозначим множество центров этих шаров, тогда $d_{GH}(X, F_X^\varepsilon) \le \varepsilon$. Кроме того, $F_X^\varepsilon \in \mathcal{M}_n(D)$, поэтому, в силу следствия 7.8, семейство $\mathcal{F}^\varepsilon = \{F_X^\varepsilon\}_{X\in\mathcal{C}} \subset \mathcal{M}_n(D)$ — вполне ограничено. Кроме того, как только что было показано, для любого $\varepsilon' > \varepsilon$ имеем $\mathcal{C} \subset U_{\varepsilon'}(\mathcal{F}^\varepsilon)$, где через $U_{\varepsilon'}(\mathcal{F}^\varepsilon)$ мы обозначили открытую $\varepsilon'$-окрестность множества $\mathcal{F}^\varepsilon \subset \mathcal{M}$ в пространстве $\mathcal{M}$. Так как $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ — произвольны, заключаем, что $\mathcal{C}$ также является вполне ограниченными (убедитесь в этом). $\square$

Следующая теорема позволяет реализовать все метрические пространства, входящие во вполне ограниченное подмножество $\mathcal{M}$, в виде подмножеств некоторого компактного подмножества $\ell^\infty$.

**Теорема 7.11** (Громов). *Для каждого вполне ограниченного подмножества $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ существует компакт $K \subset \ell^\infty$ такой, что каждое $X \in \mathcal{C}$ изометрично вкладывается в $K$.*

*Доказательство.* Компакт $K$ строится следующим образом. По теореме 7.10, существуют $D \ge 0$ и $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ и $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$. Выберем произвольную убывающую последовательность положительных чисел $E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$ такую, что $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i < \infty$. Эта последовательность и функция $N(\varepsilon)$ порождают последовательность натуральных чисел $N_i = N(\varepsilon_i)$. Эти две последовательности, вместе с числом $D$, определяют множество $F_{D,E} \subset \ell^\infty$ следующим образом.

**Конструкция 7.12.** Положим $A = \cup_{j=1}^\infty \bigl(\{1,\ldots,N_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,N_j\}\bigr)$. Ясно, что $A$ — счетное множество, поэтому $\ell^\infty(A)$ изометрично $\ell^\infty$. Элементы пространства $\ell^\infty(A)$ являются ограниченными функциями $f\colon A \to \mathbb{R}$. Для краткости, вместо $f\bigl((n_1,\ldots,n_j)\bigr)$ мы будем писать $f(n_1,\ldots,n_j)$.

Определим теперь множество $F_{D,E}$, составив его из всех $f\colon A \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $0 \le f(n_1) \le D$ для всех $1 \le n_1 \le N_1$;

(2) $\bigl|f(n_1,\ldots,n_j,n_{j+1}) - f(n_1,\ldots,n_j)\bigr| \le \varepsilon_j$ для всех элементов $(n_1,\ldots,n_j,n_{j+1}) \in A$.

**Лемма 7.13.** *Определенное выше множество $F_{D,E}$ является компактным подмножеством в $\ell^\infty(A)$.*

*Доказательство.* Заметим сначала, что для каждой функции $f \in F_{D,E}$ выполняется $\sup_{a\in A}\bigl|f(a)\bigr| \le D + \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i < \infty$, поэтому $f \in \ell^\infty(A)$. Далее, так как все неравенства, определяющие $F_{D,E}$, — нестрогие, множество $F_{D,E}$ замкнуто в $\ell^\infty(A)$. Так как $\ell^\infty(A)$ — полное, то $F_{D,E}$ также полное. Кроме того, диаметр $F_{D,E}$ конечен (ограничен числом $D + 2\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i$).

Положим $A_{[k]} = \bigl\{(n_1,\ldots,n_k) \in A\bigr\}$ и $A_k = \cup_{j=1}^k A_j$. Обозначим через $\pi_k\colon \ell^\infty(A) \to \ell^\infty(A_k)$ каноническую проекцию, сопоставляющую каждой функции $f\colon A \to \mathbb{R}$ ее ограничение на $A_k \subset A$, и пусть $F_k = \pi_k(F_{D,E})$. Заметим, что $F_k$ является замкнутым и ограниченным подмножеством конечномерного векторного пространства $\ell^\infty(A_k)$, поэтому $F_k$ — компакт.

Определим отображение $\nu\colon F_k \to \ell^\infty(A)$, распространив каждую функцию $f_k \in F_k$ на все множество $A$ так:

$$f_k(n_1,\ldots,n_k,n_{k+1},\ldots) = f_k(n_1,\ldots,n_k).$$

Ясно, что $\nu$ изометрично, поэтому $F'_k = \nu(F_k)$ также является компактом.

Положим $e_k = \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots$, тогда $e_k \to \emptyset$ при $k \to \infty$. По условию (2), имеем $F_{D,E} \subset U_{e_k}(F'_k)$ при всех $k \ge 2$, откуда мгновенно вытекает полная ограниченность пространства $F_{D,E}$. □

Возьмем теперь в качестве $K$ множество $F_{D,2E}$ и покажем, что каждое пространство $X \in \mathcal{C}$ можно изометрично вложить в такой $K$. Мы будем рассматривать точки вида $x_a$, $a \in A$, и снова, для краткости, вместо $x_{(n_1,\ldots,n_j)}$ будем писать $x_{n_1\cdots n_j}$.

Покроем каждое пространство $X \in \mathcal{C}$ шарами $U_{\varepsilon_1}(x_{n_1})$, $1 \le n_1 \le N_1$. Затем покроем каждый шар $U_{\varepsilon_1}(x_{n_1})$ шарами $U_{\varepsilon_2}(x_{n_1 n_2}) \subset X$, $1 \le n_2 \le N_2$ (отметим, что центры некоторых шаров $U_{\varepsilon_2}(x_{n_1 n_2})$ могут совпадать). Ясно, что $|x_{n_1} x_{n_1 n_2}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_1$. Продолжив этот процесс, на $j$-ом шаге получим семейство шаров $\bigl\{U_{\varepsilon_j}(x_a)\bigr\}_{a \in A_{[j]}}$, причем $|x_{n_1\cdots n_j} x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}}| < 2\varepsilon_j$.

Легко видеть, что множество $\{x_a\}_{a\in A}$ центров этих шаров — счетное всюду плотное подмножество $X$ (некоторые $x_a$ могут совпадать друг с другом). По теореме 2.3, пространство $X$ можно изометрично вложить в $\ell^\infty(A)$, поставив в соответствие каждой точке $x$ функцию $f_x\colon A \to \mathbb{R}$, определенную так: $f_x(a) = |x x_a|$ (проверьте, что не смотря на совпадение некоторых точек $x_a$, эта конструкция по-прежнему дает изометричное вложение).

**Лемма 7.14.** *При каждом $x \in X$ имеем $f_x \in F_{D,2E}$.*

*Доказательство.* Ясно, что $0 \le f_x \le D$, так что пункт (1) из определения множества $F_{D,2E}$ выполнен. Далее, для каждого $(n_1, \ldots, n_j, n_{j+1})$ точка $x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}}$ лежит в $U_{\varepsilon_j}(x_{n_1\cdots n_j})$, поэтому для каждого $x \in X$ выполняется

$$\bigl|f_x(n_1, \ldots, n_j, n_{j+1}) - f_x(n_1, \ldots, n_j)\bigr| = \bigl||x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}} x| - |x_{n_1\cdots n_j} x|\bigr| \le |x_{n_1\cdots n_j n_{j+1}} x_{n_1\cdots n_j}| < 2\varepsilon_j,$$

поэтому и пункт (2) из определения множества $F_{D,2E}$ тоже выполнен. □

Тем самым, отображение $x \mapsto f_x$ изометрично вкладывает $X$ в $K$. □

## 7.3 Другие свойства пространства $\mathcal{M}$

В этом разделе мы приведем ряд свойств пространства $\mathcal{M}$.

### 7.3.1 Полнота пространства $\mathcal{M}$

Теорема 7.11 позволяет доказать следующий результат.

**Теорема 7.15.** *Пространство $\mathcal{M}$ — полное.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{X_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$. Тогда $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ — вполне ограниченное подмножество $\mathcal{M}$. По теореме 7.11, существует такой компакт $K \subset \ell^\infty$, в который все $X_i$ изометрично вкладываются. Обозначим образ $X_i$ через $Y_i$. По теореме 2.13, пространство $\mathcal{H}(K)$ всех замкнутых ограниченных подмножеств $K$ также компактно, поэтому последовательность $Y_i$ точек из $\mathcal{H}(K)$ содержит сходящуюся подпоследовательность $Y_{n_i}$. Пусть $Y$ — предел этой подпоследовательности. Тогда $Y$ — непустое компактное метрическое пространство и

$$d_{GH}(X_{n_i}, Y) = d_{GH}(Y_{n_i}, Y) \le d_H(Y_{n_i}, Y) \to 0 \ \text{ при } i \to \infty,$$

поэтому $X_{n_i} \xrightarrow{\text{GH}} Y$ и, в силу фундаментальности последовательности $X_i$, имеем $X_i \xrightarrow{\text{GH}} Y$, что и требовалось. □

### 7.3.2 Критерий Громова предкомпактности

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно. Теорема 7.10 формулирует необходимые и достаточные условия полной ограниченности подмножества пространства Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$. Теорема 7.15 утверждает, что $\mathcal{M}$ — полное пространство и, значит, таким же является и любое его замкнутое подмножество. Следовательно, замыкание произвольного вполне ограниченного $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ является вполне ограниченным и полным, что, в силу пункта (9) из определений и фактов 2.1, влечет компактность $\mathcal{C}$. Таким образом, в теореме 7.10 полную ограниченность можно заменить на предкомпактность. Итак, доказана следующая теорема, которая и называется *критерием Громова предкомпактности семейства метрических компактов.*

**Теорема 7.16.** *Пусть $\mathcal{C}$ — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ и $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.*

(2) *Существует число $D \ge 0$ и функция $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ и $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \le N(\varepsilon)$.*

(3) *Семейство $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ предкомпактно.*

### 7.3.3 Сепарабельность пространства $\mathcal{M}$

**Теорема 7.17.** *Пространство $\mathcal{M}$ — сепарабельное.*

*Доказательство.* По следствию 7.8, каждое пространство $\mathcal{M}_n(D)$ вполне ограничено и, значит, сепарабельно. Но $\mathcal{M}_n = \cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_n(k)$, поэтому и все $\mathcal{M}_n$, а также их объединение $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_n$, — сепарабельны. Но это последнее объединение есть в точности множество всех конечных метрических пространств, которое, как было отмечено в примере 6.17, является всюду плотным подмножеством $\mathcal{M}$, так что и $\mathcal{M}$ — сепарабельно. □

Напомним, что полное сепарабельное метрическое пространство называется *польским.* Тем самым, имеет место следующий результат.

**Следствие 7.18.** *Пространство $\mathcal{M}$ — польское.*

Напомним также, что топологическое пространство *удовлетворяет второй аксиоме счетности*, если оно имеет счетную базу. Для метрического пространства это условие эквивалентно сепарабельности.

**Следствие 7.19.** *Пространство $\mathcal{M}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

### 7.3.4 Существование оптимальных соответствий между метрическими компактами

Материал, обсуждаемый в настоящем разделе, опубликован в [18]. Пусть $X$ и $Y$ — произвольные метрические пространства. По теореме 6.13,

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

**Определение 7.20.** Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между $X$ и $Y$ обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$.

Отметим, что $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ может быть пустым. Например, в силу замечания 6.12, это всегда имеет место, если $d_{GH}(X,Y) = 0$, но $X$ и $Y$ не изометричны, скажем, для $X = [0,1]$ и $Y = (0,1)$, или для ограниченно компактных метрических пространств, описанных в замечании 6.9. Однако, для компактных метрических пространств $X$ и $Y$, как будет показано в этом разделе, множество $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ непусто, т.е. в этом случае всегда существует соответствие, на котором достигается расстояние Громова–Хаусдорфа.

**Соглашение 7.21.** На протяжении этого раздела, говоря про метрическое пространство $X \times Y$, мы всегда будем считать, что на нем задано расстояние

$$\bigl|(x,y)(x',y')\bigr| = \max\bigl\{|xx'|,\,|yy'|\bigr\},$$

которое, в частности, порождает расстояние Хаусдорфа на $\mathcal{P}(X,Y)$. Тем самым, пространство $\mathcal{P}(X,Y)$ и все его подпространства, например $\mathcal{R}(X,Y)$, будут рассматриваться с функциями расстояния из $\mathcal{P}(X,Y)$.

**Предложение 7.22.** *Для $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ обозначим через $\bar\sigma$ его замыкание, тогда $\operatorname{dis}\bar\sigma = \operatorname{dis}\sigma$.*

*Доказательство.* В силу того, что $\sigma \subset \bar\sigma$, имеем $\operatorname{dis}\sigma \le \operatorname{dis}\bar\sigma$, поэтому осталось проверить обратное неравенство.

Так как $\bar\sigma$ состоит из точек прикосновения множества $\sigma$, то для любых $(\bar x,\bar y)$, $(\bar x',\bar y') \in \bar\sigma$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $(x,y)$, $(x',y') \in \sigma$, что $\bigl|(\bar x,\bar y)(x,y)\bigr| < \varepsilon/6$ и $\bigl|(\bar x',\bar y')(x',y')\bigr| < \varepsilon/6$, то есть

$$\max\bigl\{|\bar x x|, |\bar y y|\bigr\} < \varepsilon/6 \quad \text{и} \quad \max\bigl\{|\bar x' x'|, |\bar y' y'|\bigr\} < \varepsilon/6.$$

Отсюда вытекает, что $\big||\bar{x}\bar{x}'|-|xx'|\big|\le|\bar{x}x|+|\bar{x}'x'|<\varepsilon/3$ и, аналогично, $\big||\bar{y}\bar{y}'|-|yy'|\big|<\varepsilon/3$, поэтому

$$\big||\bar{x}\bar{x}'|-|\bar{y}\bar{y}'|\big|<\big||xx'|-|yy'|\big|+2\varepsilon/3\le\operatorname{dis}\sigma+2\varepsilon/3.$$

Переходя к супремуму по всем $(\bar{x},\bar{y})$, $(\bar{x}',\bar{y}')\in\bar{\sigma}$, заключаем, что $\operatorname{dis}\bar{\sigma}\le\operatorname{dis}\sigma+2\varepsilon/3$. Так как $\varepsilon$ произвольно, имеем $\operatorname{dis}\bar{\sigma}\le\operatorname{dis}\sigma$. □

Множество всех замкнутых непустых отношений между $X$ и $Y$ обозначим через $\mathcal{P}_c(X,Y)$; аналогично, через $\mathcal{R}_c(X,Y)$ будем обозначать множество всех замкнутых соответствий между $X$ и $Y$.

Из 7.22 и 6.13 мгновенно получается следующий результат.

**Следствие 7.23.** *Для любых $X$ и $Y$ имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}_c(X,Y)\big\}.$$

**Замечание 7.24.** Если $X$, $Y\in\mathcal{M}$, то $X\times Y\in\mathcal{M}$, и, в силу теоремы 2.13, выполняется $\mathcal{P}_c(X,Y)=\mathcal{H}(X\times Y)\in\mathcal{M}$.

**Предложение 7.25.** *Для $X$, $Y\in\mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}_c(X,Y)$ замкнуто в $\mathcal{P}_c(X,Y)$ и, значит, $\mathcal{R}_c(X,Y)\in\mathcal{M}$.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что для каждого соответствия $\sigma\in\mathcal{P}_c(X,Y)\setminus\mathcal{R}_c(X,Y)$ существует окрестность $U$, не пересекающая $\mathcal{R}_c(X,Y)$. Так как $\sigma\notin\mathcal{R}(X,Y)$, то или $\pi_X(\sigma)\ne X$, или $\pi_Y(\sigma)\ne Y$, где $\pi_X$ и $\pi_Y$ — канонические проекции. Пусть, для определенности, выполняется первое условие, т.е. существует $x\in X\setminus\pi_X(\sigma)$. Так как множество $\sigma$ замкнуто в компакте $X\times Y$, оно является компактом, поэтому $\pi_X(\sigma)$ компактно в $X$ и, значит, замкнуто в нем. Следовательно, существует открытый шар $U_\varepsilon(x)$ такой, что $U_\varepsilon(x)\cap\pi_X(\sigma)=\emptyset$. И сказанного вытекает, что в качестве $U$ можно взять $U_\varepsilon(x)\times Y$. □

Определим функцию $f\colon(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$, положив $f(x,y,x',y')=\big||xx'|-|yy'|\big|$. Ясно, что $f$ непрерывна. Отметим, что для каждого $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ имеем

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\big\{f(x,y,x',y'):(x,y),\,(x',y')\in\sigma\big\}=\sup f|_{\sigma\times\sigma}.$$

**Предложение 7.26.** *Если $X$, $Y\in\mathcal{M}$, то функция искажения* $\operatorname{dis}\colon\mathcal{P}_c(X,Y)\to\mathbb{R}$ *— непрерывна.*

*Доказательство.* Так как $(X\times Y)\times(X\times Y)$ — компакт, то определенная выше функция $f$ равномерно непрерывна, поэтому для любого $\sigma\in\mathcal{P}_c(X,Y)$ и любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для открытого шара $U=U_\delta^{X\times Y}(\sigma)\subset X\times Y$ радиуса $\delta$ с центром в $\sigma$ выполняется

$$\sup f|_{U\times U}\le\sup f|_{\sigma\times\sigma}+\varepsilon.$$

Обозначим через $V$ открытый шар $U_\delta^{\mathcal{P}_c(X,Y)}(\sigma)\subset\mathcal{P}_c(X,Y)$ радиуса $\delta$ с центром в $\sigma$. Так как для любого $\sigma'\in V$ выполняется $\sigma'\subset U$, то из сказанного выше вытекает, что

$$\operatorname{dis}\sigma'=\sup f|_{\sigma'\times\sigma'}\le\sup f|_{U\times U}\le\sup f|_{\sigma\times\sigma}+\varepsilon=\operatorname{dis}\sigma+\varepsilon.$$

Меняя местами $\sigma$ и $\sigma'$, получаем, что $|\operatorname{dis}\sigma-\operatorname{dis}\sigma'|\le\varepsilon$, а это означает непрерывность отображения dis. □

**Теорема 7.27.** *Для любых $X$, $Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)\ne\emptyset$.*

*Доказательство.* По 7.26, функция $\operatorname{dis}\colon\mathcal{R}_c(X,Y)\to\mathbb{R}$ непрерывна, а по 7.25 пространство $\mathcal{R}_c(X,Y)$ компактно, поэтому dis достигает своего наименьшего значения, половина которого, в силу 7.23, равна $d_{GH}(X,Y)$. Следовательно, соответствие $R$, на котором это наименьшее значение достигается, — оптимальное. □

**Следствие 7.28.** *Для любых $X$, $Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)\cap\mathcal{R}_c(X,Y)\ne\emptyset$, т.е. между любыми метрическими компактами существует замкнутое оптимальное соответствие.*

*Доказательство.* Это мгновенно вытекает из теоремы 7.27 и предложения 7.22. □

### 7.3.5 Метрика Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{M}$ — строго внутренняя

Пусть $X, Y$ — произвольные метрические пространства. При каждом $t \in (0,1)$ определим на $X\times Y$ функцию расстояния, положив
$$\big|(x,y)(x',y')\big|_t = (1-t)|xx'| + t\,|yy'|.$$

Следующее предложение доказывается стандартным образом.

**Предложение 7.29.** *Определенная выше функция $|\cdot|_t$ является метрикой при всех $t \in (0,1)$, а порожденная ей метрическая топология на $X \times Y$ совпадает с топологией декартова произведения.*

Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$, метрическое пространство $\big(\sigma, |\cdot|_t\big)$ обозначим через $\sigma_t$.

**Предложение 7.30.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого $\sigma \in \mathcal{P}_c(X,Y)$ имеем $\sigma_t \in \mathcal{M}$ при каждом $t \in (0,1)$.*

*Доказательство.* Так как $X \times Y$ — хаусдорфов компакт, а $\sigma$ — замкнутое подмножество $X \times Y$, то $\sigma$ также является компактом. □

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и доопределим семейство $R_t$, $t \in (0,1)$, в точках $t = 0, 1$, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

**Предложение 7.31.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$, $R \in \mathcal{R}_c(X,Y)$ и любых $t, s \in [0,1]$ имеем $2d_{GH}(R_t, R_s) \le |t-s| \operatorname{dis} R$. Таким образом, кривая $t \mapsto R_t$ в $\mathcal{M}$ — непрерывна.*

*Доказательство.* Пусть сначала $t, s \in (0,1)$. Оценим расстояние $d_{GH}(R_t, R_s)$, используя тождественное соответствие $\mathrm{id} \in \mathcal{R}(R_t, R_s)$. Имеем
$$2d_{GH}(R_t,R_s) \le \operatorname{dis}\mathrm{id} = \sup\Big\{\big||(x,y)(x',y')|_t - |(x,y)(x',y')|_s\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} =$$
$$= |t-s|\sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} = |t-s|\operatorname{dis} R.$$

Оценим теперь расстояние $d_{GH}(X, R_t)$, $t \in (0,1)$, с помощью соответствия
$$R' = \Big\{\big(x,(x,y)\big) : (x,y) \in R\Big\} \in \mathcal{R}(X, R_t).$$

Имеем
$$2d_{GH}(X,R_t) \le \operatorname{dis} R' = \sup\Big\{\big||xx'| - |(x,y)(x',y')|_t\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} =$$
$$= t\sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\} = t\operatorname{dis} R.$$

Аналогично получаем, что $2d_{GH}(R_t, Y) \le (1-t)\operatorname{dis} R$. Осталось заметить, что две последние оценки являются частными случаями следующей общей формулы:
$$2d_{GH}(R_t,R_s) \le |t-s|\operatorname{dis} R,$$
где $t, s \in [0,1]$. □

**Теорема 7.32.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y)$, существующего в силу следствия 7.28, кривая $t \mapsto R_t$, $t \in [0,1]$, соединяющая $X$ и $Y$, является кратчайшей, причем ее длина равна $d_{GH}(X,Y)$. Тем самым, метрика пространства $\mathcal{M}$ — строго внутренняя.*

*Доказательство.* В силу предложения 7.31, кривая $R_t$ — непрерывна, и для любых $t, s \in [0,1]$ выполняется
$$d_{GH}(R_t,R_s) \le \frac{1}{2}|t-s|\operatorname{dis} R = |t-s|\, d_{GH}(X,Y),$$
так что эта кривая является липшицевой с константой Липшица $d_{GH}(X,Y)$. В силу примера 3.2, длина этой кривой не превосходит $d_{GH}(X,Y)$, а в силу предложения 3.4, эта длина не меньше $d_{GH}(X,Y)$. □

## 7.4 О работа Д. Эдвардса "The Structure of Superspace"

Как мы уже упоминали в пункте (13) примера 1.4, расстояние Громова–Хаусдорфа между компактными метрическими пространствами было определено Д. Эдвардсом в работе [3], опубликованной в 1975 году, тогда как первые работы М. Громова [4], [5], в которых появилось это расстояние, относятся к 1981 году. Опишем кратко содержание работы Эдвардса [3], см. также [22] и [23].

В этой статье автор определяет два расстояния между компактными метрическими пространствами. В определении первого из них он использует понятие $\varepsilon$-изометрии $f\colon X\to Y$, отличающееся от принятого в настоящее время и приведенного в определении 6.15: у Эдвардса требуется лишь $\operatorname{dis} f\le\varepsilon$, но не предполагается, что $f(X)$ является $\varepsilon$-сетью в $Y$. Мы обозначим это расстояние через $d_E$ и дадим его формальное определение.

**Определение 7.33.** *Первым расстоянием Эдвардса* между компактными метрическими пространствами $X$ и $Y$ назовем точную нижнюю грань $d_E(X,Y)$ тех $\varepsilon>0$, для каждого из которых существуют $\varepsilon$-изометрии в смысле Эдвардса $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$.

Затем Эдвардс показывает, что

(1) расстояние $d_E$ является метрикой на семействе $\mathcal M$ классов изометрии компактных метрических пространств;

(2) пространство $(\mathcal M,d_E)$ стягиваемо;

(3) конечные метрические пространства всюду плотны в $(\mathcal M,d_E)$;

(4) пространство $(\mathcal M,d_E)$ сепарабельно;

(5) компактные связные метрические полиэдры всюду плотны в замкнутом подпространстве $(\mathcal M,d_E)$, состоящем из связных метрических пространств;

(6) луч $[0,\infty)\subset\mathbb R$ изометрически вкладывается в $(\mathcal M,d_E)$, поэтому пространство $(\mathcal M,d_E)$ некомпактно;

(7) гильбертов куб топологически вкладывается в $(\mathcal M,d_E)$, поэтому пространство $(\mathcal M,d_E)$ бесконечномерно;

(8) в $(\mathcal M,d_E)$ нет ни одной вполне ограниченной окрестности, в частности, $(\mathcal M,d_E)$ не является локально компактным.

Эдвардс также определяет второе расстояние. Для этого он напоминает, что каждое компактное метрическое пространство изометрически вкладывается в пространство $\ell^\infty$ ограниченных последовательностей (см. теорему 2.3).

**Определение 7.34.** *Вторым расстоянием Эдвардса* между компактными метрическими пространствами $X$ и $Y$ назовем точную нижнюю грань $d_E^H(X,Y)$ расстояний Хаусдорфа между подмножествами $A,B\subset\ell^\infty$, изометричными соответственно $X$ и $Y$.

Затем Эдвардс показывает, что

(1) расстояние $d_E^H$ является метрикой на семействе $\mathcal M$ классов изометрии компактных метрических пространств;

(2) $d_E^H\ge\frac12 d_E$;

(3) пространство $(\mathcal M,d_E^H)$ стягиваемо;

(4) конечные метрические пространства всюду плотны в $(\mathcal M,d_E^H)$;

(5) пространство $(\mathcal M,d_E^H)$ сепарабельно;

(6) компактные связные метрические полиэдры всюду плотны в замкнутом подпространстве $(\mathcal M,d_E^H)$, состоящем из связных метрических пространств;

(7) луч $[0,\infty)\subset\mathbb R$ изометрически вкладывается в $(\mathcal M,d_E^H)$, поэтому $(\mathcal M,d_E^H)$ некомпактно;

(8) в $(\mathcal{M}, d_E^H)$ нет ни одной вполне ограниченной окрестности, в частности, $(\mathcal{M}, d_E^H)$ не является локально компактным;

(9) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ — полное.

Заметим, что, в силу предложения 6.10, на пространстве $\mathcal{M}$ классов изометрии метрических компактов **второе расстояние Эдвардса совпадает с расстоянием Громова–Хаусдорфа**. Кроме того, как было продемонстрировано выше, Эдвардс в работе [3] не только определил это расстояние, но и заложил основы теории, доказав целый ряд важных теорем, описывающих свойства этого расстояния.

**Упражнение 7.35.** Через $\widehat{d_{GH}}$ обозначим расстояние между метрическими компактами, определенное так же, как и в 7.33, только вместо $\varepsilon$-изометрий в смысле Эдвардса используя $\varepsilon$-изометрии в смысле определения 6.15. Выясните, как соотносятся между собой функции расстояния $d_{GH}$, $\widehat{d_{GH}}$ и $d_E$, рассматриваемые на пространстве $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств.