Лекция 6

Расстояние Громова–Хаусдорфа.

В данном разделе мы будем изучать расстояние Громова–Хаусдорфа, введенное в пункте (13) примера 1.4. Наше изложение существенно опирается на [7] и [21].

Напомним определение этого расстояния. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Замечание 6.1. Почему мы даем такое, на первый взгляд, более технически сложное определение расстояния по Громову-Хаусдорфу, когда можно было бы определить его как точную нижнюю грань чисел $d_H(X', Y')$ по всем реализациям (X', Y', Z) пары (X, Y)? Дело в том, что семейство таких реализаций уже не является множеством (вспомните парадокс Кантора про множество всех множеств). Вводя r и говоря про *существование реализации* мы, тем самым, избавляемся от необходимости рассматривать все реализации.

Обозначение 6.2. В дальнейшем нам будет иногда необходимо явно указывать пространство, в котором рассматривается та или иная метрика, а также соответствующая метрика Хаусдорфа. Таким образом, расстояние между точками $x, x' \in X$ мы иногда будем обозначать через $|xx'|_X$, а соответствующее расстояние Хаусдорфа между непустыми подмножествами A и B пространства X — через $d_H^X(A, B)$. Кроме того, если ρ — некоторая метрика на X, то расстояние Хаусдорфа, порожденное этой метрикой, обозначим через ρ_H.

Оказывается, при определении расстояния Громова–Хаусдорфа достаточно рассматривать лишь метрические пространства вида $(X \sqcup Y, \rho)$, где ограничения метрики ρ на X и Y совпадают с исходными метриками. Такие ρ будем называть *допустимыми метриками*, а множество всех допустимых метрик для данных X и Y обозначим через $\mathcal{D}(X, Y)$.

Теорема 6.3. *Для любых метрических пространств* X *и* Y *имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\bigl\{\rho_H(X, Y) : \rho \in \mathcal{D}(X, Y)\bigr\}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Правую часть уравнения (6.1) обозначим через $d'_{GH}(X, Y)$. Тогда $d_{GH}(X, Y) \le d'_{GH}(X, Y)$, так как при каждом $\rho \in \mathcal{D}(X, Y)$, $Z = (X \sqcup Y, \rho)$, тройка (X, Y, Z) является реализацией пары (X, Y). Докажем теперь обратное неравенство.

По определению расстояния Громова–Хаусдорфа, для любого $\varepsilon > 0$ существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что

$$d_H(X', Y') \le d_{GH}(X, Y) + \varepsilon.$$

Если X' и Y' не пересекаются, то ограничим метрику с Z на $X' \cup Y'$ и, после отождествления X' и Y' с X и Y соответственно, получим допустимую метрику ρ на $X \sqcup Y$, для которой $\rho_H(X, Y) \le d_{GH}(X, Y) + \varepsilon$. Если же $X' \cap Y' \ne \emptyset$, заменим Z на $Z \times \mathbb{R}$ с метрикой $\bigl|(z, t)(z', s)\bigr| = |zz'| + |ts|$, а X' и Y' — на множества $X'' = X' \times \{0\}$ и $Y'' = Y' \times \{\varepsilon\}$ соответственно, тогда $(X'', Y'', Z \times \mathbb{R})$ — реализация (X, Y) такая, что $d_H(X'', Y'') \le d_{GH}(X, Y) + 2\varepsilon$, откуда $d'_{GH}(X, Y) \le d_{GH}(X, Y)$. □

Замечание 6.4. Если X и Y — подмножества некоторого метрического пространства, то $d_{GH}(X, Y) \le d_H(X, Y)$. В частности, если $d_H(X, Y) = 0$, то и $d_{GH}(X, Y) = 0$, поэтому расстояние Громова–Хаусдорфа, как и расстояние Хаусдорфа, не является положительно определенным: например, расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$, в силу только что сказанного, равно нулю. Однако, если ограничиться компактными метрическими пространствами, то равенство нулю функции d_{GH} будет равносильно изометричности этих пространств (докажем ниже).

Замечание 6.5. В силу симметричности расстояния по Хаусдорфу, функция d_{GH} также симметрична.

Предложение 6.6. *Функция d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Выберем произвольные метрические пространства X, Y и Z и покажем, что $d_{GH}(X,Z) \le d_{GH}(X,Y) + d_{GH}(Y,Z)$.

Выберем произвольные допустимые метрики $\mu \in \mathcal{D}(X,Y)$ и $\nu \in \mathcal{D}(Y,Z)$, а также число $\delta > 0$. Определим на $X \sqcup Z$ функцию расстояния ρ, положив ее равной исходным метрикам на X и Z, а для $x \in X$ и $z \in Z$ определим ее так:

$$\rho(x,z) = \rho(z,x) = \inf_{y\in Y}\bigl\{\mu(x,y) + \nu(y,z)\bigr\} + \delta.$$

Непосредственно проверяется (сделайте это), что ρ — допустимая метрика на $X \sqcup Z$, а также что

$$\rho_H(X,Z) \le \mu_H(X,Y) + \nu_H(Y,Z) + \delta.$$

Откуда, в силу теоремы 6.3,

$$d_{GH}(X,Z) = \inf_{d\in\mathcal{D}(X,Z)} d_H(X,Z) \le \inf_{\rho} \rho_H(X,Z) \le$$
$$\le \inf_{\mu\in\mathcal{D}(X,Y)} \mu_H(X,Y) + \inf_{\nu\in\mathcal{D}(Y,Z)} \nu_H(Y,Z) + \delta = d_{GH}(X,Y) + d_{GH}(Y,Z) + \delta.$$

Осталось воспользоваться произвольностью δ. □

Таким образом, мы показали, что на каждом семействе классов изометрии метрических пространств функция d_{GH} является псевдометрикой. Если диаметры всех пространств семейства ограничены некоторым положительным числом, то d_{GH} является конечной псевдометрикой. Как уже отмечалось, d_{GH} метрикой не является. Однако, если ограничиться компактными метрическими пространствами, то d_{GH} уже будет метрикой.

Предложение 6.7. *Если X и Y — компактные метрические пространства такие, что $d_{GH}(X,Y) = 0$, то X изометрично Y.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность допустимых метрик $d^k \in \mathcal{D}(X,Y)$ такую, что $d^k_H(X,Y) < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как X и Y — метрические компакты, для каждого $x \in X \subset X \sqcup Y$ существует $y \in Y \subset X \sqcup Y$ такое, что $d_k(x,y) < 1/k$. Выберем любой такой y и положим $I_k(x) = y$. Тем самым, мы получили некоторое отображение $I_k\colon X \to Y$ (возможно, разрывное). Аналогично определим отображение $J_k\colon Y \to X$.

Из неравенства треугольника вытекает, что для любых $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ выполняется

$$\begin{gathered} d_k\bigl(I_k(x), I_k(x')\bigr) < \frac{2}{k} + d_k(x,x'), \\ d_k\bigl(J_k(y), J_k(y')\bigr) < \frac{2}{k} + d_k(y,y') \\ d_k\bigl(x, J_k\circ I_k(x)\bigr) < \frac{2}{k}, \quad d_k\bigl(y, I_k\circ J_k(y)\bigr) < \frac{2}{k}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Аналогично тому, что было проделано в доказательстве теоремы Арцела–Асколи, построим "предельные" отображения $I\colon X \to Y$ и $J\colon Y \to X$. А именно, выберем в X счетное всюду плотное подмножество $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$; с помощью канторова диагонального процесса, построим подпоследовательность $\{I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots\}$, для которой при каждом i последовательность $I_{k_p}(x_i)$ сходится к некоторому $I(x_i) \in X$; продолжим построенное отображение $I\colon S \to Y$ на все X по непрерывности. Аналогично поступим с последовательностью J_k. Переходя в неравенствах (6) к пределу, заключаем, что для любых $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ имеем

$$\bigl|I(x)I(x')\bigr| \le |xx'|, \quad \bigl|J(y)J(y')\bigr| \le |yy'|, \tag{6.3}$$

$$\bigl|x\,(J\circ I)(x)\bigr| = 0, \quad \bigl|y\,(I\circ J)(y)\bigr| = 0. \tag{6.4}$$

Соотношения (6.4) говорят о том, что I и J — взаимно обратные биекции, а соотношения (6.3) — то, что оба этих отображения не увеличивают расстояния и, значит, I и J расстояния сохраняют, т.е. являются изометриями. □

В следующем упражнении дается одно из возможных обобщений предложения 6.7.

Упражнение 6.8. Докажите, что если метрическое пространство X компактно, метрическое пространство Y полно, и $d_{GH}(X,Y)=0$, то X изометрично Y.

Замечание 6.9. Даже если оба пространства X и Y являются ограниченно компактными, предложение 6.7 может не иметь места. Чтобы описать соответствующий пример, обозначим через X и Y подмножества евклидовой плоскости, построенные следующим образом. Каждое из этих пространств получается из вещественной оси добавлением вертикальных отрезков, выходящих из точек $(m,0)$, $m\in\mathbb{Z}$, в направлении оси ординат и имеющих следующие длины: в случае X длины равны $|\sin m|$, а в случае Y — равны $\big|\sin(m+1/2)\big|$. В качестве расстояния на X и Y возьмем соответствующие внутренние метрики. Таким образом, X и Y можно рассматривать как (бесконечные) геометрические графы.

Легко видеть, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $m\in\mathbb{Z}$ выполняется $\Big|\big|\sin(m+n)\big|-\big|\sin(m+1/2)\big|\Big|<\varepsilon$. Отсюда вытекает, что пространство X сдвигом на векторы $(n,0)$ может быть сделано сколь угодно близким по Хаусдорфу к пространству Y, следовательно, $d_{GH}(X,Y)=0$.

С другой стороны, ясно, что множества $\big\{|\sin m|\big\}_{m\in\mathbb{Z}}$ и $\Big\{\big|\sin(m+1/2)\big|\Big\}_{m\in\mathbb{Z}}$ не пересекаются. Так как изометрия является гомеоморфизмом (в частности, она переводит вершины, степени которых отличны от 2, в вершины той же степени), пространства X и Y неизометричны.

Как вытекает из определения, расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет наименьшую "невязку" при всевозможных "совмещениях" метрических пространств. Возникает естественный вопрос: можно ли это совмещение, для некоторых классов метрических пространств, реализовать внутри одного и того же пространства? Следующий результат отвечает на поставленный вопрос для класса сепарабельных пространств.

Рассмотрим метрическое пространство ℓ^∞ всех ограниченных последовательностей, введенное в пункте (6) примера 1.4. Напомним, что по теореме 2.3, каждое сепарабельное метрические пространство изометрично вкладывается в ℓ^∞.

Предложение 6.10. *Пусть X и Y — сепарабельные метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X,Y)=\inf d_H^{\ell^\infty}\big(\varphi(X),\psi(Y)\big),$$

где точная нижняя грань берется по всем изометрическим вложениям $\varphi\colon X\to\ell^\infty$ и $\psi\colon Y\to\ell^\infty$.

Доказательство. Пространство $X\sqcup Y$ с допустимой метрикой $d\in\mathcal{D}(X,Y)$ также сепарабельно, поэтому, по теореме 2.3, оно изометрически вкладывается в ℓ^∞, откуда и вытекает требуемое. $\square$

Для конкретных вычислений расстояния Громова–Хаусдорфа оказываются полезными другие эквивалентные определения этого расстояния.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Как и в случае отображений, для каждого отношения σ между X и Y и каждых $x\in X$ и $y\in Y$ определены *образ* $\sigma(x)=\big\{y\in Y:(x,y)\in\sigma\big\}$ и *прообраз* $\sigma^{-1}(y)=\big\{x\in X:(x,y)\in\sigma\big\}$. Также для $A\subset X$ и $B\subset Y$ определены их *образ* и *прообраз* как объединения соответственно образов и прообразов их точек.

Пусть $\pi_X: X\times Y\to X$ и $\pi_Y: X\times Y\to Y$ обозначают канонические проекции $\pi_X(x,y)=x$ и $\pi_Y(x,y)=y$. Теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma\subset X\times Y$. Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Иными словами, для каждого $x\in X$ существует $y\in Y$, находящийся с x в отношении R и, обратно, для каждого $y\in Y$ существует $x\in X$, находящийся с y в отношении R. Таким образом, соответствие можно рассматривать как сюръективное многозначное отображение. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Для каждого отношения $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ определим его *искажение* $\operatorname{dis}\sigma$ по формуле

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big|:(x,y),\,(x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Замечание 6.11. Для любых $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{P}(X,Y)$ таких, что $\sigma_1\subset\sigma_2$, имеем $\operatorname{dis}\sigma_1\le\operatorname{dis}\sigma_2$ (проверьте).

Замечание 6.12. Для $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ выполняется $\operatorname{dis}R=0$, если и только если R — график изометрии (покажите это).

Теорема 6.13. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

Доказательство. Обозначим через $I(X,Y)$ правую часть равенства из формулировки теоремы. Докажем сначала, что $d_{GH}(X,Y) \ge I(X,Y)$.

Выберем произвольное $r > d_{GH}(X,Y)$, тогда, в силу теоремы 6.3, существует $d \in \mathcal{D}(X,Y)$, для которой $d_H(X,Y) < r$. Рассмотрим отношение

$$R = \bigl\{(x,y) : d(x,y) < r\bigr\}.$$

Так как $d_H(X,Y) < r$, то R — соответствие. Кроме того, из неравенство треугольника вытекает, что для (x,y), $(x',y') \in R$ выполняется

$$\bigl|d(y,y') - d(x,x')\bigr| \le d(x,y) + d(x',y') < 2r,$$

т.е. $\frac{1}{2}\operatorname{dis} R \le r$ и, значит, $I(X,Y) \le r$. В силу произвольности r, получаем требуемое неравенство.

Докажем теперь, что $d_{GH}(X,Y) \le I(X,Y)$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и положим $r = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. В силу замечания 6.12, достаточно рассмотреть случай, когда $r > 0$. Определим на $Z = X \sqcup Y$ функцию расстояния, продолжив ее с X и Y по формуле

$$d(x,y) = d(y,x) = \inf\bigl\{|xx'| + r/2 + |y'y| : (x',y') \in R\bigr\}.$$

Ясно, что d — симметричная функция, и так как $r > 0$, то d — положительно определенная. Неравенство треугольника проверяется непосредственно (сделайте это). Таким образом, $d \in \mathcal{D}(X,Y)$. Кроме того, $d_H(X,Y) \le r/2$, так как для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$ такое, что $(x,y) \in R$, но тогда $d(x,y) = r/2$ (аналогично для $y \in Y$). Осталось воспользоваться теоремой 6.3. □

Напомним, что для отношений σ между X и Y и θ между Y и Z определена *композиция* $\theta \circ \sigma$ следующим условием: $(x,z) \in \theta \circ \sigma$, если и только если существует $y \in Y$ такое, что $(x,y) \in \sigma$ и $(y,z) \in \theta$.

Упражнение 6.14. Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $R_1 \in \mathcal{R}(X,Y)$, $R_2 \in \mathcal{R}(Y,Z)$. Докажите, что

(1) $R_2 \circ R_1 \in \mathcal{R}(X,Z)$;

(2) $\operatorname{dis}(R_2 \circ R_1) \le \operatorname{dis} R_1 + \operatorname{dis} R_2$;

(3) выведите из предыдущего пункта неравенство треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа.

Приведем еще один подход к изучению расстояния Громова–Хаусдорфа. Предварительно заметим, что искажение, определенное для отношений, также переносится на отображения метрических пространств, если эти отображения рассматривать как графики.

Определение 6.15. Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *ε-изометрией*, если $\operatorname{dis} f \le \varepsilon$ и $f(X)$ является ε-сетью в Y.

Теорема 6.16. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, и $\varepsilon > 0$. Тогда*

(1) *если $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, то существует 2ε-изометрия $f\colon X \to Y$;*

(2) *если существует ε-изометрия $f\colon X \to Y$, то выполнена оценка $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.*

Доказательство. (1) Воспользуемся теоремой 6.13, в соответствии с которой существует отношение $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $\operatorname{dis} R < 2\varepsilon$. Теперь для каждого $x \in X$ выберем произвольное $y \in R(x)$ и положим $f(x) = y$. Тем самым, мы определили отображение $f\colon X \to Y$, и так как $f \subset R$ (здесь мы отождествляем f с его графиком), то, в силу замечания 6.11, $\operatorname{dis} f \le \operatorname{dis} R < 2\varepsilon$. Выберем теперь произвольный $y' \in Y$, произвольный $x \in R^{-1}(y')$ и пусть $y = f(x)$. Так как $\operatorname{diam} R(x) \le \operatorname{dis} R < 2\varepsilon$, то $|yy'| < 2\varepsilon$, поэтому $f(X)$ является 2ε-сетью.

(2) Рассмотрим отношение $R = \bigl\{(x,y) : |f(x)y| < \varepsilon\bigr\}$. Так как $f(X)$ является ε-сетью, то R — соответствие. Чтобы оценить искажение R, выберем произвольные $(x,y), (x',y') \in R$, тогда

$$\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| \le \Bigl||xx'| - \bigl|f(x)f(x')\bigr|\Bigr| + \Bigl|\bigl|f(x)f(x')\bigr| - |yy'|\Bigr| \le \varepsilon + \bigl|f(x)y\bigr| + \bigl|y'f(x')\bigr| < 3\varepsilon,$$

поэтому $\operatorname{dis} R \le 3\varepsilon < 4\varepsilon$ и $d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\operatorname{dis} R < 2\varepsilon$. □

6.1 Некоторые примеры

Следующее утверждение мгновенно вытекает из определения расстояния Громова–Хаусдорфа.

Пример 6.17. Пусть Y — произвольная ε-сеть метрического пространства X. Тогда $d_{GH}(X,Y) \le d_H(X,Y) \le \varepsilon$. Таким образом, каждое компактное метрическое пространство приближается (по Громову-Хаусдорфу) с любой точностью конечными метрическими пространствами.

Пример 6.18. Обозначим через Δ_1 одноточечное метрическое пространство. Тогда для любого метрического пространства X имеем

$$d_{GH}(\Delta_1, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X.$$

Действительно, $\mathcal{R}(\Delta_1, X)$ состоит ровно из одного соответствия R, причем $\operatorname{dis} R = \operatorname{diam} X$. Осталось воспользоваться теоремой 6.13.

Пример 6.19. Пусть X и Y — некоторые метрическое пространства, причем диаметр одного из них конечен. Тогда

$$d_{GH}(X,Y) \ge \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|.$$

Действительно, достаточно воспользоваться неравенством треугольника (предложение 6.6) для тройки X, Y, Δ_1.

Пример 6.20. Пусть X и Y — некоторые метрическое пространства, тогда

$$d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$

в частности, если X и Y — ограниченные метрические пространства, то $d_{GH}(X,Y) < \infty$.

Действительно, если диаметр одного из пространств X, Y бесконечен, то неравенство имеет место. Если оба пространства одноточечные — то также все очевидно. Пусть теперь $0 < d := \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\} < \infty$. Определим на $X \sqcup Y$ функцию расстояния ρ, продолжив исходные расстояния на X и Y по формуле $\rho(x,y) = \rho(y,x) = d/2$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Ясно, что мы получили симметричную положительно определенную функцию на парах точек. Легко проверяется, что ρ удовлетворяет неравенству треугольника (сделайте это). Таким образом, $\rho \in \mathcal{D}(X,Y)$ и $\rho_H(X,Y) = d/2$, откуда $d_{GH}(X,Y) \le d/2$.

6.2 GH-сходимость и GH-пределы

Говорят, что последовательность X_k метрических пространств *сходится по Громову–Хаусдорфу* или, более коротко, GH-*сходится* к метрическому пространству X, если $d_{GH}(X_k, X) \to 0$ при $k \to \infty$. В этом случае мы пишем $X_k \xrightarrow{\mathrm{GH}} X$; пространство X мы называем *пределом по Громову–Хаусдорфу* или GH-*пределом* последовательности X_k и обозначаем через $\operatorname{GH-lim}_{k\to\infty} X_k$.

Приведем ряд простых наблюдений.

(1) Если $X = \operatorname{GH-lim}_{k\to\infty} X_k$, $Y = \operatorname{GH-lim}_{k\to\infty} X_k$, и одно из пространств X, Y компактное, а другое — полное, то X и Y изометричны. Действительно, в силу неравенства треугольника, имеем $d_{GH}(X,Y) = 0$. Осталось воспользоваться упражнением 6.8.

(2) Сходимость по Хаусдорфу влечет GH-сходимость.

(3) Каждый метрический компакт является GH-пределом конечных метрических пространств (своих конечных $1/k$-сетей).

Теорема 6.21. *Пусть $X_k \xrightarrow{\mathrm{GH}} Y$, тогда если, начиная с некоторого k, все X_k обладают одним из перечисленных свойств, то это свойство наследуется пространством Y:*

(1) *диаметр равен бесконечности;*

(2) *диаметр ограничен некоторым числом D (на самом деле,* $\operatorname{diam} X_k \to \operatorname{diam} Y$);

(3) *сепарабельность;*

(4) *полная ограниченность*;

(5) *если дополнительно предполагается, что Y — полное, то ограниченная компактность*;

(6) *если дополнительно предполагается, что Y — полное, то свойство метрики быть внутренней*;

(7) *если дополнительно предполагается, что Y — полное, то свойство метрики быть одновременно ограниченно компактной и строго внутренней.*

(8) *если в предыдущем пункте отказаться от ограниченной компактности, то Y уже не обязано иметь строго внутреннюю метрику.*

Доказательство. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без ограничения общности будем считать, что $d_{GH}(X_k, Y) < 1/k$. По теореме 6.13, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $R_k \in \mathcal{R}(X_k, Y)$ такое, что $\operatorname{dis} R_k < 2/k$. Кроме того, по теореме 6.16, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют $2/k$-изометрии $f_k\colon X_k \to Y$ и $g_k\colon Y \to X_k$.

(1) Если $\operatorname{diam} Y < \infty$, то, в силу примера 6.19, начиная с некоторого k, имеем $d_{GH}(X_k, Y) = \infty$, противоречие.

(2) Заметим сначала, что $\operatorname{diam} Y < \infty$, так как, в противном случае, начиная с некоторого k, будет выполнено $d_{GH}(X_k, Y) = \infty$. Далее, так как Y — компакт, существуют $y, y' \in Y$ такие, что $\operatorname{diam} Y - 1/k < |yy'|$. Но тогда $\operatorname{diam} Y - 3/k < \bigl|g_k(y)g_k(y')\bigr| \le \operatorname{diam} X_k$ и, аналогично, $\operatorname{diam} X_k \le \operatorname{diam} Y + 3/k$. Устремляя k к бесконечности, получаем требуемое.

(3) Выберем в X_k счетное всюду плотное множество S_k, тогда выполнено неравенство $d_{GH}(S_k, X_k) \le d_H(S_k, X_k) = 0$, так что $d_{GH}(S_k, X_k) = 0$ и, по неравенству треугольника, $d_{GH}(S_k, Y) < 1/k$. По теореме 6.16, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $2/k$-изометрия $f'_k\colon S_k \to Y$. Положим $Y_k = f'_k(S_k)$, тогда Y_k является не более чем счетной $2/k$-сетью в Y. Следовательно, $S = \cup_{k=1}^{\infty} Y_k$ — счетное всюду плотное подмножество Y.

(4) Выберем в X_k конечную $1/k$-сеть S_k и положим $Y_k = f_k(X_k)$, $Z_k = f_k(S_k)$. Мы покажем, что конечное множество Z_k является $5/k$-сетью в Y. Действительно, так как Y_k является $2/k$-сетью в Y, то для произвольного $y \in Y$ существует $x_k \in X_k$ такой, что $\bigl|yf_k(x_k)\bigr| < 2/k$. Так как S_k является $1/k$ сетью в X_k, существует $s_k \in S_k$, для которого $|x_k s_k| < 1/k$. Так как $\operatorname{dis} f_k \le 2/k$, то $\bigl|f_k(x_k)f_k(s_k)\bigr| < 3/k$, откуда

$$\bigl|yf_k(s_k)\bigr| \le \bigl|yf_k(x_k)\bigr| + \bigl|f_k(x_k)f_k(s_k)\bigr| < 2/k + 3/k = 5/k,$$

что и требовалось.

(5) Достаточно показать, что каждый замкнутый шар $B_r(y) \subset Y$, $r > 0$, компактен. Положим $A_k = R_k^{-1}\bigl(B_r(y)\bigr)$, и пусть $R_k^A = R_k \cap \bigl(A_k \times B_r(y)\bigr)$. Тогда $R_k^A \in \mathcal{R}\bigl(A_k, B_r(y)\bigr)$ и $\operatorname{dis} R_k^A \le \operatorname{dis} R < 2/k$, поэтому $d_{GH}\bigl(A_k, B_r(y)\bigr) < 1/k$.

Выберем произвольные точки $x_k \in R_k^{-1}(y)$. Если $k_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $2/k_0 < r$, то для каждого $k \ge k_0$ множества $B_{r-2/k}(x_k)$ непусты, и, кроме того, $B_{r-2/k}(x_k) \subset A_k \subset B_{r+2/k}(x_k)$. Действительно, если $x' \in B_{r-2/k}(x_k)$ и $(x', y') \in R_k$, то $|y'y| < |x'x_k| + 2/k \le r$, поэтому $y' \in B_r(y)$ и, значит, $x' \in A_k$. Если же $x' \in A_k$, то $(x', y') \in R_k$ для некоторого $y' \in B_r(y)$, так что $|y'y| \le r$ и, значит, $|x_k x'| < |y'y| + 2/k \le r + 2/k$, так что $x' \in B_{r+2/k}(x_k)$.

Отсюда вытекает, что

$$d_{GH}\bigl(A_k, B_{r+2/k}(x_k)\bigr) \le d_H\bigl(A_k, B_{r+2/k}(x_k)\bigr) \le d_H\bigl(B_{r-2/k}(x_k), B_{r+2/k}(x_k)\bigr) \le 4/k,$$

поэтому $d_{GH}\bigl(B_{r+2/k}(x_k), B_r(y)\bigr) < 5/k$ в силу неравенства треугольника. Следовательно, $B_{r+2/k}(x_k) \xrightarrow{\text{GH}} B_r(y)$ при $k \to \infty$. Так как пространство Y полное, то замкнутое подпространство $B_r(y) \subset Y$ также полное. В силу пункта (4), пространство $B_r(y)$ вполне ограничено. Осталось применить (9) из определений и фактов 2.1.

(6) В силу теоремы 4.30, достаточно показать, что для любых $y, y' \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина между y и y'. Выберем произвольные $x_k \in R_k^{-1}(y)$ и $x'_k \in R_k^{-1}(y')$, для них найдем $1/k$-середину $s_k \in X_k$, и, наконец, выберем произвольное $z_k \in R(s_k)$. По определению $1/k$-середины, расстояния от s_k до x_k, x'_k отличаются от $|x_k x'_k|/2$ меньше, чем на $1/k$. Так как $\operatorname{dis} R < 2/k$, то $|x_k x'_k|$ отличается от $|yy'|$ меньше, чем на $2/k$; кроме того, $|z_k y|$, $|z_k y'|$, $|yy'|$ отличаются соответственно от $|s_k x_k|$, $|s_k x'_k|$, $|x_k x'_k|$ меньше, чем на $2/k$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\bigl||z_k y| - |yy'|/2\bigr| &= \bigl||z_k y| - |s_k x_k| + |s_k x_k| - |x_k x'_k|/2 + |x_k x'_k|/2 - |yy'|/2\bigr| \le \\ &\le \bigl||z_k y| - |s_k x_k|\bigr| + \bigl||s_k x_k| - |x_k x'_k|/2\bigr| + \bigl||x_k x'_k|/2 - |yy'|/2\bigr| < 2/k + 1/k + 1/k = 4/k,\end{aligned}$$

и, аналогично, $\bigl||z_k y'| - |yy'|/2\bigr| < 4/k$, что и требовалось.

(7) По пункту (5), пространство Y является ограниченно компактным; по пункту (6), метрика пространства Y — внутренняя. Осталось применить следствие 4.23.

(8) В качестве примера рассмотрим метрический граф Y, полученный склеиванием концов отрезков $[0, 1 + 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$ (все 0 склеиваются в одну точку, а все концы $1 + 1/n$ — в другую). В качестве X_k возьмем пространство, полученное из Y заменой отрезка $[0, 1 + 1/k]$ на отрезок $[0, 1]$. $\square$