Лекция 5

Кратчайшие в пространстве $\mathcal{H}(X)$.

Вернемся к изучению геометрии пространства $\mathcal{H}(X)$ замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X. **Всюду ниже будем предполагать, что метрика пространства X — конечная**.

Говоря про расстояние Хаусдорфа, мы определили открытую окрестность $U_r(A)$ для произвольного непустого подмножества A метрического пространства X. Теперь же нам также понадобятся замкнутые окрестности подмножеств. Напомним, что для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ мы положили $|xA| = \inf\{|xa| : a \in A\}$.

Определение 5.1. Для непустого $A \subset X$ и неотрицательного r (возможно, равного ∞) *замкнутой r-окрестностью множества A* или *замкнутым шаром радиуса r с центром в A* назовем множество $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \le r\}$.

Хорошо известно, что функция $f_A(x) = |xA|$ непрерывна и, поэтому, $B_r(A)$ является замкнутым множеством для любого непустого $A \subset X$. Ясно, что для ограниченного A множество $B_r(A)$ также ограничено. Тем самым, доказано следующее предложение.

Предложение 5.2. *Для любого метрического пространства X, каждого $A \in \mathcal{H}(X)$ и любого неотрицательного r имеем $B_r(A) \in \mathcal{H}(X)$.*

Также легко доказывается следующий результат.

Предложение 5.3. *Для любого метрического пространства X и любых непустых $A, B \subset X$ имеем*

$$d_H(A,B) = \inf\{r : A \subset B_r(B) \text{ и } B \subset B_r(A)\}.$$

Более того, если $r = d_H(A,B)$, то $A \subset B_r(B)$ и $B \subset B_r(A)$. Таким образом, $d_H(A,B)$ равно наименьшему r, для которого $A \subset B_r(B)$ и $B \subset B_r(A)$.

Доказательство. Первая часть предложения стандартна и ее доказательство оставляется в качестве упражнения. Для доказательства второй части, предположим противное, т.е. что без ограничения общности, существует $b \in B$, не лежащее в $B_r(A)$. Отметим, что в этом случае $r < \infty$. Так как $B_r(A)$ замкнуто, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(b) \cap B_r(A) = \emptyset$, поэтому $|bA| \ge r + \varepsilon$, противоречие. □

Перейдем к изучению множеств, лежащих между произвольными A и B из $\mathcal{H}(X)$. Для удобства изложения, введем следующее понятие.

Определение 5.4. Пусть W — произвольное метрическое пространство, $a, b \in W$, $|ab| = r$, $s \in [0, r]$. Будем говорить, что $c \in W$ *находится в s-положении между a и b*, если $|ac| = s$ и $|cb| = r - s$.

Следующий результат мгновенно получается из предложения 5.3.

Предложение 5.5. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B)$, $s \in [0, r]$. Тогда если множество $C \in \mathcal{H}(X)$ находится в s-положении между A и B, то $C \subset B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$.*

Обозначение 5.6. Множество $B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$ из предложения 5.5 будем обозначать через $C_s(A,B)$ или, если понятно, о каких A и B идет речь, то просто через C_s.

Замечание 5.7. Множество C_s лежит в $\mathcal{H}(X)$, если и только если $C_s \ne \emptyset$.

Приведем пример описания множеств, находящихся в s-положении между некоторыми A и B из $\mathcal{H}(X)$.

Предложение 5.8. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $r = |ab|$, $s \in [0, r]$. Тогда*

(1) *C_s представляет собой множество всех точек из X, находящихся между a и b в s-положении;*

(2) *C_s находится в s-положении между A и B, если и только если $C_s \neq \emptyset$;*

(3) *множество $C \in X$ находится в s-положении между A и B, если и только C — непустое замкнутое подмножество C_s.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Для доказательства второго утверждения, кроме замечания 5.7, нужно еще показать, что C_s находится в s-положении. Мы проверим лишь $d_H(A, C_s) \le s$, так как неравенство $d_H(B, C_s) \le r - s$ доказывается абсолютно так же. В силу того, что для каждой $c \in C_s$ выполняется $|Ac| = s$, имеем $C_s \subset B_s(A)$. Так как A — одноточечно, имеем также $A \subset B_s(c) \subset B_s(C_s)$, что и требовалось.

Наконец, опишем все $C \in \mathcal{H}(X)$, находящиеся в s-положении между A и B. По предложению 5.5, каждое такое C является непустым замкнутым подмножеством C_s. Обратно, если C — непустое замкнутое подмножество C_s, то $C \in \mathcal{H}(X)$ и для произвольного $c \in C$ имеем $A \subset B_s(c) \subset B_s(C)$ и, аналогично, $B \subset B_{r-s}(C)$, поэтому C находится в s-положении между A и B. □

Замечание 5.9. В предложении 5.8 мы показали, что для одноточечных A и B все множества C, находящиеся в s-положении между A и B, — это, в точности, все непустые замкнутые подмножества C_s. Для неодноточечных множеств это, вообще говоря, неверно. В качестве примера рассмотрим на $X = \mathbb{R}$ отрезки $A = [0, 2]$ и $B = [3, 5]$, тогда $d_H(A, B) = 3$. Возьмем $s = 1.5$, тогда $C_s = [1.5, 3.5]$. Пусть $C = \{2.5\} \in C_s$. Тогда $d_H(A, C) = d_H(B, C) = 2.5$, так что $d_H(A, C) + d_H(B, C) > d_H(A, B)$.

Замечание 5.10. Если в предыдущем примере взять произвольное замкнутое подмножество C отрезка $C_s = [1.5, 3.5]$, содержащее границу $\partial C_s = \{1.5, 3.5\}$ этого отрезка, то получим $d_H(A, C) = d_H(B, C) = 1.5 = s$. Это демонстрирует, что в s-положении между данными A и B может находиться более одного (даже бесконечно много) множеств $C \in \mathcal{H}(X)$.

Следующая теорема доказана в [10] для случая $X = \mathbb{R}^n$.

Теорема 5.11. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Тогда для любых A, $B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A, B)$, $s \in [0, r]$, множество $C_s = C_s(A, B)$ принадлежит $\mathcal{H}(X)$ и находится в s-положении между A и B.*

Упражнение 5.12. Приведите пример метрического пространства X и подмножеств $A, B \in \mathcal{H}(X)$, для которых некоторое множество C_s не лежит в $\mathcal{H}(X)$. Приведите пример, в котором $C_s \in \mathcal{H}(X)$, но C_s не находится в s-положении между A и B.

Доказательство теоремы 5.11. По теореме 3.19, пространство X — ограниченно компактное. В частности, множество $\mathcal{H}(X)$ состоит из всех непустых компактных подмножеств X. По следствию 4.23, метрика пространства X — строго внутренняя.

Покажем, что множество C_s непусто. По определению хаусдорфова расстояния, для каждой точки $a \in A$ имеем $|aB| \le r$, и так как B — компакт, существует $b \in B$, для которого $|ab| = |aB|$. Так как метрика строго внутренняя, существует кривая $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, для которой $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ и $|ab| = |\gamma| \le r$. Так как функция $f(t) = \bigl|a\gamma(t)\bigr|$ непрерывна, $f(0) = 0$ и $f(1) \le r$, существует t_0 такое, что $\bigl|a\gamma(t_0)\bigr| \le s$ и $\bigl|b\gamma(t_0)\bigr| \le r - s$. Следовательно, $\gamma(t_0) \in C_s$ и, значит, $C_s \neq \emptyset$. В силу замечания 5.7, $C_s \in \mathcal{H}(X)$.

Покажем теперь, что $d_H(A, C_s) = s$ и $d_H(B, C_s) = r - s$. Для этого достаточно проверить, что $d_H(A, C_s) \le s$ и $d_H(B, C_s) \le r - s$, так как $d_H(A, B) = r$ и d_H удовлетворят неравенству треугольника. Докажем, что $d_H(A, C_s) \le s$ (второе неравенство получается ровно так же).

Так как $C_s \subset B_s(A)$, достаточно проверить, что $A \subset B_s(C_s)$. Как было показано выше, для каждой точки $a \in A$ существует выходящая из a кратчайшая кривая $\gamma(t)$ такая, что для некоторой ее точки $\gamma(t_0)$ выполняется $\bigl|a\gamma(t_0)\bigr| \le s$ и $\gamma(t_0) \in C_s$. Следовательно, $A \subset B_s(C_s)$, что и требовалось. □

Следствие 5.13. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой (=ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой). Тогда $\mathcal{H}(X)$ — также ограниченно компактное, а метрика Хаусдорфа — строго внутренняя.*

Доказательство. Это вытекает из теорем 2.13 и 4.26. $\square$

На самом деле, то, что метрика пространства $\mathcal{H}(X)$ из следствия 5.13 является строго внутренней, можно доказать явно, предъявив для каждой пары точек пространства $\mathcal{H}(X)$ соединяющую их кратчайшую кривую.

Следствие 5.14. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой, $A, B \in \mathcal{H}(X)$, и $r = d_H(A,B)$. Тогда $\gamma(s) = C_s(A,B)$, $s \in [a,b]$, является кратчайшей кривой, соединяющей A и B, причем длина кривой γ равна $d_H(A,B)$, а параметр s — натуральный.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $0 \le t < s \le r$, тогда $d_H(A,C_t) = t$, $d_H(C_t,B) = r-t$, $d_H(A,C_s) = s$, $d_H(C_s,B) = r-s$. Мы покажем, что $d_H(C_t,C_s) = s-t$, чем и завершим доказательство. Так как, в силу следствия 5.13, метрика пространства $\mathcal{H}(X)$ — строго внутренняя, точка C_t соединяется с A и B кратчайшими кривыми δ_A и δ_B соответственно, которые вместе дают кратчайшую кривую δ^t, соединяющую A и B. Выберем на δ^t натуральный параметр $u \in [0,r]$, $\delta^t(0) = A$, $\delta^t(r) = B$, тогда $\delta^t(s)$ находится в s-положении между A и B. По предложению 5.5, имеем $\delta^t(s) \subset C_s$. Так как $d_H\big(C_t, \delta^t(s)\big) = s-t$, то $C_t \subset B_{s-t}\big(\delta^t(s)\big)$ и, тем более, $C_t \subset B_{s-t}(C_s)$. Аналогично показываем, что $C_s \subset B_{s-t}(C_t)$, но тогда $d_H(C_t,C_s) \le s-t$. Однако, по неравенству треугольника, имеем

$$d_H(C_t,C_s) \ge d_H(A,B) - d_H(A,C_t) - d_H(C_s,B) = r - t - (r-s) = s-t,$$

откуда $d_H(C_t,C_s) = s-t$, что и требовалось. $\square$

Теорема 5.15. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B) > 0$, $s \in (0,r)$, $0 < \varepsilon \le \min\{s, r-s\}/2$. Предположим, что для некоторой точки $p \in C_s$ выполняется $U_\varepsilon(p) \subset C_s$. Тогда $C_s \setminus U_\varepsilon(p)$ находится в s-положении между A и B.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.11, заключаем, что X — ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой.

Положим $D = C_s \setminus U_\varepsilon(p)$. Заметим, что D — замкнутое ограниченное множество. Покажем, что $D \ne \emptyset$. Так как $A \ne B$, без ограничения общности можно считать, что $B \not\subset B_s(A)$, поэтому существует $b \in B$, $b \notin C_s$, так что $|bC_s| > 0$ и, значит, $|pb| > \varepsilon$. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, — кратчайшая кривая, для которой $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = b$. В силу сказанного выше, имеем $|\gamma| > \varepsilon$, поэтому существует и единственно t_0, для которого $\big|p\gamma(t_0)\big| = \varepsilon$. Ясно, что $\gamma(t_0)$ является точкой прикосновение $U_\varepsilon(p)$ и, поэтому, в силу замкнутости C_s, имеем $\gamma(t_0) \in C_s$. С другой стороны, $\gamma(t_0) \notin U_\varepsilon(p)$, так что $\gamma(t_0) \in D$. Тем самым, мы доказали, что $D \in \mathcal{H}(X)$.

Докажем теперь, что D находится в s-положении между A и B. Как и в доказательстве теоремы 5.11, ограничимся проверкой того, что $A \subset B_s(D)$. Выберем произвольное $a \in A$ и докажем, что $a \in B_s(D)$. По теореме 5.11, имеем $A \subset B_s(C_s)$, поэтому $|aC_s| \le s$ и, в силу компактности C_s, существует $c \in C_s$, для которого $|ac| \le s$. Если $c \in D$, то $a \in B_s(D)$ и все доказано.

Пусть теперь $c \in U_\varepsilon(p)$. Если $a \in U_\varepsilon(p)$, то для построенной выше точки $\gamma(t_0) \in D$ имеем $\big|a\gamma(t_0)\big| \le |ap| + \big|p\gamma(t_0)\big| < 2\varepsilon \le s$, поэтому $a \in B_s(D)$. Если же $a \notin U_\varepsilon(p)$, то обозначим через γ кратчайшую кривую, соединяющую a и c. Тогда существует $\gamma(t_0)$, для которой $\big|p\gamma(t_0)\big| = \varepsilon$, так что $\gamma(t_0) \in D$ и $\big|a\gamma(t_0)\big| < |ac| \le s$, откуда снова $a \in B_s(D)$. $\square$

Следствие 5.16. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B) > 0$, $s \in (0,r)$. Предположим, что внутренность множества C_s непуста. Тогда имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(X)$, которые находятся в s-положении между A и B.*

Доказательство. По теореме 5.15, существует $p \in C_s$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $U_\varepsilon(p) \subset C_s$ и $D_\varepsilon = C_s \setminus U_\varepsilon(p)$ находится в s-положении между A и B. Как было показано в доказательстве теоремы 5.15, для выбранных p и ε существует точка $x \in X$ такая, что $x \notin U_\varepsilon(p)$ (в доказательстве такой точкой оказалась $b \in B$). Снова выбираем кратчайшую кривую $\gamma(t)$, соединяющую p и x, и замечаем, что при каждом $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \le \varepsilon$ существует t_0, для которого $\gamma(t_0) \in U_{\varepsilon_2}(p) \setminus U_{\varepsilon_1}(p)$, т.е. все $U_\varepsilon(p)$, а вместе с ними и все D_ε, различны. $\square$

Пример 5.17. Даже если множества A и B конечные, все равно между ними в s-положении может оказаться бесконечное число множеств. Простейшим примером является двухточечное подмножество $A = \{0,3\}$ вещественной прямой и одноточечное $B = \{1\}$. Тогда $d_H(A,B) = 2$ и при $s = 1$ имеем $C_s = [0,1] \cup \{2\}$, так что любое замкнутое $C \subset C_s$, содержащее $\{0,1,2\}$, находится в s-положении между A и B. Таких C, очевидно, бесконечно много. В приводимом ниже следствии выясняется еще одна причина того, почему в s-положении может оказаться бесконечно много множеств.

Следствие 5.18. *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B) > 0$. Предположим, что существуют $a \in A$ и $b \in B$, для которых $|ab| < r$. Тогда при каждом $0 < s < r$ имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(X)$, которые находятся в s-положении между A и B.*

Доказательство. Положим $U = U_s(a) \cap U_{r-s}(b)$ и заметим, что $U \subset C_s$. Так как метрика строго внутренняя, множество U непусто (проверьте), поэтому C_s имеет непустую внутренность и применимо следствие 5.16. □

В приводимых ниже двух следствиях, X обозначает полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Оба результата непосредственно вытекают из следствия 5.18.

Следствие 5.19. *Предположим, что для $A \ne B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B)$ и некоторого $s \in (0,r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(X)$, находящихся в s-положении между A и B. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \ge r$.*

Следствие 5.20. *Предположим, что для $A \ne B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B)$ и некоторого $s \in (0,r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(X)$, находящихся в s-положении между A и B. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|aB| = |Ab| = r$.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Пару $\{A,B\}$ различных множеств из $\mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B)$, назовем *конфигурацией*, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \ge r$ (равносильное условие: если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|aB| = |Ab| = r$). Конфигурация $\{A,B\}$ называется *конечной*, если A и B имеют конечное число элементов, иначе конфигурация $\{A,B\}$ называется *бесконечной*.

Для дальнейшего также будет удобно ввести следующее обозначение. Пусть A и B — произвольная пара множеств из $\mathcal{H}(X)$. Для каждого вещественного s обозначим через $N_s(A,B)$ количество различных множеств из $\mathcal{H}(X)$, находящихся между A и B в s-положении. Отметим, что если $r = d_H(A,B)$, то при $s \notin [0,r]$ имеем $N_s(A,B) = 0$. Кроме того, $N_0(A,B) = N_r(A,B) = 1$. При оставшихся $s \in (0,r)$ величина $N_s(A,B)$ может быть как конечной, так и равной ∞. Ниже мы будем изучать свойства функции $N_s(A,B)$.

Замечание 5.21. Отметим следующее очевидное свойство. Пусть A и B — произвольные непустые конечные подмножества метрического пространства X, $r = d_H(A,B) > 0$, $s \in [0,r]$, тогда $C_s(A,B) = \cup_{a\in A,\, b\in B}\big(B_s(a) \cap B_{r-s}(b)\big)$. Отсюда вытекает, что если для любых $x, y \in X$ и любого $s \in \big[0, |xy|\big]$ пересечение $B_s(x) \cap B_{|xy|-s}(y)$ состоит из конечного числа точек, то для каждой конечной конфигурации $\{A,B\}$ имеем $N_s(A,B) < \infty$. В частности, это имеет место для евклидова пространства X. Более того, в случае евклидова пространства и одноточечных $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ имеем $N_s(A,B) = 1$ при всех $s \in \big[0, |ab|\big]$.

Пример 5.22. Рассмотрим на евклидовой плоскости правильный $2k$-угольник со стороной 1, и пусть A — множество вершин этого многоугольника, взятых через одну, а B — множество оставшиеся вершин. Тогда $d_H(A,B) = 1$, и при каждом $s \in (0,1)$ множество C_s состоит из $2k$ точек $c_1, \ldots, c_{2k}$ (мы нумеруем эти точки последовательно при одном из двух обходов многоугольника). Легко видеть, что имеется более одного множества C, находящегося между A и B в s-положении, например, $C = C_s \setminus \{c_i\}$, или $C = C_s \setminus \{c_1, c_3, \ldots, c_{2k-1}\}$.

Упражнение 5.23. Докажите, что при $s \in (0,1)$ и $k = 3$ в примере 5.22 выполняется $N_s(A,B) = 18$. Вычислите $N_s(A,B)$ при остальных k.

Отметим, что конечность числа множеств в s-положении может возникать не только для конечных конфигураций, но и для бесконечных.

Пример 5.24 (Бесконечная конфигурация с единственным множеством в каждом фиксированном положении)**.** Пусть A и B — две не совпадающие концентрические окружности радиусов $r_A > r_B$ соответственно на евклидовой плоскости. Тогда $r = d_H(A,B) = r_A - r_B$, и при каждом $s \in [0,r]$ множество C_s представляет собой окружность, концентрическую с A и B и имеющую радиус $r_A - s$. Пусть C — произвольное замкнутое подмножество C_s, не совпадающее с C_s. Тогда в C_s существует точка x, не принадлежащая C и, в силу замкнутости C, не являющаяся точкой прикосновения для C, т.е. при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется $|xC| > \varepsilon$. Но тогда A не содержится в $B_{s+\delta}(C)$ при достаточно малых δ, так что $d_H(A,C) > s$. Таким образом, в приведенном примере при каждом s имеем $N_s(A,B) = 1$.

Упражнение 5.25. Выясните, когда для двух отрезков A и B на евклидовой плоскости, $r = d_H(A,B)$, при каждом $s \in [0,r]$ выполняется $N_s(A,B) = 1$. Аналогичный вопрос про $N_s(A,B) < \infty$.

Приведем пример бесконечной конфигурации $\{A,B\}$, для которой $N_s(A,B)=\infty$. Таким образом, условие того, что пара образует конфигурацию, не является достаточным для конечности числа промежуточных множеств в одном и том же положении.

Пример 5.26. Пусть A — подмножество евклидовой плоскости, состоящее из окружности радиуса 2 и ее центра, а B — окружность с тем же центром, но радиуса 1. Тогда $d_H(A,B)=1$, и при каждом $s\in(0,1)$ множество C_s состоит из двух окружностей C' и C''. Пусть C' — меньшая из этих окружностей, и x — ее произвольная точка. Тогда каждое множество $C=C''\cup\{x\}$ содержится в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и находится в s-положении между A и B.

Следующий результат, впрочем, в несколько другой формулировке и с достаточно странным доказательством, можно найти в [14].

Теорема 5.27. *Пусть X — ограниченно компактное пространство со строго внутренней метрикой. Предположим дополнительно, что любые две точки из X соединяются единственной, с точностью до параметризации, кратчайшей кривой, и что кратчайшие кривые в X, содержащие общий невырожденный фрагмент, лежат в одной и той же кратчайшей кривой. Пусть $\{A,B\}$ — произвольная конфигурация и $r=d_H(A,B)>0$. Тогда функция $f(s)=N_s(A,B)$ постоянна на $(0,r)$.*

Доказательство. Нам нужны следующие вспомогательные результаты.

Лемма 5.28. *Пусть W — произвольное метрическое пространство, $K\subset W$ — некоторый непустой компакт и $r\ge 0$. Тогда $B_r(K)=\cup_{x\in K}B_r(x)$.*

Доказательство. Ясно, что $\cup_{x\in K}B_r(x)\subset B_r(K)$. Докажем обратное включение.

Пусть w — произвольная точка из $B_r(K)$, тогда, по определению, $|wK|\le r$. Так как K — компакт, то существует $x\in K$ такой, что $|wK|=|wx|$, откуда $w\in B_r(x)$, что и завершает доказательство. □

Следствие 5.29. *Пусть W — произвольное метрическое пространство, K и L — произвольные непустые компактные подмножества W, и $r=d_H(K,L)$. Тогда для любого $s\in[0,r]$ выполняется*

$$C_s(K,L)=\bigcup_{x\in K,\,y\in L}\big(B_s(x)\cap B_{r-s}(y)\big).$$

Лемма 5.30. *Пусть W — произвольное пространство со строго внутренней метрикой. Тогда каждая пара точек x и y из W соединяется единственной, с точностью до замены параметра, кратчайшей кривой, если и только если для любых $x,y\in W$, $r=|xy|$, и любого $s\in[0,r]$ множество $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$ состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. Предположим сначала, что каждая пара точек из W соединяется единственной кратчайшей кривой. Соединим x и y натурально параметризованной кратчайшей кривой $\gamma(t)$, $t\in[0,r]$, $\gamma(0)=x$, $\gamma(r)=y$, тогда для $p=\gamma(s)$ имеем $p\in B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$, так что множество $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$ непусто. Более того, все отличные от p точки кривой γ не лежат в $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$. Предположим, что множество $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$ содержит некоторую точку $q\ne p$. Обозначим через γ_1 и γ_2 кратчайшие кривые, соединяющие q с x и y соответственно. Сделаем подходящие замены параметров на кривых γ_i и рассмотрим склейку δ полученных кривых. Тогда $|\delta|=|\gamma_1|+|\gamma_2|=|xq|+|qy|=|xy|$, поэтому δ — также кратчайшая кривая. Из сказанного выше вытекает, что γ и δ не получаются друг из друга заменой параметра, противоречие.

Пусть теперь каждое множество $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$ состоит ровно из одной точки. Покажем, что каждая пара точек пространства W соединяется единственной, с точностью до параметризации, кратчайшей кривой. Предположим противное, т.е. что для некоторых точек x и y существует по меньшей мере две кратчайших кривых γ и δ, не получающихся друг из друга заменой параметра и соединяющих x с y. Параметризуем эти кривые натуральным параметром $t\in[0,r]$ так, чтобы $\gamma(0)=\delta(0)=x$ и $\gamma(r)=\delta(r)=y$. Тогда существует $s\in[0,r]$ такое, что $\gamma(s)\ne\delta(s)$. Так как $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ содержатся в $B_s(x)\cap B_{r-s}(y)$, то это множество состоит более чем из одной точки, противоречие. □

Применим следствие 5.29 и лемму 5.30 к конфигурации $\{A,B\}$. Так как при всех $a\in A$ и $b\in B$ имеем $|ab|\ge r$, то каждое множество $C_s(a,b):=B_s(a)\cap B_{r-s}(b)$ или пусто (при $|ab|>r$), или, по лемме 5.30, состоит из одной точки (при $|ab|=r$), которую мы обозначим через $c_s(a,b)$. Таким образом, множество $C_s(a,b)$ пусто (непусто) при некотором s, если и только если оно пусто (соответственно, непусто) при любом $s\in[0,r]$.

Далее, обозначим через M множество всех пар (a,b), для которых $|ab|=r$, и определим отображения $\mu_s\colon M\to C_s$, положив $\mu_s\colon(a,b)\mapsto c_s(a,b)$. По лемме 5.29, имеем $C_s=\cup_{(a,b)\in M}C_s(a,b)$, поэтому все отображения μ_s являются сюръекциями. Покажем, что все μ_s при $s\in(0,r)$ инъективны.

Лемма 5.31. *Пусть (a_1,b_1) и (a_2,b_2) — два различных элемента из M, тогда $c_s(a_1,b_1)\ne c_s(a_2,b_2)$ при каждом $s\in(0,r)$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда натурально параметризованные кратчайшие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, $t\in[0,r]$, $\gamma_i(0)=a_i$, $\gamma_i(r)=b_i$, $i=1,\,2$, пересекаются в некоторой точке $p=c_s(a_1,b_1)=c_s(a_2,b_2)=\gamma_1(s)=\gamma_2(s)$, но не совпадают. Обозначим часть кривой γ_i от a_i до p через γ_{ia}, а от p до b_i — через γ_{ib}. Так как $|\gamma_{1a}|=|\gamma_{2a}|=s$ и $|\gamma_{1b}|=|\gamma_{2b}|=r-s$, имеем $|\gamma_{ia}|+|\gamma_{jb}|=r$ при всех $1\le i,\,j\le 2$. Так как $\{A,B\}$ — конфигурация, то $|a_ib_j|\ge r$, поэтому склейки кривых γ_{ia} и γ_{jb} являются кратчайшими кривыми.

Без ограничения общности, предположим, что $b_1\ne b_2$, тогда склейки $\gamma_{1a}\cdot\gamma_{1b}=\gamma_1$ и $\gamma_{1a}\cdot\gamma_{2b}$ являются различными кратчайшими кривыми, содержащими общий невырожденный фрагмент γ_{1a}, противоречие. ☐

Лемма 5.31 и сделанное выше замечаниее доказывают, что при каждом $s\in(0,r)$ отображение μ_s является биекцией. В частности, все множества C_s, $s\in(0,r)$, равномощны между собой и имеют ту же мощность, что и множество M.

Лемма 5.32. *Пусть $s\in(0,r)$ и $c\in C_s$. Положим $\mu_s^{-1}(c)=\{(a,b)\}$. Тогда $B_s(c)\cap A=\{a\}$ и $B_{r-s}(c)\cap B=\{b\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности, будем считать, что $B_s(c)\cap A$ содержит $a'\ne a$. Но тогда $|a'b|\le|a'c|+|cb|\le r$. С другой стороны, так как $\{A,B\}$ — конфигурация, имеем $|a'b|\ge r$, откуда $|a'b|=r$, поэтому $(a',b)\in M$ и $c=\mu_s(a',b)=\mu_s(a,b)$, противоречие с леммой 5.31. ☐

Для завершения доказательства теоремы, выясним, какие из подмножеств C множества C_s расположены между A и B. Так как $C\subset B_s(A)$ и $C\subset B_{r-s}(B)$, то C находится между A и B, если и только если $A\subset B_s(C)$ и $B\subset B_{r-s}(C)$, т.е. если для каждой точки из $a\in A$ существует $c\in C$ такая, что $a\in B_s(c)$ (аналогично, для точек из B).

Обозначим через π_A естественную проекцию множества M на A, т.е. $\pi_A\colon(a,b)\mapsto a$; аналогично, пусть π_B обозначает естественную проекцию множества M на B. По лемме 5.32, для каждого $c\in C_s$ имеем $B_s(c)\cap A=\pi_A\big(\mu_s^{-1}(c)\big)$, поэтому тот факт, что для каждой точки из $a\in A$ существует $c\in C$, для которой $a\in B_s(c)$, эквивалентен условию $\pi_A\big(\mu_s^{-1}(C)\big)=A$, т.е. сюръективности ограничения проекции π_A на $\mu_s^{-1}(C)$. Аналогично, соответствующее условие для B равносильно сюръективности ограничения проекции π_B на $\mu_s^{-1}(C)$. Итак, количество $N_s(A,B)$ различных $C\subset C_s$, находящихся в s положении между A и B, равно количеству подмножеств множества M, проекции которых на A и B сюръективны. Но последнее условие не зависит от s. ☐

Исходя из теоремы 5.27, для каждой конечной конфигурации $\{A,B\}$ в ограниченно компактном пространстве со строго внутренней метрикой определим величину $N(A,B)$ равной $N_s(A,B)$ для произвольного $s\in\big(0,d_H(A,B)\big)$. Возникает естественный вопрос: чему могут быть равны числа $N(A,B)$? Имеет место удивительная теорема, доказанная в [14] и имеющая приложения в теории графов.

Теорема 5.33. *Для каждого натурального числа m, $1\le m<37$, кроме $m=19$, существует конечная конфигурация $\{A,B\}$ в некотором $\mathbb{R}^n$, для которой $N(A,B)=m$. Не существует ни конечной, ни бесконечной конфигурации в $\mathbb{R}^n$, для которой $N(A,B)=19$ и $N(A,B)=37$.*

Оказывается, теорема 5.33 приводит к нетривиальному результату теории графов. Если $\{A,B\}$ — некоторая конфигурация, $r=d_H(A,B)$, и M, как и выше, — множество всех пар (a,b), $a\in A$, $b\in B$, таких, что $|ab|=r$, то положим $V=A\cup B$ и $E=M$, тогда $G(A,B):=(V,E)$ является простым двудольным ориентированным графом, который будем называть *графом конфигурации* $\{A,B\}$. Ясно, что граф $G(A,B)$ — конечный, если и только если конфигурация $\{A,B\}$ — конечная.

Напомним, что семейство ребер двудольного графа называется *реберным покрытием*, если каждая вершина инцидентна некоторому ребру этого семейства. Заметим, что это условие эквивалентно сюръективности канонических проекций, каждая из которых отображает множество ребер на одну из двух долей, сопоставляя каждому ребру инцидентную ему вершину из рассматриваемой доли. Таким образом, в обозначениях доказательства теоремы 5.27, множество $C\subset C_s$ находится в s-положении, если и только если $\mu_s^{-1}(C)$ является реберным покрытием графа $G(A,B)$, так что $N(A,B)$ — число различных реберных покрытий графа $G(A,B)$.

Предложение 5.34. *Пусть $G=(V,E)$ — конечный двудольный граф с долями V_1 и V_2, имеющий хотя бы одно реберное покрытие. Тогда существует такое натуральное n и такое вложение $\nu\colon V\to\mathbb{R}^n$, что $\big\{\nu(V_1),\nu(V_2)\big\}$ — конфигурация, и отображение ν порождает изоморфизм графа G и соответствующего $G\big(\nu(V_1),\nu(V_2)\big)$ неориентированного графа H.*

Доказательство. Пусть $V_1 = \{a_1, \dots, a_p\}$, $V_2 = \{b_1, \dots, b_q\}$. Положим $n = p + q$. Пусть e_i обозначает i-й базисный вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\nu(a_i) = e_i$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, q\}$ обозначим через I_j множество всех таких i, что $a_i b_j \in E$, и пусть $|I_j|$ — количество элементов во множестве I_j. Положим $N = 1 + \max_j |I_j|$, $m_j = N - |I_j|$ и для каждого $j \in \{1, \dots, q\}$ пусть

$$\nu(b_j) = \sqrt{m_j} e_{p+j} + \sum_{i \in I_j} e_i.$$

Если $a_i b_j \in E$, то $i \in I_j$ и, значит, $\bigl|\nu(a_i)\nu(b_j)\bigr|^2 = m_j + |I_j| - 1 = N - 1$. Если же $a_i b_j \notin E$, то $i \notin I_j$ и, значит, $\bigl|\nu(a_i)\nu(b_j)\bigr|^2 = m_j + |I_j| + 1 = N + 1$. Так как граф G имеет хотя бы одно реберное покрытие, для каждого $a_i \in V_1$ и каждого $b_j \in V_2$ имеем $\bigl|\nu(a_i)\nu(V_2)\bigr| = \bigl|\nu(b_j)\nu(V_1)\bigr| = \sqrt{N-1}$, поэтому $\bigl\{\nu(V_1), \nu(V_2)\bigr\}$ — конечная конфигурация. То, что ν является изоморфизм графов G и H — очевидно из построения. $\square$

Из теоремы 5.33 и предложения 5.34 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 5.35. *Не существует двудольного графа, имеющего ровно* 19 *или* 37 *реберных покрытий.*

Следствие 5.36. *Не существует конфигурации $\{A, B\}$ с $N(A, B) = 19$ и с $N(A, B) = 37$ для конечных подмножеств A и B ограниченно компактного пространства со строго внутренней метрикой.*

Эти исследования были недавно продолжены З. Н. Овсянниковым [20]. Он ввел понятие “атомарного двудольного графа”, определил разложение произвольного двудольного на атомарные и выяснил, как связаны количества реберных покрытий атомарных графов и результирующего двудольного. Это позволило продолжить последовательность и показать, что количество реберных покрытий двудольных графов, а значит и количество кратчайших, соединяющих пару компактов, не может равняться 41, 59 и 67. Кроме того, Овсянников установил, что в интервале от 1 до 1000, все числа, кроме 19, 37, 41, 59, 67, а также, возможно, кроме 82, 97, 149, 197, 223, 257, 291 и 379 реализуются как количества реберных покрытий (кратчайших).

Замечание 5.37. Таким образом, имеется интересная последовательность натуральных чисел, начальный отрезок которой выглядит так: $19, 37, 41, 59, 67, \dots$. Мы проверили ее на известном сайте `https://oeis.org/`, который на 30 июля 2017 года содержал 289946 последовательностей. Оказалось, что этой последовательности там нет. Было бы интересно найти следующие члены этой последовательности.