Лекция 4

Сходимость последовательностей кривых, теорема Арцела–Асколи, кратчайшие кривые.

4.1 Липшицевость, сходимость и равномерная сходимость

В данном разделе мы сформулируем и докажем ряд полезных технических результатов относительно сходимости липшицевых отображений.

Пусть $f_n\colon X \to Y$ некоторое семейство произвольных (не обязательно непрерывных) отображений метрических пространств. Говорят, что последовательность f_n *поточечно сходится* к отображению $f\colon X \to Y$, если для каждого $x \in X$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Последовательность f_n *равномерно сходится* к отображению $f\colon X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для каждого $n \ge N$ выполняется $\bigl|f(x)f_n(x)\bigr| < \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Замечание 4.1. Определим описанные выше сходимости, представив отображения f_n точками множества $\prod_{x\in X} Y$, которое, напомним, мы определяли как семейство Y^X всех отображений из X в Y. Зададим на $\prod_{x\in X} Y$ две разные топологии, в которых сходимость точек f_n будет соответствовать поточечной и равномерной сходимости отображений f_n.

Начнем со случая поточечной сходимости. Топологию на $\prod_{x\in X} Y$, называемую *тихоновской*, зададим базой, состоящей из всех множеств вида $\prod_{x\in X} V(x)$, где $\{V(x)\}_{x\in X}$ — семейство непустых открытых подмножеств Y таких, что для всех $x \in X$, кроме их конечного числа, выполняется $V(x) = Y$ (покажите, что так определенное семейство действительно образует базу топологию). Тогда сходимость в этой топологии точек f_n к точке f равносильна поточечной сходимости отображений f_n к отображению f (проверьте).

Чтобы смоделировать равномерную сходимость, зададим на $\prod_{x\in X} Y$ метрику, порожденную нормой $\|\cdot\|_\infty$. Тогда равномерная сходимость отображений f_n к отображению f — это сходимость в топологии, порожденной этой метрикой.

Предложение 4.2. *Пусть X — компактное, а Y — произвольное метрические пространства, и пусть $f_n\colon X \to Y$ — последовательность C-липшицевых отображений, сходящихся поточечно к некоторому отображению $f\colon X \to Y$. Тогда f является C-липшицевым отображением, а последовательность f_n сходится к f равномерно.*

Доказательство. Чтобы проверить C-липшицевость отображения f, достаточно выполнить предельный переход в неравенстве $\bigl|f_n(x)f_n(x')\bigr| \le C\cdot|xx'|$ при произвольных фиксированных x, $x' \in X$.

Докажем теперь равномерную сходимость. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует N, для которого при всех $n > N$ и всех $x \in X$ выполняется $\bigl|f(x)f_n(x)\bigr| < \varepsilon$.

Положим $\delta = \varepsilon/(3C)$, и пусть $\{x_i\} \subset X$ — конечная δ-сеть. Выберем N таким, чтобы при всех $n > N$ и всех i выполнялось $\bigl|f(x_i)f_n(x_i)\bigr| < \varepsilon/3$.

Фиксируем произвольное $x \in X$. Существует такое i, что $|xx_i| < \delta$. Из C-липшивости отображений f_n и f заключаем, что $\bigl|f_n(x)f_n(x_i)\bigr| \le C\cdot|xx_i| < \varepsilon/3$ и, аналогично, $\bigl|f(x)f(x_i)\bigr| < \varepsilon/3$, откуда

$$\bigl|f(x)f_n(x)\bigr| \le \bigl|f(x)f(x_i)\bigr| + \bigl|f(x_i)f_n(x_i)\bigr| + \bigl|f_n(x_i)f_n(x)\bigr| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Следующий вариант предыдущего утверждения полезен при изучении кривых.

Следствие 4.3. *Пусть X — метрическое пространство, а $\gamma_n\colon [a,b]\to X$ — последовательность C-липшицевых кривых, сходящихся поточечно к отображению $\gamma\colon [a,b]\to X$. Тогда γ является C-липшицевой кривой, а последовательность γ_n сходится к γ равномерно.*

Приведенное далее предложение доказывается аналогично предложению 4.2.

Предложение 4.4. *Пусть X — компактное, Y — произвольное метрические пространства, и $f_n\colon X\to Y$ — последовательность C-липшицевых отображений. Предположим, что для некоторого всюду плотного подмножества $Z\subset X$ последовательность $f_n|_Z$ сходится поточечно. Тогда и сама последовательность f_n сходится поточечно к некоторому отображению $f\colon X\to Y$ и, значит, в силу предложения* 4.2*, эта сходимость равномерная, а отображение f является C-липшицевым.*

Следствие 4.5. *Пусть $\gamma_n\colon [a,b]\to X$ — последовательность C-липшицевых кривых в метрическом пространстве X. Предположим, что для некоторого всюду плотного подмножества $Z\subset[a,b]$ последовательность отображений $\gamma_n|_Z$ сходится поточечно. Тогда и последовательность кривых γ_n сходится поточечно к некоторой кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$ и, значит, в силу следствия* 4.3*, эта сходимость равномерная, а кривая γ является C-липшицевой.*

4.2 Натуральная и равномерная параметризации кривых

Определение 4.6. Кривая $\gamma(s)$, $s\in[a,b]$, называется *натурально параметризованной*, а параметр s — *натуральным*, если для любых $a\le s_1\le s_2\le b$ выполняется $\bigl|\gamma|_{[s_1,s_2]}\bigr|=s_2-s_1$. Параметр t кривой $\gamma(t)$ называется *равномерным*, а кривая $\gamma(t)$ — *равномерно параметризованной*, если для некоторого $\lambda>0$ кривая $\gamma(s/\lambda)$ натурально параметризована. При этом число λ называется *скоростью равномерно параметризованной кривой* γ.

Замечание 4.7. Если кривая $\gamma(s)$, $s\in[a,b]$, параметризована равномерно и λ — ее скорость, то отображение γ является λ-липшицевым. Действительно, кривая $\delta(s)=\gamma(s/\lambda)$ натурально параметризована, поэтому для любых $a\le s_1\le s_2\le b$ выполняется

$$\bigl|\gamma(s_1)\gamma(s_2)\bigr|=\bigl|\delta(\lambda s_1)\delta(\lambda s_2)\bigr|\le\bigl|\delta|_{[\lambda s_1,\lambda s_2]}\bigr|=\lambda(s_2-s_1).$$

Замечание 4.8. Не всякая кривая может быть параметризована натуральным параметром, например, это нельзя сделать с кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$, $a\ne b$, являющейся отображением в точку. Более общо, это нельзя сделать, если кривая γ “останавливается” на некотором невырожденном отрезке $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, т.е. ограничение γ на этот отрезок есть отображение в точку. Если запретить такие “остановки”, то этого оказывается достаточным для существования натуральной параметризации. Кривые, не содержащие определенных выше остановок, называются *безостановочными.*

В [7] предлагается расширить класс замен параметра, а именно, рассматривать монотонные (не обязательно строго монотонные) сюръективные отображения между параметризующими отрезками. Оказывается, при таком определении замены параметризации удается ввести натуральный параметр на любой спрямляемой кривой.

Определение 4.9. Скажем, что кривые $\gamma\colon [a,b]\to X$ и $\bar\gamma\colon [c,d]\to X$ получены друг из друга *монотонной заменой параметра*, если или существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon [c,d]\to[a,b]$ такое, что $\bar\gamma=\gamma\circ\varphi$, или же существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon [a,b]\to[c,d]$ такое, что $\gamma=\bar\gamma\circ\varphi$.

Имеет место следующий результат (докажите).

Предложение 4.10. *Для произвольной спрямляемой кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$ в метрическом пространстве X существует натурально параметризованная кривая $\bigl[0,|\gamma|\bigr]\to X$ и равномерно параметризованная кривая $[0,1]\to X$ со скоростью $|\gamma|$, причем обе эти кривые получены из γ некоторыми монотонными заменами параметра.*

Замечание 4.11. Идея доказательства предложения 4.10 состоит в том, чтобы от кривой γ перейти к безостановочной кривой $\delta\colon [c,d]\to X$, а затем на последней ввести натуральную параметризацию, взяв в качестве замены параметра функцию, обратную к строго монотонной функции $\psi(s) = \bigl|\delta|_{[c,s]}\bigr|$. Чтобы получить кривую δ, предлагается ввести на отрезке $[a,b]$ следующее отношение эквивалентности: точки t и t' находятся в отношении, если и только если ограничение отображения γ на отрезок между t и t' постоянно. Факторизуя отрезок $[a,b]$ по этому отношению, снова получим некоторый отрезок $[c,d]$, причем отображение γ индуцирует на $[c,d]$ отображение δ по следующему правилу: если $\pi\colon [a,b]\to[c,d]$ — каноническая проекция, соответствующая введенной эквивалентности, то для каждого $s\in[c,d]$ отображение γ постоянно на $\pi^{-1}(s)$, так что корректно определено отображение $\delta\colon s\mapsto\gamma\bigl(\pi^{-1}(s)\bigr)$.

Поучительным пример — кривая, являющаяся параметризацией отрезка $[0,1]\subset\mathbb{R}$ канторовой лестницей. Хотя множество, на котором канторова лестница непостоянна — это канторово множество, имеющее меру ноль, тем не менее фактор отрезка по отношению, стягивающему в точки отрезки постоянства канторовой лестницы, гомеоморфен невырожденному отрезку (докажите). Если этот гомеоморфизм задать с помощью самой канторовой лестницы, то мы получим натуральную параметризацию.

4.3 Теорема Арцела–Асколи

Развивая идеи из раздела 4.1, сформулируем и докажем вариант знаменитой теоремы Арцела–Асколи. Предварительно дадим необходимое определение.

Определение 4.12. Пусть $\gamma_n\colon [a_n,b_n]\to X$ — последовательность кривых в метрическом пространстве X. Будем говорить, что эта последовательность *сходится* (*равномерно сходится*) к кривой $\gamma\colon[a,b]\to X$, если существуют такие кривые $\bar\gamma_n\colon[c,d]\to X$ и $\bar\gamma\colon[c,d]\to X$, полученные соответственно из γ_n и γ монотонными заменами параметра, что отображения $\bar\gamma_n$ сходятся (равномерно сходятся) к отображению $\bar\gamma$.

Теорема 4.13 (Арцела–Асколи)**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство, и γ_n — последовательность кривых в X. Предположим, что длины кривых γ_n равномерно ограничены, т.е. существует такое число C, что $|\gamma_n|\le C$ для всех n. Тогда в этой последовательности существует подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой кривой длины не больше C.*

Доказательство. По предложению 4.10, монотонными заменами параметра из кривых γ_n можно получить равномерно параметризованные кривые $\bar\gamma_n\colon[0,1]\to X$, скорости которых не превосходят C. Из замечания 4.7 вытекает, что все кривые $\bar\gamma_n$ являются C-липшицевыми.

Выберем счетное всюду плотное подмножество $Z\subset[0,1]$, тогда диагональный процесс Кантора позволяет построить такую подпоследовательность $\bar\gamma_{n_i}$, которая поточечно сходится на Z к некоторому отображению $f\colon Z\to X$. По следствию 4.5, отображения $\bar\gamma_{n_i}\colon[0,1]\to X$ сходятся равномерно к некоторой C-липшицевой кривой $\gamma\colon[0,1]\to X$. По предложению 3.10, $|\gamma|\le\liminf_{n_i\to\infty}|\bar\gamma_{n_i}|\le C$, что и требовалось. □

Замечание 4.14. Классическая теорема Арцела–Асколи использует понятия равностепенно непрерывного и равномерно ограниченного семейств отображений, определения которых приведем в несколько более общей ситуации. А именно, пусть X и Y — произвольные метрические пространства, а F — некоторое семейство отображений $f\colon X\to Y$. Семейство F называется *равномерно ограниченным*, если в Y существует такой шар $B_r(y)$, что $f(X)\subset B_r(y)$ для любого $f\in F$. Семейство F называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых $x,x'\in X$, $|xx'|<\delta$, и для любой $f\in F$ выполняется $|f(x)f(x')|<\varepsilon$.

Классическая теорема Арцела–Асколи утверждает, что равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная последовательность вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Так как равностепенная непрерывность влечет непрерывность каждой функции, то, благодаря равномерной сходимости, предельная функция будет непрерывной.

Более общая формулировка теоремы Арцела–Асколи может быть получена так: заменяем $[a,b]$ на компактное метрическое пространство X; заменяем функции на отображения в некоторое метрическое пространство Y; условие равномерной ограниченности последовательности реализуем в виде условия компактности Y; последовательность заменяем на произвольное семейство отображений F; тогда теорема утверждает, что если семейство F равностепенно непрерывно, то каждая последовательность $f_1,f_2,\ldots\in F$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.

В приведенном нами варианте теоремы Арцела–Асколи (теорема 4.13) пространство X совпадает с отрезком $[0,1]$, а условие равностепенной непрерывности возникает благодаря равномерной параметризации кривых с учетом того, что длины кривых равномерно ограничены.

Упражнение 4.15. Можно ли обобщить теорему 4.13, заменив отрезки $[a_n, b_n]$ на произвольные компакты K_n, гомеоморфные некоторому компакту K, и не добавляя условие равностепенной непрерывности?

4.4 Существование кратчайших кривых

Применим предыдущие результаты для изучения кривых наименьшей длины.

Определение 4.16. Спрямляемая кривая в метрическом пространстве называется *кратчайшей*, если ее длина равна точной нижней грани длин всех кривых, соединяющих ее концы.

Замечание 4.17. Если X — пространство с внутренней метрикой, то кривая γ в X, соединяющая x и y, является *кратчайшей*, если и только если $|xy| = |\gamma|$.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 4.18. *Кривая в метрическом пространстве является кратчайшей, если и только если каждый ее отрезок — кратчайшая кривая.*

Определение 4.19. Кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве X называется *локально кратчайшей*, если для каждого $t \in [a,b]$ существует такой содержащий t интервал $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$, что $\gamma|_{[a,b]\cap[\alpha,\beta]}$ — кратчайшая кривая.

Определение 4.20. Равномерно параметризованная локально кратчайшая кривая называется *геодезической*.

Замечание 4.21. Натурально параметризованную кратчайшую геодезическую $\gamma\colon [a,b] \to X$ в пространстве с внутренней метрикой часто определяют другим, эквивалентным способом, а именно, как изометричное вложение отрезка $[a,b]$ в метрическое пространство X.

Следствие 4.22. *Любые две точки x и y компактного метрического пространства X, которые соединяются спрямляемой кривой, соединяются также кратчайшей кривой.*

Доказательство. Пусть ℓ равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих x и y. Существует последовательность γ_n, для которой $|\gamma_n| \to \ell$. Но тогда длины кривых γ_n равномерно ограничены и применима теорема 4.13, в соответствии с которой в последовательности γ_n имеется подпоследовательность γ_{k_n}, равномерно сходящаяся к некоторой кривой γ. По 3.10, имеем $|\gamma| \le \liminf_{n\to\infty} |\gamma_{k_n}| = \ell$, но, по определению ℓ, выполняется $|\gamma| \ge \ell$, поэтому $|\gamma| = \ell$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. □

Следствие 4.23. *В ограниченно компактном пространстве X с конечной внутренней метрикой любые две точки соединяются кратчайшей кривой, причем длина этой кривой равна расстоянию между этими точками.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные различные точки $x, y \in X$. Так как метрика конечная и внутренняя, существует последовательность кривых γ_n, соединяющих x и y, для которой $|xy| = \lim_{n\to\infty} |\gamma_n|$. Тогда последовательность чисел $|\gamma_n|$ ограничена сверху некоторым числом C и, по предложению 3.4, все кривые γ_n лежат в замкнутом шаре $B_C(x)$. Так как пространство ограниченно компактное, шар $B_C(x)$ компактен, так что, в силу следствия 4.22, эти точки соединены в шаре $B_C(x)$ кратчайшей кривой γ. Так как γ не длиннее всех γ_n, имеем $|\gamma| \le |xy|$, поэтому γ — кратчайшая. □

Определение 4.24. Говорят, что конечная метрика пространства X является *строго внутренней*, если любые две точки из X соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.

4.5 Кратчайшие и середины

Определение 4.25. Точка z метрического пространства называется *серединой между точками x и y* этого пространства, если $|xz| = |yz| = \frac{1}{2}|xy|$.

Теорема 4.26. *Пусть X — полное метрическое пространство. Предположим, что для каждой пары точек $x, y \in X$ существует середина. Тогда метрика — строго внутренняя.*

Доказательство. Выберем произвольные две точки x и y из X. Мы покажем, что эти точки можно соединить кривой $\gamma\colon [0,1] \to X$, для которой $|\gamma| = |xy|$.

Будем последовательно определять отображение γ для различных точек отрезка $[0,1]$. Положим $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Далее, пусть $\gamma(1/2)$ — середина между x и y; $\gamma(1/4)$ — середина между $\gamma(0)$ и $\gamma(1/2)$, а $\gamma(3/4)$ — середина между $\gamma(1/2)$ и $\gamma(1)$. Продолжая этот процесс, определим γ на всех двоично-рациональных точках отрезка $[0,1]$, т.е. на всех точках вид $m/2^n$, где $0 \le m \le 2^n$, а $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что множество всех двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$ всюду плотно в $[0,1]$. Кроме того, несложно показывается, что построенное отображение γ является $|xy|$-липшицевым. Доказательство следующей технической леммы мы оставляем в качестве упражнения.

Лемма 4.27. *Пусть Z — всюду плотное подмножество метрического пространства X, а $f\colon Z \to Y$ — некоторое C-липшицево отображение в полное метрическое пространство Y. Тогда существует единственное непрерывное отображение $F\colon X \to Y$, продолжающее f. Более того, отображение F также является C-липшицевым.*

Итак, используя лемму 4.27, продолжим по непрерывности отображение γ на весь отрезок $[0,1]$, и полученную $|xy|$-липшицеву кривую вновь обозначим через γ. Как было замечено в примере 3.2, $|\gamma| \le |xy|\,|1-0| = |xy|$, откуда, в силу предложения 3.4, имеем $|\gamma| = |xy|$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. □

Замечание 4.28. Свойство метрики быть внутренней не достаточно для того, чтобы в полном метрическом пространстве существовали середины и кратчайшие кривые между любыми точками. Рассмотрим счетное семейство отрезков $[0, 1+1/n]$, $n \in \mathbb{N}$, каждый со стандартной метрикой, и склеим в одну точку A все их нули, а в другую точку B — все концы $1 + 1/n$. Если x и y принадлежат разным отрезкам, скажем, $[0, 1+1/n]$ и $[0, 1+1/m]$, то зададим расстояние между x и y равным $\min(x+y, 1-x+1/n+1-y+1/n)$ (т.е. на каждой паре склеенных отрезков рассматривается внутренняя метрика окружности). Тогда расстояние между A и B равно 1 и не достигается ни на какой кривой. Кроме того, для этих точек не существует середины.

Определение 4.29. Точка z метрического пространства (X,d) называется *ε-серединой между точками x и y* этого пространства, если $\bigl||xz| - \frac{1}{2}|xy|\bigr| < \varepsilon$ и $\bigl||yz| - \frac{1}{2}|xy|\bigr| < \varepsilon$.

Теорема 4.30. *Пусть X — полное метрическое пространство. Предположим, что для каждой пары точек $x, y \in X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина. Тогда метрика — внутренняя.*

Доказательство. В основе — такое же доказательство, как и у теоремы 4.26, только сейчас находим не строгие середины, а приближенные, следя за тем, чтобы суммарный “разброс” не был большим (используем тот факт, что $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$). □

Имеются также и обратные очевидные утверждения, даже без предположения полноты пространства.

Предложение 4.31. *В пространстве с внутренней (строго внутренней) метрикой для любых двух точек и любого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина (середина).*