Лекция 3

Кривые в метрических пространствах, внутренняя метрика, теорема Хопфа–Ринова.

3.1 Спрямляемые кривые

Пусть X — метрическое пространство. Конечную последовательность $L = (A_0, \dots, A_n)$ точек пространства X назовем *ломаной в* X; при этом пары (A_{i-1}, A_i) будем называть *ребрами ломаной* L, а числа $|A_{i-1}A_i|$ — *длинами* этих ребер. Сумма длин всех ребер ломаной L называется *длиной ломаной* L и обозначается через $|L|$.

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — произвольная кривая. Для каждого разбиения $\xi = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ рассмотрим соответствующую ему ломаную $L_\gamma(\xi) = \bigl(\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)\bigr)$ (такие ломаные будем называть *вписанными в кривую* γ), тогда величина

$$|\gamma| = \sup\Bigl\{\bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| : \xi \text{ — разбиение отрезка } [a,b]\Bigr\}$$

называется *длиной кривой* γ. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $|\gamma| < \infty$.

Замечание 3.1. Очевидно, длина кривой не меняется при замене параметра, в частности, свойство кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от выбора параметризации.

Приведем примеры спрямляемых кривых.

Напомним, что отображением $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *липшицевым*, если существует такое $C > 0$, что для любых $x, x' \in X$ выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| \le C\,|xx'|$. Каждое такое C называется *константой Липшица*, а точная нижняя грань $\operatorname{dil} f$ констант Липшица — *растяжением отображения* f (обозначение происходит от английского слова dilatation). Иногда, для краткости, липшицево отображение с константой Липшица C называют *C-липшицевым.*

Пример 3.2. Каждая C-липшицева кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ спрямляемая, так как для любого разбиение ξ отрезка $[a,b]$ имеем $|L_\gamma(\xi)| \le C(b-a)$ и, значит, $|\gamma| \le C(b-a) < \infty$.

Пример 3.3. Любая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема, так как является липшицевой (с константой Липшица, равной максимуму модуля вектора скорости кривой).

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

Предложение 3.4 (Обобщенное неравенство треугольника)**.** *Пусть точки $x, y \in X$ соединяются некоторой кривой γ, тогда $|\gamma| \ge |xy|$.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Для любых $x, y \in X$ положим

$$d_{in}(x,y) = \inf\bigl\{|\gamma| : \gamma \text{ — кривая, соединяющая } x \text{ и } y\bigr\},$$

где, как и выше, мы полагаем $\inf\emptyset = \infty$.

Замечание 3.5. Из 3.4 и ряда тривиальных соображений вытекает, что d_{in} является метрикой на X (не обязательно конечной), причем для любых $x, y \in X$ выполняется $d_{in}(x,y) \ge |xy|$. Если исходная метрика на X является конечной, и любые две точки из компоненты линейной связности соединяются спрямляемой кривой, то классы эквивалентности, заданной условием $d_{in} < \infty$, совпадают с компонентами линейной связности.

Определение 3.6. Если определенная выше метрика d_{in} совпадает с исходной, то исходная метрика называется *внутренней*.

Замечание 3.7. Легко проверяется (сделайте это), что d_{in} является внутренней метрикой. Это приводит к тому, что d_{in} часто называют *внутренней метрикой, порожденной исходной*.

Обозначим через $\Omega(X)$ семейство всех кривых в метрическом пространстве X.

Определение 3.8. Каждое отображение $\Psi\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ называется *функционалом*. Обозначим через $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ функционал, определенный правилом $\mathcal{L}\colon \gamma \mapsto |\gamma|$, и назовем его *функционалом длины*.

Отметим, что на $\Omega(X)$ определены

(1) *ограничение* каждой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ на каждый подотрезок $[c,d] \subset [a,b]$;

(2) *склейка* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ тех пар кривых $\gamma_1\colon [a,b] \to X$, $\gamma_2\colon [b,c] \to X$, для которых $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, а именно, $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)\colon [a,c] \to X$ — кривая, ограничения которой на $[a,b]$ и $[b,c]$ совпадают соответственно с γ_1 и γ_2;

(3) *замена параметра* и эквивалентность, отождествляющая кривые, отличающиеся на замену параметризации.

Следующий результат описывает свойства функционала длины.

Теорема 3.9. *Пусть $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to \mathbb{R}$ — функционал длины, определенный на кривых метрического пространства X. Тогда $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами*:

(1) **аддитивность:** *если $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ — склейка кривых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X)$, то $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$*;

(2) **непрерывность:** *для любой спрямляемой $\gamma\colon [a,b] \to X$ функция $f(t) = \mathcal{L}\big(\gamma|_{[a,t]}\big)$ непрерывна*;

(3) **независимость от параметра:** *для каждой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ и замены параметра $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ выполняется $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma \circ \psi)$*;

(4) **согласованность с топологией:** *для каждого $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $y \in X \setminus U_\varepsilon(x)$ и кривой $\gamma \in \Omega(X)$, соединяющей x и y, выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \ge \varepsilon$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь пункт (2), докажем его. Выберем произвольное $t \in [a,b]$ и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при всех $s \in [a,b] \cap (t-\delta, t+\delta)$ выполняется $\big|f(t) - f(s)\big| < \varepsilon$. Положим $\ell = |\gamma|$. По определению, существует разбиение ξ отрезка $[a,b]$ такое, что $\ell - \varepsilon/2 < \big|L_\gamma(\xi)\big| \le \ell$. Если $t \notin \xi$, добавим его к ξ (полученное разбиение обозначим той же буквой). Ясно, что для полученного разбиения по-прежнему выполняется $\ell - \varepsilon/2 < \big|L_\gamma(\xi)\big| \le \ell$.

В качестве δ_1 возьмем расстояние от t до ближайшего отличного от t элемента разбиения ξ. Так как подразбиениями разбиения ξ мы можем менять длину ломаной $L_\gamma(\xi)$ лишь в пределах $(\ell - \varepsilon/2, \ell]$, то для каждого $s \in [a,b] \cap (t-\delta_1, t+\delta_1)$ длина $\ell_{ts} = \big|f(t) - f(s)\big|$ фрагмента кривой γ между точками $\gamma(t)$ и $\gamma(s)$ отличается от $\big|\gamma(t)\gamma(s)\big|$ менее чем на $\varepsilon/2$. С другой стороны, в силу непрерывности отображения γ, существует такое $\delta_2 > 0$, что при всех $s \in [a,b] \cap (t-\delta_2, t+\delta_2)$ имеем $\big|\gamma(t)\gamma(s)\big| < \varepsilon/2$. Осталось положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. ☐

Приведем еще одно важное свойство функционала длины $\mathcal{L}$.

Предложение 3.10 (Полунепрерывность снизу)**.** *Функционал $\mathcal{L}$ полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности $\gamma_n\colon [a,b] \to X$ спрямляемых кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой кривой γ, имеем*

$$\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n).$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших n выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$, а раз так, то $\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получим требуемое.

Итак, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Выберем такое разбиение $\xi = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b)$ отрезка $[a, b]$, что $\mathcal{L}(\gamma) - \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| < \varepsilon/2$. Существует N такое, что для любого $n > N$ и всех i выполняется $\bigl|\gamma(t_i)\gamma_n(t_i)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4m}$. Отсюда мгновенно вытекает, что

$$\bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr| < \bigl|\gamma_n(t_{i-1})\gamma_n(t_i)\bigr| + \frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому $\bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| < \bigl|L_{\gamma_n}(\xi)\bigr| + \varepsilon/2$. Таким образом,

$$\mathcal{L}(\gamma) < \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| + \varepsilon/2 < |L_{\gamma_n}(\xi)| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось. □

3.2 Некоторые свойства пространств с внутренней метрикой

Общие метрические пространства могут геометрически сильно отличаться от $\mathbb{R}^n$. Например, в дискретных пространствах шары ненулевого радиуса могут совпадать с их центрами. В частности, расстояние от произвольной точки до такого шара будет равняться расстоянию от этой точки до центра. В пространствах с внутренней метрикой такого не возникает.

Теорема 3.11 (условие Хопфа–Ринова)**.** *Пусть X — пространство с конечной внутренней метрикой, $x, y \in X$, $x \ne y$, и $0 < r \le |xy|$. Тогда*

$$\bigl|yU_r(x)\bigr| = |xy| - r.$$

Замечание 3.12. Для общих метрических пространств X, даже с конечной метрикой, теорема не имеет места. Действительно, для метрического пространств $X = \{x, y\}$, $|xy| = 1$, положим $r = 0.5$, тогда $U_r(x) = \{x\}$, $\bigl|yU_r(x)\bigr| = 1 \ne |xy| - r = 0.5$.

Доказательство теоремы 3.11*.* Для любой точки $z \in U_r(x)$ имеем $|zy| \ge |xy| - |zx| > |xy| - r$, поэтому $\bigl|yU_r(x)\bigr| \ge |xy| - r$. Докажем, что имеет место и обратное неравенство.

Для каждого $0 < \varepsilon < r$ рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma\colon [0,1] \to X$, $x = \gamma(0)$ и $y = \gamma(1)$, для которой $|\gamma| \le |xy| + \varepsilon$. Определим непрерывную функцию $f(t) = \bigl|x\gamma(t)\bigr|$, $f(0) = 0$, $f(1) = |xy|$, и выберем произвольное t_0 такое, что $f(t_0) = r - \varepsilon$. Обозначим через γ_1 часть кривой γ между 0 и t_0, а через γ_2 — оставшуюся часть кривой γ. Тогда $|\gamma_1| \ge r - \varepsilon$ по предложению 3.4, поэтому $|\gamma_2| \le |xy| - r + 2\varepsilon$ и, по тому же предложению, $\bigl|\gamma(t_0)y\bigr| \le |\gamma_2| \le |xy| - r + 2\varepsilon$. Но $\gamma(t_0) \in U_r(x)$, поэтому $\bigl|yU_r(x)\bigr| \le |xy| - r + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое. □

Замечание 3.13. Условие Хопфа–Ринова может выполняться и в пространствах, метрика которых не является внутренней, например, в метрическом пространстве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел (со стандартной функцией расстояния).

Приведем некоторые следствия из теоремы 3.11. Предварительно дадим необходимое определение.

Пусть X — метрическое пространство, $x \in X$, $r \ge 0$. Положим $B_r(x) = \{y \in X : |xy| \le r\}$ и назовем *замкнутым шаром с центром в x радиуса r* или *замкнутой r-окрестностью точки x*.

Отметим, что $B_r(x)$ является замкнутым множеством, вообще говоря, отличающимся от замыкания открытого шара $U_r(x)$: если, как и в приведенном выше примере, X состоит из двух точек x и y, находящихся на расстоянии 1, то $U_1(x) = \{x\}$, $B_1(x) = \{x, y\}$, $\overline{U_1(x)} = \{x\} \ne B_1(x)$. Однако, если метрика пространства X — внутренняя, то теорема 3.11 мгновенно влечет следующий результат.

Следствие 3.14. *Пусть X — пространство с конечной внутренней метрикой. Тогда $B_r(x) = \overline{U_r(x)}$.*

Доказательство. Точка y является точкой прикосновения шара $U_r(x)$, если и только $|yU_r(x)| = 0$, откуда $|xy| \le r$, т.е. $y \in B_x(r)$ и, значит, $\overline{U_r(x)} \subset B_r(x)$. Докажем обратное включение.

Пусть $y \in B_r(x)$. Если $|xy| < r$, то $y \in U_r(x) \subset \overline{U_r(x)}$. Если же $|xy| = r$, то, по теореме 3.11, имеем $|yU_r(x)| = |xy| - r = 0$, откуда $y \in \overline{U_r(x)}$. □

Следующий результат будет использован при доказательстве первой части теоремы Хопфа–Ринова.

Следствие 3.15. *Пусть X — пространство с конечной внутренней метрикой и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждой ε-сети S в шаре $B_r(x) \subset X$ и любых $\delta' > \delta > 0$ имеем $B_{r+\delta}(x) \subset \cup_{s\in S} B_{\varepsilon+\delta'}(s)$.*

Доказательство. Для любой точки $y \in B_{r+\delta}(x)$ имеем $|xy| \le r+\delta$, поэтому или $y \in U_r(x)$ и, значит, $|yU_r(x)| = 0$, или же, по теореме 3.11, выполняется $\big|yU_r(x)\big| \le \delta$. Таким образом, для любого $\delta' > \delta$ существует такое $z \in U_r(x) \subset B_r(x)$, что $|yz| < \delta'$. С другой стороны, существует $s \in S$, для которого $U_\varepsilon(s) \ni z$, откуда $|sy| \le |sz| + |zy| < \varepsilon + \delta'$, поэтому $y \in B_{\varepsilon+\delta'}(s)$, что и требовалось. □

3.3 Локальная компактность

Определение 3.16. Метрическое пространство X называется *локально компактным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $B_\varepsilon(x)$ компактен.

Замечание 3.17. Несложно проверяется, что локальную компактность пространства X можно определить следующим эквивалентным условием: для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность, у которой замыкание компактно.

Замечание 3.18. В отличие от компактности, локальная компактность, даже в сочетании с внутренней метрикой, не гарантирует полноту метрического пространства. Очевидный пример — открытый шар в евклидовом пространстве. Другой пример — евклидово пространство с выброшенной точкой.

Теорема 3.19 (Хопф–Ринов, часть 1). *Пусть X — локально компактное пространство с конечной внутренней метрикой. Тогда пространство X полно, если и только если каждый замкнутый шар в X компактен.*

Доказательство. Пусть сначала известно, что каждый замкнутый шар компактен. Докажем полноту. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Тогда существует r такое, что все x_n содержатся в $B_r(x_1)$. По 2.1 (9), шар $B_r(x_1)$ является полным, поэтому последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к некоторой точке $x \in B_r(x) \subset X$, что и требовалось.

Пусть теперь пространство X полно. Определим на X функцию $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\rho(x) = \sup\{r > 0 : \text{шар } B_r(x) \text{ компактен}\}.$$

Лемма 3.20. *Пусть существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\rho(x_0) = \infty$. Тогда каждый шар $B_r(x)$ компактен и, значит, ρ тождественно равна ∞.*

Доказательство. При каждых x и $r > 0$ шар $B_r(x)$ содержится в некотором компактном шаре $B_{r'}(x_0)$, поэтому, в силу замкнутости множества $B_r(x)$, шар $B_r(x)$ также компактен. □

Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и покажем, что $\rho(x_0) = \infty$ (в силу леммы 3.20, этого достаточно для завершения доказательства теоремы).

Предположим противное, т.е. что $\rho(x_0) < \infty$. Тогда, в силу леммы 3.20, функция ρ везде конечна.

Легко доказывается следующий результат.

Лемма 3.21. *Функция ρ является 1-липшицевой и, значит, непрерывной.*

Лемма 3.22. *В сделанных предположениях, шар $B_{\rho(x)}(x)$ компактен при каждом x.*

Доказательство. Положим $R = \rho(x)$. Так как шар $B_R(x)$ — замкнутое подмножество полного пространства X, то этот шар является также полным. Следовательно, по 2.1 (9), достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ в этом шаре можно выбрать конечную ε-сеть. Ясно, что это свойство можно проверить для достаточно малых ε. Поэтому мы, без ограничения общности, будем предполагать, что $R - \varepsilon/2 > 0$.

По определению R, существует такое r', $R - \varepsilon/2 < r' \le R$, для которого шар $B_{r'}(x)$ является компактом. В силу 2.1 (9), в $B_{r'}(x)$ существует конечная $(\varepsilon/2)$-сеть S. Покажем, что S является ε-сетью для $B_R(x)$, чем и завершим доказательство леммы.

Итак, выберем произвольную точку $y \in B_R(x)$. По 3.11, имеем $\big|yU_{r'}(x)\big| \le R - r' < \varepsilon/2$, т.е. существует $z \in U_{r'}(x)$, для которого $|zy| < \varepsilon/2$. Но для z существует $s \in S$ такая, что $|zs| < \varepsilon/2$. Осталось применить неравенство треугольника. □

Так как ρ — непрерывная функция, ее ограничение на компакт $B_R(x_0)$ достигает своего минимума. Обозначим этот минимум через ε, тогда, по лемме 3.22, шары $B_\varepsilon(x)$ компактны при всех $x \in B_R(x_0)$. Пусть S — конечная $\varepsilon/3$-сеть в $B_R(x_0)$, существующая в силу компактности $B_R(x_0)$. Положим $W = \cup_{s\in S} B_\varepsilon(s)$. Так как все шары $B_\varepsilon(s)$ — компакты, множество W также является компактом. Воспользуемся следствием 3.15, положив $\delta = \varepsilon/3$ и $\delta' = 2\varepsilon/3$. Тогда, в силу этого следствия,

$$B_{R+\delta}(x_0) = B_{R+\varepsilon/3}(x_0) \subset \cup_{s\in S} B_{\varepsilon/3+\delta'}(s) = \cup_{s\in S} B_\varepsilon(s) = W,$$

поэтому шар $B_{R+\varepsilon/3}(x_0)$ компактен, противоречие с выбором R. Теорема доказана. $\square$

Определение 3.23. Метрическое пространство, в котором каждый замкнутый шар компактен, называется *ограниченно компактным.*

Замечание 3.24. Таким образом, теорема 3.19 утверждает, что метрическое пространство с конечной внутренней метрикой ограниченно компактно, если и только если оно локально компактно и полно.

Замечание 3.25. Ограниченная компактность, очевидно, может быть переформулирована следующим эквивалентным образом: *каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно.*