Лекция 2

Топология метрических пространств. Расстояние Хаусдорфа.

Мы предполагаем, что слушатели знакомы с основами общей топологии. В данном разделе мы поговорим о топологии, порожденной метрикой.

Пусть X — метрическое пространство, а $x \in X$ — произвольная его точка. Для каждого $r > 0$ и $x \in X$ положим $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$ и назовем полученное множество *открытым шаром радиуса r с центром в x* или *r-окрестностью точки $x \in X$*. Множество $U \subset X$ называется *открытым*, если оно представимо в виде объединения открытых шаров. В частности, каждый открытый шар, а также пустое множество (объединение пустого семейства открытых шаров) являются открытыми множествами. Легко проверяется, что семейство так определенных открытых множеств образует топологию на X, а само X с такой топологией — хаусдорфово топологическое пространством. Эта топология называется *метрической*, и когда речь идет про топологию на метрическом пространстве, то, если не оговорено противное, имеется в виду именно эта топология.

Приведем ряд полезных для дальнейшего определений и фактов.

Определения и факты 2.1.

(1) Метрическое пространство называется *полным*, если каждая его фундаментальная последовательность сходится. Например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство, а $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — нет.

(2) Метрическое пространство *компактно*, если каждая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Например, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — компакт, а $[a, b)$ компактом не является.

(3) Точка x метрического пространства X является *точкой прикосновения множества $A \subset X$*, если при каждом $r > 0$ выполняется $U_r(x) \cap A \neq \emptyset$; эквивалентное условие: $|xA| = 0$. Множество всех точек прикосновения множества A называется его *замыканием* и совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A (проверьте). Замыкание множества A будем обозначать через $\bar{A}$. Приведем пример: $\overline{[a, b)} = [a, b]$.

(4) Подмножество метрического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Метрическое пространство, содержащее счетное всюду плотное подмножество, называется *сепарабельным*. Например, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{Q}$ счетно, $\mathbb{R}$ — сепарабельно.

(5) Семейство открытых множеств топологического пространства называется его *базой*, если каждое открытое множество представимо в виде объединения множеств этого семейства. Например, в произвольном метрическом пространстве X множество всех шаров $U_{1/n}(x)$ по всем $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ образует базу. Если X сепарабельно, то в качестве базы можно взять такие шары, ограничившись центрами из счетного всюду плотного подмножества. Легко проверяется, что *сепарабельность метрического пространства эквивалентна наличию в нем счетной базы* (докажите).

(6) Для вещественного числа $\varepsilon > 0$, подмножество A метрического пространства X называется *ε-сетью* или *ε-плотным подмножеством*, если для каждого $x \in X$ выполняется $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$; иными словами, $X = \cup_{a \in A} U_\varepsilon(a)$. Метрическое пространство X называется *вполне ограниченным* или *предкомпактным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть. Например, интервал (a, b) предкомпактен.

(7) *Если пространство вполне ограничено, то оно — сепарабельно* (в качестве счетного всюду плотного множества можно взять объединение конечных $(1/n)$-сетей по всем $n \in \mathbb{N}$). Обратное, вообще говоря, неверно, например, $\mathbb{R}$ сепарабельно, но не вполне ограничено.

(8) *Полная ограниченность эквивалентна тому, что каждая последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность* (докажите).

(9) Из предыдущих пунктов легко получается, что *метрическое пространство компактно, если и только если оно полное и вполне ограниченное.*

Пусть X — произвольное пространство с конечной метрикой. Обозначим через $C(X)$ векторное пространство всех непрерывных функций на X, и рассмотрим на $C(X)$ норму $\|\cdot\|_\infty$. Тогда подпространство $C(X)\cap\ell^\infty(X)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных функций на X, обозначим через $C_b(X)$. Норма $\|\cdot\|_\infty$ превращает $C_b(X)$ в пространство с конечной метрикой.

Определим теперь отображение $\nu\colon X \to C_b(X)$ следующим образом. Для каждой точки $x \in X$ через d_x обозначим функцию $d_x\colon X \to [0,\infty)$, заданную правилом $d_x(y) = |xy|$. Легко проверяется, что $d_x \in C(X)$. Фиксируем теперь некоторую точку $p \in X$ и рассмотрим функцию $d_x - d_p$. Тогда для каждого $y \in X$ имеем $\bigl|d_x(y) - d_p(y)\bigr| \le |xp|$, поэтому функция $d_x - d_p$ ограничена и, значит, принадлежит $C_b(X)$.

Теорема 2.2 (Фреше, Куратовский). *Отображение $\nu\colon X \to C_b(X)$, определенное по формуле $\nu\colon x \mapsto d_x - d_p$, является изометричным.*

Доказательство. Действительно, для любых $x, y \in X$ имеем

$$\ell_\infty(d_x - d_p, d_y - d_p) = \sup_{z\in X}\bigl|d_x(z) - d_y(z)\bigr| \le |xy|$$

по неравенству треугольника. С другой стороны, если $z = y$, то $\bigl|d_x(z) - d_y(z)\bigr| = |xy|$, откуда и вытекает требуемое. □

Докажем теперь более тонкий результат. Напомним, что через ℓ^∞ мы обозначили пространство всех ограниченных последовательностей с метрикой, заданной нормой $\|\cdot\|_\infty$.

Теорема 2.3 (Фреше). *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, тогда X изометрично вкладывается в ℓ^∞.*

Доказательство. Упорядочим счетное всюду плотное подмножество пространства X, которое существует в силу сепарабельности, и получим последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Выберем произвольную точку $p \in X$ и поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ последовательность $\nu(x)$, полученную ограничением функции $d_x - d_p$ на последовательность $x_1, x_2, \ldots$, а именно, $\nu(x)(i) = d_x(x_i) - d_p(x_i)$. Так как функции $d_x - d_p$ ограничены, то $\nu(x) \in \ell^\infty$. Неравенство $\ell_\infty\bigl(\nu(x), \nu(y)\bigr) \le |xy|$ проверяется так же, как в доказательстве теоремы 2.2. Обратное неравенство вытекает из того, что подмножество $\{x_i\}$ является всюду плотным в X: рассматриваем $x_{i_k} \to x$, тогда

$$\ell_\infty\bigl(\nu(x), \nu(y)\bigr) = \sup_{z\in X}\bigl|d_x(z) - d_y(z)\bigr| \ge \bigl|d_x(x_{i_k}) - d_y(x_{i_k})\bigr| \to d_y(x) = |xy| \text{ при } k \to \infty.$$

Теорема доказана. □

Как видно из предыдущих рассуждений, при изучении компактности важную роль играет полнота пространства. Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 2.4. *Для каждого метрического пространства X существует единственное, с точностью до изометрии, полное метрическое пространство, в которое X изометрически вкладывается в виде всюду плотного подмножества.*

Определение 2.5. Полное метрическое пространство, описанное в теореме 2.4, называется *пополнением пространства X*.

Замечание 2.6. Построение пополнения пространства X состоит в рассмотрении псевдометрического пространства всех фундаментальных последовательностей в X (расстояние между последовательностями — предел расстояний между последовательными их членами) и переходе к метрическому пространству с помощью техники, описанной в 1.1.

Легко видеть, что метрическое пространство и его всюду плотное подмножество одновременно или вполне ограничены, или нет. Отсюда и из утверждения 2.1 (9) мгновенно получается следующий результат.

Следствие 2.7. *Метрическое пространство предкомпактно, если и только если его пополнение компактно.*

2.1 Расстояние Хаусдорфа

В примере 1.4 (12) мы определили расстояние Хаусдорфа $d_H(A,B)$ между непустыми подмножествами A и B метрического пространства X, а также ввели обозначение $\mathcal{H}(X)$ для множества всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X. Покажем, что на $\mathcal{H}(X)$ расстояние d_H является конечной метрикой.

Для удобства дадим сначала другое эквивалентное определение расстояния Хаусдорфа. Для $r>0$ и непустого множества $A\subset X$ определим *открытую окрестность* $U_r(A)$ *радиуса* r *с центром в* A, положив $U_r(A)=\{x\in X : |xA|<r\}=\cup_{a\in A}U_r(a)$ (проверьте последнее равенство).

Предложение 2.8. *Для непустых* $A,B\subset X$ *имеем*

$$d_H(A,B)=\inf\bigl\{r : A\subset U_r(B)\ \&\ U_r(A)\supset B\bigr\}.$$

Доказательство. Это мгновенно вытекает из определения окрестности множества A, а именно, из того, что $x\in U_r(A)$, если и только если $|xA|<r$. □

Теорема 2.9. *Функция* d_H *является конечной метрикой на* $\mathcal{H}(X)$.

Доказательство. Выберем произвольные $A,B\in\mathcal{H}(A)$. Так как они ограничены, то для некоторого $r>0$ имеем $A\subset U_r(B)$ и $U_r(A)\supset B$, откуда $d_H(A,B)<\infty$. Таким образом, d_H — конечная функция расстояния.

Если $A\ne B$, то без ограничения общности можно считать, что существует $a\in A\setminus B$, но так как множество $X\setminus B$ открыто, существует $r>0$ такое, что $U_r(a)\cap B=\emptyset$, в частности, $|aB|\ge r$ и, значит, $d_H(A,B)\ge r$. Тем самым мы проверили, что d_H невырождена и, значит, положительно определенна.

Наконец, проверим неравенство треугольника. Выберем произвольные $A,B,C\in\mathcal{H}(X)$ и положим $d_H(A,B)=c$, $d_H(B,C)=a$, $d_H(A,C)=b$. Мы должны показать, что $d_H(A,C)\le d_H(A,B)+d_H(B,C)$, т.е. $b\le c+a$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$ и положим $r=c+\varepsilon$ и $s=a+\varepsilon$, тогда $A\subset U_r(B)$ и $B\subset U_s(C)$ влечет $A\subset U_r\bigl(U_s(C)\bigr)\subset U_{r+s}(C)$ (докажите последнее включение; можно ли его заменить на равенство?). Аналогично, $U_{r+s}(A)\supset C$. Таким образом, $b\le r+s=c+a+2\varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое. □

В дальнейшем, говоря про расстояние на $\mathcal{H}(X)$, всегда будем иметь в виду метрику Хаусдорфа.

Приведем еще ряд свойств расстояния Хаусдорфа в следующем упражнении.

Упражнение 2.10. Докажите следующие утверждения для произвольного метрического пространства X.

(1) Пусть $f\colon X\to\mathcal{H}(X)$ задано формулой $f\colon x\mapsto\{x\}$, тогда f — изометричное вложение.

(2) На семействе всех непустых ограниченных подмножеств в X расстояние Хаусдорфа является конечной псевдометрикой.

(3) Для непустых $A,B\subset X$ имеем $d_H(A,B)=d_H(A,\bar B)$.

(4) Для непустых $A,B\subset X$ имеем $d_H(A,B)=0$ тогда и только тогда, когда $\bar A=\bar B$.

(5) Если $Y\subset X$ является ε-сетью в $A\subset X$, то $d_H(A,Y)\le\varepsilon$.

Для дальнейшего нам понадобится одна техническая конструкция. Пусть $A_1,A_2,\ldots$ — последовательность подмножеств из X.

Определение 2.11. Положим

$$\operatorname{Flim\,sup}A_k=\cap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n\cup A_{n+1}\cup\cdots}$$

и назовем *верхним замкнутым пределом* последовательности A_k.

Предложение 2.12. *Имеем*

$$\operatorname{Flim\,sup}A_k=\bigl\{x\in X : \forall\varepsilon>0\ \text{выполняется}\ \#\{k : U_\varepsilon(x)\cap A_k\ne\emptyset\}=\infty\bigr\}.$$

Доказательство. Положим $A=\operatorname{Flim\,sup}A_k$.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $x\in A$, тогда x является точкой прикосновения множества $\cup_{k=n}^{\infty}A_k$ при каждом $n\in\mathbb{N}$, поэтому это множество пересекает $U_\varepsilon(x)$ и, значит, для некоторого $k\ge n$ имеем $A_k\cap U_\varepsilon(x)\ne\emptyset$. Отсюда вытекает, что $\#\{k : U_\varepsilon(x)\cap A_k\ne\emptyset\}=\infty$.

Обратно, предположим, что при каждом $\varepsilon>0$ выполняется $\#\{k : U_\varepsilon(x)\cap A_k\ne\emptyset\}=\infty$. Тогда при каждом $n\in\mathbb{N}$ имеем $U_\varepsilon(x)\cap\bigl(\cup_{k=n}^{\infty}A_k\bigr)\ne\emptyset$, так что x является точкой прикосновения каждого множества $\cup_{k=n}^{\infty}A_k$ и, поэтому, принадлежит A. □

Следующая теорема утверждает, что свойства, определяющие компактность, наследуются при переходе от X к $\mathcal{H}(X)$.

Теорема 2.13. *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Тогда следующие свойства одновременно присутствуют или нет у X и $\mathcal{H}(X)$:*

(1) *полнота (Хан 1932),*

(2) *полная ограниченность,*

(3) *компактность (Хаусдорф, Бляшке).*

Доказательство. (1) Пусть сначала X — полное. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H}(X)$ и положим $A = \operatorname{Flim\,sup} A_k$. Тогда полнота $\mathcal{H}(X)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.14. *Имеем $A \in \mathcal{H}(X)$ и $A_n \to A$.*

Доказательство. Проверим сначала, что $A \neq \emptyset$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность A_k фундаментальна, в ней существует подпоследовательность $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ такая, что $d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^{k+1}$. Выберем произвольное $a_1 \in A_{n_1}$. Тогда существует такое $a_2 \in A_{n_2}$, что $|a_1a_2| < \varepsilon/2^2$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такую, что $|a_ka_{k+1}| < \varepsilon/2^{k+1}$. Но, по неравенству треугольника, эта последовательность фундаментальна, поэтому, в силу полноты пространства X, она сходится к некоторому $a \in X$, причем $|aa_k| \leq \varepsilon/2^k < \varepsilon/2^{k-1}$. Теперь возьмем произвольное $\delta > 0$ и выберем p такое, что $\varepsilon/2^p < \delta$. Тогда для любого $k \geq p$ выполняется $a_k \in U_\delta(a) \cap A_{n_k}$. Итак, мы показали, что при каждом $\delta > 0$ множество $\{k : U_\delta(a) \cap A_k \neq \emptyset\}$ бесконечно, следовательно, по 2.12, имеем $a \in A$.

Далее, A замкнуто, так как является пересечением замкнутых множеств.

Заметим, что когда выше мы строили последовательность $a_1, a_2, \ldots$, мы начинали с произвольного $a_1 \in A_{n_1}$. В результате мы получили $a \in A$ такое, что $|a_1a| < \varepsilon$. Тем самым, мы за одно выяснили следующую вещь: для любого $\varepsilon > 0$ существует n такой, что $A_n \subset U_\varepsilon(A)$. Учитывая также, что последовательность A_k фундаментальна, мы можем выбрать n, для которого одновременно $A_n \subset U_{\varepsilon/2}(A)$ и при всех $k \geq n$ выполняется $A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_n)$. Объединим эти два включения и получим следующее заключение: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что при каждом $k \geq n$ выполняется

$$A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_n) \subset U_{\varepsilon/2}\big(U_{\varepsilon/2}(A)\big) \subset U_\varepsilon(A).$$

Наконец, подобные рассмотрения приводят и к обратному неравенству. А именно, фиксируем ε и найдем такое n, что при всех $k \geq n$ выполняется $d_H(A_k, A_n) < \varepsilon/2$. Так как для каждого $a \in A$ окрестность $U_{\varepsilon/2}(a)$ пересекает бесконечное число A_k, для каждого такого k имеем

$$a \in U_{\varepsilon/2}(A_k) \subset U_{\varepsilon/2}\big(U_{\varepsilon/2}(A_n)\big) \subset U_\varepsilon(A_n),$$

т.е. $A \subset U_\varepsilon(A_n)$. Вновь, из фундаментальности последовательности A_k вытекает, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует n такое, для которого при всех $k \geq n$ выполняется $A \subset U_\varepsilon(A_k)$. Отсюда делаем сразу два вывода: (1) множество A ограничено, так как каждое A_k такое, и (2) $d_H(A_k, A) \to 0$, т.е. последовательность $A_1, A_2, \ldots$ сходится к A и, значит, $\mathcal{H}(X)$ — полное пространство.

Обратно, пусть $\mathcal{H}(X)$ полно. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек из X и построим по ней последовательность $A_i = \{x_i\} \in \mathcal{H}(X)$. По 2.10 (1), последовательность $A_1, A_2, \ldots$ также фундаментальна, поэтому $A_k \to A \in \mathcal{H}(X)$. Но тогда $\operatorname{diam} A = 0$, т.е. $A = \{a\}$, так что a является пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots$, поэтому X полно. $\square$

(2) Пусть X — вполне ограничено. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и конечную ε-сеть $Y \subset X$. Тогда множество $\mathcal{P}(Y)$, состоящее из всех непустых подмножеств Y, будет ε-сетью в $\mathcal{H}(X)$ (проверьте).

Обратно, если $\mathcal{H}(X)$ вполне ограничено и $\mathcal{Y}$ — конечная ε-сеть в $\mathcal{H}(X)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то множество Z, полученное из $\mathcal{Y}$ выбором в каждом $Y \in \mathcal{Y}$ по произвольной точке, будет ε-сетью в X (докажите).

(3) Это следует из предыдущих пунктов и 2.1 (9). $\square$

Конструкцию замкнутого верхнего предела можно распространить следующим образом.

Определение 2.15. Положим

$$\operatorname{Flim\,inf} A_k = \big\{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ выполняется } \#\{k : U_\varepsilon(x) \cap A_k = \emptyset\} < \infty\big\}$$

и назовем *нижним замкнутым пределом* последовательности A_k.

Если у последовательности $A_1, A_2, \ldots$ одновременно существуют верхний и нижний замкнутый пределы и эти пределы равны, то говорят, что у последовательности $A_1, A_2, \ldots$ существует *замкнутый предел*, который обозначают через $\operatorname{Flim} A_k$.

Упражнение 2.16. Пусть $A_k, A \in \mathcal{H}(X)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

(1) Если $A_k \to A$, то $A = \{a : a_k \to a,\ a_k \in A_k \text{ при всех } k\}$.

(2) Пусть $A_k = \{a_k\}$ при всех k. Тогда последовательность A_k сходится, если и только если сходится последовательность a_k. При этом, если $a_k \to a$, то $A_k \to \{a\}$.

(3) Если $A_k \to A$, то существует $\operatorname{Flim} A_k$ и $A = \operatorname{Flim} A_k$.

(4) Если $A_k \to A$ и при всех k имеем $A_k \supset A_{k+1}$, то $A = \cap_k A_k$.

(5) Если все A_k компактны, и при всех k выполняется $A_k \supset A_{k+1}$, то $A_k \to \cap_k A_k =: A$, причем A — непустой компакт.

(6) Если $A_k \to A$ и при всех k имеем $A_k \subset A_{k+1}$, то $A = \overline{\cup_k A_k}$.

(7) Если при всех k выполняется $A_k \subset A_{k+1}$, и множество $A = \overline{\cup_{k=1}^\infty A_k}$ является компактом, то все A_k также компактны и $A_k \to A$.

(8) Пусть X компактно. Тогда

   (a) если $A := \operatorname{Flim} A_k$ существует, то $A_k \to A$ (если отказаться от условия компактности X, то это утверждение перестает быть верным; приведите пример);

   (b) если при всех k выполняется $A_k \supset A_{k+1}$, то $A := \cap_k A_k \in \mathcal{H}(X)$ и $A_k \to A$;

   (c) если при всех k выполняется $A_k \subset A_{k+1}$, то $A := \overline{\cup_{k=1}^\infty A_k} \in \mathcal{H}(X)$ и $A_k \to A$.

(9) Если $X = \mathbb{R}^n$, все A_k выпуклы, и $A_k \to A$, то A выпукло. Таким образом, множество $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ замкнуто в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. В частности, если $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый компакт, то пространство $\mathcal{H}_c(X)$ выпуклых компактных подмножеств X компактно; иными словами, в любой последовательности выпуклых компактов, содержащихся в X, существует подпоследовательность, сходящаяся к выпуклому компакту, также лежащему в X (теорема Бляшке).