Лекция 1

Метрические пространства. Определения и примеры.

Всюду ниже мы будем называть *расстоянием* на множестве X каждую неотрицательную симметричную функцию d от пар точек из X, равную нулю на одинаковых точках: $d\colon X\times X\to[0,\infty]$, $d(x,y)=d(y,x)$, $d(x,x)=0$ для любых $x,y,\in X$. Если дополнительно известно, что выполняется *неравенство треугольника* $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ для любых $x,y,z\in X$, то d будем называть *псевдометрикой* или *полуметрикой*. Если, в дополнении к неравенству треугольника, функция d *невырождена*, т.е. условие $d(x,y)=0$ влечет $x=y$ для любых $x,y\in X$, то такая d называется *метрикой*. Пара (X,d), где d — метрика (псевдометрика), называется *метрическим* (*псевдометрическим*) *пространством*. В дальнейшем, для упрощения изложения, мы будем называть метрическим (псевдометрическим) пространством само множество X, неявно предполагая, что на нем задана функция расстояния, удовлетворяющая соответствующим свойствам. Кроме того, если мы захотим подчеркнуть, что расстояние всюду отлично от ∞, то к его названию будем добавлять слово “конечный”, например, конечная метрика или конечная псевдометрика.

Замечание 1.1. Если d — псевдометрика, то отношение ν, заданное условием $d(x,y)=0$, является эквивалентностью (проверьте). Более того, для любых $x,y,x',y'\in X$, $x\nu x'$, $y\nu y'$, имеем $d(x,y)=d(x',y')$, поэтому, если $[x]$ обозначает класс эквивалентности ν, содержащий x, то функция $d_\nu\colon X/\nu\times X/\nu\to[0,\infty]$, $d_\nu\big([x],[y]\big)=d(x,y)$, корректно определена (не зависит от выбора представителей классов эквивалентности) и задает метрику на X/ν.

Замечание 1.2. Если $d\colon X\times X\to[0,\infty]$ — псевдометрика, то отношение ν, заданное условием $d(x,y)<\infty$, также является эквивалентностью (проверьте). При этом, ограничение d на каждый класс эквивалентности представляет собой конечную псевдометрику, а расстояние между точками, попавшими в различные классы, равно ∞.

Замечание 1.3. Там, где это не приводит к путанице, мы будем обозначать расстояние между точками x и y через $|xy|$, не указывая имя конкретной функции расстояния. Это позволит пользоваться единообразными обозначениями даже в случае, когда у нас имеется несколько различных пространств.

Приведем некоторые примеры псевдометрик и метрик.

Пример 1.4.

(1) Простейший пример псевдометрики задается условием $|xy|=0$ для всех x,y.

(2) Простейший пример метрики задается условием $|xy|=\mathrm{const}>0$ для всех $x\ne y$. Отметим, что const может равняться ∞.

(3) Если $\|\cdot\|$ — норма на некотором векторном пространстве, то функция $|xy|=\|x-y\|$ является метрикой. Если же $\|\cdot\|$ — полунорма, т.е. допускается $\|x\|=0$ для ненулевых векторов x, то функция $|xy|=\|x-y\|$ задает псевдометрику.

(4) Если $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение на векторном пространстве, то функция $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ является нормой. Таким образом, соответствующее расстояние можно считать порожденным этим скалярным произведением. Полученное расстояние называется *евклидовым*, соответствующим $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если отказаться от

условия невырожденности, т.е. допускать $\langle x,x\rangle = 0$ для ненулевых векторов x, то функция $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ будет полунормой.

Имеется хорошо известный критерий того, когда норма порождается скалярным произведением. Соответствующее условие состоит в том, что для любых двух векторов a и b должно выполняться равенство $2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2$, т.е. сумма квадратов длин всех четырех сторон параллелограмма $(0, a, a+b, b)$ равна сумме квадратов длин его диагоналей (докажите этот критерий).

(5) Важный частный случай нормы на $\mathbb{R}^n$ задается следующей формулой. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $1 \le p \le \infty$, тогда положим

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} & \text{при } p < \infty, \\ \sup_{1\le k\le n} |x_k| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $|\cdot|_p$ является нормой (сделайте это). Кроме того, норма $\|\cdot\|_2$ порождается скалярным произведением $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, причем это — единственная из всех норм $\|\cdot\|_p$, которая порождается таким образом, что вытекает из 1.4 (4).

(6) Норма из пункта (5) обобщается на пространство вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, если в предыдущих формулах заменить n на ∞. Однако теперь $\|x\|_p$ может равняться ∞. Чтобы получить стандартное нормированное пространство, для каждого фиксированного p в качестве X возьмем множество всех последовательностей x, для которых $\|x\|_p < \infty$. Полученное нормированное векторное пространство часто обозначается через ℓ^p. Легко проверяется, что $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$ при $p \le q$. Расстояние в ℓ^p, соответствующее норме $\|x\|_p$, будем обозначать через ℓ_p.

(7) Пространство размерности n можно рассматривать как множество всех отображений вида $v\colon \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$ с поточечным сложением и умножением на числа; пространство всех вещественных последовательностей — это множество отображений вида $v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Общая конструкция состоит в том, что рассматривается произвольное множество X и семейство $F(X)$ всех отображений $f\colon X \to \mathbb{R}$; линейная структура опять задается поточечным сложением и умножением на числа. На $F(X)$ можно снова ввести функцию $\|\cdot\|_p$. Для этого нужно обобщить понятие суммы на произвольное, не обязательно счетное, множество элементов. Мы сделаем это лишь в интересующем нас случае неотрицательных чисел и ∞.

Итак, пусть $\varphi\colon X \to [0,\infty]$ — произвольная (неотрицательная) функция, заданная на некотором множестве X. Определим (вообще говоря, бесконечную) сумму $\sum_X \varphi = \sum_{x\in X} \varphi(x)$ индуктивным образом: (1) если $X = \emptyset$, то $\sum_X \varphi = 0$; (2) если X — непустое конечное множество, то $\sum_X \varphi$ — стандартная сумма чисел $\varphi(x)$; (3) если X бесконечно, то $\sum_X \varphi = \sup_K \sum_K \varphi$, где супремум берется по всех конечным подмножествам множества X. Полезно иметь в виду, что если функция φ положительна на несчетном подмножестве в X, то $\sum_{x\in X} \varphi(x) = \infty$ (покажите это). Таким образом, это определение не уводит нас далеко от хорошо известного в матанализе определения ряда.

Итак, с учетом данного выше определения $\sum_X \varphi$, мы можем теперь задать $\|\cdot\|_p$ и для функций из $F(X)$. Если положить $\ell^p(X) = \{f \in F(X) : \|f\|_p < \infty\}$, то снова получим линейное нормированное пространство и соответствующую функцию расстояния. Особую роль в дальнейшем будет играть пространство $\ell^\infty(X)$.

Отметим, что вместо $\mathbb{R}$ можно выбрать поле комплексных чисел или, более обще, любое другое поле, на котором определена норма (аналог модуля комплексного числа).

(8) Пусть A — некоторое множество, и A^* — семейство всех конечных последовательностей элементов из A, а также пустая последовательность λ. Будем интерпретировать A как *алфавит* некоторого языка. Тогда элементы из A естественно назвать *буквами*, а элементы из A^* — *словами*. *Редакторской операцией на* A^* называется преобразование слова, состоящее или в исключении одной из букв этого слова (*делеция*), или во вставке буквы в слово (*вставка*), или в замене одной буквы на другую (*замена*). Наименьшее число редакторских операций, необходимых для перехода от одного слова к другому, называется *расстоянием Левенштейна* и задает метрику на A^*. Это расстояние играет важную роль в лингвистике и биоинформатике.

(9) Пусть $\Gamma = (V,E)$ — связный простой граф (множество V может быть бесконечным). Определим на V функцию расстояния, положив ее равной длине кратчайшего (по числу ребер) пути, соединяющего данную пару вершин. Эта функция является конечной метрикой на V (проверьте). Если граф несвязный, то аналогичным образом определяется общая метрика: если вершины лежат в разных связных компонентах,

то расстояние между ними полагается равным ∞. Единообразно это можно сделать, если принять соглашение $\inf\emptyset = \infty$. Разбиение, описанное в 1.2, соответствует разложению графа на связные компоненты.

(10) Если $\Gamma = (V, E, \omega)$ — взвешенный связный простой граф с весовой функцией $\omega\colon E \to [0,\infty)$, то *длиной пути в графе* Γ называется суммарный вес ребер этого пути. Определим функцию расстояния, положив ее равной точной нижней грани весов всех путей, соединяющих данную пару вершин. Полученная функция является конечной псевдометрикой на V. Отметим, что даже если ω всюду положительна, то построенная функция расстояния не обязана быть метрикой (рассмотрите граф с положительной весовой функцией, в котором некоторая пара вершин соединяется бесконечным числом путей со стремящимися к нулю весами). Снова, если граф несвязный, то описанная конструкция приводит к общей псевдометрике.

(11) Пусть G — произвольная группа с множеством образующих S. *Граф Кэли пары* (G,S) — это взвешенный ориентированный граф $\Gamma(G,S) = (G, E, \omega\colon E \to S)$, в котором $(g,h) \in E$ тогда и только тогда, когда $h = gs$ для некоторого $s \in S$, а $\omega(g,h) = s$.

Отметим, что в геометрической теории групп множество S обычно удовлетворяет следующим свойствам: нейтральный элемент не содержится в S, и $S = S^{-1}$, т.е. если $s \in S$, то и $s^{-1} \in S$. В этом случае граф $\Gamma(G,S)$ не имеет петель, и если $(g,h) \in E$, то $(h,g) \in E$, так как $h = gs$ влечет $g = hs^{-1}$. При таких предположениях в качестве графа Кэли рассматриваемся простой граф, в котором каждая пара взаимно противоположных ориентированных ребер заменяется на одно ребро. Для такого графа Кэли конструкция 1.4 (9) определяет метрику на G, которая используется для определения скорости роста группы G.

(12) Пусть X — произвольное метрическое пространство. Для каждого $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$. Элемент $x \in X$ назовем *точкой прикосновения множества* A, если $|xA| = 0$; множество A назовем *замкнутым*, если оно содержит все своим точки прикосновения. Для произвольных непустых множеств $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \max\Big[\sup\big\{|aB| : a \in A\big\}, \sup\big\{|Ab| : b \in B\big\}\Big].$$

Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа*. Если $\mathcal{H}(X)$ обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X, то, как будет показано в дальнейшем, ограничение d_H на $\mathcal{H}(X)$ является конечной метрикой.

(13) Отображение $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *изометричным*, если оно сохраняет расстояния, т.е. для любых $x, x' \in X$ выполняется $\big|f(x)f(x')\big| = |xx'|$. Биективное изометричное отображение называется *изометрией*, а метрические пространства, между которыми существует изометрия, — *изометричными*. Отметим, что изометричное отображение всегда инъективно, поэтому является изометрией на свой образ. Изометричные отображения также называются *изометричными вложениями*.

Тройку (Z, X', Y'), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', назовем *реализацией пары* (X,Y) *метрических пространств*, если X' изометрично X, а Y' изометрично Y. Точная нижняя грань чисел d, для которых существует реализация (Z, X', Y') пары (X,Y) такая, что $d_H(X',Y') < d$, называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами* X *и* Y и обозначается через $d_{GH}(X,Y)$. Расстояние Громова–Хаусдорфа было определено Д. Эдвардсом [3], а затем переоткрыто и обобщено М. Громовым [4], [5]. Так как работа [3] мало известна даже специалистам и редко цитируется (см. например [6], [7], [8]), мы в лекции 7 вкратце расскажем о ее содержании.

Очевидно, что для изометричных пространств X и Y выполняется $d_{GH}(X,Y) = 0$. Обратное утверждение неверно, например, если $X = [0,1]$, а $Y = [0,1)$, то $d_{GH}(X,Y) = 0$, однако эти пространства неизометричны (проверьте).

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии (другими словами, множество классов изометрии компактных метрических пространств). Несложно проверяется, что это множество континуально. Кроме того, как будет показано ниже, расстояние d_{GH} является конечной метрикой на $\mathcal{M}$. Метрическое пространство $(\mathcal{M}, d_{GH})$ называется *пространством Громова–Хаусдорфа*.

Огромная коллекция метрических пространств собрана в книге [1].

Приведем теперь ряд примеров, демонстрирующих, как из одних метрических пространств можно получать другие.

Пример 1.5.

Умножение метрики на число. Если d — функция расстояния на множестве X, то для каждого вещественного $\lambda > 0$ функция $\lambda\, d$ также является расстоянием на X; при этом, если d была метрикой (псевдометрикой), то $\lambda\, d$ будет иметь тот же тип. Соответствующее пространство мы будем обозначать через $\lambda\, X$.

Прибавление константы. Пусть d — функция расстояния на X. Определим аналог символов Кронекера для $x, y \in X$, положив $\delta_{xy} = 0$ при любых $x \neq y$ и $\delta_{xx} = 1$ при любом x. Тогда при каждом вещественном $c > 0$ функция $(d+c)(x, y) = d(x, y) + c\,(1-\delta_{xy})$ является расстоянием. При этом, если d — псевдометрика, то $d+c$ — метрика. Отметим, что эта конструкция может быть распространена и на некоторые отрицательные числа c (разберитесь, в чем здесь дело; кроме того, выясните, какие еще функции можно применять к метрике, чтобы она осталась метрикой).

Индуцированное расстояние. Фактически, мы уже неявно пользовались этой очевидной конструкцией. Пусть d — функция расстояния на множестве X, а Y — непустое подмножество X. Определим на Y функцию расстояния, положив $|yy'| = d(y, y')$ для любых $y, y' \in Y$, и назовем ее *индуцированной из* d или являющейся *ограничением* d *на* Y. Отметим, что ограничение метрики (псевдометрики) всегда является метрикой (псевдометрикой). В дальнейшем, говоря про функцию расстояния на подмножестве, мы всегда, если не оговорено противное, будем иметь в виду именно индуцированное расстояние.

Несвязное объединение. Пусть d_i — функция расстояния на X_i, $i \in I$, где I — некоторое множество индексов. Определим на $\sqcup_{i\in I} X_i$ функцию расстояния, положив ее ограничение на X_i равным d_i, а на парах точек, принадлежащих разным X_i, — равным бесконечности. Полученная функция расстояния называется *расстоянием на несвязном объединении*, а само пространство $\sqcup_{i\in I} X_i$ — *несвязным объединением* X_i.

Произведение. Пусть d_i — функция расстояния на X_i, $i \in I$, где I — некоторое множество индексов. Положим $X = \prod_{i\in I} X_i$. Отметим, что, по определению, X равно множеству всех отображений $x\colon I \to \sqcup_{i\in I} X_i$ таких, что $x(i) \in X_i$ при каждом $i \in I$. В частности, если все X_i равны одному и тому же пространству Y, то $X = Y^I$, где последнее, напомним, обозначает множество всех отображений из I в Y.

Рассмотрим множество $[0,\infty]^I$. Тогда для любых двух точек $x, x' \in X$ функцию $d_I(x, x')\colon I \to [0,\infty]$, определенную правилом $d_I(x, x')(i) = d_i\big(x(i), x'(i)\big)$, можно рассматривать как элемент из $[0,\infty]^I$. Пусть теперь $\rho\colon [0,\infty]^I \to [0,\infty]$ — произвольная функция, тогда ρ порождает на X функцию расстояния d_ρ следующим образом: $d_\rho(x, x') = \rho\big(d_I(x, x')\big)$. Функцию ρ иногда называют *связующей*, а функцию d_ρ — расстоянием, порожденным ρ; при этом пространство X с функцией расстояния d_ρ называется *полупрямым произведением пространств* X_i *со связующей функцией* ρ. Для конечных функций расстояния d_i имеют место те же построения, но с заменой $[0,\infty]$ на $[0,\infty)$.

Отметим, что $[0,\infty)^I$ является подмножеством векторного пространства $F(I)$ всех вещественных функций на I, определенного в 1.4 (7). Важным частным случаем функции ρ является ограничение некоторой нормы, заданной на $F(I)$. Так, если в качестве ρ выбрать $\|\cdot\|_2$, то соответствующее расстояние на X будет метрикой, которая называется *метрикой прямого произведения*, а само X — прямым произведением пространств X_i.

Отметим, что существует еще много других операций, строящих из одних метрических пространств другие, например, операция факторицазии по некоторому отношению эквивалентности и порожденные ей различные склейки метрических пространств; кроме того, имеются различные пределы (проективные и инъективные), а также предел по расстоянию Громова–Хаусдорфа.